

บทที่ 2

ธรรมชาติเชิงอนุภาคของคลื่น

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 2 แล้ว นักเรียนสามารถ

- 1) บรรยาย แนวความคิดของเรย์เลห์-จินส์ และของแพลงค์ที่ใช้อธิบายการแผ่รังสีของวัตถุดำได้
- 2) อธิบาย ปรากฏการณ์ โฟโตอิเล็กทริก ปรากฏการณ์คอมป์ตัน และขบวนการเกิดรังสีเอกซ์ได้
- 3) อธิบายปรากฏการณ์ของการเกิดคู่ และการทำลายคู่ได้
- 4) แสดงความคิดเห็นในการสรุปว่า คลื่นสามารถแสดงสมบัติอนุภาคได้
- 5) ทำแบบฝึกหัดได้อย่างน้อย 8 ข้อ

ปรากฏการณ์บางอย่างของแสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เช่น การแทรกสอด การเลี้ยวเบน อธิบายได้ด้วยธรรมชาติเชิงคลื่น แต่มีบางปรากฏการณ์ไม่สามารถอธิบายได้ กล่าวคือ แสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงคุณลักษณะของอนุภาค ในบทนี้จะกล่าวถึงปรากฏการณ์ต่างๆ ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่อธิบายด้วยธรรมชาติเชิงอนุภาค ซึ่งถือได้ว่าเป็นรากฐานของทฤษฎีควอนตัม ทฤษฎีควอนตัมมีรากฐานจากการค้นพบว่าปริมาณบางอย่างในฟิสิกส์ยุคเก่าที่เคยคิดว่ามีค่าต่อเนื่องแต่เมื่อพิจารณาในระบบเล็ก ๆ (microscopic system) แล้วปริมาณเหล่านี้มีค่าเป็นควอนตัม

2.1 การแผ่และการดูดกลืนรังสีความร้อนของผิววัตถุ

วัตถุทุกชนิดถ้ามีอุณหภูมิสูงกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์ จะแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา ฟิสิกส์ยุคเก่าอธิบายได้ว่าเป็นผลจากการที่ประจุไฟฟ้าที่ผิววัตถุได้รับความร้อนจากภายนอกมากระตุ้นทำให้สั่นและมีความเร่ง พิจารณาการเร่งของประจุตัวเดียวจะให้คาบเวลาของการแกว่งแน่นอน และรังสีที่แผ่ออกมาจะมีความถี่ประมาณเท่ากับส่วนกลับของคาบเวลาการแกว่งนี้ แต่เมื่อพิจารณาการเร่งของประจุหลายๆ ตัว ซึ่งทำให้เกิดการแผ่รังสีความร้อนออกมา จะทำให้เกิดการแผ่รังสีออกมาทุกช่วงความถี่ ดังนั้นสเปกตรัมของรังสีที่แผ่ออกมาจากผิววัตถุจะเป็นสเปกตรัมต่อเนื่อง วัตถุร้อนนอกจากจะแผ่รังสีแล้วยังดูดกลืนรังสีจากสิ่งแวดล้อมด้วย ถ้าวัตถุมีอุณหภูมิสูงกว่าสิ่งแวดล้อม อัตราการแผ่รังสีจะมากกว่าอัตราการดูดกลืนรังสี แต่ถ้าวัตถุมีอุณหภูมิต่ำกว่าสิ่งแวดล้อม อัตราการดูดกลืนรังสีจะมากกว่าอัตราการแผ่รังสี และเมื่อวัตถุมีอุณหภูมิเท่ากับสิ่งแวดล้อม อัตราการแผ่รังสีและอัตราการดูดกลืนรังสีจะเท่ากัน ทำให้เกิดสมดุลความร้อน (thermal equilibrium) ดังนั้นวัตถุจะมีอุณหภูมิกคงที่

อัตราการแผ่รังสีของวัตถุร้อนขึ้นกับอุณหภูมิและชนิดของผิววัตถุ วัตถุที่เป็นตัวแผ่รังสีที่ดีจะเป็นตัวดูดกลืนรังสีที่ดีด้วย ในปี ค.ศ. 1879 สเตฟาน (Stefan) ได้เสนอสมการเอมไพริคอน (empirical equation) ว่า อัตราการแผ่พลังงานรังสีความร้อนจากวัตถุร้อนเป็นสัดส่วนกับ T^4 เมื่อ T เป็นอุณหภูมิของวัตถุร้อนในหน่วยเคลวิน

$$I_T = \sigma T^4 \quad (2.1)$$

เมื่อ I_T เป็นพลังงานที่แผ่ออกมาทั้งหมดจากทุกความถี่ต่อวินาทีต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

σ คือค่าคงที่ของสเตฟาน-โบลทซ์มานน์

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ วัตต์/(เมตร)}^2 \text{ (เคลวิน)}^4$$

สมการข้างต้นเรียกว่า กฎของสเตฟาน-โบลทซ์มานน์ (Stefan-Boltzmann law)

ปริมาณที่ใช้เป็นตัวบอกลักษณะธรรมชาติของผิววัตถุคือ absorptivity (a) และ emissivity (e) เมื่อกำหนดว่า

$$a = \frac{\text{พลังงานความร้อนทั้งหมดที่ผิววัตถุดูดกลืน}}{\text{พลังงานความร้อนที่ตกกระทบบนผิววัตถุ}}$$

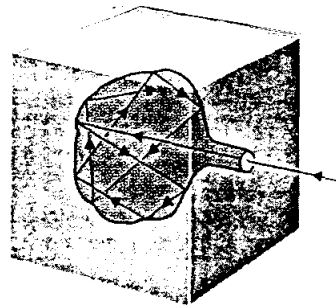
$$e = \frac{\text{พลังงานความร้อนทั้งหมดที่ผิววัตถุปล่อยออกมา}}{\text{พลังงานความร้อนที่ตกกระทบบนผิววัตถุ}}$$

ค่า a และ e ของวัตถุใด ๆ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ในวิชาอุณหพลศาสตร์เคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff) ได้เสนอว่า ในสภาวะสมดุลความร้อนของผิววัตถุต่างชนิดกันจะมีการแลกเปลี่ยนพลังงานการดูดกลืนและการแผ่รังสีความร้อน และจะทำให้ $e = a$

2.2 การแผ่รังสีของวัตถุดำ

วัตถุที่เป็นตัวแผ่รังสีและตัวดูดกลืนรังสีได้อย่างสมบูรณ์และดีที่สุด เรียกว่าวัตถุดำ (black body) วัตถุดำจะดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทุกความถี่ที่ตกกระทบ นั่นคือวัตถุดำมีค่า $a = 1$ ดังนั้นตามกฎของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า $e = 1$ ด้วย

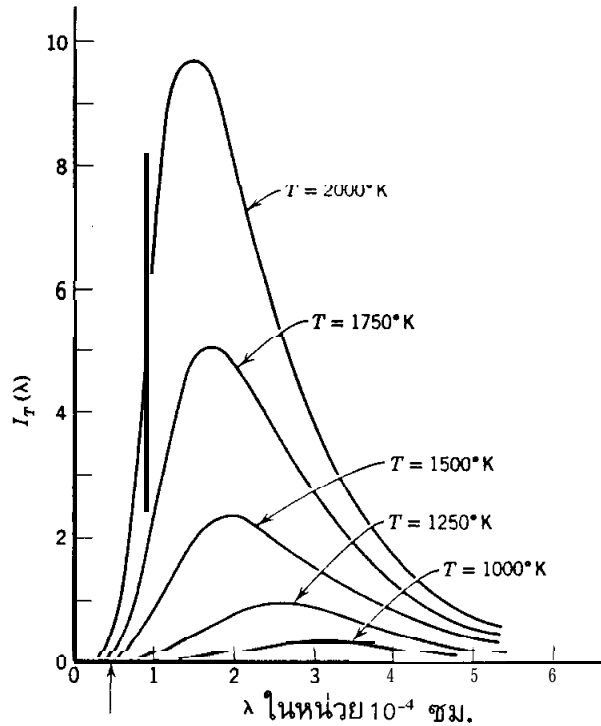
ในการทดลองเราจะสร้างแบบจำลอง (model) ของวัตถุดำขึ้นมา แบบจำลองของวัตถุดำคือก้อนวัตถุที่มีโพรงกลวง (cavity) มีรูเปิดเล็ก ๆ เพียงรูเดียวที่ผนังโพรงกลวงนี้ดังแสดงในรูป 2.1 เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าผ่านรูเล็ก ๆ นี้เข้าไป จะสะท้อนกลับไปกลับมาอยู่ภายในโพรงกลวงนี้และถูกดูดกลืนหมด



รูป 2.1 แสดงโพรงกลวงที่มีรูเปิดเล็ก ๆ ซึ่งเป็นแบบจำลองของวัตถุดำ

เมื่อทำให้วัตถุดำร้อนจนเกิดสมดุลที่อุณหภูมิต่าง ๆ แล้วทำการวัดการกระจายพลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาจากวัตถุดำในแต่ละช่วงคลื่นด้วยเครื่องสเปกโตรมิเตอร์ ให้ $I_T(\lambda) d\lambda$ คือพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ความยาวคลื่นระหว่าง λ กับ $\lambda + d\lambda$ ที่แผ่ออกมา

จากหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวของวัตถุดำอุณหภูมิ T ต่อวินาที ผลการทดลองได้กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $I_T(\lambda)$ กับความยาวคลื่น λ ที่อุณหภูมิ T ต่าง ๆ ดังแสดงในรูป 2.2



รูป 2.2 แสดงสเปกตรัมของการแผ่รังสีของวัตถุดำที่อุณหภูมิต่าง ๆ

คุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ สรุปได้ดังนี้

1. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมามีความยาวคลื่นต่าง ๆ กัน
2. พลังงานรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาจากวัตถุดำขึ้นกับความยาวคลื่น (λ) และอุณหภูมิ (T) เท่านั้น ไม่ขึ้นกับชนิดหรือรูปร่างของวัตถุดำ

3. ที่ λ คงที่ใด ๆ $I_T(\lambda)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ T มากขึ้น ถ้ารวม $I_T(\lambda)$ ทุกช่วงความยาวคลื่น λ จะได้อัตราการแผ่พลังงานทั้งหมดซึ่งคือพื้นที่ใต้เส้นโค้ง อัตราการแผ่พลังงานทั้งหมดนี้เป็นปริมาณโดยตรงกับ T^4 เมื่อ T เป็นอุณหภูมิของวัตถุดำในหน่วยเคลวิน เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$I_T = \int_0^{\infty} I_T(\lambda) d\lambda = \sigma T^4$$

สมการข้างต้นคือกฎของสเตฟาน-โบลท์ซมานน์นั่นเอง

4. ความยาวคลื่นที่คล่องจองกับอัตราการแผ่พลังงานสูงสุด (λ_{\max}) เป็นปฏิภาคกลับกับอุณหภูมิของวัตถุ

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T}$$

หรือ $\lambda_{\max} T = \text{ค่าคงที่}$ (2.2)

$$= 2.898 \times 10^{-3} \text{ ม.-เคลวิน [เป็นค่าที่ได้จากการทดลองของลุมเมอร์ (Lummer) และพริงชิม (Pringsheim)]}$$

เมื่อวัตถุมีอุณหภูมิสูงขึ้น พลังงานรังสีที่แผ่ออกมามากที่สุดจะมีความยาวคลื่นสั้นลง กล่าวคือสีของวัตถุที่ร้อนจะเปลี่ยนจากสีแดงจาง ๆ ไปเป็นสีน้ำเงิน

มีนักวิทยาศาสตร์หลายท่านพยายามอธิบายสเปกตรัมของการแผ่รังสีของวัตถุดำโดยใช้กฎของอุณหพลศาสตร์และอื่น ๆ และมีผู้คิดว่าอิเล็กตรอนที่ผนังของโพรงทำหน้าที่เป็นตัวรับและตัวส่งคลื่นเรียกว่า ออสซิลเลเตอร์ แต่แนวความคิดเหล่านี้ได้คำตอบไม่ตรงกับผลการทดลอง ในปี ค.ศ.1884 โบลท์ซมานน์ได้ใช้ทฤษฎีของอุณหภูมิจลศาสตร์หา I_T ได้ (สมการ 2.1) โดยพิจารณาโพรงกลวงรูปทรงกระบอกซึ่งมีผนังที่สะท้อนรังสีและมีลูกสูบเลื่อนเข้าออกได้ ให้มีรังสีความร้อนอุณหภูมิ T บรรจุอยู่ในโพรงกลวงนี้ รังสีความร้อนเหมือนกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ คือมีความดันเป็นสัดส่วนกับความหนาแน่นของพลังงาน (ในกรณีนี้มันประพฤติตัวคล้ายก๊าซ) และให้ระบบนี้มีวัฏจักรของการขยายตัวและอัดตัวที่ในอุณหพลศาสตร์เรียกว่า วัฏจักรคาร์โนต์ (carnot cycle) โบลท์ซมานน์ได้ความสัมพันธ์ระหว่างงานที่ทำโดยความดันและอุณหภูมิของรังสีนั้น เนื่องจากความดันสามารถพิจารณาได้ในรูปของความหนาแน่นพลังงานและสามารถทำกลับให้อยู่ในทอม I_T ได้ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง I_T กับ T (สมการ 2.1)

ในขบวนการของการขยายตัวหรืออัดตัวของโพรงกลวงที่มีรังสีอยู่ภายในนี้ ทำให้ความยาวคลื่นของส่วนประกอบต่าง ๆ ของสเปกตรัมการแผ่รังสีเปลี่ยนไปซึ่งเป็นผลเนื่องจากการเลื่อนของดอปเปลอร์ (doppler shift) ที่เกิดจากการสะท้อนจากลูกสูบที่เลื่อนไปมา เมื่อพิจารณารายละเอียดต่าง ๆ ดังกล่าวนี้ วิน (Wein) สามารถสร้างรูปแบบของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปสำหรับการกระจายสเปกตรัมการแผ่รังสีของวัตถุดำ ซึ่งเรียกว่ากฎของวิน

$$\rho_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5} \quad (2.3)$$

เมื่อ $\rho_T(\lambda)$ คือความหนาแน่นพลังงานที่นิยามว่า $\rho_T(\lambda) d\lambda$ เป็นพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของโพรงที่รังสีมีความยาวคลื่นในช่วงระหว่าง λ กับ $\lambda + d\lambda$
 $f(\lambda T)$ เป็นปริมาณที่เป็นฟังก์ชันของ λT

วินได้พิจารณาหารูปแบบของฟังก์ชัน $f(\lambda T)$ จากกลศาสตร์ยุคเก่าและได้เสนอว่า

$$\rho_T(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T} \quad (2.4)$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ซึ่งยังไม่ได้ทำการหาค่า

สมการของวินนี้ใช้อธิบายผลการทดลองได้เฉพาะในช่วงความยาวคลื่นสั้นเท่านั้น จากกฎของวินจะให้ความสัมพันธ์ระหว่าง λ_{\max} และ T คือ $\lambda_{\max} T = \text{ค่าคงที่}$ ซึ่งเรียกว่ากฎการเลื่อนที่ของวิน (Wein's displacement law)

