

บทที่ 3

ธรรมชาติเชิงกลื่นของอนุภาค

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 3 แล้ว นักศึกษาสามารถ

- 1) อธิบายสมมติฐานของเดอบรอยล์ได้
- 2) พิสูจน์สมการของแบรกก์ได้
- 3) อธิบายการทดลองที่สนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์ได้
- 4) แสดงความคิดเห็นในการสรุปว่า อนุภาคสามารถแสดงสมบัติคลื่นได้
- 5) บอกลักษณะของคลื่นอนุภาคได้
- 6) อธิบายหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์กและหลักแห่งการเติมเต็มของบอร์ได้
- 7) ทำแบบฝึกหัดได้อย่างน้อย 6 ข้อ

3.1 คลื่นเดอบรอยล์

การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีสองลักษณะ คือ ในรูปแบบของคลื่นและรูปแบบของอนุภาคปรากฏการณ์การแทรกสอดและการเลี้ยวเบนแสดงถึงธรรมชาติเชิงคลื่นของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า แต่ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกและปรากฏการณ์คอมป์ตันแสดงถึงธรรมชาติเชิงอนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (ดูรายละเอียดได้จากบทที่ 2) ธรรมชาติสองนัย คลื่นและอนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นที่ยอมรับกันตั้งแต่ปี ค.ศ. 1905 จากสมมติฐานทางควอนตัม และทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะสำหรับโฟตอน

$$E = hv \quad (3.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (3.2)$$

ทางซ้ายมือของสมการข้างต้นทั้งสอง คือ E และ p เป็นลักษณะเฉพาะของอนุภาค ทางขวามือคือ v และ λ เป็นลักษณะเฉพาะของคลื่น ปริมาณทั้งสองเซตนี้เกี่ยวข้องกับกันผ่านค่าคงที่ของพลังค์ h ดังนั้นธรรมชาติสองนัยคลื่น-อนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงได้ด้วยความสัมพันธ์ตามสมการทั้งสองข้างต้น

อนุภาคสสารจะแสดงธรรมชาติสองนัยได้เช่นเดียวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือไม่ ในปี ค.ศ. 1924 เดอบรอยล์ (de Broglie) ได้เสนอแนวความคิดว่า อนุภาคสสารใด ๆ เมื่อเคลื่อนที่ด้วยโมเมนตัม p จะมีคลื่นที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้โดยที่ความยาวคลื่น λ ขึ้นกับโมเมนตัมของอนุภาค ดังสมการ

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.3)$$

สมการข้างต้นเรียกความสัมพันธ์ของเดอบรอยล์ การพิสูจน์ว่าอนุภาคสสารมีธรรมชาติเชิงคลื่นตามแนวความคิดของเดอบรอยล์นั้นเราต้องทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคสสารนี้แสดงปรากฏการณ์การแทรกสอดและการเลี้ยวเบนได้

ในปี ค.ศ. 1897 เจ.เจ.ทอมสัน (J.J.Thomson) ได้ค้นพบอิเล็กตรอน และพบว่าอิเล็กตรอนมีอัตราส่วนระหว่างประจุและมวลที่แน่นอน (กรณี $v \ll c$) นอกจากนี้มีมวล, โมเมนตัม พลังงาน และสามารถจำกัดบริเวณได้ ดังนั้นอิเล็กตรอนจึงแสดงคุณสมบัติของอนุภาค ต่อมาในปี ค.ศ. 1927 ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ (Davisson & Jermer) ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอน ซึ่งแสดงถึงธรรมชาติเชิงคลื่นของอิเล็กตรอนและเป็นการทดลองที่สนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์ (รายละเอียดเกี่ยวกับการทดลองของดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์จะกล่าวในหัวข้อต่อไป) ดังนั้นอิเล็กตรอน (ซึ่งเป็นอนุภาคสสาร) จึงแสดงธรรมชาติสองนัยได้เช่นเดียว

กับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 3.1 จงคำนวณหาความยาวคลื่นเดอบรอยล์ที่คล้องจองกับสิ่งต่อไปนี้

- ก) ลูกกอล์ฟ มวล 50 กรัม เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 เมตร/วินาที
- ข) โปรตอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2,200 เมตร/วินาที
- ค) อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยพลังงานจลน์ 10 eV

ก) ตามสมมติฐานของเดอบรอยล์

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{จูล-วินาที}}{(0.05 \text{ กิโลกรัม}) (20 \text{ เมตร/วินาที})} \\ &= 6.625 \times 10^{-34} \text{ เมตร}\end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าน้อยมากไม่สามารถวัดได้

ข) มวลของโปรตอน คือ 1.67×10^{-27} กิโลกรัม ดังนั้นความยาวคลื่นของโปรตอน คือ

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{จูล-วินาที}}{(1.67 \times 10^{-24} \text{ กิโลกรัม}) (2,200 \text{ เมตร/วินาที})} \\ &= 1.91 \times 10^{-10} \text{ เมตร} \\ &= 1.91 \text{ \AA}\end{aligned}$$

ความยาวคลื่นนี้อยู่ในลำดับเดียวกับความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ (ข้อสังเกตเราไม่ใช่ทฤษฎีสัมพัทธภาพกับโมเมนตัมของโปรตอน เพราะพลังงานจลน์ค่านี้น้อยกว่าพลังงานมวลนิ่งของโปรตอนมาก แต่ถ้าพลังงานจลน์อยู่ในลำดับเดียวกับพลังงานมวลนิ่งเราต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพกับโมเมนตัมของโปรตอน)

ค) สำหรับอิเล็กตรอนพลังงานจลน์ 10 eV (ค่านี้น้อยกว่าพลังงานมวลนิ่งของอิเล็กตรอน 510 KeV มาก จึงไม่ใช่ทฤษฎีสัมพัทธภาพ)

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

ดังนั้น $p = \sqrt{2mT}$

จากสมมติฐานของเดอบรอยล์

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2mT}} \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ กิโลกรัม}) (10\text{eV}) (1.602 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})}} \\ &= 3.9 \times 10^{-10} \text{ เมตร} \\ &= 3.9 \text{ \AA} \end{aligned}$$

3.2 การเลี้ยวเบนของคลื่น

เมื่อคลื่นพบสิ่งกีดขวางจะเกิดการเลี้ยวเบน (diffraction) ปรากฏการณ์นี้จะเห็นชัดเมื่อสิ่งกีดขวางมีขนาดใกล้เคียงกับความยาวคลื่นนั้น สิ่งกีดขวางอาจเป็นวัตถุขนาดเล็ก เช่น ลวด ที่จะกั้นบางส่วนของคลื่นไว้ หรืออาจเป็นรูเปิดเล็ก ๆ หรือช่องแคบที่จะปล่อยให้คลื่นผ่าน ในกรณีของแสงช่วงที่มองเห็นได้อาจใช้เกรตติงเลี้ยวเบน (diffraction grating) ทำหน้าที่เป็นช่องแคบ ถ้าให้ลำแสงตกตั้งฉากกับเกรตติงเลี้ยวเบน เงื่อนไขสำหรับการเลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นแล้ว มีความเข้มมาก กำหนดโดย

$$d \sin \theta = n\lambda \quad (3.4)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ เป็นลำดับของการเลี้ยวเบนที่มีความเข้มแสงมาก

λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบ

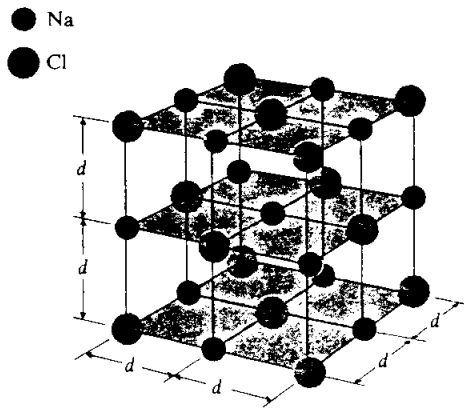
θ เป็นมุมการเลี้ยวเบน

และ d คือระยะระหว่างรอยขีด (เส้น) บนเกรตติง (เช่นเกรตติง 12,000 เส้นต่อเซนติเมตร

$$d = 1/12,000 \text{ ซม.})$$

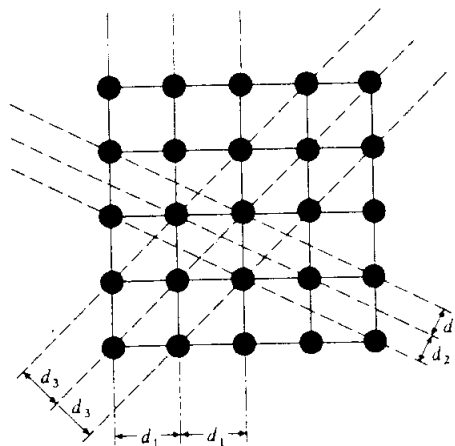
จากสมการ (3.4) ถ้า $n = 1$, $\sin \theta = \lambda/d$ แสดงว่า การเลี้ยวเบนจะเกิดขึ้นเมื่อ d อยู่ในลำดับเดียวกับ λ ถ้า $d \gg \lambda$, $\sin \theta \approx 0$ และ $\theta \approx 0^\circ$ กรณีนี้จะไม่เห็นลวดลายการเลี้ยวเบน

พิจารณาการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ ซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นอยู่ในช่วง 0.1 \AA และ 100 \AA ในกรณีนี้ไม่สามารถใช้เกรตติงได้เนื่องจาก λ มีค่าน้อยกว่า d มาก ในปี ค.ศ. 1912 เลอวี (Laue) ได้เสนอว่า ผลึกของของแข็งที่อะตอมเรียงตัวเป็นระเบียบและอยู่ห่างกัน $2\text{-}3 \text{ \AA}$ สามารถใช้เป็นเกรตติง 3 มิติ สำหรับการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ได้ รูป



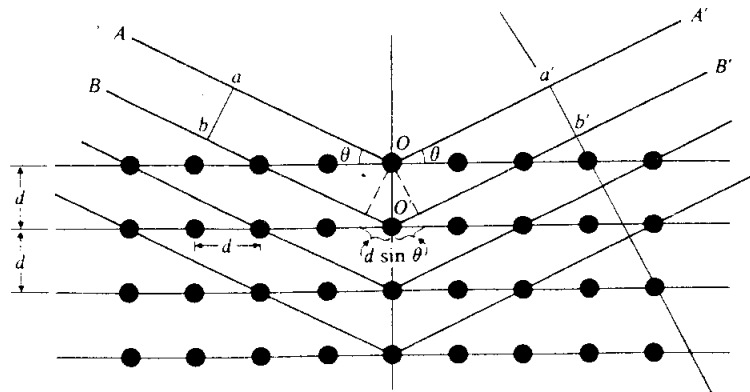
รูป 3.1 แสดงผลึกเดี่ยวของ NaCl

3.1 แสดงโครงสร้างของผลึกเดี่ยวของโซเดียมคลอไรด์ โดยที่ไอออน Na^+ และ Cl^- เรียงตัวแบบแลตทิซรูปลูกบาศก์อย่างง่าย (simple cubic lattice) ที่มีตำแหน่งสลับกันห่างกันเป็นระยะ d เราสามารถกำหนดกลุ่มของอะตอมที่อยู่ในระนาบที่ขนานกัน ซึ่งเรียกว่าระนาบแบรกก์ (Bragg plane) ขึ้นมาได้ รูป 3.2 แสดงระนาบแบรกก์ที่กำหนดขึ้นมาสามระนาบ



รูป 3.2 เส้นขนานที่ลากผ่านอะตอมกำหนดว่าเป็นระนาบแบรกก์ ในที่นี้แสดงระนาบแบรกก์ 3 ระนาบ เพื่อความเข้าใจการเกิดการเลี้ยวเบน ให้เราพิจารณาชั้นของอะตอมในระนาบหนึ่งของผลึกดังแสดงในรูป 3.3 เมื่อลำรังสีเอกซ์ความถี่เดี่ยวที่มีความยาวคลื่น λ ตกกระทบบนผลึกนี้ แต่ละอะตอมจะกระเจิงลำรังสีตกกระทบส่วนหนึ่งเพียงเล็กน้อย ในลักษณะของคลื่นทรงกลมเฟสของรังสีที่ถูกกระเจิงนี้ ถูกกำหนดโดยตำแหน่งของอะตอมเหล่านั้น ในทิศทางที่แน่นอน

ทิศหนึ่งของรังสีที่ถูกกระเจิงนี้มีการแทรกสอดแบบเสริมกัน ขณะที่อีกทิศหนึ่งมีการแทรกสอดแบบหักล้างกัน ซึ่งทำให้เกิดลวดลายการเลี้ยวเบนขึ้น



รูป 3.3 การเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ จากชั้นของอะตอมในระนาบหนึ่งของผลึก

แบรกก์ (Bragg) นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษได้หาเงื่อนไขสำหรับการแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุด ดังนี้

พิจารณารังสีตกกระทบสองรังสีที่กระเจิงจากอะตอมต่างกันสองอะตอมในระนาบหนึ่ง (ดูรูป 3.3) รังสีที่ถูกกระเจิงนี้ถ้ามีเฟสเดียวกันจะทำให้เกิดการแทรกสอดแบบเสริมกัน ดังนั้นแนวทาง (path) AOA' และ BOB' ของรังสีสองลำ ต้องต่างกันเป็นจำนวนเต็มเท่าของ λ นั่นคือ

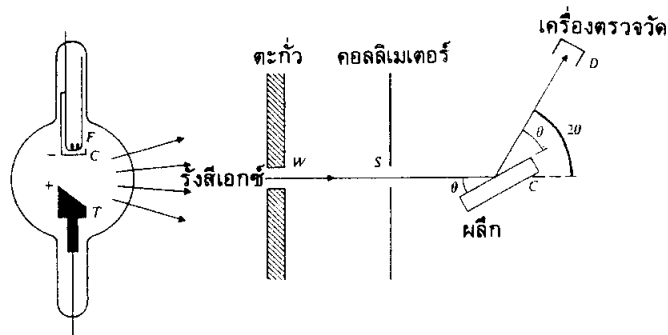
$$BOB' - AOA' = n\lambda \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จากรูป 3.3 ความแตกต่างของแนวทางเดิน คือ

$$BOB' - AOA' = 2d \sin \theta$$

ดังนั้น $2d \sin \theta = n\lambda$ (3.5)

เงื่อนไขของแบรกก์ สำหรับรังสีทั้งสองที่มีเฟสเดียวกันและทำให้เกิดการแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุด คือสมการข้างต้น ซึ่งเรียกว่าสมการของแบรกก์



