บทที่ 1
ทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 1 แล้ว นักศึกษาสามารถ

1) อธิบายสัจจพจน์ของไอน์สไตน์ สำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะได้
2) เขียนสมการการแปลงโคออร์ดิเนต ความเร็ว และเวลา แบบลอเรนตซ์ได้
3) อธิบายการหดของความยาว การยืดของเวลา และการที่มวลเปลี่ยนไป เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง (ใกล้เคียงความเร็วแสง) ได้
4) พิสูจน์สมการ (1.60) ได้
5) อธิบายการทดลองที่สนับสนุนทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะของไอน์สไตน์ได้
6) ทำแบบฝึกหัดได้อย่างน้อย 9 ข้อ

ก่อนเริ่มเข้าสู่ศตวรรษที่ 20 สาขาฟิสิกส์ 2 สาขา คือ กลศาสตร์ และแม่เหล็กไฟฟ้า ได้รับการพัฒนาจนเป็นที่ยอมรับ กฎต่าง ๆ ของกลศาสตร์และแม่เหล็กไฟฟ้าเชื่อกันว่าไม่สามารถเปลี่ยนแปลงหรือปรับปรุงได้อีกต่อไป แต่ในตอนต้นศตวรรษนี้ นักฟิสิกส์ได้พบกับปัญหาหลายประการ เช่น พบว่ากฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตันใช้ได้ดีกับวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ และเมื่อใช้กับวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงเทียบกับความเร็วแสง จะให้ผลไม่ถูกต้องนัก หรือพบว่าสำหรับผู้สังเกต 2 คนที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน คนหนึ่งไม่สามารถใช้เซทของสมการการแปลงเดียวกันเพื่อจะแปลงกฎของกลศาสตร์และแม่เหล็กไฟฟ้าจากกรอบอ้างอิง (frame of reference) ของผู้สังเกตคนหนึ่งไปยังกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตอีกคนหนึ่ง

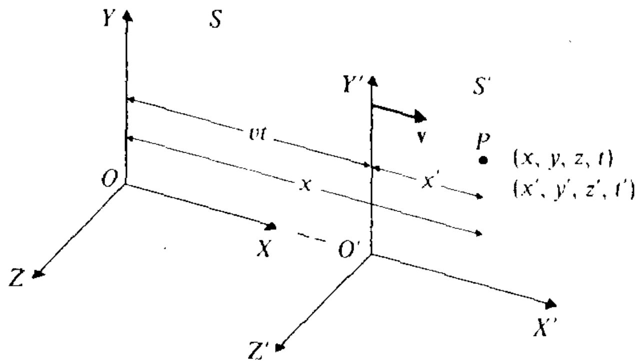
ปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ อธิบายได้ด้วยทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ (special theory of relativity) ของไอน์สไตน์ (Einstein) ในปี ค.ศ. 1905 ทฤษฎีนี้กล่าวถึงวัตถุหรือผู้สังเกต (หรือกรอบอ้างอิง) ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ (uniform velocity) สัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ต่อมาในปี ค.ศ. 1915 ไอน์สไตน์ ได้พัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (general theory of relativity) ซึ่งกล่าวถึงกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งสำหรับบทนี้ จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะเท่านั้น

1.1 การแปลงแบบกาลิเลโอและข้อจำกัด

ตามกฎข้อหนึ่งของนิวตัน (หรือกฎของความเฉื่อย) ที่กล่าวว่า ระบบใด ๆ อยู่นิ่งจะยังคงอยู่นิ่ง หรือระบบที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่จะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ถ้าไม่มีแรงภายนอกใด ๆ กระทำต่อระบบ ระบบโคออร์ดิเนตที่เป็นไปตามกฎของความเฉื่อยนี้เรียกว่า ระบบอินเนอร์เชียล (inertial system) สำหรับเซทของแกนโคออร์ดิเนตที่ติดกับโลก อาจพิจารณาได้ว่าเป็นระบบอินเนอร์เชียล โดยที่เราไม่คำนึงถึงความเร่งจำนวนเล็กน้อย ซึ่งเป็นผลจากการเคลื่อนที่เนื่องจากการหมุน (rotational motion) และการเคลื่อนที่ในวงโคจร (orbital motion) ของโลก (ระบบอินเนอร์เชียลในอุดมคติเป็นระบบโคออร์ดิเนตของกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งในอวกาศเมื่อเทียบกับดาวที่อยู่นิ่ง (fixed star)) เราจะพิจารณาระบบใด ๆ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (สัมพัทธ์กับระบบอื่น ๆ) ในฐานะที่เป็นระบบอินเนอร์เชียล ปัญหาที่เกิดขึ้นคือการเปลี่ยนโคออร์ดิเนตของเหตุการณ์ (หรือปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์) จากระบบอินเนอร์เชียลหนึ่งไปยังระบบอินเนอร์เชียลอีกระบบหนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับระบบแรกอย่างไร สำหรับกลศาสตร์ของนิวตันการแปลงโคออร์ดิเนตในลักษณะนี้ทำได้โดยใช้สมการการแปลงโคออร์ดิเนตแบบกาลิเลโอ รายละเอียดจะแสดงต่อไปนี้

