

บทที่ 3

ธรรมชาติเชิงคลื่นของอนุภาค

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 3 แล้ว นักศึกษามารถ

- 1) อธิบายสมมติฐานของเดอบรอยล์ได้
- 2) พิสูจน์สมการของแบร์ก์ได้
- 3) อธิบายการทดลองที่สนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์ได้
- 4) แสดงความคิดเห็นในการสรุปว่า อนุภาคสามารถแสดงสมบัติคลื่นได้
- 5) บอกลักษณะของคลื่นอนุภาคได้
- 6) อธิบายหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบอร์กและหลักแห่งการเติมเต็มของบอร์ร์ได้
- 7) ทำแบบฝึกหัดได้อย่างน้อย 6 ข้อ

3.1 คลื่นเดอบรอยล์

การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีสองลักษณะ คือ ในรูปแบบของคลื่นและรูปแบบของอนุภาค ปรากฏการณ์การแทรกสอดและการเลี้ยวเบนแสดงถึงธรรมชาติเชิงคลื่นของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า แต่ปรากฏการณ์โพโตอิเลกตริกและปรากฏการณ์คอมปัตันแสดงถึงธรรมชาติเชิงอนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (ดูรายละเอียดได้จากบทที่ 2) ธรรมชาติสองนัย คลื่นและอนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นที่ยอมรับกันตั้งแต่ปี ค.ศ. 1905 จากสมมติฐานทางความตั้ม และกฎซึ่งสัมพัทธภาพเฉพาะสำหรับโฟตอน

$$E = h\nu \quad (3.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (3.2)$$

ทางข้ามเมื่อของสมการข้างต้นทั้งสอง คือ E และ p เป็นลักษณะเฉพาะของอนุภาค ทางขวาเมื่อ คือ ν และ λ เป็นลักษณะเฉพาะของคลื่น ปริมาณทั้งสองเช่นนี้เกี่ยวข้องกันผ่านค่าคงที่ของแพลงค์ h ดังนั้นธรรมชาติสองนัยคลื่น-อนุภาคของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงได้ด้วยความสัมพันธ์ตามสมการทั้งสองข้างต้น

อนุภาคสารจะแสดงธรรมชาติสองนัยได้ เช่นเดียวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือไม่ ในปี ค.ศ. 1924 เดอบรอยล์ (de Broglie) ได้เสนอแนวความคิดว่า อนุภาคสารใด ๆ เมื่อเคลื่อนที่ด้วยโมเมนตัม p จะมีคลื่นที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้โดยที่ความยาวคลื่น λ ขึ้นกับโมเมนตัมของอนุภาค ดังสมการ

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.3)$$

สมการข้างต้นเรียกว่าความสัมพันธ์ของเดอบรอยล์ การพิสูจน์ว่าอนุภาคสารมีธรรมชาติเชิงคลื่น ตามแนวความคิดของเดอบรอยล์นั้นเราต้องทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคสารนี้แสดงปรากฏการณ์การแทรกสอดและการเลี้ยวเบนได้

ในปี ค.ศ. 1897 เจ.เจ.ทอมสัน (J.J.Thomson) ได้ค้นพบอิเลกตรอน และพบว่าอิเลกตรอน มีอัตราส่วนระหว่างประจุและมวลที่แน่นอน (กรณี $v << c$) นอกจากนี้มีมวล โมเมนตัม พลังงาน และสามารถจำกัดบริเวณได้ ดังนั้นอิเลกตรอนจึงแสดงคุณสมบัติของอนุภาค ต่อมาในปี ค.ศ. 1927 ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ (Darvisson & Jermer) ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของอิเลกตรอน ซึ่งแสดงถึงธรรมชาติเชิงคลื่นของอิเลกตรอนและเป็นการทดลองที่สนับสนุน สมมติฐานของเดอบรอยล์ (รายละเอียดเกี่ยวกับการทดลองของดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์จะกล่าวในหัวข้อต่อไป) ดังนั้นอิเลกตรอน (ซึ่งเป็นอนุภาคสาร) จึงแสดงธรรมชาติสองนัยได้เช่นเดียวกัน

กับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 3.1 จงคำนวณหาความยาวคลื่นเดอบรอยล์ที่คล้องจองกับสิ่งต่อไปนี้

- ก) ลูกกอกฟล์ มวล 50 กรัม เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 เมตร/วินาที
- ข) PROTTON เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2,200 เมตร/วินาที
- ค) อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยพลังงานจนน์ 10 eV
- ก) ตามสมมติฐานของเดอบรอยล์

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}}{(0.05 \text{ กิโลกรัม}) (20 \text{ เมตร/วินาที})} \\ &= 6.625 \times 10^{-34} \text{ เมตร}\end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าน้อยมากไม่สามารถตรวจได้

- ข) มวลของ PROTTON คือ 1.67×10^{-27} กิโลกรัม ดังนั้นความยาวคลื่นของ PROTTON คือ

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}}{(1.67 \times 10^{-27} \text{ กิโลกรัม}) (2,200 \text{ เมตร/วินาที})} \\ &= 1.91 \times 10^{-10} \text{ เมตร} \\ &\approx 1.91 \text{ Å}\end{aligned}$$

ความยาวคลื่นนี้อยู่ในลำดับเดียวกับความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ (ข้อสังเกตเราไม่ใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพกับโมเมนตัมของ PROTTON เพราะพลังงานจนน์ค่านี้น้อยกว่าพลังงานมวลนึงของ PROTTON มาก แต่ถ้าพลังงานจนน์อยู่ในลำดับเดียวกับพลังงานมวลนึงเราต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพกับโมเมนตัมของ PROTTON)

- ค) สำหรับอิเล็กตรอนพลังงานจนน์ 10 eV (ค่านี้น้อยกว่าพลังงานมวลนึงของอิเล็กตรอน 510 KeV มาก จึงไม่ใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพ)

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{ดังนั้น } p = \sqrt{2mT}$$

จากสมมติฐานของเดอบรออยล์

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

$$= \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ กิโลกรัม})(10 \text{ eV})(1.602 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})}}$$

$$= 3.9 \times 10^{-10} \text{ เมตร}$$

$$= 3.9 \text{ \AA}$$

3.2 การเลี้ยวเบนของคลื่น

เมื่อคลื่นพบสิ่งกีดขวางจะเกิดการเลี้ยวเบน (diffraction) ปรากฏการณ์นี้จะเห็นชัด เมื่อสิ่งกีดขวางมีขนาดใกล้เคียงกับความยาวคลื่นนั้น สิ่งกีดขวางอาจเป็นวัตถุขนาดเล็ก เช่น ลวด ที่จะกั้นบางส่วนของคลื่นไว้ หรืออาจเป็นรูเปิดเล็ก ๆ หรือช่องแคบที่จะปล่อยให้คลื่นผ่าน ในการณ์ของแสงช่วงที่มองเห็นได้อาจใช้เกรตติงเลี้ยวเบน (diffraction grating) ทำหน้าที่เป็น ช่องแคบ ถ้าให้ลำแสงตกตั้งฉากกับเกรตติงเลี้ยวเบน เงื่อนไขสำหรับการเลี้ยวเบนที่เกิดขึ้นแล้ว มีความเข้มมาก กำหนดโดย

$$d \sin \theta = n\lambda \quad (3.4)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ เป็นลำดับของการเลี้ยวเบนที่มีความเข้มแสงมาก

λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตgere ทบทบ

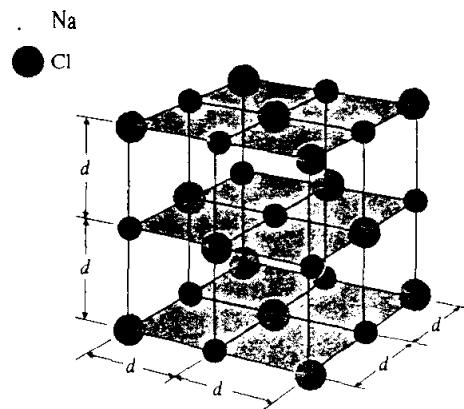
θ เป็นมุมการเลี้ยวเบน

และ d คือระยะระหว่างรอยขีด (เส้น) บนเกรตติง (เช่นเกรตติง 12,000 เส้นต่อเซนติเมตร

$$d = 1/12,000 \text{ ซม.})$$

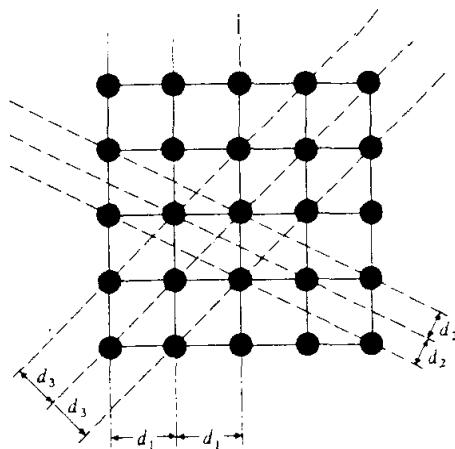
จากสมการ (3.4) ถ้า $n = 1$, $\sin \theta = \lambda/d$ แสดงว่า การเลี้ยวเบนจะเกิดขึ้นเมื่อ d อยู่ในลำดับ เดียวกับ λ ถ้า $d >> \lambda$, $\sin \theta \approx 0$ และ $\theta \approx 0^\circ$ กรณีนี้จะไม่เห็นผลลัพธ์ของการเลี้ยวเบน

พิจารณาการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ ซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่น อยู่ในช่วง 0.1 \AA และ 100 \AA ในกรณีนี้ไม่สามารถใช้เกรตติงได้เนื่องจาก λ มีค่าน้อยกว่า d มาก ในปี ค.ศ. 1912 เลอาอี (Laue) ได้เสนอว่า ผลึกของของแข็งที่อะตอมเรียงตัวเป็นระเบียบ และอยู่ห่างกัน $2-3 \text{ \AA}$ สามารถใช้เป็นเกรตติง 3 มิติ สำหรับการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ได้ รูป



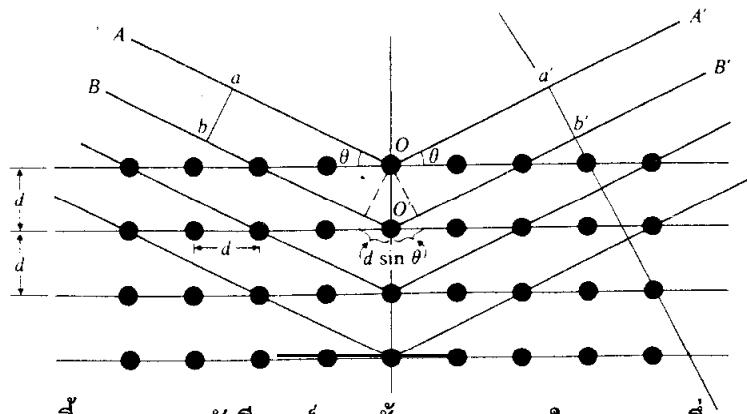
รูป 3.1 แสดงผลึกเดี่ยวของ NaCl

3.1 แสดงโครงสร้างของผลึกเดี่ยวของโซเดียมคลอไรด์ โดยที่อิออน Na^+ และ Cl^- เรียงตัวแบบแลกทิชูรูปลูกบาศก์อย่างง่าย (simple cubic lattice) ที่มีตำแหน่งสัมภันห่างกันเป็นระยะ d เราสามารถกำหนดกลุ่มของอะตอมที่อยู่ในระนาบที่ขานกัน ซึ่งเรียกว่าระนาบแบราก์ (Bragg plane) ขึ้นมาได้ รูป 3.2 แสดงระนาบแบราก์ที่กำหนดขึ้นมาสามารถ



รูป 3.2 เส้นบนที่ลากผ่านอะตอมกำหนดว่าเป็นระนาบแบราก์ ในที่นี้แสดงระนาบแบราก์ 3 ระนาบเพื่อความเข้าใจการเกิดการเลี้ยงเหงา ให้เราพิจารณาชั้นของอะตอมในระนาบที่นี่ของผลึกดังแสดงในรูป 3.3 เมื่อลำรังสีเอกซ์ความถี่เดียวที่มีความยาวคลื่น λ ตกกระทบบนผลึกนี้แต่ละอะตอมจะกระเจิงลำรังสีตักกระทบส่วนหนึ่งเพียงเล็กน้อย ในลักษณะของคลื่นทรงกลม เพสของรังสีที่ถูกกระเจิงนี้ ถูกกำหนดโดยตำแหน่งของอะตومเหล่านั้น ในทิศทางที่แน่นอน

ทิศหนึ่งของรังสีที่ถูกกระเจิงนี้มีการแทรกสอดแบบเสริมกัน ขณะที่อีกทิศหนึ่งมีการแทรกสอดแบบหักล้างกัน ซึ่งทำให้เกิดผลลัพธ์การเลี้ยวเบนขึ้น



รูป 3.3 การเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ จากชั้นของอะตอมในระนาบหนึ่งของผลึก

แบร์ก (Bragg) นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษได้หาเงื่อนไขสำหรับการแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุด ดังนี้

พิจารณารังสีตัดกระบทองรังสีที่กระเจิงจากอะตอมต่างกันสองอะตอมในระนาบหนึ่ง (ดูรูป 3.3) รังสีที่ถูกกระเจิงนี้ถ้ามีเฟสเดียวกันจะทำให้เกิดการแทรกสอดแบบเสริมกัน ดังนั้นแนวทาง (path) $AO\bar{A}$ และ $B\bar{O}B'$ ของรังสีสองลำ ต้องต่างกันเป็นจำนวนเต็มเท่าของ λ นั่นคือ

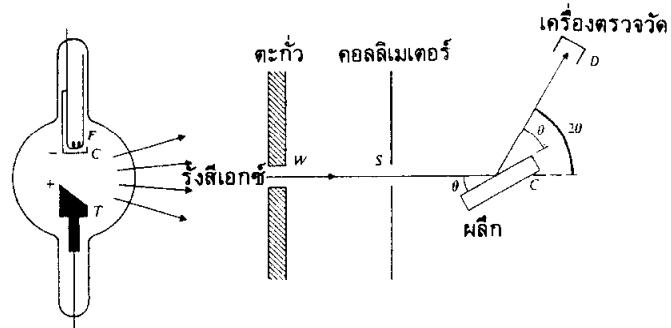
$$B\bar{O}B' - AO\bar{A} = n\lambda \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จากรูป 3.3 ความแตกต่างของแนวทางเดิน คือ

$$B\bar{O}B' - AO\bar{A} = 2d \sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น } 2d \sin \theta = n\lambda \quad (3.5)$$

เงื่อนไขของแบร์ก สำหรับรังสีทั้งสองที่มีเฟสเดียวกันและทำให้เกิดการแทรกสอดแบบเสริม กันได้ความเข้มสูงสุด คือสมการข้างต้น ซึ่งเรียกว่าสมการของแบร์ก