รูป 3.4 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์

รูป 3.4 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองของสเปกโตรมิเตอร์ ผลึกรังสีเอกซ์ (x-ray crystal spectrometer) ลำรังสีเอกซ์จากหลอดรังสี หลังจากผ่านคอลลิเมเตอร์ (collimator) ที่ทำด้วยตะกั่ว (W) และช่องแคบ (S) แล้วจะตกกระทบบนผลึก C ลำรังสีที่ถูกกระเจิงถูกวัดด้วยเครื่องตรวจจับ (detector) D ซึ่งอาจใช้ไอออนไนซ์เซชันแชมเบอร์ (ionization chamber) การศึกษาผลของการเลี้ยวเบนจากระนาบแบรกก์ต่าง ๆ กันนั้นสามารถใช้หาโครงสร้างของผลึกได้

ตัวอย่างที่ 3.2 วิธีที่ละเอียดวิธีหนึ่งในการหาค่าเลขอาโวกาโดร N_A คือการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์จากเกรตติงผลึก (crystal grating) รังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 1.3922 \AA ถูกกระเจิงจากผลึก NaCl ลำดับแรกของการแทรกสอดแบบเสริมกันวัดได้ที่มุม $14^\circ 17' 26''$ จากข้อมูลเหล่านี้จึงคำนวณหา lattice spacing และเลขอาโวกาโดร เมื่อน้ำหนักโมเลกุลของ NaCl คือ 58.454 และความหนาแน่นคือ 2.163 กรัม/ซม.^3

วิธีทำ จากสมการ (3.5) สำหรับ $n = 1$

$$\begin{aligned} d &= \lambda / 2 \sin \theta \\ &= \frac{1.3922 \text{ \AA}}{2 \sin (14^\circ 17' 26'')} \\ &= \frac{1.3922}{2(0.2468)} \\ &= 2.820 \text{ \AA} \end{aligned}$$

lattice spacing มีค่าเท่ากับ 2.820 \AA

ให้ n เป็นจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ซึ่งกำหนดโดย

$$n = \frac{\rho N_A}{M}$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่น และ M คือน้ำหนักโมเลกุล

ถ้า lattice spacing ในผลึกรูปลูกบาศก์ เช่น NaCl คือ d ดังนั้นปริมาตรที่มีแต่ละไอออนอยู่ คือ d^3 และจำนวนไอออนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร คือ $1/d^3$ เนื่องจากในแต่ละโมเลกุลมี 2 ไอออน (Na^+ และ Cl^-) ดังนั้น

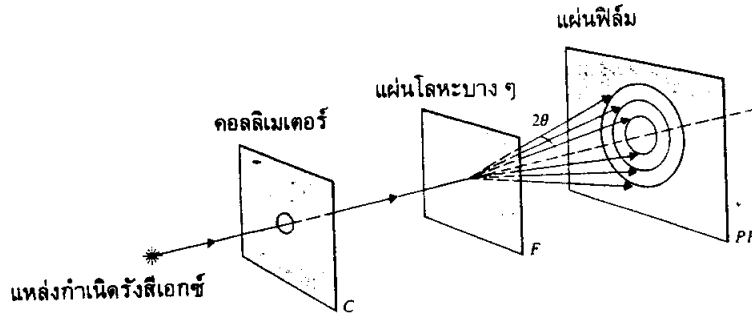
$$\frac{2 \rho N_A}{M} = \frac{1}{d^3}$$

$$N_A = \frac{M}{2\rho d^3}$$

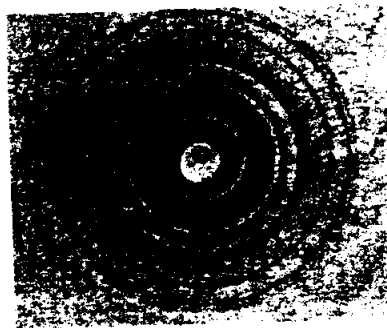
$$= \frac{58.454 \text{ กรัม/โมล}}{2(2.163 \text{ กรัม/ซม.}^3)(2.830 \times 10^{-8} \text{ ซม.})^3}$$

$$= 6.02 \times 10^{23} \text{ อะตอม/โมล}$$

เลขอาโวกาโดร N_A เท่ากับ 6.02×10^{23}



รูป 3.5 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองสำหรับสังเกตการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์จากแผ่นโลหะบาง ๆ
 พิจารณาลวดลายการเลี้ยวเบนที่ได้จากแผ่นโลหะบาง ๆ (thin metallic foil) แทนที่จะเป็นผลึกเดี่ยว รูป 3.5 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลอง แผ่นโลหะบาง ๆ นี้ประกอบด้วยผลึกขนาดเล็ก ๆ ซึ่งเรียงตัวในลักษณะผลึกเชิงซ้อน ลำรังสีตกกระทบจะเลี้ยวเบนเฉพาะผลึกขนาดเล็ก ๆ เหล่านั้นซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของแบรกก์ ลำรังสีเลี้ยวเบนจะทะลุออกมาอีกด้านหนึ่ง และมีความเข้มสูงในลักษณะผิวกรวยที่ทำมุม 2θ กับลำรังสีตกกระทบ เมื่อนำแผ่นฟิล์มวางห่างจากผลึกเป็นระยะ r จะได้วงกลมความเข้มสูงจำนวนมากบนแผ่นฟิล์ม โดยที่ความเข้มแต่ละวงนั้นจะเปลี่ยนไป รูป 3.6 เป็นตัวอย่างของลวดลายการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ที่ได้จากผลึกเชิงซ้อนของอะลูมิเนียม ลวดลายเหล่านี้เรียกลวดลายเพาเตอร์ (powder patterns) หรือ วงเดอว์บาย-เชอร์เรอร์ (Debye-Scherrer rings)



รูป 3.6 ลวดลายการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์จากผลึกเชิงซ้อนอะลูมิเนียม

3.3 การเลี้ยวเบนของอนุภาค

การทดลองเพื่อสนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์นั้นเราต้องแสดงว่าอนุภาคต่าง ๆ เช่น อิเล็กตรอน โปรตอน และนิวตรอน เหล่านี้เป็นต้น แสดงลวดลายการเลี้ยวเบนได้ เช่นเดียวกับรังสีเอกซ์ (หรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ) พิจารณากรณีอิเล็กตรอนที่ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์ V ให้ m เป็นมวลและ v เป็นความเร็วของอิเล็กตรอน ตามสมมติฐานเดอบรอยล์เราสามารถคำนวณหาความยาวคลื่น λ ของคลื่นที่คล่องจองกับการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนได้ดังนี้ (กรณีอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ)

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

จากความยาวคลื่นเดอบรอยล์ที่กำหนดโดย

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$= \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$$\text{ดังนั้น } \lambda = \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}}{[2(9.108 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ coul})(V)]^{1/2}}$$

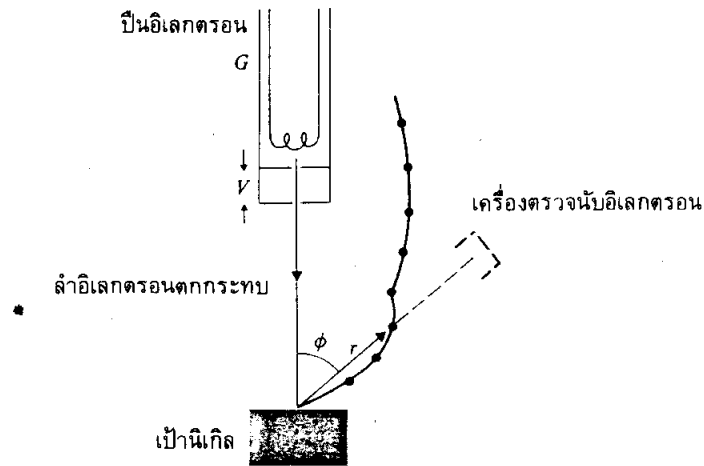
$$= \sqrt{\frac{150}{V}} \times 10^{-8} \text{ ซม.}$$

$$\text{หรือ } \lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ \AA} \quad (3.6)$$