2.3 สูตรของเรย์เลย์และจิ้นส์

เรย์เลย์และจิ้นส์ (Rayleigh and Jeans) ได้อธิบายการแผ่รังสีของวัตถุดำโดยใช้ทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และหลักการแบ่งเท่ากันของพลังงาน (equipartition of energy) เริ่มจากพิจารณาโพรงโลหะที่ผนังมีอุณหภูมิ T ในสภาวะสมดุลความร้อนรังสีที่แผ่ออกมานี้จะมีลักษณะของวัตถุดำที่อุณหภูมิ T และที่สมดุลความร้อนนี้ รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าภายในโพรงจะต้องเป็นคลื่นนิ่ง (standing wave) ที่มีบัพ (node) อยู่ที่ผนังของโพรง เรย์เลย์และจิ้นส์ได้คำนวณหาจำนวนคลื่นนิ่งที่มีความยาวคลื่นระหว่าง λ กับ $\lambda + d\lambda$ แล้วคำนวณหาพลังงานเฉลี่ยของคลื่นเหล่านี้โดยใช้หลักการแบ่งเท่ากันของพลังงาน เมื่อนำจำนวนคลื่นนิ่งที่มีความยาวคลื่นในช่วงดังกล่าวคูณกับพลังงานเฉลี่ยของคลื่นแล้วหารด้วยปริมาตรของโพรง จะได้ค่าพลังงานต่อหน่วยปริมาตรของรังสีที่มีความยาวคลื่นในช่วง λ ถึง $\lambda + d\lambda$ ซึ่งก็คือปริมาณ $\rho_T(\lambda) d\lambda$ นั่นเอง

เพื่อความสะดวกในการพิจารณา สมมติให้โพรงภายในโลหะเป็นรูปลูกบาศก์มีด้านยาวด้านละ a สมการของสนามไฟฟ้าที่สอดคล้องกับคลื่นนิ่งในโพรงนี้สามารถหาได้จากสมการของแมกซ์เวลล์

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0 \quad (2.5)$$

ในการหาคำตอบของสมการข้างต้น จะสมมติว่า $E(x, y, z, t)$ สามารถแยกออกเป็นผลคูณของสองฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันของ x, y, z และฟังก์ชันของ t โดยที่ฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชันไซน์ (sinusoidal) กล่าวคือ $T(t) = e^{i\omega t}$ ดังนั้น

$$E = e^{i\omega t} X(x) Y(y) Z(z) \quad (2.6)$$

แทนสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.5) แล้วหารตลอดด้วย E จะได้

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.7)$$

เนื่องจาก x, y, z , เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน แต่ละเทอมของสามเทอมแรกของสมการข้างต้นต้องเป็นอิสระต่อกันด้วย ดังนั้นเราให้แต่ละเทอมเท่ากับค่าคงที่ คือ

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \alpha_1^2$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha_1^2 X(x) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\alpha_2^2$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \alpha_2^2 Y(y) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\alpha_3^2$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \alpha_3^2 Z(z) = 0 \quad (2.10)$$

แทนค่าลงในสมการ (2.7) จะได้

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.11)$$

ฟังก์ชัน $X(x), Y(y)$ และ $Z(z)$ สามารถหาได้จากสมการ (2.8), (2.9) และ (2.10) ซึ่งสมการดังกล่าวเหล่านี้เป็นสมการฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์แบบง่าย ๆ คำตอบของสมการเหล่านี้คือ

$$X(x) = A \sin \alpha_1 x$$

$$Y(y) = B \sin \alpha_2 y$$

$$Z(z) = C \sin \alpha_3 z$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าจะต้องเป็นศูนย์ที่ผนังของโพรง แสดงว่าที่ $x=0$ และ $x=a$ ที่ $y=0$ และ $y=a$ ที่ $z=0$ และ $z=a$ ค่าไซน์ต้องเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\sin \alpha_1 x = 0 \text{ เมื่อ } \alpha_1 = \frac{n_1 \pi}{a}$$

$$\sin \alpha_2 y = 0 \text{ เมื่อ } \alpha_2 = \frac{n_2 \pi}{a}$$

$$\sin \alpha_3 z = 0 \text{ เมื่อ } \alpha_3 = \frac{n_3 \pi}{a}$$

โดยที่ $n_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n_3 = 0, 1, 2, 3, \dots$,

ดังนั้น

$$X(x) = A \sin \frac{n_1 \pi x}{a}$$

$$Y(y) = B \sin \frac{n_2 \pi y}{a}$$

$$Z(z) = C \sin \frac{n_3 \pi z}{a}$$

แทนค่า α_1 , α_2 และ α_3 ลงในสมการ (2.11) จะได้

$$\left(\frac{n_1 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

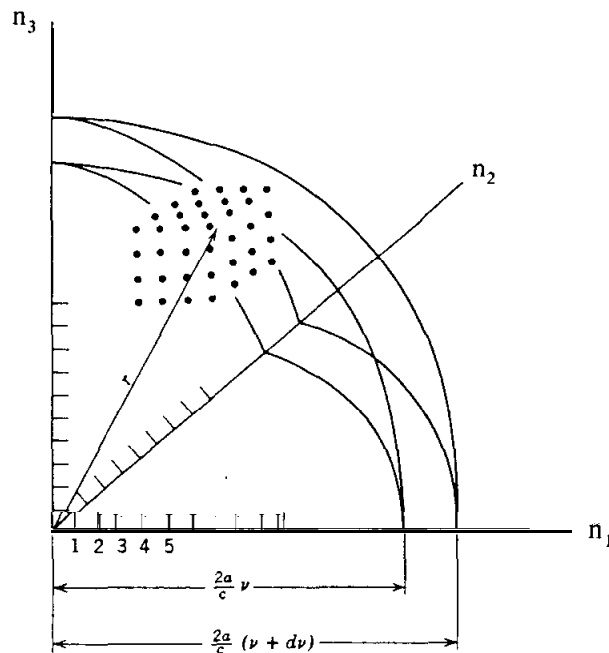
หรือ

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{a\omega}{\pi c}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2a\nu}{c}\right)^2$$

ได้ $\nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ (2.12)

สมการนี้แสดงให้เห็นข้อจำกัดของความถี่ที่เป็นไปได้ของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในโพรง
ต่อไปเราจะนับจำนวนความถี่ที่เป็นไปได้ในช่วงความถี่หนึ่งโดยการเขียนพิกัด n_1 ,
 n_2 และ n_3 แทน x , y และ z ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 2.3



รูป 2.3 แสดงระบบพิกัดฉากที่ใช้ในการนับจำนวนความถี่ที่เป็นไปได้ในโพรงรูปลูกบาศก์แสดงเพียงบางจุดเท่านั้น

แต่ละจุดแทนความถี่ที่เป็นไปได้ ให้ r เป็นรัศมีของวงกลมในพิกัด (n_1, n_2, n_3) โดยที่ $r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ ถ้า $N(v)dv$ เป็นจำนวนความถี่ที่เป็นไปได้ระหว่าง v และ $v+dv$ $N(r)dr$ เป็นจำนวนจุดที่อยู่ระหว่างทรงกลม รัศมี r และ $r+dr$ ดังนั้น

$$N(v)dv = N(r)dr$$

จากสมการ (2.12) $r = \frac{2av}{c}$ (2.13)

เนื่องจาก n_1, n_2, n_3 เป็นค่าบวก ดังนั้น คิดเฉพาะ $1/8$ ของปริมาตรวงแหวนทั้งหมดเท่านั้น นั่นคือ

$$N(r)dr = \frac{1}{8}(4\pi r^2 dr) = \frac{\pi r^2}{2} dr$$

จากสมการ (2.13) ได้ $r^2 dr = \left(\frac{2a}{c}\right)^3 v^2 dv$

และเนื่องจากแต่ละค่าความถี่มีโพลาไรเซชัน ได้สองแบบ ดังนั้น

$$N(v)dv = 2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c}\right)^3 v^2 dv = \frac{8\pi a^3 v^2}{c^3} dv$$
 (2.14)

ให้ $\langle \epsilon_v \rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของพลังงานของแต่ละคลื่นหนึ่ง

$\rho_T(v)dv$ เป็นอัตราการแผ่พลังงานรังสีต่อหน่วยปริมาตร หรือเป็นความหนาแน่นของพลังงานรังสีที่แผ่ออกมา เมื่อรังสีมีความถี่ระหว่าง v และ $v+dv$

$$\begin{aligned} \rho_T(v)dv &= \langle \epsilon_v \rangle \frac{N(v)dv}{a^3} \\ &= \frac{8\pi v^2}{c^3} \langle \epsilon_v \rangle dv \end{aligned}$$
 (2.15)

การหาพลังงานเฉลี่ยของแต่ละคลื่นหนึ่งนั้น พิจารณาว่าแต่ละคลื่นหนึ่งประพฤติตัวคล้ายฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์แบบง่าย ๆ โอกาสที่จะพบออสซิลเลเตอร์พลังงานระหว่าง ϵ และ $\epsilon + d\epsilon$ กำหนดโดยการแจกแจงของโบลท์ซมานน์

$$dw(\epsilon) = C e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$$
 (2.16)

เมื่อ C คือค่าคงที่ และ k คือค่าคงที่ของโบลท์ซมานน์ (1.38×10^{-23} จูล/องศาเคลวิน) พลังงานเฉลี่ยของออสซิลเลเตอร์ $\langle \epsilon \rangle$ กำหนดโดย

$$\langle \epsilon \rangle = \int \epsilon dw$$
 (2.17)

การหาค่าพลังงานเฉลี่ย จากสมการ (2.17) ได้นั้น ต้องหาค่าคงที่ C ก่อน ค่า C หาได้จาก การทำให้การกระจายนี้มีสภาพปกติ (normalized) กล่าวคือโอกาสที่จะพบออสซิลเลเตอร์ที่มี พลังงานในช่วง $0 \leq \epsilon \leq \infty$ ต้องเป็นหนึ่ง นั่นคือ

$$\int dw = C \int_0^{\infty} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon = 1$$

$$C = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon}$$

แทนค่า C ลงในสมการ (2.16) จะได้

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon} \quad (2.18)$$

ถ้าให้ $\beta = (kT)^{-1}$ สมการ (2.18) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= -\frac{d}{d\beta} \ln \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\beta} d\epsilon \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left[-\frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon\beta} d(-\epsilon\beta) \right] \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left[-\frac{1}{\beta} (e^{-\infty} - e^0) \right] \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \epsilon \rangle = kT} \quad (2.19)$$

ผลลัพธ์ที่ได้ข้างต้น รู้จักกันดีว่าเป็นหลักการแบ่งเท่ากันของพลังงาน แทนค่า $\langle \epsilon \rangle$ ลงใน สมการ (2.15) จะได้สูตรการแผ่รังสีของเรย์เลย์-จินส์

$$\boxed{\rho_T(v)dv = \frac{8\pi v^2 kT dv}{c^3}} \quad (2.20)$$

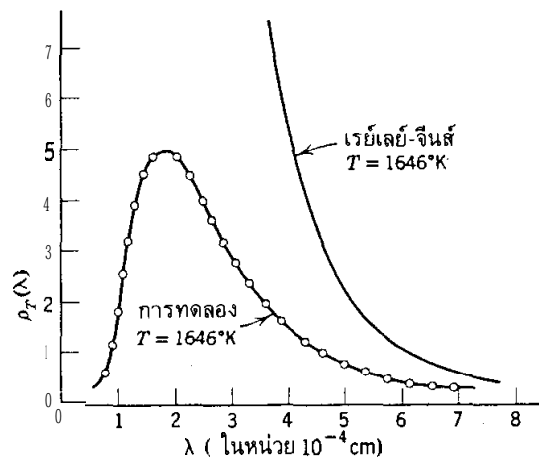
เขียนสมการข้างต้นให้อยู่ในเทอมของความยาวคลื่น โดย $v = c/\lambda$ และเนื่องจากความถี่เพิ่มขึ้น ตรงกับความยาวคลื่นลดลง ดังนั้น $dv = -(c/\lambda^2)d\lambda$ ความสัมพันธ์ระหว่าง $\rho_T(v)dv$ และ $\rho_T(\lambda)d\lambda$ คือ

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = -\rho_T(v)dv$$

เมื่อ $\rho_T(\lambda)d\lambda$ เป็นความหนาแน่นของพลังงานรังสีที่แผ่ออกมาซึ่งมีความยาวคลื่นระหว่าง λ และ $\lambda + d\lambda$ จะได้

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T d\lambda \quad (2.21)$$

สูตรของเรย์เลย์-จิ้นส์ ใช้ได้ดีในช่วงความถี่ต่ำคือค่าที่คำนวณได้จากสมการ 2.21 ให้ผลใกล้เคียงกับการทดลอง แต่ในช่วงความถี่สูงเช่นรังสีอัลตราไวโอเล็ตให้ค่าที่ขัดแย้งกับการทดลอง กล่าวคือ ตามสูตรของเรย์เลย์-จิ้นส์ (สมการ 2.21) เมื่อ $\lambda \rightarrow 0$ จะได้ $\rho_T(\lambda) \rightarrow \infty$ แต่จากผลการทดลอง $\rho_T(\lambda)$ มีค่าแน่นอนและเท่ากับศูนย์เมื่อ λ เป็นศูนย์ ดังแสดงในรูป



รูป 2.4 แสดงสเปกตรัม การแผ่รังสีที่คำนวณโดยเรย์เลย์-จิ้นส์เปรียบเทียบกับ การทดลอง สำหรับค่าพลังงานทั้งหมดต่อหน่วยปริมาตร หาได้จาก

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda) d\lambda &= 8\pi kT \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^4} d\lambda \\ &= 8\pi kT \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda^3} \right) \end{aligned}$$

ค่าที่ได้เป็นอนันต์ นอกจาก $T = 0$ ซึ่งเป็นความล้มเหลวของทฤษฎีของเรย์เลย์-จิ้นส์

2.4 สูตรของแพลงค์

ในปี ค.ศ. 1901 แพลงค์ได้เสนอสมมติฐานเพื่ออธิบายผลการทดลองการแผ่รังสีของวัตถุดำ แนวความคิดของแพลงค์ต่างกับของนักฟิสิกส์ทั้งหลายที่ได้เคยอธิบายวัตถุดำมาแล้ว

กล่าวคือเขาได้เสนอว่า พลังงานของออสซิลเลเตอร์มีค่าได้เป็นค่า ๆ (discrete) เช่น $h\nu, 2h\nu, 3h\nu$...หรือเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปว่า

$$E = nh\nu$$

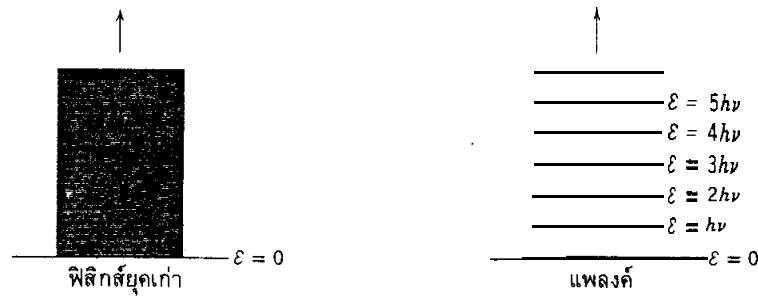
E เป็นพลังงานของออสซิลเลเตอร์

n คือเลขจำนวนเต็ม 1, 2, 3, ...

h เป็นค่าคงที่ ต่อมาเรียกว่า ค่าคงที่ของพลังค์ มีค่าเท่ากับ 6.62×10^{-34} จูล.วินาที