ให้เซทหนึ่งของแกนโคออร์ดิเนต XYZ อยู่ในระบบอินเนอร์เชียล S และอีกเซทหนึ่ง

X′Y′Z′ อยู่ในระบบอินเนอร์เชียล S′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบ S ด้วยความเร็ว v ตามแกน XX′ ดังแสดงในรูป 1.1 ออริจินของระบบอินเนอร์เชียลทั้งสองทับกันที่เวลา $t = t' = 0$ ให้โคออร์ดิเนตของเหตุการณ์อยู่ที่จุด P คือ (x, y, z, t) และ (x′, y′, z′, t′) ในระบบอินเนอร์เชียล S และ S′ ตามลำดับ ตามรูป 1.1 โคออร์ดิเนตเหล่านี้ สัมพันธ์กันดังนี้



รูป 1.1 แสดงโคออร์ดิเนตของระบบ S และ S′ สำหรับเหตุการณ์ที่จุด P

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt & \qquad & x = x' + vt \\
y' &= y & \text{หรือ} \qquad & y = y' \\
z' &= z & & z = z' \\
t' &= t & & t = t'
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

สมการข้างต้นเรียกว่า สมการการแปลงโคออร์ดิเนตแบบกาลิเลโอ

ข้อสังเกต ในสัมพัทธภาพของนิวตัน (Newtonian relativity) เราสมมติว่า $t = t'$ กล่าวคือ นาฬิกาในกรอบอ้างอิงทั้งสองแสดงเวลาเดียวกัน ถ้าเราดิฟเฟอเรนชิเอตสมการข้างต้นเทียบกับเวลา และสมมติว่า d/dt เหมือนกับ d/dt′ จะได้สมการการแปลงความเร็วดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} - v & \qquad & u'_x = u_x - v \\
\frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{dt} & \text{หรือ} \qquad & u'_y = u_y \\
\frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{dt} & & u'_z = u_z
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (1.2) เทียบกับเวลาอีกครั้ง จะได้สมการการแปลงความเร่ง ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt'^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} & \qquad & a'_x = a, \\
\frac{d^2y'}{dt'^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} & \text{v \&} \qquad & a'_y = a_y
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad a'_z = a_z$$

หรือในรูปเวกเตอร์ $\vec{a}' = \vec{a}$ (1.4)

จากสมการข้างต้นแสดงให้เห็นว่าความเร่งเท่ากันไม่ว่าจะสังเกตจากกรอบอ้างอิงใด หรืออาจกล่าวได้ว่าความเร่งไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแปลงแบบกาลิเลโอ เราสามารถแสดงได้ว่าสมการซึ่งอธิบายเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิงหนึ่งจะไม่เปลี่ยนรูปเมื่อแปลงไปสู่กรอบอ้างอิงอีกกรอบหนึ่งโดยใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ ตัวอย่างเช่น องค์ประกอบของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่ออนุภาคมวล m ที่จุด P ในกรอบอ้างอิง S อาจเขียนได้ว่า

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.5}$$

และในกรอบอ้างอิง S′ เขียนได้ดังนี้

$$F_x' = m\frac{d^2x'}{dt'^2} \quad , \quad F_y' = m\frac{d^2y'}{dt'^2} \quad , \quad F_z' = m\frac{d^2z}{dt'^2} \tag{1.6}$$