เมื่อ V มีหน่วยเป็นโวลต์

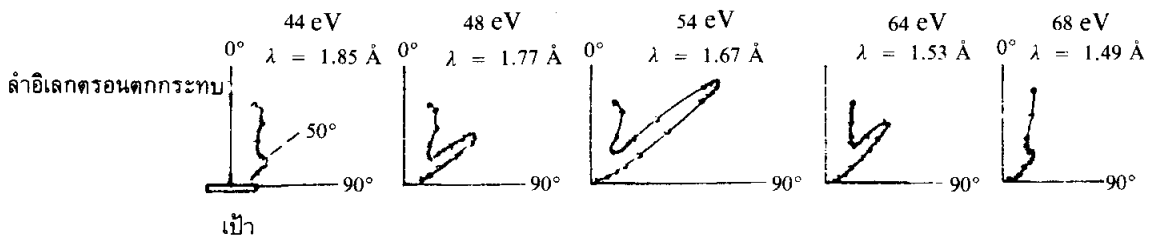
เช่นถ้า $V = 150$ โวลต์ จะได้ $\lambda = 1 \text{ \AA}$ ความยาวคลื่นค่านี้อยู่ในลำดับเดียวกับของรังสีเอกซ์ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นไปได้ที่คลื่นอิเล็กตรอนเหล่านี้จะถูกเลี้ยวเบนโดยผลึกเช่นเดียวกับรังสีเอกซ์

ในปี ค.ศ. 1927 ดาร์วิสสัน (Darvisson) และเจอร์เมอร์ (Germer) ได้ทำการทดลอง เพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่นได้ โดยใช้อุปกรณ์ดังรูป 3.7



รูป 3.7 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองของดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์

อิเล็กตรอนจากปืนอิเล็กตรอน ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์ V ผ่านช่องแคบ ๆ G ออกมา แล้วให้ลำขนานของอิเล็กตรอนนี้ตกกระทบบนผลึกนิกเกิล ซึ่งมีระยะห่างระหว่างอะตอม 2.15×10^{-8} ซม. ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ได้ทำการวัดความเข้มของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงออกมาที่มุมต่าง ๆ กันด้วยเครื่องนับอิเล็กตรอนที่เลื่อนไปมาได้ จากการทดลองพบว่าความเข้มของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง นอกจากจะขึ้นกับมุมต่าง ๆ ที่ทำการวัดแล้วยังขึ้นกับพลังงานของอิเล็กตรอนด้วย ดูรูป 3.8



รูป 3.8 แสดงมุมและความเข้มของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงออกมา

เมื่ออิเล็กตรอนมีพลังงาน 54 eV จะวัดความเข้มของอิเล็กตรอนที่กระเจิงออกมาได้มากที่สุด โดยที่มุม $\phi = 50^\circ$ ดังรูป 3.8 คลื่นอิเล็กตรอนที่กระเจิงเหล่านี้จะรวมกันและเกิดการแทรกสอด

ได้ในลักษณะเดียวกับรังสีเอกซ์ จากสมการของแบรกก์การแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ

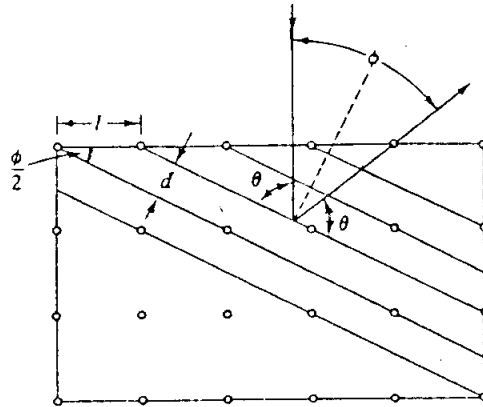
$$2d \sin \theta = n\lambda$$

λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นอิเล็กตรอน

d เป็นระยะระหว่างระนาบของอะตอมในผลึกนิเกิล

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \text{ ดังนั้น } \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) = \cos \frac{\phi}{2}$$

n เป็นจำนวนเต็มที่แสดงลำดับของการแทรกสอด



รูป 3.9 การเลี้ยวเบนของคลื่นอิเล็กตรอนโดยผลึกนิเกิล

จากรูป 3.9 ได้ $d = l \sin \frac{\phi}{2}$ เมื่อ l เป็นระยะห่างระหว่างอะตอม สมมติให้ $n = 1$ และแทนค่า d ลงในสมการของแบรกก์ จะได้

$$\lambda = 2l \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}$$

$$= l \sin \phi$$

แทนค่า $l = 2.15 \times 10^{-8}$ ซม. และ $\phi = 50^\circ$ ลงในสมการข้างต้น ได้

$$\lambda = 2.15 \times 10^{-8} \sin 50^\circ$$

$$= 1.65 \times 10^{-8} \text{ ซม.}$$

หรือ $\lambda = 1.65 \text{ \AA}$

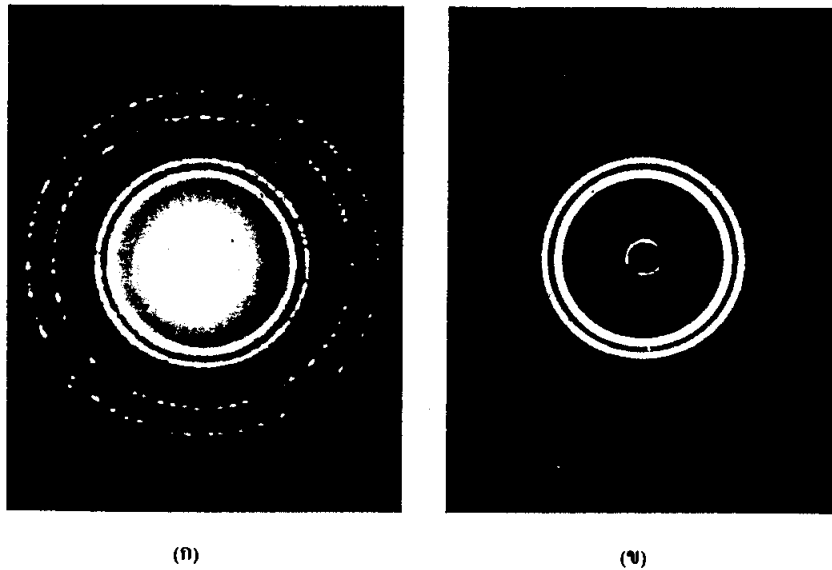
จากสมมติฐานของเดอบรอยล์ สำหรับอิเล็กตรอนพลังงาน 54 eV ความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนตามสมการ (3.6) คือ

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ \AA} \\ &= \sqrt{\frac{150}{54}} \text{ \AA}\end{aligned}$$

ได้ $\lambda = 1.67 \text{ \AA}$

ความยาวคลื่นอิเล็กตรอน คำนวณจากสองวิธีให้ค่าตรงกัน แสดงว่าอิเล็กตรอนที่เป็นอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่น ซึ่งเป็นการสนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์