ν คือความถี่ของออสซิลเลเตอร์

แนวความคิดนี้นับว่าเป็นการปฏิวัติแนวความคิดของฟิสิกส์ยุคเก่า (ตามฟิสิกส์ยุคเก่า พลังงานของออสซิลเลเตอร์มีค่าแบบต่อเนื่อง คือมีค่าได้ทุกค่าจาก 0 ถึง ∞) และถือกันว่าเป็นจุดกำเนิดของทฤษฎีควอนตัม การที่ออสซิลเลเตอร์มีค่าพลังงานเป็นค่า ๆ เช่นนี้ เรียกว่ามีพลังงานควอนไตซ์ (quantized energy) ออสซิลเลเตอร์จะดูดกลืนหรือแผ่พลังงานรังสีด้วยจำนวนที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับความถี่ ν ของออสซิลเลเตอร์เท่านั้น



รูป 2.5 แสดงพลังงานของออสซิลเลเตอร์ตามฟิสิกส์ยุคเก่าและตามสมมติฐาน สมมติฐานของพลังค์

ตามฟิสิกส์ยุคเก่าพลังงานของออสซิลเลเตอร์มีค่าเท่าใดก็ได้จาก 0 ถึง E_{\max} แต่ตามสมมติฐานของพลังค์ ออสซิลเลเตอร์มีพลังงานเป็นค่า ๆ ไม่ต่อเนื่อง

การคำนวณหาพลังงานเฉลี่ยของออสซิลเลเตอร์ใช้การแจกแจงของโบลท์ซมานน์ เช่นกัน แต่เนื่องจากพลังงานของออสซิลเลเตอร์มีค่าไม่ต่อเนื่องและมีค่าเปลี่ยนไปด้วยปริมาณ $h\nu$ ดังนั้นสมการ (2.18) จึงต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอินทิเกรตเป็นเครื่องหมายรวม จะได้

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}$$

ให้ $\beta = (kT)^{-1}$ สมการข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_n e^{-\beta n h \nu} \quad (2.22)$$

เทอมในเครื่องหมายรวมกระจายได้เป็น

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\beta n h \nu} &= 1 + e^{-\beta h \nu} + e^{-2\beta h \nu} + e^{-3\beta h \nu} + \dots \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \end{aligned}$$

เมื่อ $z = e^{-\beta h \nu}$ เนื่องจาก

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

ดังนั้น $\sum_n e^{-\beta n h \nu} = (1 - e^{-\beta h \nu})^{-1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \frac{-\partial}{\partial \beta} \ln (1 - e^{-\beta h \nu})^{-1} \\ &= -(1 - e^{-\beta h \nu}) \frac{\partial}{\partial \beta} (1 - e^{-\beta h \nu})^{-1} \\ &= -(1 - e^{-\beta h \nu}) (-1) (1 - e^{-\beta h \nu})^{-2} [-(-h\nu) e^{-\beta h \nu}] \\ &= \frac{h\nu e^{-\beta h \nu}}{1 - e^{-\beta h \nu}} \end{aligned}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

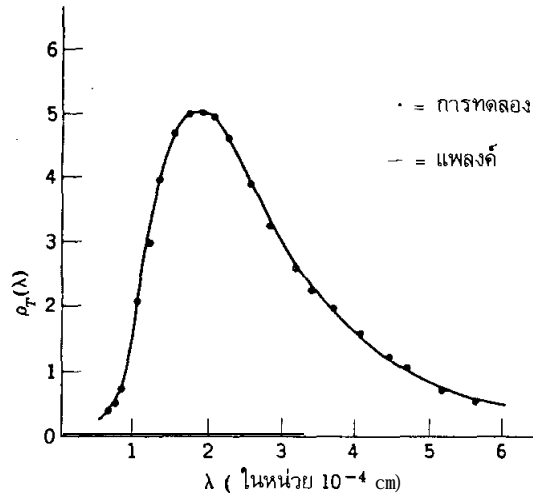
แทนค่า $\langle \varepsilon \rangle$ ลงในสมการ (2.15) จะได้

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (2.23)$$

หรือ

$$\rho_T(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (2.24)$$

สมการ (2.23) และ (2.24) คือสมการการแผ่รังสีของแพลงค์



รูป 2.6 แสดงการเปรียบเทียบสเปกตรัมการแผ่รังสีที่คำนวณโดยแพลงค์ และการทดลอง เมื่อ $T = 1646^{\circ}$

พิจารณากรณีที่ความยาวคลื่นยาว กล่าวคือ $hc/\lambda kT \ll 1$ กระจายเทอมเอกซ์โปเนนเชียลออกเป็นอนุกรมกำลังของ $hc/\lambda kT$ และใช้เฉพาะเทอมกำลังหนึ่งเท่านั้น จะได้

$$e^{hc/\lambda kT} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

แทนค่าลงในสมการ (2.24) จะได้

$$\begin{aligned} \rho_T(\lambda) &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{k\lambda T}{hc} \\ &= \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสูตรของเรย์เลย์-จินส์ (สมการ 2.21)

กรณีความยาวคลื่นสั้น หรือ $hc/\lambda kT \gg 1$

$e^{hc/\lambda kT}$ จะมีค่ามากเทียบกับ 1

$$\text{ดังนั้น } \rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT}$$

สอดคล้องกับสูตรของวีน (สมการ 2.4)

เมื่อใช้สมการของแพลงค์ คำนวณหาพลังงานทั้งหมดที่แผ่ออกมาต่อหน่วยปริมาตร ได้ดังนี้

$$\rho_T = \int_0^{\infty} \rho_T(\nu) d\nu$$

$$d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

ให้ $x = h\nu/kT$ $d\nu = \frac{kT}{h} dx$

$$\rho_T = \frac{8\pi(kT)^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

ผลของการอินทิเกรต ได้ค่า $\pi^4/15$ ดังนั้น

$$\rho_T = \frac{8\pi(kT)^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$= \frac{8\pi^5}{15h^3 c^3} (kT)^4$$

$$\rho_T = aT^4 \tag{2.25}$$

เมื่อ $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}$

สมการ (2.25) ให้ผลสอดคล้องกับสูตรของสเตฟาน-โบลทซ์มานน์ $I_T = \sigma T^4$

โดยที่ $\sigma = \frac{ca}{4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ วัตต์/ม.}^2 \text{ (เคลวิน)}$

นอกจากนี้สมการของแพลงค์ยังใช้หาความสัมพันธ์ของ λ_{\max} และ T ได้ดังนี้ จากสมการ (2.24)

$$\rho_T(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

ให้ $x = hc/\lambda kT$ แทนค่าลงในสมการข้างต้น ได้

$$\rho_T(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi k^5 T^5}{c^4 h^4} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} d\lambda$$

ที่ λ_{\max} จะได้ $\frac{d\rho_T(\lambda)}{dx} = 0$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{8\pi k^5 T^5}{c^4 h^4} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \right) = 0$$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{e^x - 1} \right) = 0$$

จะได้
$$5 - x = 5 e^{-x}$$

$$x = 4.97$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 4.97$$

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.97 k}$$

$$= 2.90 \times 10^{-3} \text{ เมตร.เคลวิน}$$

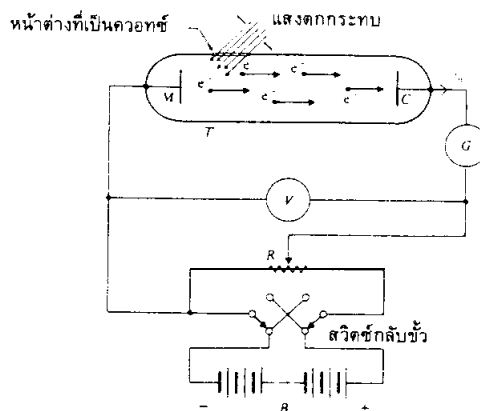
สเปกตรัมการแผ่รังสีของวัตถุดำ เมื่อคำนวณจากสมการของพลังค์ ปรากฏว่าให้ค่าตรงกับผลการทดลองทุกความยาวคลื่น ดังแสดงในรูป 2.6

2.5 ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริก

ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริกเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อแสงความถี่สูงตกกระทบโลหะแล้วมีอิเล็กตรอนหลุดจากผิวโลหะ เฮิรตซ์ (Hertz) เป็นผู้พบปรากฏการณ์นี้ในปี ค.ศ. 1887 ขณะที่เขาทำการทดลองเพื่อสนับสนุนทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ และในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ ได้สร้างสมการขึ้นมาเพื่ออธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริกโดยใช้สมมติฐานของพลังค์ มาประยุกต์กับการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ต่อมาในปี ค.ศ. 1916 มิลลิแกน (R.A. Millikan) ได้ทำการทดลองปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริกอย่างสมบูรณ์ ผลการทดลองปรากฏว่าสอดคล้องกับสมการของไอน์สไตน์เป็นอย่างดี

2.5.1) การทดลอง

รูป 2.7 แสดงส่วนประกอบของเครื่องมือ เพื่อใช้ศึกษาปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริก ประกอบด้วยหลอดแก้วสุญญากาศ ภายในหลอดมีแผ่นโลหะ M และ C M เป็นแผ่นโลหะที่จะ



รูป 2.7 แสดงการจัดเครื่องมือเพื่อศึกษาปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริก

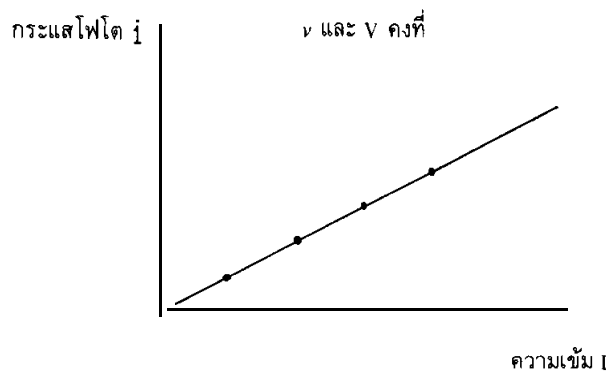
ให้อิเล็กตรอนเมื่อแสงตกกระทบ C เป็นแผ่นโลหะที่ทำหน้าที่รวบรวมอิเล็กตรอน เมื่อแสงความถี่เดียวตกกระทบแผ่น M อิเล็กตรอนจะหลุดออกมาจากผิวโลหะ เราเรียก อิเล็กตรอนเหล่านี้ว่าโฟโตอิเล็กตรอน ถ้า C มีศักย์เป็นบวกเมื่อเทียบกับ M โฟโตอิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ไปยัง C ทำให้เกิดกระแสไหลในวงจรซึ่งวัดค่าได้ด้วยแอมป์มิเตอร์ G เมื่อความต่างศักย์ V เพิ่มขึ้น กระแสจะเพิ่มขึ้นด้วยจนถึงค่าคงที่ค่าหนึ่ง เรียกกระแสอิ่มตัว (saturation current)

ถ้าทำให้ศักย์ที่ C เป็นลบเทียบกับ M โดยใช้สวิทช์กลับขั้ว โฟโตอิเล็กตรอนจะถูกผลัก ทำให้อิเล็กตรอนไปถึง C ได้ยากขึ้น เฉพาะโฟโตอิเล็กตรอนที่มีพลังงานจลน์มากกว่า eV เท่านั้น จึงสามารถไปถึง C ได้ และทำให้เกิดกระแสไหลในวงจรอ่านด้วยแอมป์มิเตอร์ G เมื่อเพิ่มความต่างศักย์ที่ C ให้เป็นลบมากขึ้น กระแสที่ไหลในวงจรจะอ่านค่าได้น้อยลงจนกระทั่งถึงค่าหนึ่งที่กระแสเป็นศูนย์ แสดงว่าไม่มีอิเล็กตรอนมาถึง C แม้แต่ตัวที่มีพลังงานจลน์มากที่สุดก็ตาม ศักย์ที่ทำให้กระแสเป็นศูนย์เรียกว่าศักย์หยุดยั้ง (stopping potential) ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน (T_{\max}) และศักย์หยุดยั้ง (V_0) คือ

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = e V_0 \quad (2.26)$$

จากการแปรค่าต่าง ๆ ในการทดลอง เราสามารถสรุปผลการทดลองได้ดังนี้

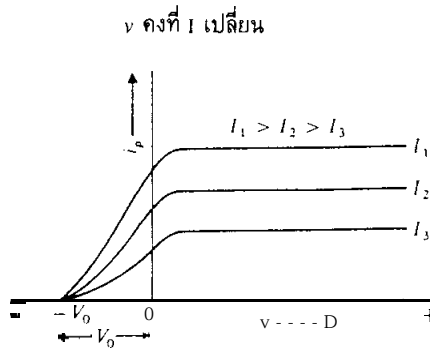
1. เมื่อฉายแสงตกกระทบผิวโลหะ โฟโตอิเล็กตรอนจะหลุดออกมาทันที ช่วงเวลาที่ใช้จากเมื่อแสงตกกระทบผิวโลหะจนกระทั่งโฟโตอิเล็กตรอนหลุดออกมานั้น จะน้อยกว่า 10^{-9} วินาที ไม่ว่าความเข้มของแสงจะน้อยเพียงใดก็ตาม
2. เมื่อความถี่คงที่ กระแสโฟโต (i) เป็นปริมาณโดยตรงกับความเข้มของแสง (I) ที่ตกกระทบผิวโลหะ ดังแสดงในรูป 2.8



รูป 2.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโฟโต (i) และความเข้ม I เมื่อ ν และ V คงที่

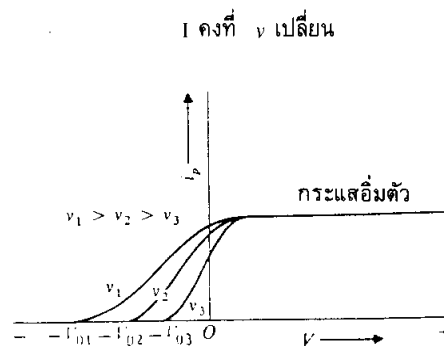
3. สำหรับผิวโลหะใดๆ เพื่อให้มีอิเล็กตรอนหลุดออกมา แสงที่ตกกระทบผิวโลหะนั้นต้องมีความถี่ อย่างน้อยเท่ากับความถี่ขีดเริ่ม (threshold frequency) ν_0 ค่า ν_0 จะต่างกันสำหรับโลหะชนิดต่างๆ

4. พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน T_{\max} ไม่ขึ้นกับความเข้มของแสงที่ตกกระทบผิวของโลหะ เมื่อฉายแสงความถี่เดียวแต่ความเข้มต่างกันไปบนผิวโลหะ พบว่าได้ศักย์หยุดยั้ง V_0 เท่ากัน โดยที่ $T_{\max} = eV_0$ ดังแสดงในรูป 2.9



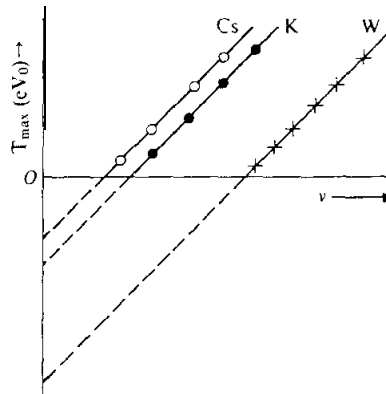
รูป 2.9 แสดงว่าศักย์หยุดยั้ง V_0 เท่ากัน สำหรับแสงตกกระทบที่มีความเข้ม (I) ต่างๆ กัน แต่มีความถี่ (ν) เดียวกัน

5. พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน ขึ้นกับความถี่ของแสงที่ตกกระทบผิวโลหะ ดังแสดงในรูป 2.10 เมื่อฉายแสงที่มีความถี่ต่างๆ กัน แต่มีความเข้มเดียวกันไปบนผิวโลหะ พบว่าได้ศักย์หยุดยั้ง V_0 ต่างๆ กัน



รูป 2.10 แสดงว่าศักย์หยุดยั้ง (และพลังงานจลน์ของโฟโตอิเล็กตรอน) เป็นฟังก์ชันกับความถี่ของแสงตกกระทบถึงแม้ว่าความเข้มจะเท่ากัน

6. เมื่อฉายแสงที่มีความถี่ต่าง ๆ กัน ตกกระทบบนผิวโลหะต่างชนิดกัน (เปลี่ยนชนิดของโลหะ M) พบว่าความสัมพันธ์ระหว่าง T_{\max} และ ν แสดงดังรูป 2.11 เมื่อใช้โลหะสามชนิด คือ ซีเซียม (Cs), โพแทสเซียม (K) และทังสเตน (W)



รูป 2.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า $T_{\max} (= eV_0)$ ที่วัดได้ กับ ν สำหรับโลหะชนิดต่าง ๆ กัน

สำหรับโลหะชนิดหนึ่ง ๆ ความสัมพันธ์ระหว่าง T_{\max} และ ν เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$T_{\max} = a\nu + b \quad (2.27)$$

เมื่อ a เป็นความชันของเส้นตรงซึ่งมีค่าเท่ากันไม่ว่าจะเป็นผิวของโลหะชนิดใดก็ตาม

b เป็นค่าที่ตัดกับแกนตั้ง (ดูรูป 2.11) ซึ่งมีค่าแตกต่างกันสำหรับโลหะที่ต่างชนิดกัน

2.5.2) การอธิบายผลการทดลองด้วยทฤษฎียุคเก่า

ทฤษฎียุคเก่า (ทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า) ไม่สามารถอธิบายผลการทดลองข้อหนึ่ง เพราะตามทฤษฎีคลื่นถ้าแสงมีความเข้มน้อย ๆ ต้องใช้เวลาช่วงหนึ่งหลังจากแสงตกกระทบบนผิวโลหะแล้วจึงสามารถทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาได้ (จากการทดลองพบว่า อิเล็กตรอนหลุดออกมาทันที หลังจากฉายแสงตกกระทบบนผิวโลหะ ถึงแม้ความเข้มของแสงจะน้อยเพียงใดก็ตาม) ส่วนในข้อสองเมื่อความเข้มของแสงมากขึ้น พลังงานสำหรับอิเล็กตรอนที่ผิวโลหะจะดูดกลืนก็มีจำนวนมาก ดังนั้นจำนวนอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาหรือกระแสไฟโตมีค่ามากขึ้น ในข้อนี้ฟิสิกส์ยุคเก่าอธิบายได้สอดคล้องกับผลการทดลอง สำหรับข้อสามทฤษฎียุคเก่าอธิบายไม่ได้ เพราะตามทฤษฎียุคเก่าไม่มีความถี่ต่ำสุดของแสงที่จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาเมื่อแสงตกกระทบบนผิวโลหะ แต่ถ้าฉายแสงให้เวลานานพอสมควรแล้วจะทำให้อิเล็กตรอนสามารถหลุดจากผิวโลหะนั้นได้ ข้อสี่และข้อห้า ทฤษฎียุคเก่าไม่สามารถอธิบายได้ เพราะตามทฤษฎี

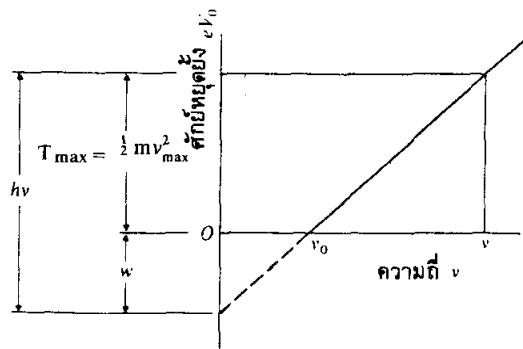
คลื่น พลังงานคลื่นเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเข้ม แต่ผลการทดลองพบว่าพลังงานของอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาไม่ขึ้นกับความเข้มแต่ขึ้นกับความถี่ของแสง

2.5.3) การอธิบายผลการทดลองด้วยทฤษฎีควอนตัม

ในปี ค.ศ.1905 ไอน์สไตน์สามารถอธิบายผลการทดลองของปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกได้ โดยดัดแปลงสมมติฐานควอนตัมของพลังค์มาประยุกต์กับการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (แนวคิดนี้ทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบลในปี ค.ศ.1921) สมมติฐานควอนตัมกล่าวว่า รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ ν ที่ตกกระทบผิวโลหะประกอบด้วยกลุ่มของพลังงาน แต่ละกลุ่มของพลังงานเรียกว่าควอนตัมหรือโฟตอน (สมมติฐานควอนตัมเรียกว่า สมมติฐานโฟตอนด้วย) ถ้าอิเล็กตรอนดูดกลืนโฟตอนพลังงาน $h\nu$ เพื่อที่จะหลุดพ้นจากผิวโลหะ ในการนี้ต้องใช้พลังงานจำนวน w ที่เรียกว่า เวิร์คฟังก์ชัน (work function) ของโลหะและพลังงานส่วนที่เหลือ (เท่ากับ $h\nu-w$) ปรากฏในรูปของพลังงานจลน์ T_{\max} ของอิเล็กตรอน ดังนั้น

$$T_{\max} = h\nu - w \quad (2:28)$$

สมการข้างต้น มีรูปแบบเดียวกับสมการ (2.27) จากการเปรียบเทียบกันแสดงว่า h คือค่าความชันที่คงที่ a และ $-w$ คือ b ที่มีค่าไม่เท่ากันสำหรับโลหะต่างชนิดกัน รูป 2.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ เหล่านี้



รูป 2.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนและความถี่ของโฟตอนตกกระทบ

เมื่อใช้สมมติฐานโฟตอนอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก จะได้ว่าการเกิดโฟโตอิเล็กตรอนไม่มีการเสียเวลาเพราะเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับอิเล็กตรอน ถ้าความเข้มของแสงเพิ่มขึ้น จำนวนโฟตอนในลำแสงที่ตกกระทบจะมากขึ้นด้วย ทำให้อิเล็กตรอนหลุด

ออกมาจากผิวโลหะเพิ่มขึ้น นั่นคือ กระแสมีค่ามากขึ้น พิจารณาสมการ (2.28) จะเห็นว่าพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน ไม่ขึ้นกับความเข้มของแสงแต่ขึ้นกับความถี่ของแสง เมื่อความถี่ของแสงลดลงจนกระทั่งถึงค่าหนึ่ง (ν_0) ที่ทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมของโลหะ แต่ไม่มีพลังงานจลน์ ($T_{\max} = 0$) แสดงว่าพลังงานของโฟตอนเท่ากับเวิร์คฟังก์ชัน (หรือพลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอน) ของผิวโลหะนั้น นั่นคือ

$$h\nu_0 = w \quad (2.29)$$

แทนค่า T_{\max} จากสมการ (2.26) ลงในสมการ (2.28) ของไอน์สไตน์ จะได้

$$eV_0 = h\nu - w \quad (2.30)$$

หรือ
$$V_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{w}{e} \quad (2.31)$$

มิลลิแกนได้ทำการทดลองเพื่อตรวจสอบสมการของไอน์สไตน์ โดยการฉายแสงเอกรงค์ชนิดต่าง ๆ ไปยังโลหะเพื่อวัดพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน แล้วเขียนกราฟระหว่าง V_0 กับ ν ปรากฏว่าได้กราฟเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ h/e ซึ่งสอดคล้องกับสมการของไอน์สไตน์

การอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกโดยใช้ทฤษฎีควอนตัม แสดงให้เห็นถึงความสำเร็จของสมมติฐานโฟตอน ดังนั้นตามแนวความคิดของไอน์สไตน์ พลังงานควอนไทซ์ และแต่ละโฟตอนมีพลังงาน $h\nu$ (ข้อสังเกต อิเล็กตรอนอิสระไม่สามารถดูดกลืนโฟตอน เพราะทั้งโมเมนตัมและพลังงานไม่อนุรักษ์ ในปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกแม้ว่าอิเล็กตรอนที่ยึดแน่นกับอะตอม (bound electron) จะดูดกลืนโฟตอน แต่มีพลังงานจำนวนเล็กน้อยที่ทำให้อะตอมถอยหลัง (recoiling atom) เพื่อให้อนุรักษ์ทั้งโมเมนตัมและพลังงาน แต่พลังงานค่านี้น้อยมากจนละทิ้งได้)

ตัวอย่างที่ 2.1 แสงความยาวคลื่น $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ตกกระทบบนผิวโปตัสเซียม ศักย์หยุดยั้งสำหรับอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาคือ 0.36 V จงคำนวณหาพลังงานสูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน เวิร์คฟังก์ชัน และความถี่ขีดเริ่ม

จาก
$$T_{\max} = eV_0 = 0.36 \text{ eV}$$

พลังงานสูงสุด T_{\max} ของโฟโตอิเล็กตรอน คือ 0.36 eV

จากสมการ
$$T_{\max} = h\nu - w$$

$$eV_0 = h\nu - w$$

หรือ
$$w = h\nu - eV_0$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{hc}{\lambda} - eV_0 \\
&= \frac{(6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}) (3 \times 10^8 \text{ เมตร/วินาที})}{(5893 \times 10^{-10} \text{ เมตร}) (1.6 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})} 0.36 \text{ eV} \\
&= 2.15 \text{ eV} - 0.36 \text{ eV} \\
&= 1.79 \text{ eV}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเวริคฟังก์ชันของโปตัสเซียม คือ 1.79 eV

ความถี่ขีดเริ่มหาได้จากความสัมพันธ์ $h\nu_0 = w$

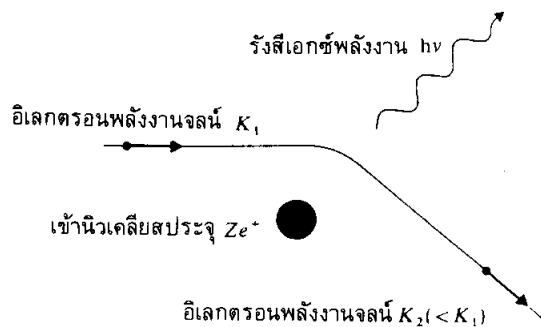
$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \frac{w}{h} \\
&= \frac{(1.79 \text{ eV}) (1.6 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})}{(6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที})} \\
&= 4.33 \times 10^{14} \text{ รอบ/วินาที}
\end{aligned}$$

ความถี่ขีดเริ่ม คือ 4.33×10^{14} รอบ/วินาที

2.6 การเกิดรังสีเอกซ์

ในปี ค.ศ.1895 เรินท์เกน (Roentgen) ค้นพบว่าเมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงวิ่งชนเป้าโลหะ จะได้รังสีที่มีอำนาจทะลุทะลวงสูงแผ่ออกมา เนื่องจากไม่ทราบว่ารังสีนี้คืออะไรเขาจึงเรียกรังสีเอกซ์ (x-rays) ในปี ค.ศ.1906 บาร์คลา (Barkla) ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับโพลาไรเซชันของรังสีเอกซ์ ต่อมาได้มีการศึกษารังสีเอกซ์ทำให้เราทราบว่ารังสีเอกซ์เป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นระหว่าง 0.1 \AA และ 100 \AA

รังสีเอกซ์เกิดได้อย่างไร ตามทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า อนุภาคที่มีประจุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจะแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง (มีพลังงานจลน์ T) วิ่งชนเป้าจะมีแรงดึงดูดระหว่างประจุลบของอิเล็กตรอนและประจุบวกของนิวเคลียสของอะตอม แสดงดังรูป 2.13 แรงนี้จะเปลี่ยนแนวการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน ซึ่งเท่า

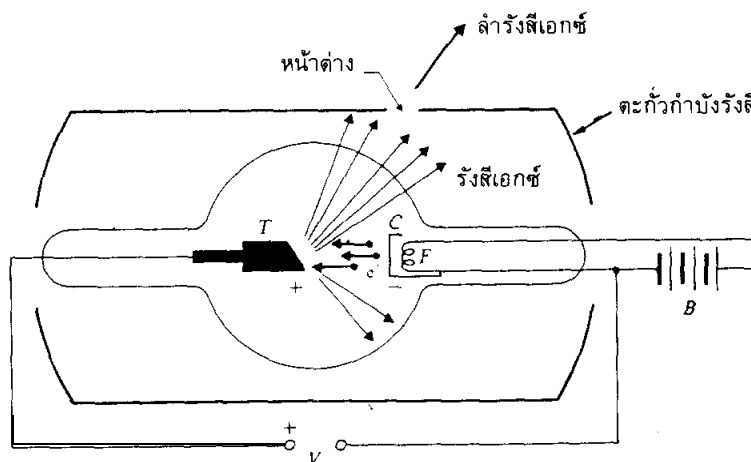


รูป 2.13 แสดงการเกิดรังสีเอกซ์โดยขบวนการเบรมสตราห์ลุง

กับเรากล่าวว่าอิเล็กตรอนถูกหน่วง (หรือถูกเร่ง) ดังนั้นมันจะแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา พลังงานที่อิเล็กตรอนสูญเสียไปจะปรากฏในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าพลังงาน $h\nu$ ซึ่งเราเรียกว่ารังสีเอกซ์ ขบวนการของการแผ่รังสีที่เกิดขึ้นนี้ เรียกว่า เบรมสตราห์ลุง (Bremsstrahlung)

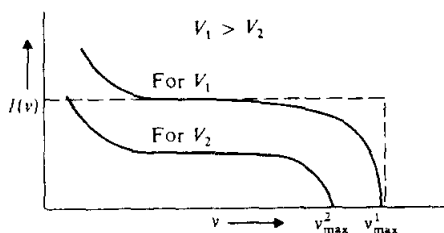
รูป 2.14 แสดงอุปกรณ์ที่ใช้ผลิตรังสีเอกซ์ อิเล็กตรอนจะหลุดออกมาจากคาโทด C ในหลอดรังสีเอกซ์ที่เป็นสุญญากาศ แล้วอิเล็กตรอนเหล่านี้ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์สูง ซึ่งมีค่าหลายพันโวลต์ระหว่างคาโทดและแอโนด พลังงานจลน์ T ของอิเล็กตรอนก่อนวิ่งชนเป้าแอโนด คือ

$$T = eV \tag{2.32}$$



รูป 2.14 แสดงการผลิตรังสีเอกซ์จากหลอดรังสีเอกซ์

เมื่ออิเล็กตรอนเหล่านี้กระทบเป้าความเร็วจะลดลงจนเป็นศูนย์ พลังงานจลน์ที่สูญเสียไปประมาณ 98% จะกลายเป็นความร้อน ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีระบบระบายความร้อนให้กับหลอดรังสีเอกซ์ พลังงานจลน์เพียงส่วนน้อยที่เหลือปรากฏในรูปของรังสีเอกซ์ เนื่องจากรังสีเอกซ์มีอำนาจในการทะลุทะลวงสูงและเป็นอันตรายต่อสุขภาพมาก ดังนั้นจึงหุ้มหลอดรังสีเอกซ์ด้วยตะกั่วสำหรับกำบังรังสี และให้รังสีเอกซ์ผ่านหน้าต่างออกมาเท่านั้น ดังรูป 2.14