รูป 3.4 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์

รูป 3.4 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองของสเปกโตรมิเตอร์ ผลีกรังสีเอกซ์ (x-ray crystal spectrometer) สำรังสีเอกซ์จากหลอดรังสี หลังจากผ่านคอลลิเมเตอร์ (collimator) ที่ทำด้วยตะกั่ว (W) และช่องแคบ (S) แล้วจะตกกระทบบนผลีก C สำรังสีที่ถูกกระเจิงถูกวัดด้วยเครื่องตรวจวัด (detector) D ซึ่งอาจใช้ไอออนไนซ์เชชันแคมเบอร์ (ionization chamber) การศึกษาสามารถเลี้ยงเบนจากระนาบแบรอก์ต่าง ๆ กันนั้นสามารถใช้หาโครงสร้างของผลีกได้ตัวอย่างที่ 3.2 วิธีที่จะเอียงครึ่งหนึ่งในการหาค่าเลขอะโว加โดร N_A คือการเลี้ยงเบนของรังสีเอกซ์จากเกรตติ่งผลีก (crystal grating) รังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 1.3922 \AA ถูกกระเจิงจากผลีก NaCl ลำดับแรกของการแพรกสอดแบบเสริมกันวัดได้ที่มุม $14^\circ 17' 26''$ จากข้อมูลเหล่านี้จะคำนวณหา lattice spacing และเลขอะโว加โดร เมื่อน้ำหนักโมเลกุลของ NaCl คือ 58.454 และความหนาแน่นคือ 2.163 กรัม/cm^3 .

วิธีทำ จากสมการ (3.5) สำหรับ $n = 1$

$$\begin{aligned} d &= \lambda / 2 \sin \theta \\ &= \frac{1.3922 \text{ \AA}}{2 \sin (14^\circ 17' 26'')} \\ &= \frac{1.3922}{2(0.2468)} \\ &= 2.820 \text{ \AA} \end{aligned}$$

lattice spacing มีค่าเท่ากับ 2.820 \AA

ให้ n เป็นจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ซึ่งกำหนดโดย

$$n = \frac{\rho N_A}{M}$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่น และ M คือน้ำหนักโมเลกุล
ถ้า lattice spacing ในผลีกรูปถูกばかり เช่น Na Cl คือ d ดังนั้นปริมาตรที่มีแต่ละอ่อนอยู่ คือ d^3 และจำนวนอ่อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร คือ $1/d^3$ เนื่องจากในแต่ละโมเลกุลมี 2 อ่อน (Na^+ และ Cl^-) ดังนั้น

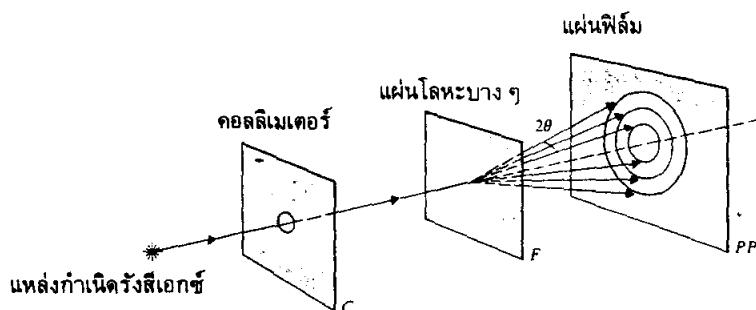
$$\frac{2 \rho N_A}{M} = \frac{1}{d^3}$$

$$N_A = \frac{M}{2\rho d^3}$$

$$= \frac{58.454 \text{ กรัม/โมล}}{2(2.163 \text{ กรัม/ซม}^3) (2.830 \times 10^{-8} \text{ ซม.})^3}$$

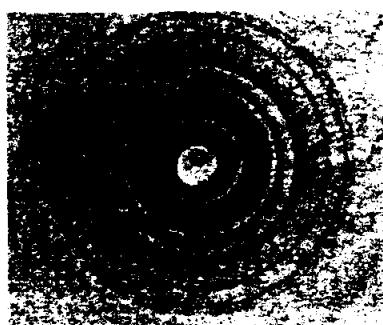
$$= 6.02 \times 10^{23} \text{ อะตอม/โมล}$$

เลขอาโวกาโดร N_A เท่ากับ 6.02×10^{23}



รูป 3.5 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองสำหรับสังเกตการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์จากแผ่นโลหะบาง ๆ

พิจารณาด้วยการเลี้ยวเบนที่ได้จากแผ่นโลหะบาง ๆ (thin metallic foil) แทนที่จะเป็นผลึกเดียว รูป 3.5 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลอง แผ่นโลหะบาง ๆ นี้ประกอบด้วย ผลึกขนาดเล็ก ๆ ซึ่งเรียงตัวในลักษณะผลึกเชิงช้อน สำรังสิตกกระบากจะเลี้ยวเบนเฉพาะผลึกขนาดเล็ก ๆ เหล่านั้นซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของแบรอก สำรังสีเลี้ยวเบนจะทะลุ岡มาอีกด้านหนึ่ง และมีความเข้มสูงในลักษณะผิวรายที่ทำมุม 2θ กับสำรังสิตกกระบาก เมื่อนำแผ่นฟิล์ม วางห่างจากผลึกเป็นระยะ r จะได้วงกลมความเข้มสูงจำนวนมากบนแผ่นฟิล์ม โดยที่ความเข้มแต่ละวงนั้นจะเปลี่ยนไป รูป 3.6 เป็นตัวอย่างของลวดลายการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ที่ได้จากผลึกเชิงช้อนของอะลูมิเนียม ลวดลายเหล่านี้เรียกว่าลวดลายเพาเดอร์ (powder patterns) หรือ วงเดอร์บาย-เชอร์เรอร์ (Debye-Scherrer rings)



รูป 3.6 ลวดลายการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์จากผลึกเชิงช้อนอะลูมิเนียม

3.3 การเลี้ยวเบนของอนุภาค

การทดลองเพื่อสนับสนุนสมมุติฐานของเดอบรอยล์นั้นเราต้องแสดงว่าอนุภาคต่าง ๆ เช่น อิเล็กตรอน โปรตอน และนิวตรอน เหล่านี้เป็นต้น แสดงผลลัพธ์การเลี้ยวเบนได้ เช่นเดียวกับรังสีเอกซ์ (หรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอีน ๆ) พิจารณากรณีอิเล็กตรอนที่ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์ V ให้ m เป็นมวลและ v เป็นความเร็วของอิเล็กตรอน ตามสมมติฐานเดอบรอยล์ เราสามารถคำนวณหาความยาวคลื่น λ ของคลื่นที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนได้ดังนี้ (กรณีอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ)

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

จากความยาวคลื่นเดอบรอยล์ที่กำหนดโดย

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$= \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$$\text{ดังนั้น } \lambda = \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J-sec}}{[2(9.108 \times 10^{-34} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ coul}) (V)]^{1/2}}$$

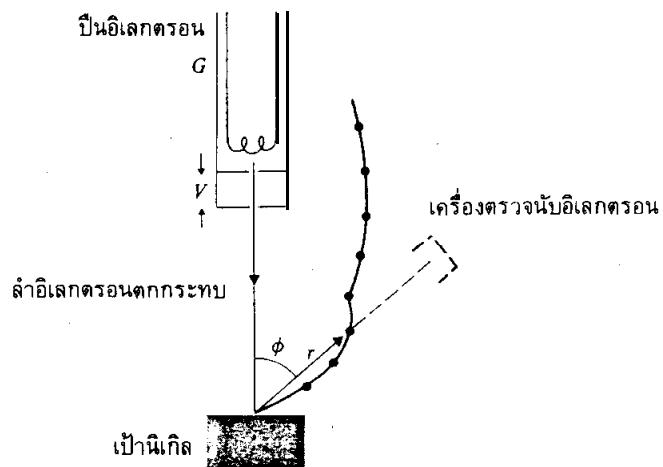
$$= \sqrt{\frac{150}{V}} \times 10^{-8} \text{ มม.}$$

$$\text{หรือ } \lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ Å} \quad (3.6)$$