ต่อมา จี.พี.ทอมสัน (G.P. Thomson) ได้ทำการทดลองแสดงให้เห็นว่าอิเล็กตรอนเมื่อตกกระทบแผ่นโลหะบาง ๆ จะทำให้เกิดลวดลายการเลี้ยวเบนได้คล้ายคลึงกับลวดลายการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์มาก ดังรูป 3.10



รูป 3.10 แสดงความคล้ายคลึงกันระหว่างการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอน (ก) และของรังสีเอกซ์ (ข) เมื่อตกกระทบแผ่นอะลูมิเนียมบาง ๆ

ภายหลังได้มีการทดลองโดยใช้อุณหภูมิอื่น ๆ เช่นนิวตรอน ปรากฏว่าได้ลวดลายการเลี้ยวเบนเช่นกัน การเลี้ยวเบนเป็นคุณสมบัติของคลื่น ดังนั้นธรรมชาติคลื่นของอนุภาคจึงมีการทดลองที่สนับสนุนเป็นอย่างดี

3.4 กลุ่มคลื่น

เนื่องจากอิเลกตรอนและอนุภาคอื่น ๆ แสดงสมบัติคลื่น เราจึงใช้ฟังก์ชันคลื่น (wave function) แทนอนุภาคได้ กรณีของคลื่นเชือก ฟังก์ชันคลื่นแทนปริมาณการขจัดของจุดต่าง ๆ โดยเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งสมดุลและเวลา สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ฟังก์ชันคลื่นแทนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงไปกับระยะทางและเวลา แต่สำหรับคลื่นอนุภาคฟังก์ชันคลื่นเป็นนามธรรม (abstract) เป็น mathematical wave

คลื่นอนุภาคมีลักษณะเป็นกลุ่มคลื่น เราอาจสร้างกลุ่มคลื่นจากการซ้อนกันของคลื่นไซน์จำนวนมาก กลุ่มคลื่นที่ได้มีความยาวคลื่นเฉพาะ และจำกัดบริเวณ (localized) ให้ Ψ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาค เพื่อความสะดวกพิจารณากรณี 1 มิติ โดยทั่ว ๆ ไปแล้วการรวมกันของคลื่นเป็นไปตามสมการ

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega t)} \quad (3.7)$$

เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นนี้เกิดจากการรวมกันของคลื่นจำนวนมาก ค่า k และ ω จะมีการกระจายต่อเนื่องกัน จะได้

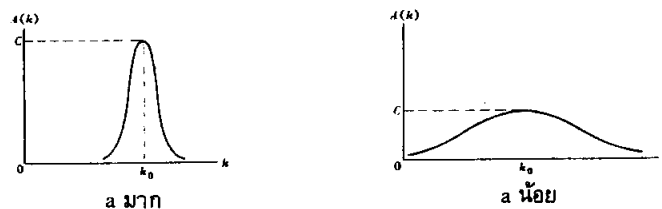
$$\Psi(x, t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (3.8)$$

$A(k)$ เป็นอัมพลิจูดของแต่ละคลื่นย่อยและเป็นฟังก์ชันของ k วิธีการรวมคลื่นไซน์จำนวนมากเข้าด้วยกัน เรียกว่าวิเคราะห์ฟูรีเยร์ (Fourier analysis) สมการ (3.7) คือ อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) และสมการ (3.8) คือ อินทิกรัลฟูรีเยร์ (Fourier integral)

พิจารณากรณีของกลุ่มคลื่นที่สร้างขึ้นมาจากการรวมกันของคลื่นไซน์จำนวนมากที่มีเลขคลื่น (wave number) k ใกล้ ๆ กับค่า k_0 สมมติ $A(k)$ เขียนได้เป็น

$$A(k) = C e^{-a^2(k-k_0)^2} \quad (3.9)$$

C เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน และ a เป็นค่าความกว้างของกราฟนี้ ถ้า a มีค่ามาก รูปร่างของฟังก์ชันจะเป็นยอดแหลม ดูรูป 3.11 ก. ถ้า a มีค่าน้อย รูปร่างของฟังก์ชันจะแผ่ออก ดูรูป 3.11 ข. ดังนั้นค่า a แสดงช่วงหรือการกระจายของค่า k ที่ใช้



รูป 3.11 กราฟของสมการ (3.9)

แทนค่าสมการ (3.9) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (3.10)$$

ที่ $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-a^2(k-k_0)^2} e^{ikx} dk \quad (3.11)$$

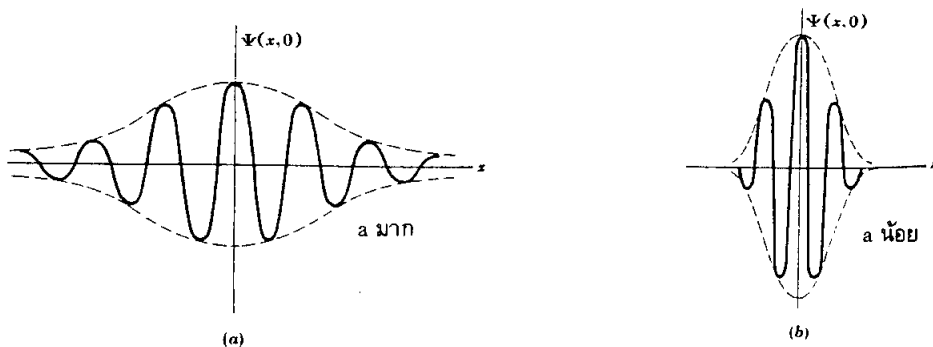
$$\Psi(x, 0) = \frac{C\sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} e^{ik_0x} \quad (3.12)$$

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของสมการข้างต้น คือ

$$\text{Re}[\Psi(x, 0)] = \frac{C\sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} \cos k_0x \quad (3.13)$$

$$\text{Im}[\Psi(x, 0)] = \frac{C\sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} \sin k_0x \quad (3.14)$$

เทอม $e^{-x^2/4a^2}$ เป็นฟังก์ชันกรอบรูป (envelope function) ของส่วนจริง (สมการ 3.13) ซึ่งแสดงดังรูป 3.12 ดังนั้นโดยการรวมคลื่นไซน์จำนวนมากที่มีเลขคลื่นใกล้ ๆ ค่า k_0 เราจะได้คลื่นดลที่มีลักษณะจำกัดบริเวณ



รูป 3.12 กราฟของสมการ (3.13) สำหรับ k_0 ค่าเดียวกันแต่ a ต่างกัน

ค่า a จะบอกความกว้างของกรอบรูป เมื่อ a มีค่าน้อย $\exp(-x^2/4a^2)$ จะเป็นลบมาก $\Psi(x, 0)$ จะเป็นยอดแหลม ดูรูป 3.12 ข. เมื่อ a มีค่ามาก กรอบรูปจะแผ่อกได้ $\Psi(x, 0)$ แผ่อกด้วย ดูรูป 3.12 ก. ดังนั้นเมื่อฟังก์ชัน $A(k)$ เป็นยอดแหลมจะได้ค่า $\Psi(x, 0)$ แผ่อก และเมื่อใช้ $A(k)$ รูปกว้างแผ่อกจะได้ $\Psi(x, 0)$ เป็นยอดแหลม