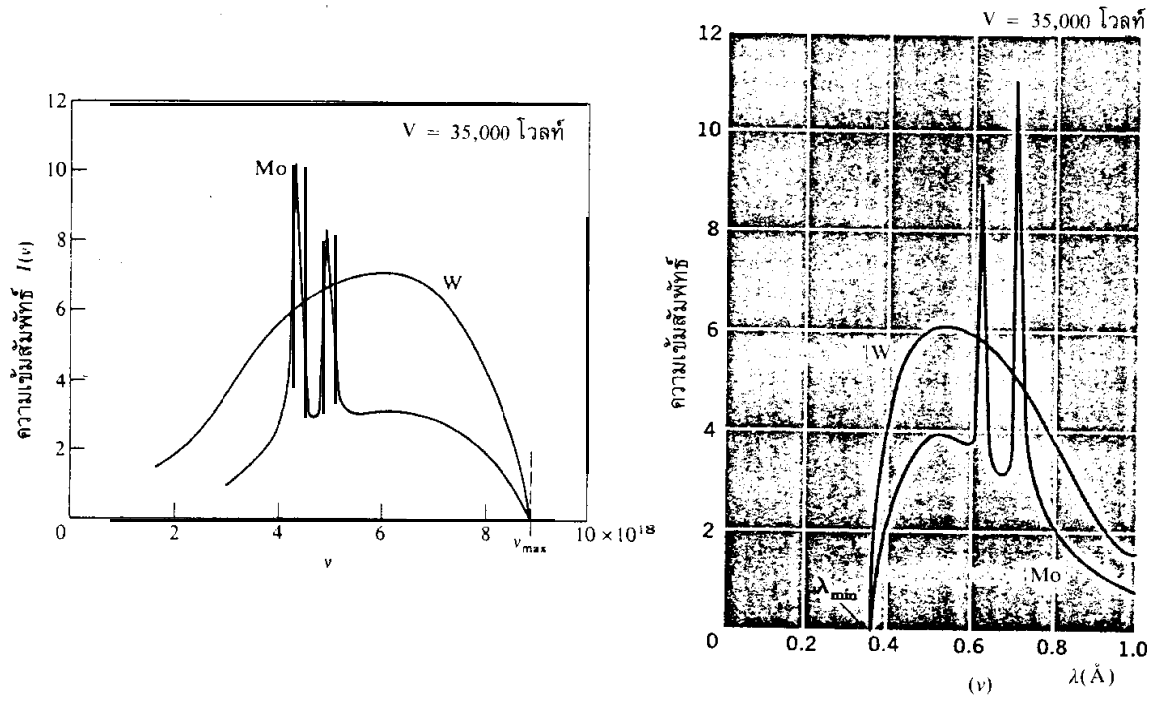


รูป 2.15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้ม $I(v)$ กับความถี่ v ของสเปกตรัมต่อเนื่องของรังสีเอกซ์เมื่อความต่างศักย์ที่ให้แก่หลอดรังสีเอกซ์ต่างกัน

รูป 2.15 แสดงสเปกตรัมของรังสีเอกซ์ เป็นกราฟของความเข้ม $I(\nu)$ และความถี่ ν สำหรับความต่างศักย์สองค่าที่ให้แก่หลอดรังสีเอกซ์ รูป 2.16 เป็นกราฟของ $I(\nu)$ กับ ν สำหรับเป้าที่ต่างกันสองชนิด คือ ทังสเตน (W) และโมลิบดีนัม (Mo) เมื่อให้ความต่างศักย์แก่หลอดรังสีเอกซ์ค่าเดียวกัน ลักษณะของสเปกตรัมรังสีเอกซ์ สรุปได้ดังนี้

ก) สเปกตรัมของรังสีเอกซ์จากเป้าใด ๆ มีการกระจายการแผ่รังสีอย่างต่อเนื่องทุกค่าความถี่จนถึงความถี่สูงสุดค่าหนึ่ง ν_{\max} ค่าของ ν_{\max} ไม่ขึ้นกับชนิดสารของเป้า (ดูรูป 2.16) แต่ขึ้นกับความต่างศักย์ V (ดูรูป 2.15) ดังนั้น ν_{\max} เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ V กล่าวคือ

$$\frac{\nu_{\max}}{V} = \text{คงที่} \quad (2.33)$$



รูป 2.16 แสดงสเปกตรัมรังสีเอกซ์ เมื่อใช้ทังสเตน (W) และโมลิบดีนัม (Mo) เป็นเป้า

- ก. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสัมพัทธ์กับความถี่
- ข. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสัมพัทธ์กับความยาวคลื่น

ข) ในกรณีของ Mo มียอดแหลมอยู่บนเส้นสเปกตรัมต่อเนื่องของรังสีเอกซ์ ดูรูป 2.16 ตำแหน่งของยอดแหลมนี้ไม่ขึ้นกับการเปลี่ยน ν แต่ปรากฏที่ตำแหน่งต่าง ๆ กันไปในสารต่างชนิดกัน เส้นเหล่านี้เรียกรังสีเอกซ์ลักษณะเฉพาะ (characteristic x-ray lines) ซึ่งขึ้นกับธรรมชาติของสารที่เป็นเป้า

การที่ความถี่สูงสุด ν_{\max} ขึ้นกับ V ตามสมการ (2.33) นั้น ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้ายุคเก่าอธิบายไม่ได้ แต่สมมติฐานของโฟตอนอธิบายได้ กล่าวคือเมื่ออิเล็กตรอนตกกระทบเป้าทำให้เกิดโฟตอนขึ้น และในกรณีที่อิเล็กตรอนนั้นสูญเสียพลังงานทั้งหมด จะทำให้โฟตอนที่เกิดมีพลังงาน $h \nu_{\max}$ ตามความสัมพันธ์

$$h \nu_{\max} = eV \quad (2.34)$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\nu_{\max}}{V} = \frac{e}{h} = \text{คงที่} \quad (2.35)$$

สมการ (2.35) สอดคล้องกับผลการทดลองสมการ (2.33) เมื่อแทนค่า $\lambda \nu = c$ ลงในสมการ (2.35) จะได้

$$\frac{c}{\lambda_{\min} V} = \frac{e}{h}$$

$$\text{หรือ} \quad \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad (2.36)$$

แทนค่า h, c และ e ลงในสมการข้างต้น เราได้

$$\lambda_{\min} = \frac{1.24 \times 10^{-4}}{V} \text{ ชม.} \quad (2.37)$$

เมื่อ V มีหน่วยเป็นโวลต์

วิธีการนี้ใช้หาค่า e/h ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับที่หาได้โดยวิธีการแบบอื่น นับว่าเป็นการยืนยันถึงความสำเร็จของสมมติฐานโฟตอนอีกกรณีหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 2.2 ในการผลิตรังสีเอกซ์ ความยาวคลื่น 1.377 \AA จากเป้าที่เป็นทองแดงในหลอดรังสีเอกซ์ เราต้องให้ความต่างศักย์แก่หลอด $9,000$ โวลต์ จงคำนวณหาอัตราส่วนของ h/e

$$\text{จากสมการ (2.34) } h\nu_{\max} = eV$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{h}{e} = \frac{V}{\nu_{\max}} = \frac{V\lambda_{\min}}{c}$$

$$= \frac{(9,000 \text{ โวลต์}) (1.347 \times 10^{-10} \text{ เมตร})}{(3 \times 10^8 \text{ เมตร/วินาที})}$$

$$\frac{h}{e} = 4.13 \times 10^{-15} \text{ โวลต์-วินาที}$$

แทนค่า $e = 1.602 \times 10^{-19}$ คูลอมป์ ดังนั้นค่าคงที่ของแพลงค์ คือ

$$h = (4.13 \times 10^{-15} \text{ โวลต์-วินาที}) (1.602 \times 10^{-19} \text{ คูลอมป์})$$

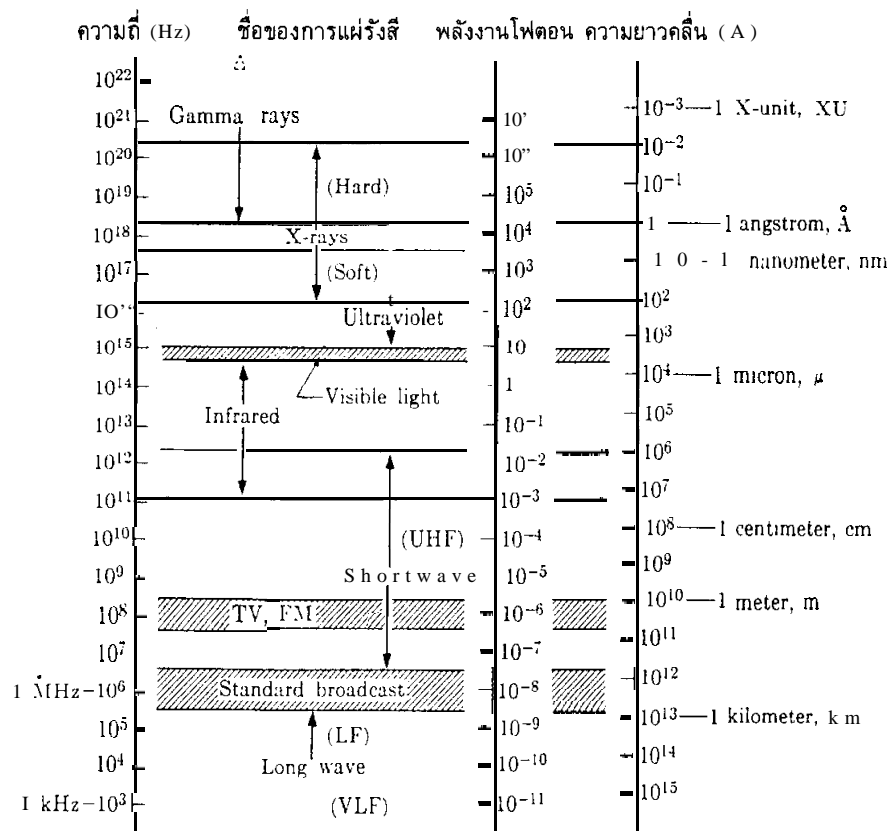
$$= 6.616 \times 10^{-34} \text{ โวลต์-วินาที คูลอมป์}$$

$$= 6.616 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที}$$

ค่าที่ได้นี้ให้ผลสอดคล้องกับค่าที่ถูกต้องคือ 6.625×10^{-34} จูล-วินาที

2.7 โฟตอน

ก่อนที่จะศึกษาปรากฏการณ์อื่น ๆ ซึ่งแสดงถึงความสำเร็จของสมมติฐานโฟตอน ให้เราพิจารณาลักษณะเฉพาะของโฟตอนก่อน รังสีที่แผ่ออกมาจากวัตถุดำ (รังสีความร้อน) แสงที่มองเห็นได้ (ซึ่งใช้ในปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก) และรังสีเอกซ์ ทั้งสามกรณีนี้เป็นเพียงช่วงหนึ่งของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นต่างกัน ดังแสดงในรูป 2.17 ถ้าสมมติฐานของโฟตอนใช้ได้กับช่วงใดช่วงหนึ่งของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า แสดงว่ามันควรจะใช้ได้กับทุกช่วงความยาวคลื่น กล่าวคือเราอาจพิจารณาการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ใด ๆ ได้ว่าประกอบด้วยโฟตอน พิจารณา มวล พลังงาน และโมเมนตัม ของโฟตอนเหล่านี้



รูป 2.17 แสดงช่วงทั้งหมดของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

โฟตอน (หรือควอนตัม) เป็นก้อนพลังงานที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากับแสงคือ c ดังนั้นตามสมการ $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ ของทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ มวลที่เคลื่อนที่ของโฟตอนคือ $m = m_0 / 0 = \infty$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แต่ถ้าเราสมมติว่า $m_0 = 0$ ดังนั้น $m = 0/0$ ซึ่งเป็นปริมาณ

ที่ไม่สามารถกำหนดได้ สำหรับโฟตอนพลังงาน $E = h\nu$ ถ้า m เป็นมวลที่เคลื่อนที่ของโฟตอน ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ $E = mc^2$ ดังนั้น

$$E = h\nu = mc^2 \quad (2.38)$$

หรือ
$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{E}{c^2} \quad (2.39)$$

จากความสัมพันธ์

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

เนื่องจาก $m_0 = 0$ พลังงานของโฟตอนอาจเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$E = pc \quad (2.40)$$

และโมเมนตัมของโฟตอน คือ

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc \quad (2.41)$$

หรือ
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.42)$$

ดังนั้นโฟตอนความถี่ ν ถ้าพิจารณาว่าเป็นอนุภาค สรุปได้ว่า

$$m_0 = 0 \quad E = h\nu \quad m = h\nu/c^2 \quad p = h\nu/c \quad (2.43)$$

เราจะเห็นได้ว่า คุณสมบัติของโฟตอนตามสมการ (2.43) มีประโยชน์เมื่อเราศึกษาปรากฏการณ์คอมป์ตัน

2.8 ปรากฏการณ์คอมป์ตัน

ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก โฟตอนให้พลังงานทั้งหมดแก่อิเล็กตรอนที่ผิวโลหะ มีบางกรณีที่โฟตอนให้พลังงานเพียงบางส่วนแก่อนุภาคที่มีประจุ อันตรกิริยาในลักษณะนี้ ระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและสสาร คือการกระเจิงของคลื่นโดยอนุภาคที่มีประจุของสสาร ทฤษฎีควอนตัมของการกระเจิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่รู้จักกันดีคือ ปรากฏการณ์คอมป์ตันหรือการกระเจิงคอมป์ตัน สำหรับทฤษฎียุคเก่าสามารถอธิบายการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยอนุภาคที่มีประจุได้ดังนี้

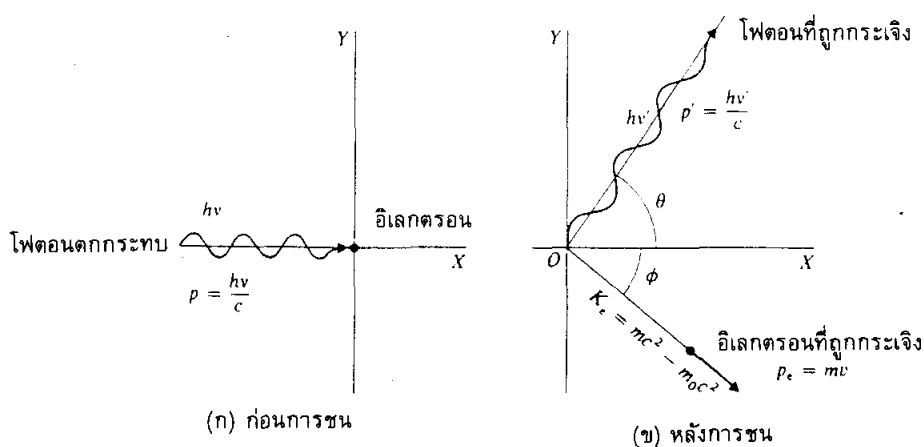
เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่เดียวชนกับอนุภาคที่มีประจุซึ่งมีขนาดเล็กกว่าความยาวคลื่นของการแผ่รังสี สนามไฟฟ้าของคลื่นซึ่งมีค่าเปลี่ยนไปแบบไซน์ จะกระทำต่ออนุภาคที่มีประจุนี้เป็นส่วนใหญ่ แรงเนื่องจากสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปนี้เองทำให้อนุภาคสั่นแบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (simple harmonic) ด้วยความถี่เดียวกับความถี่ของคลื่นตกกระทบ เป็นเหตุให้อนุภาคที่มีประจุนี้ถูกเร่งอย่างต่อเนื่อง มันจึงแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่เดียวกันออกมาทุกทิศ