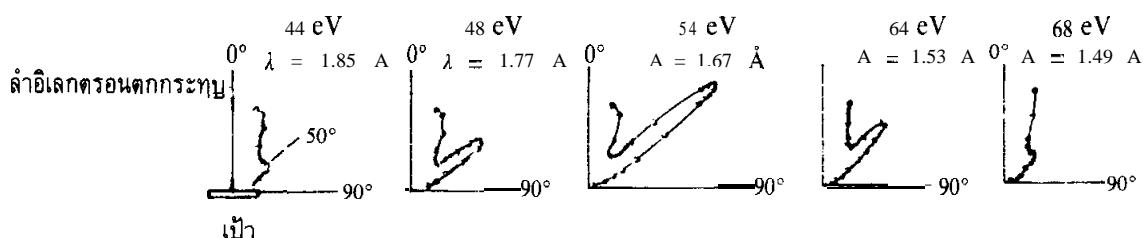
เมื่อ V มีหน่วยเป็นโวลท์

เช่นถ้า $V = 150$ โวลท์ จะได้ $\lambda = 1 \text{ Å}$ ความยาวคลื่นค่านี้อยู่ในลำดับเดียวกับของรังสีเอกซ์ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นไปได้ที่คลื่นอิเล็กตรอนเหล่านี้จะถูกเลี้ยวเบนโดยผลึกเช่นเดียวกับรังสีเอกซ์

ในปี ค.ศ. 1927 ดาร์วิสสัน (Darvisson) และเจอร์เมอร์ (Germer) ได้ทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่นได้ โดยใช้อุปกรณ์ดังรูป 3.7



รูป 3.7 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลองของดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ อิเลกตรอนจากปืนอิเลกตรอน ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์ V ผ่านช่องแคบ ๆ G ออก มาแล้วให้ล้ำหน้าของอิเลกตรอนนี้ตกกระทบบนแผ่นกันนิเกล ซึ่งมีระยะห่างระหว่างอะตอม 2.15×10^{-8} ซม. ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ได้ทำการวัดความเข้มของอิเลกตรอนที่ถูกกระเจิงออกมากที่มุ่ง ต่าง ๆ กันด้วยเครื่องนับอิเลกตรอนที่เลื่อนไปมาได้ จากการทดลองพบว่าความเข้มของอิเลกตรอน ที่ถูกกระเจิง นอกจากจะขึ้นกับมุ่งต่าง ๆ ที่ทำการวัดแล้วยังขึ้นกับพลังงานของอิเลกตรอนด้วย ดูรูป 3.8



รูป 3.8 แสดงมุ่งและความเข้มของอิเลกตรอนที่ถูกกระเจิงออกมานา

เมื่ออิเลกตรอนมีพลังงาน 54 eV จะวัดความเข้มของอิเลกตรอนที่กระเจิงออกมากที่สุด โดยที่มุ่ง $\phi = 50^\circ$ ดังรูป 3.8 คลื่นอิเลกตรอนที่กระเจิงเหล่านี้จะรวมกันและเกิดการแทรกสอด

ได้ในลักษณะเดียวกับรังสีเอกซ์ จากสมการของแบรอก์การแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ

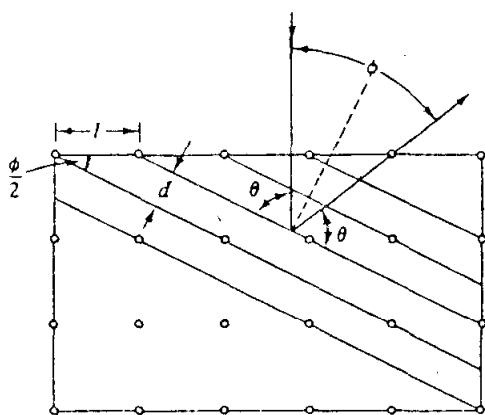
$$2d \sin \theta = n\lambda$$

λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นอิเล็กตรอน

d เป็นระยะระหว่างระนาบของอะตอมในผลึกนิเกิล

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \text{ ดังนั้น } \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) = \cos \frac{\phi}{2}$$

n เป็นจำนวนเต็มที่แสดงลำดับของการแทรกสอด



รูป 3.9 การเลี้ยงบนของคลื่นอิเล็กตรอนโดยผลึกนิเกิล

จากรูป 3.9 ได้ $d = l \sin \frac{\phi}{2}$ เมื่อ l เป็นระยะห่างระหว่างอะตอม สมมติให้ $n = 1$ และแทนค่า d ลงในสมการของแบรอก์ จะได้

$$\lambda = 2l \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}$$

$$= f \sin \phi$$

แทนค่า $f = 2.15 \times 10^{-8}$ ซม. และ $\phi = 50^\circ$ ลงในสมการข้างต้น ได้

$$\lambda = 2.15 \times 10^{-8} \sin 50^\circ$$

$$= 1.65 \times 10^{-8}$$
 ซม.

$$\text{หรือ } \lambda = 1.65 \text{ \AA}$$

จากสมมติฐานของเดอบรอยล์ สำหรับอิเลกตรอนพลังงาน 54 eV ความยาวคลื่นของอิเลกตรอนตามสมการ (3.6) คือ

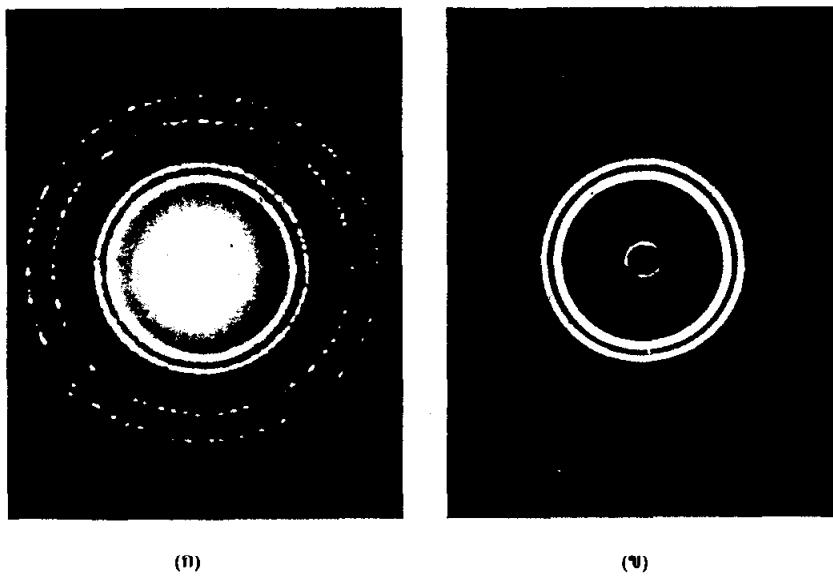
$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ Å}$$

$$= \sqrt{\frac{150}{54}} \text{ Å}$$

ได้ $\lambda = 1.67 \text{ Å}$

ความยาวคลื่นของอิเลกตรอน คำนวณจากสมการวิธีให้ค่าตรงกัน แสดงว่าอิเลกตรอนที่เป็นอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่น ซึ่งเป็นการสนับสนุนสมมติฐานของเดอบรอยล์