เนื่องจากอิเล็กตรอนอาจเป็นอนุภาคหรือคลื่น คุณสมบัติของคลื่นแสดงได้จากกลุ่มคลื่น โดยที่กรอบของกลุ่มคลื่นนี้มีขอบเขตจำกัด เราจะต้องแสดงว่าความเร็วของอนุภาคเป็นค่าเดียวกับความเร็วของกรอบรูปของกลุ่มคลื่น (ซึ่งคือความเร็วกลุ่มนั่นเอง) เพื่อให้ง่ายขึ้นพิจารณาการรวมกันของคลื่นไซน์สองคลื่น ที่มีอัมพลิจูดเท่ากันแต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

$$\Psi_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (3.15)$$

$$\Psi_2(x, t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t] \quad (3.16)$$

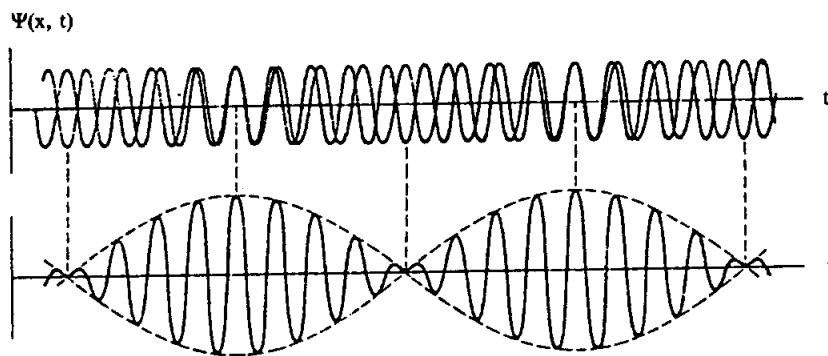
รวมคลื่นทั้งสอง จะได้

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t] \\ &= 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\left[\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] \end{aligned}$$

ให้ $k + \frac{\Delta k}{2} \approx k$ และ $\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \approx \omega$ เราได้

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\approx 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(kx - \omega t) \\ &= A_m \sin(kx - \omega t) \quad (3.17) \end{aligned}$$

สมการข้างต้นได้คลื่นที่มีความถี่เท่าเดิม ω แต่อัมพลิจูดมีค่าเปลี่ยนแปลงดังแสดงในรูป 3.13



รูป 3.13 การรวมกันของคลื่นไซน์สองคลื่นที่มีความถี่และเลขคลื่นต่างกันเล็กน้อย

กรอบของคลื่นเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วกลุ่ม v_g กำหนดโดย

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

ในกรณี ลิมิต $\Delta k \rightarrow 0$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \quad (3.18)$$

สำหรับกลุ่มคลื่นที่อธิบายได้ด้วยสมการ (3.8) สามารถคำนวณหาความเร็วกลุ่มได้เช่นเดียวกัน แต่ขั้นตอนในการคำนวณยุ่งยากกว่ากรณีง่าย ๆ นี้ และผลสุดท้ายให้ค่าเช่นเดียวกับสมการ (3.18) รายละเอียดจะไม่กล่าวถึง

จากสมมติฐานของเดอบรอยล์

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

และพลังงานของคลื่นอนุภาค คือ

$$E = hv = \frac{\hbar}{2\pi} \cdot 2\pi v = \hbar\omega$$

ดิฟเฟอเรนเชียล E เทียบกับ p จะได้

$$\frac{dE}{dp} = \hbar \frac{d\omega}{dp} = \hbar \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dp} = \frac{d\omega}{dk}$$

ดังนั้น $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$ (3.19)

จาก $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการข้างต้นเทียบกับ p ได้

$$2E \frac{dE}{dp} = 2pc^2$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$$

$$= \frac{mvc^2}{mc^2}$$

$$= v$$

นั่นคือ $v_g = v$

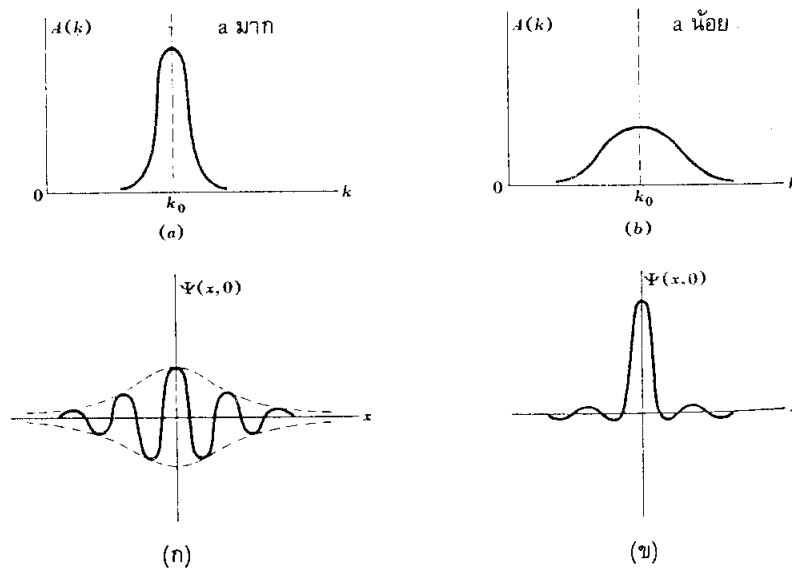
ดังนั้น ความเร็วกลุ่ม v_g ของคลื่นอนุภาค เท่ากับความเร็วอนุภาค

การอธิบายอนุภาคด้วยคลื่น เราต้องสร้างกลุ่มคลื่นจากคลื่นย่อย ๆ ที่มีค่า k ต่าง ๆ กัน เนื่องจาก $p = \hbar k$ แสดงว่าอนุภาคที่ถูกแทนด้วยกลุ่มคลื่นจะไม่มีโมเมนตัมที่แน่นอน ซึ่งแตกต่างจากกลศาสตร์ยุคเก่าเพราะเราสามารถหาค่าความเร็วและตำแหน่งของอนุภาคได้ทุกขณะ ดังนั้นเมื่อเราอธิบายอนุภาคด้วยกลุ่มคลื่น ทำให้เราไม่สามารถบอกตำแหน่งหรือโมเมนตัมที่แน่นอนของอนุภาคได้

3.5 หลักความไม่แน่นอน

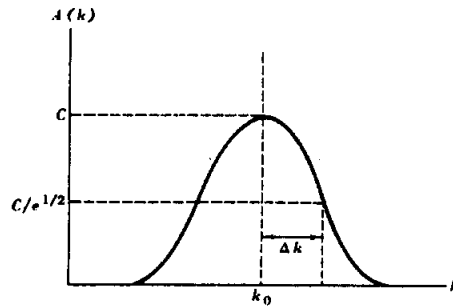
คลื่นไซน์ที่มีค่า k ค่าเดียว (เช่นสมการ 3.15) จะเคลื่อนที่ไปโดยไม่มีขอบเขตจำกัด คลื่นชนิดนี้มีโมเมนตัมแน่นอน $p = \hbar k$ แต่ตำแหน่งไม่มีความแน่นอน สำหรับกลุ่มคลื่นที่สร้างขึ้นมาจากการรวมกันของคลื่นจำนวนมากและมีเลขคลื่น k ต่าง ๆ กัน ตามสมการ (3.8) จะได้ว่าตำแหน่งที่แน่นอนกว่า