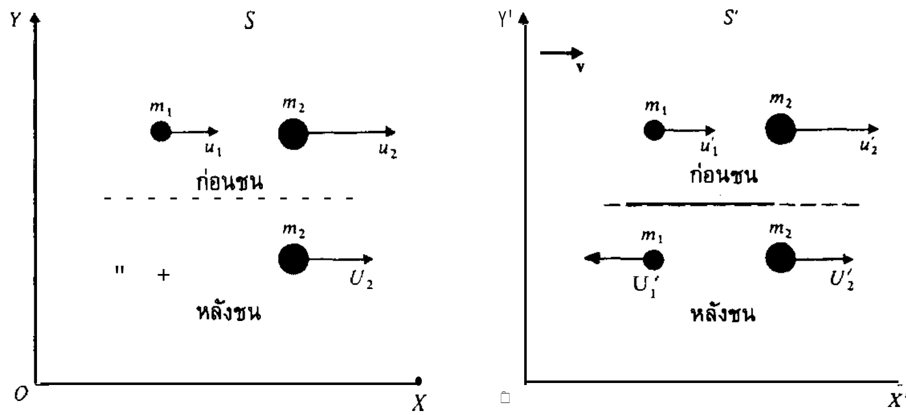
จากสมการ (1.3) (สมมติว่ามวลไม่เปลี่ยนแปลง) จะได้

$$F_x = F_{x'} \quad , \quad F_y = F_{y'} \quad , \quad F_z = F_{z'}$$

สมการข้างต้นแสดงว่ารูปแบบของสมการนี้ (ในกรณีนี้เป็นกฎข้อสองของนิวตัน) ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแปลงแบบกาลิเลโอ เราอาจกล่าวว่ากฎของนิวตันไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อแปลงแบบกาลิเลโอ

ตามหลักสัมพัทธภาพของนิวตันกล่าวว่า สำหรับทุก ๆ ระบบอินเนอร์เชียลซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยความเร็วคงที่ สมการการเคลื่อนที่ยังคงไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากรูปแบบของกฎต่าง ๆ นี้ยังคงเหมือนเดิม นั่นคือกฎต่าง ๆ ทั้งหมดของกลศาสตร์ยุคเก่าไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ สำหรับตัวอย่าง 1.1 แสดงถึงการไม่เปลี่ยนแปลงรูปแบบของการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นและพลังงานจลน์ เมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ

ตัวอย่างที่ 1.1 พิจารณาการชนกันของวัตถุมวล m_1 และ m_2 ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 และ u_2 ตามแกน X ในระบบอินเนอร์เชียล S หลังจากชนกันแล้วความเร็วของมวลทั้งสองคือ U_1 และ U_2 และยังคงอยู่ในแนวแกน X จงแสดงว่ารูปแบบของการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นและพลังงานจลน์ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอไปยังระบบอินเนอร์เชียล S′ อีกระบบหนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับระบบ S ตามแกน XX′



รูป 1.2 การชนกันระหว่างมวล m_1 และ m_2 เมื่อมองจากระบบอินเนอร์เชียล S และ S′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยความเร็ว v

การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นและพลังงานจลน์ (ดูรูป 1.2) เขียนได้ดังนี้

$$m_1u_1 + m_2u_2 = -m_1U_1 + m_2U_2 \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1U_1^2 + \frac{1}{2}m_2U_2^2 \tag{1.8}$$

พิจารณาการชนกันจากระบบอินเนอร์เชียล S′ อีกระบบหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ตามแกน XX′(ดูรูป 1.2) สมมติว่าความเร็วของมวล m_1 และ m_2 ก่อนและหลังชนในระบบ S′ คือ u_1' ,u_2' และ U_1' , U_2' ตามลำดับ ใช้การแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ สมการ (1.2) แทน $u_1 = u_1' + v$, $u_2 = u_2' + v$, $U_1 = U_1' - v$ (ทิศของ U_1, U_1' และ v อยู่ในทิศตรงข้ามกัน) และ $U_2 = U_2' + v$ ลงในสมการ (1.7) จะได้

$$m_1(u_1' + v) + m_2(u_2' + v) = -m_1(U_1' - v) + m_2(U_2' + v)$$

หรือ
$$m_1u_1' + m_2u_2' = -m_1U_1' + m_2U_2' \tag{1.9}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (1.8) จะได้

$$\frac{1}{2}m_1(u_1' + v)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2' + v)^2 = \frac{1}{2}m_1(U_1' - v)^2 + \frac{1}{2}m_2(U_2' + v)^2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + m_1u_1'v + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 + m_2u_2'v = \frac{1}{2}m_1U_1'^2 - m_1U_1'v + \frac{1}{2}m_2U_2'^2 + m_2U_2'v$$

ใช้สมการ (1.9)สมการข้างต้นเขียนอยู่ในรูปที่ง่าย ดังนี้

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1U_1'^2 + \frac{1}{2}m_2U_2'^2 \tag{1.10}$$