托马斯·皮特·汤姆森 (G.P.Thomson) ได้ทำการทดลองแสดงให้เห็นว่าอิเลกตรอนมีอิสระทุกแห่งในห้องทดลอง จึงทำให้เกิดผลลัพธ์ของการเลี้ยวเบนได้คล้ายคลึงกับผลลัพธ์ของการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์มาก ดังรูป 3.10



รูป 3.10 แสดงความคล้ายคลึงกันระหว่างการเลี้ยวเบนของอิเลกตรอน (ก) และของรังสีเอกซ์ (ข)
เมื่อทดลองทุกแห่งจะมีผลลัพธ์ที่คล้ายคลึงกัน

ภายหลังได้มีการทดลองโดยใช้อุปกรณ์ เช่น นิวตرون ปรากฏว่าได้ผลลัพธ์ของการเลี้ยวเบนเช่นกัน การเลี้ยวเบนเป็นคุณสมบัติของคลื่น ดังนั้นธรรมชาติคลื่นของอนุภาคจึงมีการทดลองที่สนับสนุนเป็นอย่างดี

3.4 กลุ่มคลื่น

เนื่องจากอิเล็กตรอนและอนุภาคอื่น ๆ แสดงสมบัติคลื่น เราจึงใช้พังก์ชันคลื่น (wave function) แทนอนุภาคได้ การนឹងของคลื่นเชือก พังก์ชันคลื่นแทนปริมาณการขัดของจุดต่าง ๆ โดยเป็นพังก์ชันของตำแหน่งสมดุลและเวลา สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พังก์ชันคลื่นแทนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงไป随著時間และเวลา แต่สำหรับคลื่นอนุภาคพังก์ชันคลื่นเป็นนามธรรม (abstract) เป็น mathematical wave

คลื่นอนุภาคมีลักษณะเป็นกลุ่มคลื่น เราอาจสร้างกลุ่มคลื่นจากการซ้อนกันของคลื่น ใช้นิยามว่า กลุ่มคลื่นที่ได้มีความยาวคลื่นเฉพาะ และจำกัดบริเวณ (localized) ให้ คือ เป็นพังก์ชันคลื่นของอนุภาค เพื่อความสะดวกพิจารณากรณี 1 มิติ โดยทั่ว ๆ ไปแล้วการรวมกันของคลื่นเป็นไปตามสมการ

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega t)} \quad (3.7)$$

เนื่องจากพังก์ชันคลื่นนี้ก็จะจากการรวมกันของคลื่นจำนวนมาก ค่า k และ ω จะมีการกระจายต่อเนื่องกัน จะได้

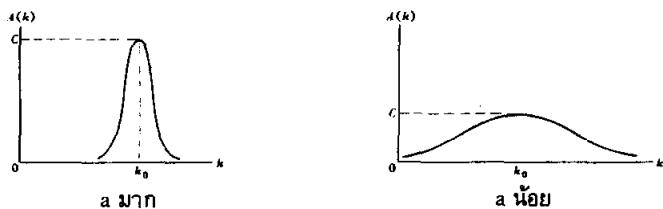
$$\Psi(x, t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (3.8)$$

$A(k)$ เป็นอัมบลิจูดของแต่ละคลื่นย่อยและเป็นพังก์ชันของ k วิธีการรวมคลื่นใช้นิยามว่า จำนวนมากเข้าด้วยกัน เรียกวิธีวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis) สมการ (3.7) คือ อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) และสมการ (3.8) คือ อินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier integral)

พิจารณากรณีของกลุ่มคลื่นที่สร้างขึ้นมาจากการรวมกันของคลื่นใช้นิยามว่า จำนวนมากที่มีเลขคลื่น (wave number) k ใกล้ ๆ กับค่า k_0 สมมติ $A(k)$ เปลี่ยนได้เป็น

$$A(k) = C e^{-a^2(k - k_0)^2} \quad (3.9)$$

C เป็นค่าสูงสุดของพังก์ชัน และ a เป็นค่าความกว้างของกราฟนี้ ถ้า a มีค่ามาก รูปร่างของพังก์ชันจะเป็นยอดแหลม ดูรูป 3.11 ก. ถ้า a มีค่าน้อย รูปร่างของพังก์ชันจะแบrogok ดูรูป 3.11 ข. ดังนั้นค่า a แสดงช่วงหรือการกระจายของค่า k ที่ใช้



รูป 3.11 กราฟของสมการ (3.9)

แทนค่าสมการ (3.9) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-a^2(k - k_0)^2} e^{ikx - i\omega t} dk \quad (3.10)$$

ที่ $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-a^2(k - k_0)^2} e^{ikx} dk \quad (3.11)$$

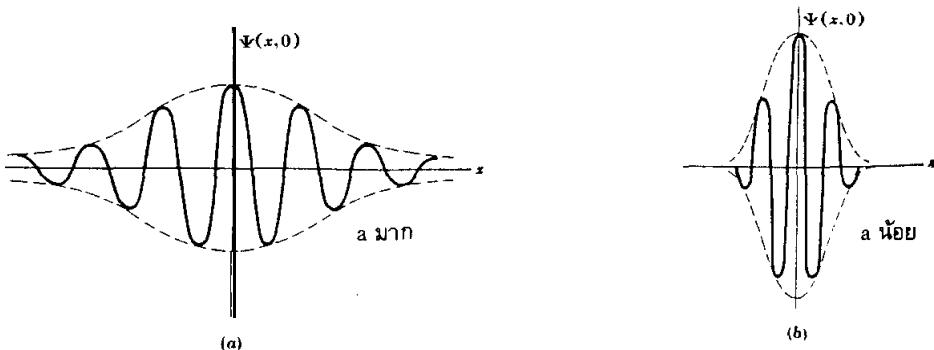
$$\Psi(x, 0) = \frac{C \sqrt{\pi}}{a} e^{-x^2/4a^2} e^{ik_0 x} \quad (3.12)$$

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของสมการข้างต้น คือ

$$\operatorname{Re}[\Psi(x, 0)] = \frac{C}{a} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4a^2} \cos k_0 x \quad (3.13)$$

$$\operatorname{Im}[\Psi(x, 0)] = \frac{C}{a} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4a^2} \sin k_0 x \quad (3.14)$$

เทอม $e^{-x^2/4a^2}$ เป็นพังก์ชันกรอบรูป (envelope function) ของส่วนจริง (สมการ 3.13) ซึ่งแสดงดังรูป 3.12 ดังนั้นโดยการรวมคลื่นไซน์จำนวนมากที่มีเลขค่าคลื่นใกล้ๆ กัน เราจะได้คลื่นเดียวที่มีลักษณะจำกัดบริเวณ



รูป 3.12 กราฟของสมการ (3.13) สำหรับ k_0 ค่าเดียวกันแต่ a ต่างกัน

ค่า a จะบอกความกว้างของกรอบรูป เมื่อ a มีค่าน้อย $\exp(-x^2/4a^2)$ จะเป็นลบมาก $\Psi(x, 0)$ จะเป็นยอดแหลม ดูรูป 3.12 น. เมื่อ a มีค่ามาก กรอบรูปจะแผ่ออกໄฉ $\Psi(x, 0)$ และเมื่อใช้ $A(k)$ รูปร่างแผ่อออกจะໄฉ $\Psi(x, 0)$ เป็นยอดแหลม