จากหัวข้อที่แล้วเรามี ฟังก์ชัน $A(k)$ และ $\Psi(x, 0)$ ที่สอดคล้องกับค่า $A(k)$ อนุภาคที่มีความไม่แน่นอนของโมเมนตัมน้อยจะมีความไม่แน่นอนในตำแหน่งมาก ดูรูป 3.14 ก. และอนุภาคที่มีความไม่แน่นอนของโมเมนตัมมากกลับมีความไม่แน่นอนในตำแหน่งน้อย ดูรูป 3.14 ข. สถานการณ์นี้แตกต่างกับกลศาสตร์ยุคเก่าอย่างมาก เพราะในกลศาสตร์ยุคเก่าทั้งตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคเป็นสิ่งที่หาค่าได้อย่างแน่นอน



รูป 3.14 แสดงฟังก์ชัน $A(k)$ สองลักษณะ (ก) $A(k)$ เป็นยอดแหลมจะได้ $\Psi(x, 0)$ มีลักษณะแผ่ออก (ข) $A(k)$ มีลักษณะแผ่ออกจะได้ $\Psi(x, 0)$ เป็นยอดแหลม

ความสัมพันธ์ระหว่างความไม่แน่นอนในตำแหน่งและในโมเมนตัมของกลุ่มคลื่นตามสมการ (3.12) สามารถหาได้ ถ้าเรากำหนดครึ่งความกว้างของ $A(k)$ หมายถึงช่วงของ k ซึ่งค่าของ $A(k)$ ลดจาก C มาเป็น $Ce^{-1/2}$ หรือประมาณ 0.6 เท่าของค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $A(k)$ ดูรูป 3.15



รูป 3.15 แสดงตำแหน่งของครึ่งความกว้าง Δk ที่ครึ่งความกว้างของ $A(k)$ จะได้

$$Ce^{-a^2(k-k_0)^2} = Ce^{-1/2}$$

หรือ
$$-a^2(k-k_0)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$k = k_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2} a} \quad (3.20)$$

ถ้าให้ Δk เป็นครึ่งความกว้างของ $A(k)$ ดังนั้น

$$\Delta k = \frac{1}{\sqrt{2} a} \quad (3.21)$$

ในทำนองเดียวกัน กรอบรูปของ $\Psi(x, 0)$ ลดลงจากค่าสูงสุด (ที่จุด $x = 0$) เป็น $\exp(-\frac{1}{2})$ เท่าของค่าสูงสุด เมื่อ

$$-\frac{x^2}{4a^2} = -\frac{1}{2}$$

หรือ
$$x = \sqrt{2} a$$

ดังนั้นครึ่งความกว้างของ $\Psi(x, 0)$ คือ

$$\Delta x = \sqrt{2} a \quad (3.22)$$

เนื่องจาก $p = \hbar k$ ดังนั้น $\Delta p = \hbar \Delta k$ แทนค่าลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \quad (3.23)$$

ถึงแม้ความสัมพันธ์ข้างต้นร่าหามาได้จากกลุ่มคลื่นเฉพาะกลุ่มหนึ่ง อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์นี้ใช้ได้กับกลุ่มคลื่นอื่น ๆ ด้วย รายละเอียดในการพิสูจน์จะไม่กล่าวถึง เราอาจสรุปได้ว่าไม่ว่าฟังก์ชัน $A(k)$ ที่ใช้ในการสร้างกลุ่มคลื่นมีลักษณะอย่างไร จะได้

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \quad (3.24)$$

สมการข้างต้นหมายความว่า ถ้าตำแหน่งของอนุภาคมีความไม่แน่นอน Δx ความไม่แน่นอนของโมเมนตัม Δp ต้องมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ $\hbar/\Delta x$ หรือในทางกลับกัน ถ้าอนุภาคมีความไม่แน่นอนในโมเมนตัม Δp ความไม่แน่นอนของตำแหน่ง Δx อย่างน้อยต้องเท่ากับ $\hbar/\Delta p$ หลักการนี้ไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg) เป็นผู้เสนอขึ้นมาในปี ค.ศ. 1927 และเรียกว่า หลักความไม่แน่นอน (uncertainty principle)

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาอัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมและโมเมนตัมของอิเล็กตรอน 1,000 eV ที่เคลื่อนที่ไปตามแกน x เมื่อความไม่แน่นอนในตำแหน่งประมาณ 1 Å

วิธีทำ

$$\text{จาก } \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

$$\begin{aligned} \Delta p &\geq \frac{\hbar}{\Delta x} \\ &\geq \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{2\pi \times 1 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ &\geq 1.054 \times 10^{-24} \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

โมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} p &= (2m T)^{1/2} \\ &= [2(9.101 \times 10^{-31} \text{ kg}) (1000 \text{ eV}) (1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})]^{1/2} \\ &= 17.076 \times 10^{-24} \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

อัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมกับโมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p} &= \frac{1.054 \times 10^{-24}}{17.076 \times 10^{-24}} \\ &\approx 6.2\% \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาอัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมกับโมเมนตัมของวัตถุมวล 10 กรัม ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 10 ซม./วินาที เมื่อความไม่แน่นอนในตำแหน่งประมาณ 1.0×10^{-3} มม.

วิธีทำ

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$$

$$\geq \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi \times 1 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

$$\geq 1.054 \times 10^{-28} \text{ kg m/s}$$

โมเมนตัมของวัตถุ

$$p = mv$$

$$= (10 \times 10^{-3} \text{ kg}) (10 \times 10^{-2} \text{ m/s})$$

$$= 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1.054 \times 10^{-28}}{1.0 \times 10^{-3}}$$

$$= 1.054 \times 10^{-25}$$

จากตัวอย่างทั้งสองข้างต้นแสดงให้เห็นว่าหลักความไม่แน่นอนมีผลในการวัดของเล็ก ๆ (ดังเช่นในตัวอย่างที่ 3.3) ซึ่งสมบัติคลื่นของอนุภาคมีความสำคัญ แต่สำหรับวัตถุขนาดใหญ่หลักความไม่แน่นอนจะไม่มีผลแต่อย่างใด (เช่นในตัวอย่างที่ 3.4)

อนุภาคที่มีโมเมนตัมไม่แน่นอนจะมีพลังงานไม่แน่นอนด้วย ความสัมพันธ์ระหว่างความไม่แน่นอนของพลังงาน ΔE ของอนุภาค และความไม่แน่นอนของช่วงเวลา Δt ที่อนุภาคมีพลังงานนั้น คือ

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

(3.25)

เราอาจหาความสัมพันธ์ตามสมการ (3.25) ได้โดยการพิจารณากลุ่มคลื่นดังกล่าวแล้วข้างต้นจาก

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

ให้ Δk เป็นความไม่แน่นอนในค่า k ที่คล้องจองกับความไม่แน่นอนในพลังงาน ΔE ของพลังงาน E หาได้จากการหาค่าอนุพันธ์ที่ $k = k_0$ จะได้ว่า

$$\Delta E = \hbar^2 k_0 \frac{\Delta k}{m} \quad (3.26)$$

ช่วงเวลา Δt หาได้จากเวลาที่ pulse ผ่านผู้สังเกตที่กำหนดให้

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{m\Delta x}{\hbar k_0} \quad (3.27)$$

สมการ (3.26) คูณกับสมการ (3.27) จะได้

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta k \cdot \Delta x \hbar$$

จากสมการ (3.21) และ (3.22) ได้ $\Delta k \cdot \Delta x = 1$ แทนค่าลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