สมการ (1.9) และ (1.10) ในระบบ S′ มีรูปแบบเดียวกับสมการ (1.7) และ (1.8) ในระบบ S ซึ่งแสดงว่ารูปแบบของการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นและพลังงานจลน์ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ

เมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอกับกรณีของแม่เหล็กไฟฟ้า ปรากฏว่ากฎต่าง ๆ ของแม่เหล็กไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงไป ตัวอย่างเช่น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทรงกลมที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ c ในกรอบอ้างอิง S กำหนดได้โดย

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = 0 \tag{1.11}$$

สำหรับรูปแบบของสมการนี้ที่ไม่เปลี่ยนแปลงในกรอบอ้างอิง S′ ควรเป็น

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = 0 \tag{1.12}$$

เมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ แทน x, y, z, และ t จากสมการ (1.1) ลงในสมการ (1.11) จะได้

$$(x'+vt)^2 + y'^2+z'^2-c^2t'^2 = 0 \tag{1.13}$$

ซึ่งหมายความว่า สมการ (1.13) มีรูปแบบที่แตกต่างจากสมการ (1.11) เมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ ดังนั้นการแปลงแบบกาลิเลโอใช้ได้กับกลศาสตร์ยุคเก่าแต่ใช้ไม่ได้กับแม่เหล็กไฟฟ้า เราประสบกับความยุ่งยากมากขึ้นเมื่อใช้สมการการแปลงแบบกาลิเลโอกับการทดลองที่จะกล่าวต่อไป ซึ่งเป็นการทดลองเพื่อหากรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ (absolute frame of reference)

1.2 การหากรอบอ้างอิงสัมบูรณ์

ในปี ค.ศ.1860 แมกซ์เวลล์ (Maxwell) ได้เสนอทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งสรุปเกี่ยวกับกฎต่าง ๆ ทั้งหมดของไฟฟ้าและแม่เหล็กที่รู้จักกันดีว่าเป็นสมการของแมกซ์เวลล์ ทฤษฎีของเขาได้ทำนายถึงการมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ไปในอวกาศด้วยความเร็ว 3×10^8 เมตร/วินาที เนื่องจากค่านี้เท่ากับค่าของอัตราเร็วของแสงจึงอาจคิดได้ว่าแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ในปี ค.ศ.1888 เฮิรทซ์ (Hertz) ได้ทำการทดลองสร้างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในห้องปฏิบัติการได้ จากความสำเร็จนี้รวมกับการทดลองและการคำนวณทางทฤษฎี แสดงให้เห็นว่าแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง

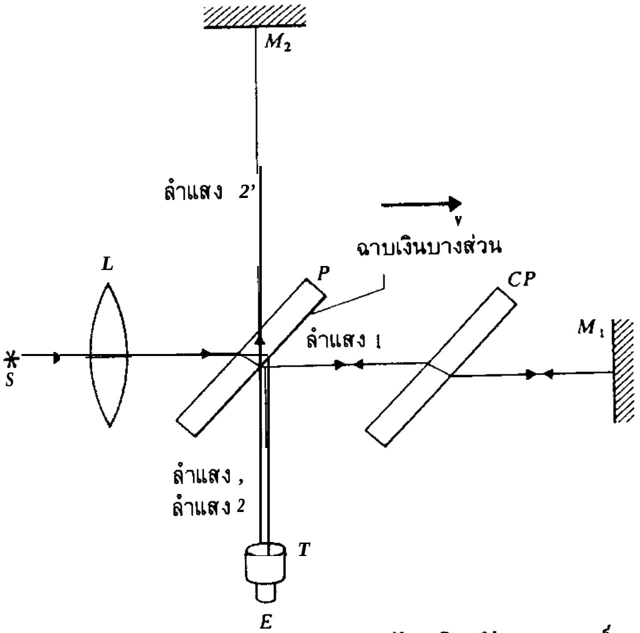
ทฤษฎีของแมกซ์เวลล์ไม่ต้องการที่จะมีตัวกลางสำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์คลื่นในเชิงกลศาสตร์อื่น ๆ ต้องอาศัยตัวกลาง (เช่น อากาศจำเป็นในการช่วยการสั่นของเสียง และน้ำจำเป็นต่อคลื่นน้ำ) นักฟิสิกส์จึงคิดว่ามีความจำเป็นที่จะกำหนดตัวกลางเพื่อช่วยในการเคลื่อนที่ของแสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ และตั้งชื่อตัวกลางนี้ว่าอีเทอร์ (ether) โดยสมมติว่าอีเทอร์มีอยู่ทั่วไปในอวกาศ อีเทอร์ต้องมีคุณสมบัติต่าง ๆ เช่น ต้องโปร่งใสและไม่มีมวล ดังนั้นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจึงสามารถเดินทางผ่านสูญญากาศได้ นอกจากนี้ต้องมีความยืดหยุ่นเพื่อรับการสั่นของการเคลื่อนที่ของคลื่น ดาวเคราะห์และวัตถุอื่น ๆ สามารถเคลื่อนที่ผ่านอีเทอร์ได้อย่างอิสระ เราสมมติว่าอีเทอร์หยุดนิ่งเมื่อเทียบกับวัตถุอื่นที่เคลื่อนที่ผ่านมัน ซึ่งเรียกว่า กรอบอีเทอร์ (ether frame) หรือกรอบอ้างอิงสมบูรณ์ ความเร็ว