เนื่องจากอิเล็กตรอนอาจเป็นอนุภาคหรือคลื่น คุณสมบัติของคลื่นแสดงได้จากกลุ่มคลื่น โดยที่กรอบของกลุ่มคลื่นนี้มีขอบเขตจำกัด เราจะต้องแสดงว่าความเร็วของอนุภาคเป็นค่าเดียวกับความเร็วของกรอบรูปของกลุ่มคลื่น (ซึ่งคือความเร็วของนั้นเอง) เพื่อให้ง่ายขึ้น พิจารณาการรวมกันของคลื่นไนน์สองคลื่น ที่มีอัมปลิจูดเท่ากันแต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

$$\Psi_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (3.15)$$

$$\Psi_2(x, t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \quad (3.16)$$

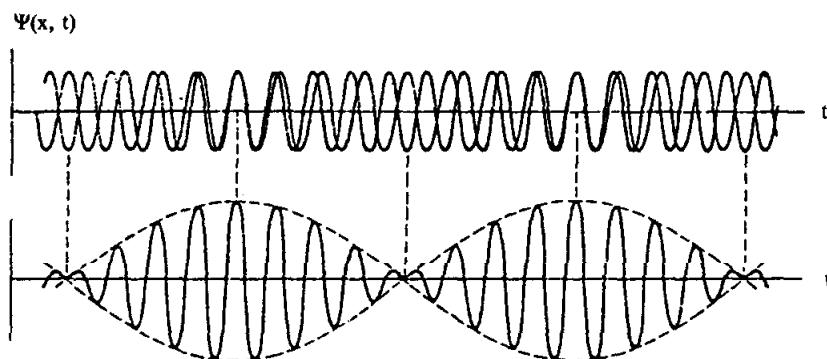
รวมคลื่นทั้งสอง จะได้

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \\ &= 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \sin\left[\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2}\right)t\right] \end{aligned}$$

ให้ $k + \frac{\Delta k}{2} \approx k$ และ $\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \approx \omega$ เราได้

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\approx 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \sin(kx - \omega t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) \quad (3.17) \end{aligned}$$

สมการข้างต้นได้คลื่นที่มีความถี่เท่าเดิม แต่อัมปลิจูดมีค่าเปลี่ยนแปลงดังแสดงในรูป 3.13



รูป 3.13 การรวมกันของคลื่นไนน์สองคลื่นที่มีความถี่และเลขคณิต่างกันเล็กน้อย

กรอบของคลื่นเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วกลุ่ม v_g กำหนดโดย

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

ในกรณี ลิมิต $\Delta k \rightarrow 0$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

(3.18)

สำหรับกลุ่มคลื่นที่อธิบายได้ด้วยสมการ (3.8) สามารถคำนวณหาความเร็วกลุ่มได้เช่นเดียวกัน แต่ขั้นตอนในการคำนวณยุ่งยากกว่ากรณีง่าย ๆ นี้ และผลสุดท้ายให้ค่าเช่นเดียวกับสมการ (3.18) รายละเอียดจะไม่กล่าวถึง

จากสมมติฐานของเดอบรอยล์

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = h k$$

และพลังงานของคลื่นอนุภาค คือ

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = \hbar\omega$$

ดิฟเฟอเรนเชียล E เทียบกับ p จะได้

$$\frac{dE}{dp} = \hbar \frac{d\omega}{dp} = \hbar \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{dk}{dp} = \frac{d\omega}{dk}$$

ดังนั้น $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$ (3.19)

$$\text{จาก } E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการข้างต้นเทียบกับ p ได้

$$2E \frac{dE}{dp} = 2pc^2$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E}$$

$$= \frac{mv^2}{mc^2}$$

$$= v$$

นั่นคือ $v_g = v$

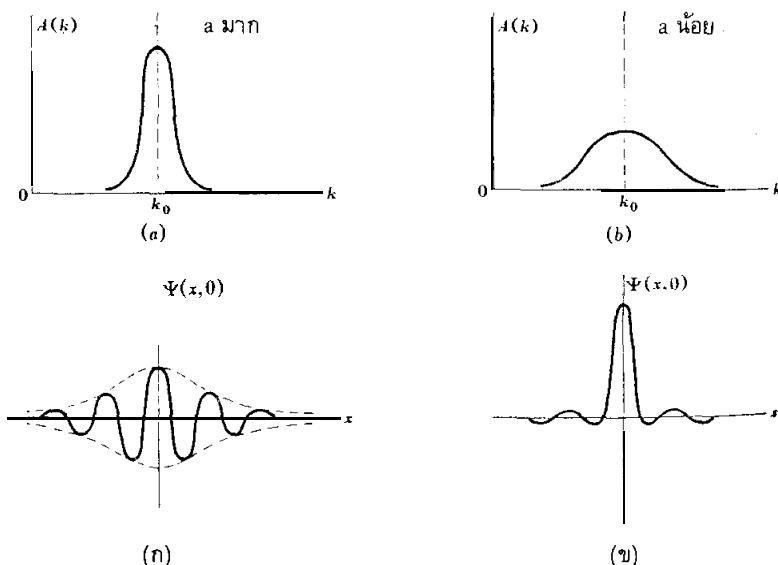
ดังนั้น ความเร็วกลุ่ม v_g ของคลื่นอนุภาค เท่ากับความเร็วอนุภาค

การอธิบายอนุภาคด้วยคลื่น เราต้องสร้างกลุ่มคลื่นจากคลื่นย่ออยู่ ๆ ที่มีค่า k ต่าง ๆ กัน เนื่องจาก $p = \hbar k$ แสดงว่าอนุภาคที่ถูกแทนด้วยกลุ่มคลื่นจะไม่มีโมเมนตัมที่แน่นอน ซึ่งแตกต่างจากกลศาสตร์ยุคเก่า เพราะเราสามารถหาค่าความเร็วและตำแหน่งของอนุภาคได้ทุกขณะ ดังนี้เมื่อเราอธิบายอนุภาคด้วยกลุ่มคลื่น ทำให้เราไม่สามารถบอกตำแหน่งหรือโมเมนตัมที่แน่นอนของอนุภาคได้

3.5 หลักความไม่แน่นอน

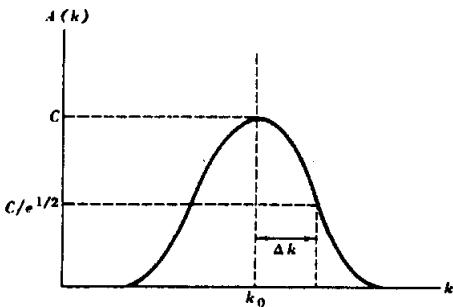
คลื่นไสเซนท์ที่มีค่า k ค่าเดียว (เช่นสมการ 3.15) จะเคลื่อนที่ไปโดยไม่มีข้อบกพร่อง คลื่นชนิดนี้มีโมเมนตัมแน่นอน $p = \hbar k$ แต่ตำแหน่งไม่มีความแน่นอน สำหรับกลุ่มคลื่นที่สร้างขึ้นมาจากการรวมกันของคลื่นจำนวนมากและมีเลขค่า k ต่าง ๆ กัน ตามสมการ (3.8) จะได้ตำแหน่งที่แน่นอนกว่า

จากหัวข้อที่แล้วเรามี พังก์ชัน $A(k)$ และ $\Psi(x, 0)$ ที่สอดคล้องกับค่า $A(k)$ อนุภาคที่มีความไม่แน่นอนของโมเมนตัมน้อยจะมีความไม่แน่นอนในตำแหน่งมาก ดูรูป 3.14 ก. และอนุภาคที่มีความไม่แน่นอนของโมเมนตัมมากกลับมีความไม่แน่นอนในตำแหน่งน้อย ดูรูป 3.14 ข. สถานการณ์นี้แตกต่างกับกลศาสตร์ยุคเก่าอย่างมาก เพราะในกลศาสตร์ยุคเก่าทั้งตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคเป็นสิ่งที่หาค่าได้อย่างแน่นอน