หรือโดยทั่ว ๆ ไป $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

เมื่อใช้สมการข้างต้นกับอะตอมที่อยู่ในสถานะตั้งตัว จะพบว่าถ้าอะตอมอยู่ในสถานะตั้งตัวนาน ความไม่แน่นอนในพลังงานจะน้อยลง แต่ถ้าการเปลี่ยนสถานะเกิดขึ้นรวดเร็วจะมีความไม่แน่นอนของพลังงานมาก

3.6 หลักแห่งการเติมเต็มของบอร์

จากกลศาสตร์ยุคเก่า ทำให้เราทราบว่าพลังงานอาจถูกเคลื่อนย้ายจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้โดยอาศัยคลื่น เช่น กรณีของคลื่นน้ำ หรือโดยอาศัยอนุภาค เช่น กรณีของลูกปืนที่เคลื่อนย้ายพลังงานจากปืนไปสู่เป้า การเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำในสระอธิบายได้ในรูปแบบคลื่น (wave model) และการเคลื่อนที่ของลูกปืนอธิบายได้ในรูปแบบอนุภาค (particle model) นอกจากนี้รูปแบบทั้งสองสามารถประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ที่เราไม่เห็นด้วยตาเปล่าได้ เช่น เราใช้รูปแบบคลื่นอธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียงในตัวกลางยืดหยุ่น หรือใช้รูปแบบอนุภาคอธิบายความดันที่เกิดขึ้นที่ผนังของภาชนะบรรจุก๊าซ กล่าวคือใช้ทฤษฎีจลน์ของก๊าซซึ่งเราพิจารณาว่าโมเลกุลของก๊าซเป็นทรงกลมแข็งที่เคลื่อนที่ชนกับผนัง ดังนั้นสรุปได้ว่าปรากฏการณ์ใด ๆ ของการเคลื่อนย้ายพลังงานทั้งที่เห็นด้วยตาเปล่าหรือไม่ก็ตาม สามารถอธิบายได้ด้วยรูปแบบคลื่นหรือรูปแบบอนุภาค รูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง แต่ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์หนึ่งโดยใช้รูปแบบทั้งสองพร้อม ๆ กันได้ ทั้งนี้เพราะรูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคขัดแย้งซึ่งกันและกัน

พิจารณาการแผ่รังสีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ถ้าเราสนใจการแทรกสอด การเลี้ยวเบน หรือการอธิบายการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยทฤษฎีของแมกซ์เวลล์ เราต้องใช้รูปแบบคลื่น แต่ในการอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก และปรากฏการณ์คอมป์ตัน เราต้องพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้รูปแบบอนุภาค คือ สมมติฐานของโฟตอน จึงสามารถอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวได้ แสดงให้เห็นว่าการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงธรรมชาติสองนัย คือ เป็นได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แต่ในปรากฏการณ์หนึ่ง ๆ ใช้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้นที่อธิบาย กล่าว

คือไม่สามารถใช้รูปแบบทั้งสองพร้อม ๆ กันอธิบายสถานการณ์เดียวกันได้ ในปี ค.ศ. 1928 นิลส์บอร์ (Niels Bohr) ได้แถลงหลักการเติมเต็ม (principle of complementarity) ขึ้น สารสำคัญคือ รูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคเป็นส่วนที่เติมเต็มในการอธิบายปรากฏการณ์การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้สมบูรณ์ ดังนั้นในการทดลองเกี่ยวกับปรากฏการณ์ใด ๆ ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถอธิบายได้อย่างสมบูรณ์ด้วยรูปแบบคลื่นหรือรูปแบบอนุภาคอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นอกจากนี้หลักการเติมเต็ม ยังใช้ได้กับธรรมชาติสองนัย คลื่น-อนุภาค ของอนุภาค เช่น อิเล็กตรอน โปรตอน เป็นต้น ตัวอย่างเช่น การทดลองวัด e/m ของอิเล็กตรอนในหลอดรังสีคาโทด ซึ่งอธิบายได้โดยใช้รูปแบบอนุภาค นั่นคือ อิเล็กตรอนแสดงธรรมชาติเชิงอนุภาคในการทดลองนี้และจากหลักการเติมเต็ม ธรรมชาติเชิงคลื่นของอิเล็กตรอนจะถูกปิดบังไว้ สำหรับการทดลองเกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอน อธิบายได้โดยใช้รูปแบบคลื่น นั่นคือ อิเล็กตรอนแสดงธรรมชาติเชิงคลื่นออกมาและจากหลักการเติมเต็ม ธรรมชาติเชิงอนุภาคของอิเล็กตรอนจะถูกปิดบังไว้

สรุป

ตามสมมติฐานของเดอบรอยล์ อนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยโมเมนตัม p จะมีคลื่นที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ โดยที่

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ถ้าให้ลำแสงตกตั้งฉากกับเกรตติงเลี้ยวเบน เงื่อนไขสำหรับการเลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นแล้วมีความเข้มมาก คือ

$$d \sin \theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

เงื่อนไขของแบรกก์สำหรับการแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุด คือ

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ได้ทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่น คลื่นอนุภาคมีลักษณะเป็นกลุ่มคลื่น ซึ่งอาจสร้างขึ้นมาจากการรวมคลื่นไซน์จำนวนมาก กลุ่มคลื่นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม กำหนดโดย

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v$$

ซึ่งเท่ากับความเร็วของอนุภาค

ตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar$$

ตามหลักการเติมเต็มของบอห์ร รูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคเป็นส่วนที่เติมเต็มในการอธิบายปรากฏการณ์ การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้สมบูรณ์

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. อิเล็กตรอนพลังงาน 150 eV มีความยาวคลื่น 1.0 Å จงหาความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนพลังงาน 0.6 KeV
2. จงหาความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนที่ถูกเร่งจากหยุดนิ่งผ่านความต่างศักย์
ก) 100 โวลต์ ข) 100 กิโลโวลต์ ค) 100 เมกกะโวลต์
3. พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนควรมีค่าเป็นเท่าใด อิเล็กตรอนจึงมีความยาวคลื่นเท่ากับของรังสีเอกซ์ เมื่อหลอดรังสีเอกซ์มีความต่างศักย์ 60,000 โวลต์
4. อิเล็กตรอนพลังงาน 100 eV ตกกระทบบนแผ่นทองที่มีระยะห่างระหว่างแลตทิซ (lattice spacing) ของผลึกประมาณ 4.07 Å จงคำนวณหามุมของการเลี้ยวเบนลำดับแรก
5. จงคำนวณหาเลขอาโวกาโดรจากข้อมูลต่อไปนี้ ระยะระหว่างระนาบที่อยู่ติดกันของผลึก KCL คือ 3.14 Å ความหนาแน่น และน้ำหนักโมเลกุลของผลึก KCL คือ $1.98 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ และ 74.55 ตามลำดับ
6. จงใช้หลักความไม่แน่นอน คำนวณหาความไม่แน่นอนที่น้อยที่สุดของโมเมนตัมและจากนั้นหาความไม่แน่นอนที่น้อยที่สุดในพลังงาน ถ้าอิเล็กตรอนถูกจำกัดให้อยู่ในบริเวณ 1 Å
7. สมมติว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคแทนด้วย $\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$ จงหาความเร็วกลุ่ม
8. จงใช้หลักความไม่แน่นอนประมาณสถานะพื้นของระบบต่อไปนี้
 - ก) อนุภาคในกล่องยาว L
 - ข) อะตอมไฮโดรเจน