ทุกทาง ดังนั้นทฤษฎียุคเก่าคาดว่ารังสีที่กระเจิงออกมาจะมีความถี่เท่ากับความถี่ของรังสีตกกระทบ อนุภาคที่มีประจุทำหน้าที่เป็นตัวถ่ายเทพลังงาน กล่าวคือดูดกลืนพลังงานบางส่วนจากรังสีตกกระทบแล้วแผ่รังสีพลังงานนี้ด้วยความถี่ (หรือความยาวคลื่น) เดียวกัน หมายความว่า อนุภาคนี้จะไม่ได้รับหรือสูญเสียพลังงานเนื่องจากมันแผ่รังสีออกมาด้วยอัตราเดียวกับที่มันดูดกลืน ทฤษฎีการกระเจิงยุคเก่านี้สอดคล้องกับการทดลองสำหรับความยาวคลื่นของแสงช่วงที่มองเห็นได้และความยาวคลื่นของรังสีอื่น ๆ ที่มีความยาวคลื่นยาวกว่านี้ ตัวอย่างง่าย ๆ ของรังสีที่กระเจิงที่ความถี่ไม่เปลี่ยนคือ แสงที่สะท้อนจากกระจก

พิจารณาการกระเจิงตามทฤษฎีควอนตัม จากการที่ไอน์สไตน์สามารถอธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกได้สำเร็จ โดยใช้แนวความคิดที่ว่าคลื่นประกอบด้วยกลุ่มก้อนของพลังงานที่เรียกว่าโฟตอน ในปี ค.ศ.1922 คอมป์ตัน (Compton) ได้ใช้คุณสมบัติของอนุภาคซึ่งเป็นสมมติฐานทางควอนตัมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอธิบายการกระเจิงของรังสีเอกซ์ ตามทฤษฎีควอนตัม คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าประกอบด้วยโฟตอนที่มีพลังงาน $E = hv$ เมื่อ v คือความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เนื่องจากโฟตอนอาจพิจารณาได้ว่าเป็นอนุภาคที่มีมวลนิ่งเท่ากับศูนย์และเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว c โมเมนตัมเชิงเส้นของโฟตอน คือ

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.44)$$

แต่ละโฟตอนในลำของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่เดียว มีโมเมนตัมเท่ากับ h/λ สมการ (2.44) แสดงว่าโมเมนตัมของโฟตอนมีค่าแน่นอน เมื่อเรารู้ ความยาวคลื่น ความถี่ หรือพลังงานของโฟตอน ทิศของ p อยู่ในทิศเดียวกับการเคลื่อนที่ของคลื่น โมเมนตัมของโฟตอนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความถี่มากขึ้น ดังนั้นโมเมนตัมของโฟตอนที่มีความถี่สูง เช่นรังสีแกมมา มีค่ามากกว่าโมเมนตัมของโฟตอนที่มีความถี่ต่ำ เช่นโฟตอนของคลื่นวิทยุ



รูป 2.18 แสดงการชนกันระหว่างโฟตอนกับอิเล็กตรอน

เมื่อพิจารณาว่าลำของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่เดียว ประกอบด้วยกลุ่มของโฟตอนที่มีค่าพลังงานและโมเมนตัมที่แน่นอน ปัญหาการกระเจิงของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจึงกลายเป็นปัญหาของการชนกันระหว่างโฟตอนกับอนุภาคที่มีประจุ ดังนั้นการแก้ปัญหานี้ทำได้ง่าย ๆ คือ เพียงแต่ใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม เมื่ออธิบายการกระเจิงตามทฤษฎีควอนตัม อนุภาคหลังจากถูกชนแล้วได้รับพลังงานเพิ่มขึ้น (ต่างจากแนวความคิดตามทฤษฎียุคเก่าที่ว่า อนุภาคหลังจากถูกชนแล้วไม่ได้รับหรือสูญเสียพลังงาน) เนื่องจากเป็นการชนที่มีพลังงานสูง จึงต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ให้อนุภาคมวลหนึ่ง m_0 และพลังงานนิ่ง $E_0 = m_0c^2$ เป็นอนุภาคอิเล็กตรอนอิสระที่หยุดนิ่ง ใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกับการชนกันของโฟตอนและอิเล็กตรอน ดังแสดงในรูป 2.18 จะได้

$$hv + E_0 = hv' + E \quad (2.45)$$

เมื่อ E คือพลังงานของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงหลังการชน hv คือ พลังงานของโฟตอนตกกระทบ และ hv' คือพลังงานของโฟตอนที่ถูกกระเจิง เนื่องจากพลังงานของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง E ต้องมีค่ามากกว่าพลังงานนิ่ง E_0 ดังนั้น จากสมการ (2.45) จะเห็นว่า $hv' < hv$ กล่าวคือ โฟตอนที่ถูกกระเจิงมีพลังงานน้อยกว่า (ความถี่น้อยลงและความยาวคลื่นมากขึ้น) โฟตอนตกกระทบ ซึ่งขัดแย้งกับการคาดหมายของทฤษฎียุคเก่าที่ว่าความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าไม่เปลี่ยน

ให้โฟตอนและอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงทำมุม θ และ ϕ ตามลำดับกับทิศของโฟตอนตกกระทบ (ดูรูป 2.18) เราต้องการหาความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไป $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ ในเทอมของ θ ให้ $p = hv/c$ เป็นโมเมนตัมของโฟตอนตกกระทบ $p' = hv'/c$ เป็นโมเมนตัมของโฟตอนที่ถูกกระเจิง และ p_e เป็นโมเมนตัมของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง แยกองค์ประกอบของโมเมนตัมเหล่านี้ ออกตามแนวขนานและแนวตั้งฉาก กับทิศของโฟตอนตกกระทบ

$$\text{ตามแนวขนาน} \quad \frac{hv}{c} = \frac{hv'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \quad (2.46)$$

$$\text{ตามแนวตั้งฉาก} \quad 0 = \frac{hv'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi \quad (2.47)$$

ใช้ c คูณตลอดสมการ (2.46) และ (2.47) แล้วจัดรูปใหม่

$$p_e c \cos \phi = hv - hv' \cos \theta \quad (2.48)$$

$$\text{และ} \quad p_e c \sin \phi = hv' \sin \theta \quad (2.49)$$

ยกกำลังสองสมการ (2.48) และ (2.49) แล้วรวมกัน

$$p_e^2 c^2 = (hv)^2 + (hv')^2 - 2(hv)(hv') \cos \theta \quad (2.50)$$

จากสมการ (2.45) จัดรูปใหม่

$$hv - hv' = E - E_0 \quad (2.51)$$

ยกกำลังสองสมการ (2.51)

$$(hv)^2 + (hv')^2 - 2(hv)(hv') = E^2 + E_0^2 - 2E E_0$$

แทนค่า $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$ ลงในสมการข้างต้น

$$(hv)^2 + (hv')^2 - 2(hv)(hv') = 2E_0^2 + p^2c^2 - 2EE_0 \quad (2.52)$$

สมการ (2.50) ลบด้วยสมการ (2.52)

$$2(hv)(hv')(1 - \cos\theta) = 2EE_0 - 2E_0^2$$

$$= 2E_0(E - E_0)$$

หรือ

$$(hv)(hv')(1 - \cos\theta) = E_0(E - E_0) = m_0c^2 (hv - hv')$$

$$\frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) = \frac{c(v - v')}{vv'} = \frac{c}{v'} - \frac{c}{v} = \lambda' - \lambda$$

ดังนั้นความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไป คือ

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) \quad (2.53)$$

จากสมการข้างต้น $\Delta\lambda$ ขึ้นกับมวลนิ่ง m_0 ของอิเล็กตรอน ค่าคงที่ของพลังค์ h อัตราเร็วของแสง c และมุม θ ของการกระเจิง แต่ไม่ขึ้นกับความยาวคลื่น λ ของโฟตอนตกกระทบ ปริมาณ h/m_0c ของสมการ (2.53) มีมิติเป็นความยาว ซึ่งเรียกว่าความยาวคอมพ์ตัน แทนค่า $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ กก. (ของอิเล็กตรอน) h และ c จะได้ $h/m_0c = 0.02426 \text{ \AA}$ $\Delta\lambda$ เรียกว่าความยาวคลื่นที่เลื่อนไปของคอมพ์ตัน (Compton shift wavelength) จะเห็นได้ว่าขึ้นกับมุม θ เท่านั้น เช่น

ที่มุม $\theta = 0^\circ$ $\Delta\lambda = 0$ ไม่เปลี่ยนความยาวคลื่น

ที่มุม $\theta = 90^\circ$ $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} = 0.02426 \text{ \AA}$

ที่มุม $\theta = 180^\circ$ $\cos\theta = -1$ $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} = 0.04852 \text{ \AA}$ ในกรณีนี้ความยาวคลื่นเปลี่ยนไปมากที่สุดและพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงมีค่ามากที่สุดด้วยเช่นกัน

สำหรับรังสีตกกระทบในช่วงที่มองเห็นได้ เช่นแสงความยาวคลื่น 4000 \AA ถูกกระเจิงไปเป็นมุม 90° โดยอิเล็กตรอนอิสระนั้น พบว่า $\Delta\lambda/\lambda$ มีค่าเพียง 0.006% เท่านั้น ความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปเช่นนี้ถูกกลบเกลื่อนหมด เพราะจริง ๆ แล้วอิเล็กตรอนในสารที่เกิดการกระเจิงไม่อยู่นิ่ง แต่เคลื่อนที่เนื่องจากความร้อน (thermal motion) ที่อุณหภูมิห้อง ผลของการเคลื่อนที่เนื่องจากความร้อนของอิเล็กตรอน ทำให้ $\Delta\lambda/\lambda \approx 0.3\%$ ความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปซึ่งสังเกต

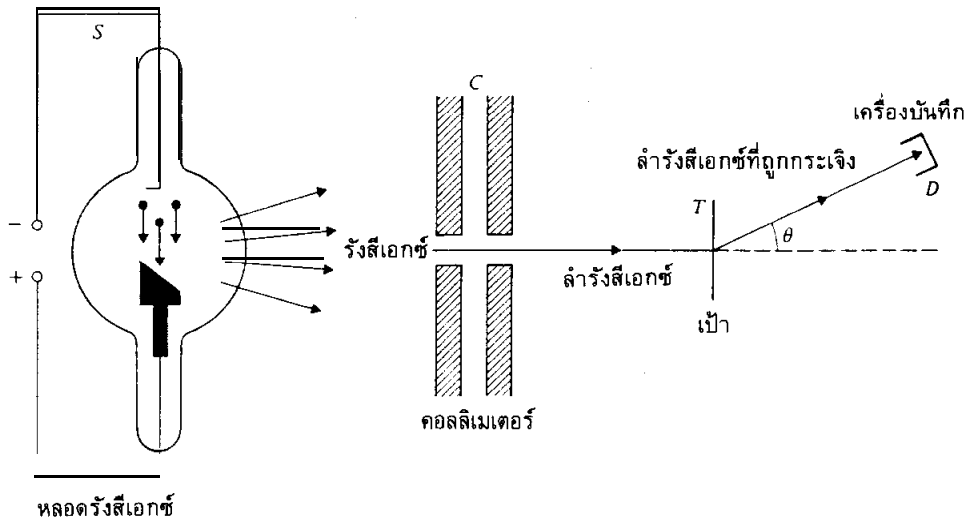
เห็นได้ เช่น $\Delta\lambda/\lambda = 2\%$ จะได้จากการใช้รังสีตกกระทบความยาวคลื่น $\lambda = 1 \text{ \AA}$ ด้วยเหตุนี้เพื่อให้สังเกตเห็นความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปได้ง่าย จึงใช้รังสีเอกซ์หรือรังสีที่มีความยาวคลื่นสั้นกว่ารังสีเอกซ์เป็นรังสีตกกระทบ สำหรับรังสีตกกระทบที่มีความยาวคลื่นยาว อัตราส่วนที่ความยาวคลื่นเปลี่ยนไป ($\Delta\lambda/\lambda$) นั้น มีค่าน้อยมาก และรังสีที่ถูกกระเจิงมีความยาวคลื่นและความถี่ใกล้เคียงกับของรังสีตกกระทบมาก ตามทฤษฎียุคเก่าความยาวคลื่นของรังสีตกกระทบและรังสีที่ถูกกระเจิงเท่ากัน ดังนั้นการกระเจิงคอมป์ตันสอดคล้องกับการกระเจิงแบบยุคเก่าในช่วงของ $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ จากสมการ (2.53) $\lambda' \rightarrow \lambda$ ถ้า $h \rightarrow 0$ หรือ $m_0 \rightarrow \infty$ กล่าวคือ ทฤษฎีควอนตัมมีรูปแบบเดียวกับทฤษฎียุคเก่า

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{ทฤษฎีควอนตัม} \rightarrow \text{ทฤษฎียุคเก่า}$$

$$h \rightarrow 0$$

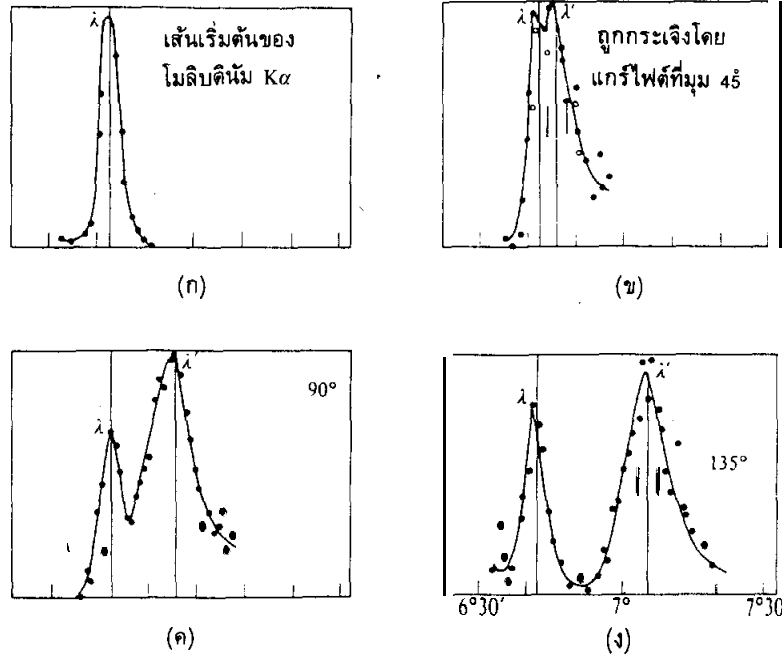
$$\text{หรือ } m_0 \rightarrow \infty$$

ในปี ค.ศ.1922 คอมป์ตันได้อธิบายการกระเจิงของรังสีเอกซ์เนื่องจากอิเล็กตรอนอิสระ ซึ่งเรียกว่าการกระเจิงคอมป์ตัน หรือปรากฏการณ์คอมป์ตัน ทฤษฎียุคเก่า (คาดว่าความยาวคลื่นไม่เปลี่ยน) ไม่สามารถอธิบายได้ เพราะผลการทดลองปรากฏว่าความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงมีค่าเปลี่ยนไป คอมป์ตันใช้สมมติฐานควอนตัมอธิบายผลการทดลองได้