รูป 3.14 แสดงพังก์ชัน $A(k)$ สอดคล้องขณะ (ก) $A(k)$ เป็นยอดแหลมจะได้ $\Psi(x, 0)$ มีลักษณะแพ้ออก (ข) $A(k)$ มีลักษณะแพ้ออกจะได้ $\Psi(x, 0)$ เป็นยอดแหลม

ความสัมพันธ์ระหว่างความไม่แน่นอนในคำแห่งนั้นและในโมเมนตัมของกิ่งคลื่นตามสมการ (3.12) สามารถหาได้ ถ้าเรากำหนดครึ่งความกว้างของ $A(k)$ หมายถึงช่วงของ k ซึ่งค่าของ $A(k)$ ลดจาก C มาเป็น $Ce^{-1/2}$ หรือประมาณ 0.6 เท่าของค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $A(k)$ ดูรูป 3.15



รูป 3.15 แสดงคำแห่งนั้นของครึ่งความกว้าง Δk
ที่ครึ่งความกว้างของ $A(k)$ จะได้

$$Ce^{-a^2(k-k_0)^2} = Ce^{-1/2}$$

$$\text{หรือ } -a^2(k-k_0)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$k = k_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}a} \quad (3.20)$$

ถ้าให้ Δk เป็นครึ่งความกว้างของ $A(k)$ ดังนี้

$$\Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}a} \quad (3.21)$$

ในการองเดียวกัน กรอบรูปของ $\Psi(x, 0)$ ลดลงจากค่าสูงสุด (ที่จุด $x = 0$) เป็น $\exp(-\frac{1}{2})$ เท่าของค่าสูงสุด เมื่อ

$$-\frac{x^2}{4a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{หรือ } x = \sqrt{2}a$$

ดังนั้นครึ่งความกว้างของ $\Psi(x, 0)$ คือ

$$Ax = \sqrt{2}a \quad (3.22)$$

เนื่องจาก $p = \hbar k$ ดังนั้น $Ap = \hbar \Delta k$ แทนค่าลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \quad (3.23)$$

ถึงแม้ความสัมพันธ์ข้างต้นจะมาได้จากการกลุ่มคลื่นและพารามิเตอร์กลุ่มนี้อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์นี้ใช้ได้กับกลุ่มคลื่นอื่น ๆ ด้วย รายละเอียดในการพิสูจน์จะไม่กล่าวถึง เรายาจสรุปได้ว่าไม่ว่า พังก์ชัน $A(k)$ ที่ใช้ในการสร้างกลุ่มคลื่นมีลักษณะอย่างไร จะได้

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \quad (3.24)$$

สมการข้างต้นหมายความว่า ถ้าตำแหน่งของอนุภาคมีความไม่แน่นอน Δx ความไม่แน่นอนของโมเมนตัม Δp ต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ $\hbar/\Delta x$ หรือในทางกลับกัน ถ้าอนุภาคมีความไม่แน่นอนในโมเมนตัม Δp ความไม่แน่นอนของตำแหน่ง Δx อย่างน้อยต้องเท่ากับ $\hbar/\Delta p$ หลักการนี้ไฮเซนเบอร์ก (Heisenberg) เป็นผู้เสนอขึ้นมาในปี ค.ศ. 1927 และเรียกว่า หลักความไม่แน่นอน (uncertainty principle)

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาอัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมและโมเมนตัมของอิเล็กตรอน 1,000 eV ที่เคลื่อนที่ไปตามแกน x เมื่อความไม่แน่นอนในตำแหน่งประมาณ 1 Å
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จาก } \Delta x \cdot \Delta p &\geq \hbar \\ \Delta p &\geq \frac{\hbar}{\Delta x} \\ &= \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J-s}}{2\pi \times 1 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ &\geq 1.054 \times 10^{-24} \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

โมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} p &= (2m T)^{1/2} \\ &= [2(9.101 \times 10^{-31} \text{ kg})(1000 \text{ eV})(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})]^{1/2} \\ &= 17.076 \times 10^{-24} \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

อัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมกับโมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{p} &= \frac{1.054 \times 10^{-24}}{17.076 \times 10^{-24}} \\ &\approx 6.2\% \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาอัตราส่วนระหว่างความไม่แน่นอนในโมเมนตัมกับโมเมนตัมของวัตถุมวล 10 กรัม ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 10 ซม./วินาที เมื่อความไม่แน่นอนในตำแหน่งประมาณ 1.0×10^{-3} มม.

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p &\geq \hbar \\ \Delta p &\geq \frac{\hbar}{\Delta x} \\ &\geq \frac{6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi \times 1 \times 10^{-6} \text{ m}} \\ &\geq 1.054 \times 10^{-28} \text{ kg m/s}\end{aligned}$$

โมเมนต์ของวัตถุ $p = mv$

$$\begin{aligned}p &= (10 \times 10^{-3} \text{ kg}) (10 \times 10^{-2} \text{ m/s}) \\ &= 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg m/s} \\ \frac{\Delta p}{p} &= \frac{1.054 \times 10^{-28}}{1.0 \times 10^{-3}} \\ &= 1.054 \times 10^{-25}\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่สองข้างต้นแสดงให้เห็นว่าหลักความไม่แน่นอนมีผลในการวัดของเล็ก ๆ (ดังเช่น ในตัวอย่างที่ 3.3) ซึ่งสมบัติลี่ของอนุภาคมีความสำคัญ แต่สำหรับวัตถุขนาดใหญ่หลักความไม่แน่นอนจะไม่มีผลแต่อย่างใด (เช่นในตัวอย่างที่ 3.4)

อนุภาคที่มีโมเมนต์ไม่แน่นอนจะมีพลังงานไม่แน่นอนด้วย ความสัมพันธ์ระหว่าง ความไม่แน่นอนของพลังงาน ΔE ของอนุภาค และความไม่แน่นอนของช่วงเวลา Δt ที่อนุภาค มีพลังงานนั้น คือ

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar} \quad (3.25)$$

เราอาจหาความสัมพันธ์ตามสมการ (3.25) ได้โดยการพิจารณากรุ่นคลื่นตั้งกล่าวแล้วข้างต้น จาก

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

ให้ Δk เป็นความไม่แน่นอนในค่า k ที่คล้องจองกับความไม่แน่นอนในพลังงาน ΔE ของพลังงาน E ΔE หาได้จากการหาค่าอนุพันธ์ที่ $k = k_0$ จะได้

$$\Delta E = \hbar^2 k_0 \frac{\Delta k}{m} \quad (3.26)$$

ช่วงเวลา Δt หาได้จากเวลาที่ pulse ผ่านผู้สั่งเกตที่กำหนดให้

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{m\Delta x}{\hbar k_0} \quad (3.27)$$

สมการ (3.26) คูณกับสมการ (3.27) จะได้

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta k \cdot \Delta x / \hbar$$

จากสมการ (3.21) และ (3.22) ได้ $\Delta k \cdot \Delta x = 1$ แทนค่าลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

หรือโดยทั่วไป $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

เมื่อใช้สมการข้างต้นกับอะตอมที่อยู่ในสถานะตีนตัว จะพบว่าถ้าอะตอมอยู่ในสถานะตีนตัวนาน ความไม่แน่นอนในพลังงานจะน้อยลง แต่ถ้าการเปลี่ยนสถานะเกิดขึ้นรวดเร็วจะมีความไม่แน่นอนของพลังงานมาก