รูป 2.19 แสดงการจัดการทดลองสำหรับการกระเจิงคอมป์ตัน

คอมป์ตันฉายรังสีเอกซ์ความถี่เดียวตกกระทบบนเป้าคาร์บอน ซึ่งถือเสมือนว่าอิเล็กตรอนตัวนอกสุดเป็นอิเล็กตรอนอิสระ (พลังงานของรังสีเอกซ์มีค่ามากเมื่อเทียบกับพลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอนตัวนอกสุดของคาร์บอน) แล้ววัดความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงออกมาที่มุมต่าง ๆ กับแนวเดิม



รูป 2.20 แสดงความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงออกมาที่มุมต่าง ๆ จากแท่งแกรไฟต์

คอมพ์ตันพบว่ารังสีเอกซ์ที่กระเจิงจากเป้าหมายมีความยาวคลื่นเป็น 2 ประเภท ประเภทหนึ่ง ความยาวคลื่นเท่าเดิม (เท่ากับของรังสีตกกระทบ) λ เรียกว่า ความยาวคลื่น unmodified อีกประเภทหนึ่งมีความยาวคลื่นยาวกว่า คือ λ' เรียกว่า ความยาวคลื่น modified (ดูรูป 2.20) ความยาวคลื่น unmodified เป็นผลจากการกระเจิงของรังสีตกกระทบกับอิเล็กตรอนตัวใน (inner electron) ของอะตอมโดยที่อิเล็กตรอนเหล่านี้ยึดแน่นกับอะตอม ในกรณีนี้ต้องแทน m_0 ในสมการ (2.53) ด้วย M ซึ่งเป็นมวลของทั้งอะตอม ความยาวคลื่นคอมพ์ตัน h/Mc จะมีค่าน้อยมาก เช่น อะตอมไฮโดรเจนที่เบาที่สุด M มีค่าประมาณ 1838 เท่าของมวลอิเล็กตรอน $h/Mc = 0.0000133 \text{ \AA}$ แม้แต่ที่ $\theta = 180^\circ$ h/Mc จะมีค่าน้อยมากจนไม่ต้องคำนึงถึง ดังนั้นการกระเจิงของโฟตอนจากอิเล็กตรอนที่ยึดแน่นกับอะตอมจึงไม่มีการเปลี่ยนความยาวคลื่น คอมพ์ตันใช้สมมติฐานควอนตัมหาความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไป ($\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$) ได้ความสัมพันธ์ดังสมการ (2.53) รายละเอียดในการหาได้กล่าวแล้วข้างต้น ความสัมพันธ์นี้สอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี

พิจารณาพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง

$$T = E - E_0 = hv - hv'$$

เนื่องจาก $v = c/\lambda$ และ $v' = c/\lambda' = c/(\lambda + \Delta\lambda)$ สมการข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} T &= \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} \\ &= \frac{hc(\lambda + \Delta\lambda - \lambda)}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \\ &= \frac{h\nu \Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \\ &= \frac{h\nu \Delta\lambda/\lambda}{1 + \Delta\lambda/\lambda} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$\Delta\lambda$ ขึ้นกับมุมกระเจิง θ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงมีค่ามากที่สุด (T_{\max}) เมื่อ มุม $\theta = 180^\circ$ และจะได้ $\Delta\lambda = 2h/m_0c$ แทนค่าลงในสมการ (2.54)

$$T_{\max} = h\nu \frac{2h\nu/m_0c^2}{1 + 2h\nu/m_0c^2} \quad (2.55)$$

ถ้าวัดพลังงานจลน์สูงสุดของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงได้ เราสามารถคำนวณหาพลังงาน $h\nu$ ของโฟตอนตกกระทบได้จากสมการ (2.55)

ปรากฏการณ์คอมป์ตันแสดงถึงการเป็นอนุภาคของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้อย่างชัดเจนที่สุด ปรากฏการณ์นี้ให้หลักฐานสนับสนุนสมมติฐานควอนตัมของรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า กล่าวคือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าประกอบด้วยกลุ่มก้อนของพลังงานเป็นควอนตัม มีโมเมนตัม ซึ่งเป็นลักษณะของอนุภาค แสดงว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงสมบัติอนุภาคได้ ผลงานของคอมป์ตันทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบล ในปี ค.ศ.1927

ตัวอย่างที่ 2.3 สมมติว่ารังสีเอกซ์พลังงาน 100 keV ตกกระทบเป้า และเกิดการกระเจิงคอมป์ตันขึ้น จงคำนวณหา

- ก. พลังงานของรังสีเอกซ์ที่กระเจิงเป็นมุม 30° กับทิศของรังสีตกกระทบ
 - ข. พลังงานของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง
 - ค. มุมที่อิเล็กตรอนถูกกระเจิงทำกับทิศของรังสีตกกระทบ
- ก. จากสมการ (2.53)

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) \\ \frac{c}{v'} - \frac{c}{v} &= \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) \\ \frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} &= \frac{1}{m_0c^2} (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

เมื่อ $h\nu = 100 \text{ keV}$ $m_0c^2 = 510 \text{ keV}$ และ $\cos\theta = \cos 30^\circ = 0.866$ ดังนั้น

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{100 \text{ keV}} = \frac{1}{510 \text{ keV}} (1 - 0.866)$$

$$= \frac{0.134}{510 \text{ keV}}$$

$$\frac{1}{h\nu'} = \frac{1}{100 \text{ keV}} + \frac{0.134}{510 \text{ keV}}$$

$$h\nu' = 97.5 \text{ keV}$$

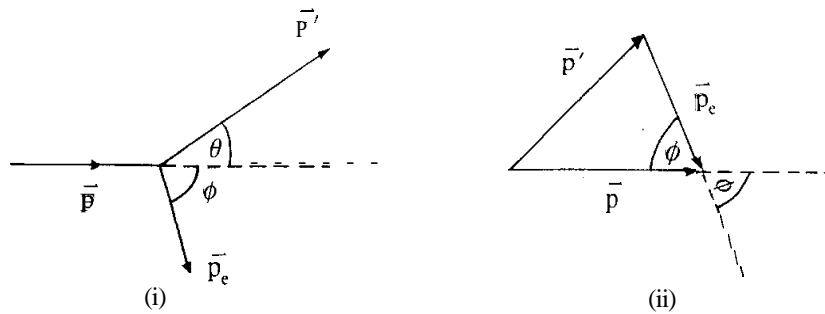
ข. พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง คือ

$$T = h\nu - h\nu'$$

$$= (100 - 97.5) \text{ keV}$$

$$= 2.5 \text{ keV}$$

ค.



จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม เมื่อแยกองค์ประกอบของโมเมนตัมตามแนวขนานกับทิศของรังสีตกกระทบ

$$p = p' \cos\theta + p_e \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{p - p' \cos\theta}{p_e}$$

เนื่องจาก $p = h\nu/c$ $p' = h\nu'/c$ สำหรับอิเล็กตรอน $E^2 = p_e^2 c^2 + E_0^2$ โดยที่ $E_0 = m_0 c^2$ และ $E = T + E_0$ ดังนั้น

$$\cos\phi = \frac{h\nu/c - (h\nu'/c) \cos\theta}{(E^2 - E_0^2)^{1/2} / c}$$

$$= \frac{h\nu - h\nu' \cos\theta}{(T + E_0)^2 - E_0^2}^{1/2}$$

แทนค่า $h\nu = 100 \text{ keV}$ $h\nu' = 97.5 \text{ keV}$ $\cos\theta = \cos 30^\circ = 0.866$ $T = 2.5 \text{ keV}$ $E_0 = 510 \text{ keV}$
 ลงในสมการข้างต้น

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{100 \text{ keV} - (97.5 \times 0.866 \text{ keV})}{[(2.5 \text{ keV} + 510 \text{ keV})^2 - (510 \text{ keV})^2]^{1/2}} \\ &= \frac{15.565}{50.559} \\ \cos\phi &= 0.308 \\ \phi &= 72^\circ\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 โฟตอน 2.0 \AA ทำอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนที่ยึดแน่นกับอะตอมไฮโดรเจน (พลังงานยึดเหนี่ยว 13.6 eV) เกิดการกระเจิงแบบคอมพ์ตันขึ้นโดยที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปข้างหน้าในทิศทางเดียวกับโฟตอนตกกระทบ

- ก. พลังงานอิเล็กตรอนมีค่าเท่าใด
- ข. พลังงานของโฟตอนที่กระเจิงมีค่าเท่าใด

ก. พลังงานของโฟตอนตกกระทบ

$$\begin{aligned}E &= h\nu = \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที})(2.998 \times 10^8 \text{ เมตร/วินาที})}{(2 \times 10^{-10} \text{ เมตร})(1.602 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})} \\ &= 6.2 \text{ keV}\end{aligned}$$

ค่านี้มากกว่าพลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอน เราสามารถละทิ้งพลังงานยึดเหนี่ยวได้จากสมการ (2.55)

$$T = h\nu \frac{2h\nu/m_0c^2}{1 + 2h\nu/m_0c^2}$$

เมื่อ $h\nu = 6.2 \times 10^3 \text{ eV}$ $m_0c^2 = 5.1 \times 10^5 \text{ eV}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}T &= \frac{(6.2 \times 10^3)(2 \times 6.2 \times 10^3)/(5.1 \times 10^5)}{1 + (2 \times 6.2 \times 10^3)/(5.1 \times 10^5)} \text{ eV} \\ &= 147 \text{ eV}\end{aligned}$$

ข. เนื่องจากอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปข้างหน้า โฟตอนที่ถูกกระเจิงต้องเคลื่อนที่กลับหลัง ดังนั้น $\theta = 180^\circ$ และ $\Delta\lambda = 2h/m_0c = 0.049 \text{ \AA}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda + \Delta\lambda \\ &= 2 + 0.049\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.049 \text{ \AA} \\
E' &= \frac{hc}{\lambda'} \\
&= \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ จูล-วินาที})(2.998 \times 10^8 \text{ เมตร/วินาที})}{(2.049 \times 10^{-10} \text{ เมตร})(1.602 \times 10^{-19} \text{ จูล/eV})} \\
&= 6052 \text{ eV}
\end{aligned}$$

ค่าที่ได้นี้แสดงถึงการอนุรักษ์พลังงาน กล่าวคือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนหลังชน 147 eV รวมกับพลังงานของโฟตอนที่ถูกกระเจิง 6052 eV ได้ประมาณ 6200 eV ซึ่งเป็นพลังงานของโฟตอนตกกระทบ

2.9 การเกิดคู่และการทำลายคู่

ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก และปรากฏการณ์คอมป์ตันเป็นตัวอย่างของการเปลี่ยนรูปพลังงานของโฟตอนไปเป็นพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ของอนุภาคสสาร เป็นไปได้หรือไม่ที่พลังงานของโฟตอนเปลี่ยนไปเป็นมวลหนึ่ง กล่าวคือ เป็นการสร้างสสารขึ้นจากพลังงานหรือในทางตรงกันข้ามเปลี่ยนมวลหนึ่งไปเป็นพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า คำตอบคือเป็นไปได้โดยที่การเปลี่ยนดังกล่าวนี้ไม่ขัดแย้งกับกฎการอนุรักษ์พลังงาน โมเมนตัม และประจุไฟฟ้า

2.9.1) การเกิดคู่

ก่อนอื่นพิจารณาพลังงานน้อยที่สุดที่ใช้ในการสร้างอนุภาคสสารหนึ่งตัว เนื่องจากอิเล็กตรอนเป็นอนุภาคที่มีมวลหนึ่งน้อยที่สุดในจำนวนอนุภาคที่มีมวลหนึ่งไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นขบวนการสร้างอิเล็กตรอนขึ้นมาจากพลังงานของโฟตอนจึงใช้พลังงานน้อยที่สุด ตามกฎการอนุรักษ์ประจุ เพราะว่าโฟตอนมีประจุไฟฟ้าเป็นศูนย์ ดังนั้นการสร้างอิเล็กตรอนตัวเดียวจากโฟตอนจึงเป็นไปได้ อย่างไรก็ตามในการสร้างคู่อิเล็กตรอน (electron pair) จะประกอบด้วยอนุภาคสองตัวที่มีประจุไฟฟ้าชนิดตรงกันข้าม อนุภาคที่มีประจุบวกเรียกว่าโพสิตรอน (positron) และกล่าวว่ามันเป็นปฏิอนุภาค (antiparticle) ของอิเล็กตรอน โพสิตรอนเป็นอนุภาคที่มีมวลเท่ากับอิเล็กตรอน แต่มีประจุไฟฟ้า $+e$ (อิเล็กตรอนมีประจุ $-e$) พลังงานน้อยที่สุด $h\nu_{\min}$ ที่ใช้ในการสร้างคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอน หาได้จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน

$$h\nu_{\min} = 2m_0c^2 \quad (2.56)$$

เนื่องจากมวลหนึ่ง m_0c^2 ของอิเล็กตรอนหรือของโพสิตรอนมีค่าเท่ากับ 0.51 MeV พลังงานน้อยที่สุด $2m_0c^2$ สำหรับการเกิดคู่ คือ 1.02 MeV ความยาวคลื่นของโฟตอนที่สอดคล้องกับพลังงาน

1.02 MeV คือ 0.012 Å ดังนั้นการเกิดคู่อิเล็กตรอนจึงเกิดขึ้นได้จากโฟตอนที่มีความยาวคลื่นสั้นมาก ๆ เท่านั้น ขบวนการที่อนุภาคและปฏิอนุภาคถูกสร้างขึ้นมาจากรังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เรียกว่า การเกิดอนุภาคคู่ (pair production) (ในขบวนการนี้อนุภาคและปฏิอนุภาคต้องเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ เพื่อให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ประจุ) ขบวนการนี้เป็นการแสดงถึงการเปลี่ยนระหว่างพลังงานและมวล

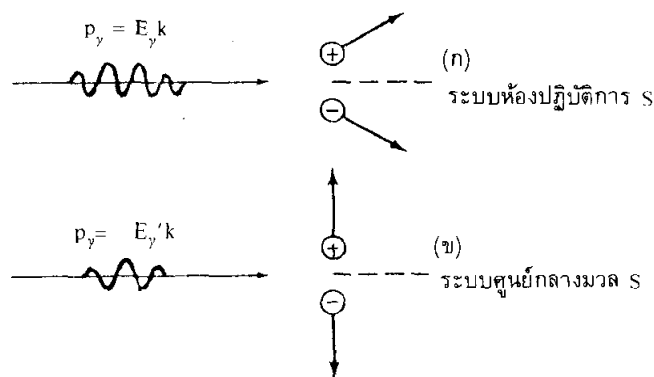
ถ้าพลังงานของโฟตอนมีค่ามากกว่าพลังงานน้อยที่สุด ($2m_0c^2$) พลังงานส่วนที่เหลือจะปรากฏอยู่ในรูปพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนและโพสิตรอน เมื่อใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้

$$\begin{aligned} h\nu &= m^+c^2 + m^-c^2 \\ &= (m_0c^2 + T_+) + (m_0c^2 + T_-) \\ h\nu &= 2m_0c^2 + (T_+ + T_-) \end{aligned} \quad (2.57)$$