3.6 หลักแห่งการเติมเต็มของบทร์

จากการศาสตร์ยุคเก่า ทำให้เราทราบว่าพัฒนาการจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้โดยอาศัยคลื่น เช่น กรณีของคลื่นน้ำ หรือโดยอาศัยอนุภาค เช่น กรณีของลูกปืน ที่เคลื่อนย้ายพลังงานจากปืนไปสู่เป้า การเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำในระบบอธิบายได้ในรูปแบบคลื่น (wave model) และการเคลื่อนที่ของลูกปืนอธิบายได้ในรูปแบบอนุภาค (particle model) นอกจากนี้ รูปแบบทั้งสองสามารถประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ที่เราไม่เห็นด้วยตาเปล่าได้ เช่น เราใช้รูปแบบคลื่นอธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียงในตัวกลargely หยุ่น หรือใช้รูปแบบอนุภาคอธิบายความตันที่เกิดขึ้นที่ผนังของภาชนะบรรจุกาก กล่าวคือใช้ทฤษฎีจลน์ของกาซซึ่งเราพิจารณาว่า ไม่เลกุลของกาซเป็นทรงกลมแข็งที่เคลื่อนที่ชนกับผนัง ดังนั้นสรุปได้ว่าปรากฏการณ์ใด ๆ ของการเคลื่อนย้ายพลังงานทั้งที่เห็นด้วยตาเปล่าหรือไม่ก็ตาม สามารถอธิบายได้ด้วยรูปแบบคลื่นหรือรูปแบบอนุภาค รูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง แต่ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์หนึ่งโดยใช้รูปแบบทั้งสองพร้อม ๆ กันได้ ทั้งนี้เพราะรูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคขัดแย้งซึ่งกันและกัน

พิจารณาการแผ่รังสีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ถ้าเราสนใจการแทรกสอด การเลี้ยวเบน หรือการอธิบายการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยทฤษฎีของแมกซ์เวล เราต้องใช้รูปแบบคลื่น แต่ในการอธิบายปรากฏการณ์โพโตอิเลกต์ิก และปรากฏการณ์คอมพ์ตัน เราต้องพิจารณา คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้รูปแบบอนุภาค คือ สมมติฐานของโพตอน จึงสามารถอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวได้ แสดงให้เห็นว่าการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงธรรมชาติสองนัย คือ เป็นได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แต่ในปรากฏการณ์หนึ่ง ๆ ใช้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้นท่ออธิบาย กล่าว

คือไม่สามารถใช้รูปแบบทั้งสองพร้อม ๆ กันอธิบายสถานการณ์เดียวกันได้ ในปี ค.ศ. 1928 นิลส์บอร์ (Niels Bohr) "ได้แกลงหลักแห่งการเติมเต็ม (principle of complementarity)" ขึ้น สาระสำคัญคือ รูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคเป็นส่วนที่เติมเต็มในการอธิบายปรากฏการณ์การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้สมบูรณ์ ดังนั้นในการทดลองเกี่ยวกับปรากฏการณ์ใด ๆ ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถอธิบายได้อย่างสมบูรณ์ด้วยรูปแบบคลื่นหรือรูปแบบอนุภาคอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นอกจากนี้หลักแห่งการเติมเต็ม ยังใช้ได้กับธรรมชาติสองนัย คลื่น-อนุภาค ของอนุภาค เช่น อิเล็กตรอน โปรตอน เป็นต้น ตัวอย่างเช่น การทดลองวัด e/m ของอิเล็กตรอน ในหลอดรังสีคาโรต ซึ่งอธิบายได้โดยใช้รูปแบบอนุภาค นั่นคือ อิเล็กตรอนแสดงธรรมชาติเชิงอนุภาคในการทดลองนี้และจากหลักแห่งการเติมเต็ม ธรรมชาติเชิงคลื่นของอิเล็กตรอน จะถูกปฏิบั้งไว้ สำหรับการทดลองเกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอน อธิบายได้โดยใช้รูปแบบคลื่น นั่นคือ อิเล็กตรอนแสดงธรรมชาติเชิงคลื่นของมาและจากหลักแห่งการเติมเต็ม ธรรมชาติเชิงอนุภาคของอิเล็กตรอนจะถูกปฏิบั้งไว้

สรุป

ตามสมมติฐานของเดอเบรอยล์ อนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยโมเมนตัม p จะมีคลื่นที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ โดยที่

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ถ้าให้คำแสลงตามตั้งจากกับเกรตติงเลี้ยวบน เงื่อนไขสำหรับการเลี้ยวบนที่เกิดขึ้นแล้วมีความเข้มมาก คือ

$$d \sin \theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

เงื่อนไขของแบราก์สำหรับการแทรกสอดแบบเสริมกันได้ความเข้มสูงสุด คือ

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ดาร์วิสสันและเจอร์เมอร์ได้ทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่าอนุภาคแสดงคุณสมบัติคลื่น คลื่นอนุภาคมีลักษณะเป็นกลุ่มคลื่น ซึ่งอาจสร้างขึ้นมาจากการรวมคลื่นไซน์จำนวนมาก กลุ่มคลื่นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม กำหนดโดย

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v$$

ซึ่งเท่ากับความเร็วของอนุภาค

ตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบอร์ก

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar$$

ตามหลักการเติมเต็มของบทที่ รูปแบบคลื่นและรูปแบบอนุภาคเป็นส่วนที่เติมเต็มในการอธิบายปรากฏการณ์ การแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้สมบูรณ์

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. อิเลกตรอนพลังงาน 150 eV มีความยาวคลื่น 1.0 Å จงหาความยาวคลื่นของอิเลกตรอนพลังงาน 0.6 KeV
2. จงหาความยาวคลื่นของอิเลกตรอนที่ถูกเร่งจากหยุดนิ่งผ่านความต่างศักย์
ก) 100 โวลท์ ข) 100 กิโลโวลท์ ค) 100 เมกกะโวลท์
3. พลังงานจลน์ของอิเลกตรอนควรมีค่าเป็นเท่าใด อิเลกตรอนจึงมีความยาวคลื่นเท่ากับของรังสีเอกซ์ เมื่อหยอดรังสีเอกซ์มีความต่างศักย์ 60,000 โวลท์
4. อิเลกตรอนพลังงาน 100 eV ตกกระทบบนแผ่นทองที่มีระยะห่างระหว่างแลททิซ (lattice spacing) ของผลึกประมาณ 4.07 Å จงคำนวณหาค่าการเลี้ยวเบนลำดับแรก
5. จงคำนวณหาเลขอาไวกาโดยจากข้อมูลต่อไปนี้ ระยะระหว่างระนาบที่อยู่ติดกันของผลึก KCL คือ 3.14 Å ความหนาแน่น และน้ำหนักโมเลกุลของผลึก KCL คือ $1.98 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ และ 74.55 ตามลำดับ
6. จงใช้หลักความไม่แนนอน คำนวณหาความไม่แนนอนที่น้อยที่สุดของโมเมนตัมและจากนั้น หาความไม่แนนอนที่น้อยที่สุดในพลังงาน ถ้าอิเลกตรอนถูกจำกดให้ออกในบริเวณ 1 Å
7. สมมติว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคแทนด้วย $\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$ จงหาความเร็วกลุ่ม
8. จงใช้หลักความไม่แนนอนประมาณสถานะพื้นของระบบต่อไปนี้
ก) อนุภาคในกล่องยาว L
ข) อะตอมไฮโดรเจน