เมื่อ ν คือความถี่ของโฟตอน

T_+ และ T_- เป็นพลังงานจลน์ของอนุภาคโพสิตรอนและอิเล็กตรอน ตามลำดับ

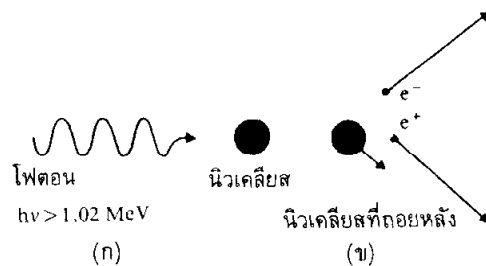
ขบวนการเกิดอนุภาคคู่ต้องเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงานและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม แต่ในการสลายตัวของโฟตอนพลังงานสูงไปเป็นคู่ของอนุภาคและปฏิอนุภาคนั้นไม่เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม เราจะแสดงให้เห็นง่าย ๆ ดังนี้ สมมติว่าในระบบอินเนอร์เชียล S โฟตอน พลังงาน $E_\gamma = p_\gamma c$ สลายตัวไปเป็นอนุภาคคู่ ดังแสดงในรูป 2.21 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมนี้ต้องเป็นจริงในระบบอินเนอร์เชียลใด ๆ พิจารณาระบบศูนย์กลางมวลของมวล S' ของอนุภาคคู่ (ดูรูป 2.21 ข) โมเมนตัมของระบบหลังจากเกิดอนุภาคคู่เป็นศูนย์ แต่โมเมนตัมของโฟตอนก่อนสลายตัวไม่เท่ากับศูนย์ เพราะอัตราเร็วของโฟตอนในกรอบอ้างอิงใด ๆ เท่ากับอัตราเร็วแสง ดังนั้นโฟตอนจึงไม่สามารถสลายตัวเป็นคู่ของอนุภาคและปฏิอนุภาคใน free space



รูป 2.21 แสดงการเกิดคู่อิเล็กตรอนใน free space ที่เป็นไปไม่ได้ เพราะในระบบศูนย์กลางมวล โมเมนตัมไม่อนุรักษ์

ขบวนการเกิดอนุภาคคู่สามารถเกิดขึ้นได้ ถ้าโฟตอน (ที่มีพลังงานพอ) วิ่งผ่านเข้าไปใกล้นิวเคลียสหนัก นิวเคลียสหนักนี้จะพาเอาโมเมนตัมบางส่วนของโฟตอนไป ทำให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (ดูรูป 2.22) และมวลของนิวเคลียสหนักมีค่ามากกว่ามวลของอนุภาคคู่ที่เกิดขึ้น ดังนั้นพลังงานการถอยหลังของนิวเคลียสหนักจึงมีค่าน้อยมากสามารถละทิ้งได้ กล่าวคือ กฎการอนุรักษ์พลังงานยังคงใช้สมการ (2.56) หรือ (2.57)

ในปี ค.ศ.1930 ดิแรค (Dirac) ได้คาดคะเนทางทฤษฎีว่ามีโพซิตรอนและต่อมาแอนเดอร์สัน (Anderson) ได้ค้นพบโพซิตรอนจากการทดลองในปี ค.ศ.1932 ระหว่างที่เขาศึกษาเกี่ยวกับรังสีคอสมิก



รูป 2.22 การแสดงการเกิดอนุภาคคู่ (ก) ก่อนการชนกับนิวเคลียสหนัก (ข) หลังชนนิวเคลียสหนักเกิดอนุภาคคู่ขึ้น

2.9.2) การทำลายคู่

การทำลายคู่ (pair annihilation) ของอนุภาค-ปฏิอนุภาคและพร้อมกันนี้ได้สร้างโฟตอนขึ้นมาเป็นขบวนการที่เกิดตรงกันข้ามกับการเกิดคู่ การทำลายคู่เกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนและโพซิตรอนเข้ามาใกล้กันและรวมกันกลายเป็นโฟตอน โฟตอนที่เกิดขึ้นจะเกิดเพียงตัวเดียวไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม อย่างไรก็ตามเพื่อให้เป็นไปตามการอนุรักษ์โมเมนตัม การทำลายคู่จะทำให้เกิดโฟตอน 2 โฟตอนเคลื่อนที่ไปในทิศตรงกันข้ามกัน ด้วยโมเมนตัมที่เท่ากัน และจะมีความถี่หรือพลังงานเท่ากันด้วย ดังแสดงในรูป 2.23 (จริง ๆ แล้วอาจมีโฟตอนเกิดขึ้น 3 โฟตอน หรือมากกว่านั้นก็ได้ แต่มีโอกาสน้อยกว่าเกิดโฟตอน 2 โฟตอน)

เมื่อโฟตอน 2 โฟตอน ถูกสร้างขึ้นจากการทำลายคู่ของอิเล็กตรอน (มวล m_0) และโพซิตรอน (มวล m_0) ที่อยู่นิ่ง กฎการอนุรักษ์พลังงานคือ

$$2m_0c^2 = hv_1 + hv_2$$

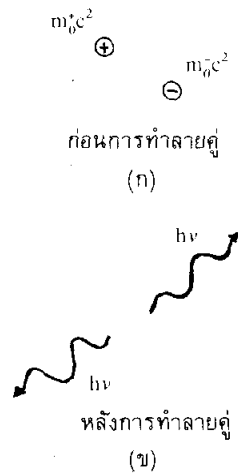
และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมคือ

$$0 = \frac{hv_1}{c} - \frac{hv_2}{c}$$

v_1 และ v_2 เป็นความถี่ของโฟตอน 2 โฟตอนที่เกิดขึ้น เนื่องจาก

$$hv_1 = hv_2 = hv_{\min} = m_0c^2$$

hv_{\min} เป็นพลังงานน้อยที่สุดของโฟตอนที่เกิดขึ้น ซึ่งเท่ากับมวลนิ่งของอิเล็กตรอน (หรือโพซิตรอน) คือ 0.51 MeV ถ้าอนุภาคและปฏิอนุภาควิ่งเข้ารวมกันและทำลายล้างกันไปในระหว่างการเคลื่อนที่นี้ พลังงานรวมของโฟตอนทั้งหมดที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากกว่า $2m_0c^2$



รูป 2.23 แสดงการทำลายคู่

เมื่อโพซิตรอนพลังงานสูงซึ่งเกิดจากขบวนการเกิดคู่ เคลื่อนที่ผ่านสสาร มันจะสูญเสียพลังงานจนกระทั่งเกิดการชนกับอะตอมรอบข้าง ในที่สุดความเร็วจะต่ำ เมื่อเป็นเช่นนี้มันจะรวมกับอิเล็กตรอน ทำให้เกิดอะตอมโพซิโตรเนียมขึ้น อะตอมนี้สลายตัวเร็วมาก (10^{-10} วินาที) เป็นโฟตอน 2 โฟตอนที่มีพลังงานเท่ากัน

การเกิดคู่และการทำลายคู่เป็นตัวอย่างหนึ่งของสมมูล มวล-พลังงาน (mass-energy equivalence) ซึ่งเป็นการสนับสนุนทฤษฎีสัมพัทธภาพ

สรุป

วัตถุดำคือวัตถุที่เป็นตัวแผ่และตัวดูดกลืนรังสีได้อย่างสมบูรณ์และดีที่สุด สมการของวีนอธิบายการแผ่รังสีของวัตถุดำได้เฉพาะช่วงความถี่สูงเท่านั้น ต่อมาเรย์เลย์และจิ้นส์ใช้ทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กและหลักการแบ่งเท่ากันของพลังงาน ปรากฏว่าสูตรของเรย์เลย์และจิ้นส์ใช้ได้ดีในช่วงความถี่ต่ำ ตามสมมติฐานของแพลงก์ ระบบต่าง ๆ ในฟิสิกส์ที่แสดงการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย ๆ จะมีพลังงานเป็นค่า ๆ ดังนี้

$$E = nh\nu \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

และจากสมมติฐานของแพลงก์นี้สามารถอธิบายการแผ่รังสีของวัตถุดำได้

ในปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ความสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนตกกระทบพลังงาน $h\nu$ เวิร์คฟังก์ชัน w และพลังงานจลน์สูงสุด T_{\max} ของโฟโตอิเล็กตรอน คือ

$$T_{\max} = h\nu - w$$

ศักย์หยุดยั้ง V_0 คือ

$$eV_0 = T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

พลังงานสูงสุดของรังสีเอกซ์ที่ได้จากการระดมยิงเป้าด้วยอิเล็กตรอนความเร็วสูง คือ

$$h\nu_{\max} = eV \text{ หรือ } \lambda_{\min} = \frac{1.24 \times 10^{-4} \text{ ซม.} \cdot \text{โวลท์}}{V}$$

โฟตอนความถี่ ν เมื่อพิจารณาว่าเป็นอนุภาคจะมีคุณสมบัติดังนี้

$$m_0 = 0, \quad E = h\nu, \quad m = \frac{h\nu}{c^2} \text{ และ } p = \frac{h\nu}{c}$$

ในการกระเจิงคอมพ์ตัน โฟตอนตกกระทบพลังงาน $h\nu$ จะสูญเสียพลังงานบางส่วนให้แก่อิเล็กตรอนที่เกือบเป็นอิสระและโฟตอนพลังงาน $h\nu'$ ที่ถูกกระเจิงเป็นมุม θ คือ

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + (h\nu/m_0c^2)(1-\cos\theta)}$$

หรือความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปคือ

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1-\cos\theta) = 0.02426 (1-\cos\theta) \text{ \AA}$$

เมื่อโฟตอนพลังงานมากกว่า 1.02 MeV เกิดวิ่งผ่านเข้าไปในนิวเคลียสหนัก โฟตอนจะหายไปเกิดคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนขึ้น ขบวนการเกิดนี้เรียกว่า การเกิดคู่ $h\nu = m_0c^2 + m_0c^2 + T_- + T_+$ โพสิตรอนซึ่งเป็นปฏิอนุภาคของอิเล็กตรอนจะเกิดขบวนการกลับกันคือ การทำลายคู่ กล่าวคือ เมื่อโพสิตรอนเคลื่อนที่ช้าลงจะจับอิเล็กตรอนแล้วก่อรูปเป็นอะตอมโพสิโตรเนียม ในเวลาประมาณ 10^{-10} วินาที อะตอมโพสิโตรเนียมจะสลายตัวเป็นโฟตอน 2 ตัว แต่ละตัวมีพลังงาน 0.51 MeV เคลื่อนที่ในทิศตรงข้ามกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. ลำแสงความยาวคลื่น 5550 \AA ตกกระทบบนผิวโลหะที่มีความยาวคลื่นขีดเริ่ม 7320 \AA จงคำนวณหาพลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอนและศักย์หยุดยั้ง
2. เวิร์คฟังก์ชันของผิวหน้าซีเซียม คือ 1.9 eV แสงจากส่วนใดของสเปกตรัมที่มองเห็นได้ (4000 \AA ถึง 7000 \AA) ทำให้เกิดโฟโตอิเล็กตรอนจากผิวหน้าซีเซียม
3. เลเซอร์ฮีเลียม-นีออนที่ใช้ในห้องปฏิบัติการฟิสิกส์ ให้ลำแสงแคบ ๆ ของแสงสีเดียว ความยาวคลื่น 6328 \AA สำหรับลำแสงเลเซอร์ที่มีกำลัง 1.0 mW จงหา
 - ก) จำนวนยอดคลื่นต่อวินาทีที่ผ่านจุดใด ๆ ตามลำคลื่น
 - ข) จำนวนของโฟตอนต่อวินาที
4. เมื่อแสงสีเดียวความยาวคลื่น 5690 \AA ตกกระทบบนผิวโปตัสเซียม กระแสโฟโตอิเล็กตริกถูกหยุดด้วยศักย์หยุดยั้ง 0.10 V เมื่อใช้แสงความยาวคลื่น 4050 \AA ศักย์หยุดยั้ง คือ 0.99 V
 - ก) สมมติว่าไม่ทราบค่า h และ e จงคำนวณหาอัตราส่วน h/e ข) ศักย์หยุดยั้งของโปตัสเซียม (ในหน่วย eV) มีค่าเท่าใด
5. ความต่างศักย์ที่ให้แก่วัดรังสีเอกซ์ควรมีค่าเท่าใด จึงจะเกิดรังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 0.1 \AA
6. โพรงของตัวแผ่รังสีวัตถุดำมีลักษณะเป็นรูปลูกบาศก์ยาวด้านละ 2 ซม. และที่อุณหภูมิ 1500°K
 - ก) จงหาจำนวนของโมดของการสั่นต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของโพรงในแถบความยาวคลื่นระหว่าง 4995 \AA และ 5005 \AA
 - ข) จงคำนวณหาพลังงานที่แผ่ออกมาจากโพรงทั้งใบในแถบความยาวคลื่น 10 \AA นี้
7. พื้นผิวโลกพื้นที่ 1 ซม.^2 ซึ่งตั้งฉากกับแสงอาทิตย์จะได้รับพลังงานการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์ประมาณ 0.13 จูล/วินาที สมมติว่าดวงอาทิตย์เป็นตัวแผ่รังสีวัตถุดำ จงคำนวณหาอุณหภูมิที่ผิวของดวงอาทิตย์ (รัศมีของดวงอาทิตย์ประมาณ $7 \times 10^8 \text{ เมตร}$ และโลกอยู่ห่างดวงอาทิตย์ประมาณ $1.49 \times 10^8 \text{ กม.}$)
8. ในการทดลองการกระเจิงคอมป์ตัน ความยาวคลื่นตกกระทบของรังสีเอกซ์เท่ากับ 0.7078 \AA และความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่ถูกกระเจิงคือ 0.7314 \AA จงหามุมที่เกิดการกระเจิง
9. อิเล็กตรอนในหลอดรังสีเอกซ์ถูกเร่งผ่านความต่างศักย์ 3000 โวลต์ สมมติว่าอิเล็กตรอนเหล่านี้เคลื่อนที่ช้าลงในเป้า ความยาวคลื่นน้อยที่สุดของรังสีเอกซ์ที่เกิดขึ้นมีค่าเท่าใด

10. รังสีเอกซ์พลังงาน 200 KeV ตกกระทบเป้าและเกิดการกระเจิงแบบคอมพ์ตัน จงคำนวณหา
- ก) พลังงานของรังสีเอกซ์ที่ถูกกระเจิงทำมุม 60° กับแนวรังสีตกกระทบ
 - ข) พลังงานของอิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิง
 - ค) มุมกระเจิงของอิเล็กตรอน
11. จงคำนวณหาพลังงานของโฟตอนตกกระทบที่ทำให้เกิดการกระเจิงแบบคอมพ์ตัน เมื่ออิเล็กตรอนที่ถูกกระเจิงมีพลังงานมากที่สุด และเมื่อผ่านอิเล็กตรอนนี้เข้าไปในสนามแม่เหล็กความเข้ม 0.02 เวเบอร์/เมตร² มันจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 1 ซม.
12. อิเล็กตรอนพลังงาน 2.0 MeV ชนแบบตรง (head on collision) กับโปรซิตรอน พลังงาน 2.0 MeV เกิดโฟตอน 2 ตัว พลังงานของโฟตอนตัวหนึ่งตัวใดมีค่าเท่าใด
13. พลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอนในอะตอมฮีเลียมประมาณ 20 eV จงหาความยาวคลื่นน้อยที่สุดของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบบนก๊าซฮีเลียม และจะทำให้เกิด
- ก) ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก
 - ข) การกระเจิงคอมพ์ตัน (สมมติว่าอิเล็กตรอนเป็นอิสระ)
 - ค) การเกิดคู่