ของแสงในกรอบอีเทอร์มีค่าเท่ากับ c เสมอ

1.3 การทดลองของไมเคิลสันกับมอร์เลย์

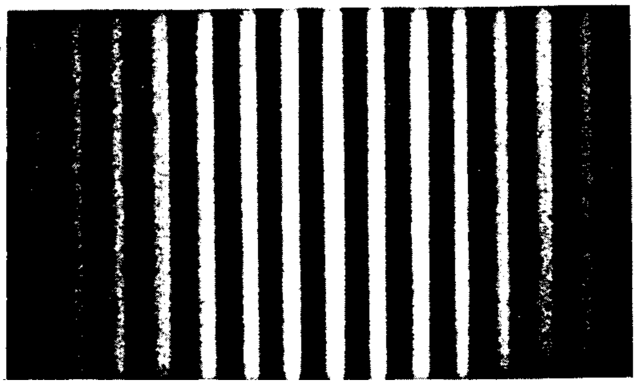
เราสามารถยืนยันได้ว่ากรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ (หรือกรอบอีเทอร์) มีจริง ถ้าเราวัดความเร็วสัมบูรณ์ของโลกสัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงอีเทอร์ได้ ในปี ค.ศ.1887 ไมเคิลสันกับมอร์-เรย์ทำการทดลองเพื่อหากรอบอ้างอิงอีเทอร์นี้ เขาสมมติว่าอีเทอร์อยู่นิ่ง แสงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c = 3\times10^8$ เมตร/วินาที สัมพัทธ์กับอีเทอร์ และได้สมมติอีกว่าความเร็วแสงสัมพัทธ์กับโลกมีค่าต่างไปจาก c (ขึ้นกับความเร็วของโลก) เขาคิดว่าควรจะหาความเร็วสัมบูรณ์ของโลกสัมพัทธ์กับอีเทอร์ได้เมื่อใช้สัญญาณแสง เครื่องมือที่ใช้ทดลองต้องมีความไวมากเพราะความเร็วในวงโคจรของโลก $v = 3\times10^4$ เมตร/วินาที มีค่าเพียง 10^{-4} เท่าของอัตราเร็วแสง

รูป 1.3 แสดงการจัดเครื่องมือการทดลอง ลำแสงสีเดียวความยาวคลื่น λ จากแหล่งกำเนิดแสง S หลังจากผ่านเลนซ์ L ตกกระทบบนกระจก P (ซึ่งฉาบเงินไว้ครึ่งหนึ่ง) จะแยกลำแสงออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งทะลุผ่านเข้าไป (คือลำแสงที่ 1) และอีกส่วนเกิดการสะท้อน (คือลำแสงที่ 2) ลำแสงเหล่านี้หลังจากสะท้อนกระจกเงา M_1 และ M_2 ตามลำดับ จะกลับมายังกระจก P อีกครั้ง แล้วลำแสงที่ 2 ทะลุผ่านกระจก P ไปยังกล้อง T ส่วนลำแสงที่ 1 จะสะท้อนกระจก P ไปยังกล้อง T (ดูรูป 1.3) ลำแสงที่ 2 ผ่านกระจก P สามครั้ง ขณะที่ลำแสงที่ 1 ผ่านเพียงครั้งเดียว ดังนั้นเพื่อให้ทางเดินของลำแสงทั้งสองเท่ากัน จึงวางกระจก CP ในทางเดินของลำแสงที่ 1



รูป 1.3 แสดงไดอะแกรมการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์

ถ้าทางเดินของลำแสงทั้งสองมาถึง E พร้อม ๆ กัน (กล่าวคือลำแสงทั้งสองมีเฟสตรงกัน) จะเกิดการแทรกสอดแบบเสริมกันทำให้เกิดแถบสว่างขึ้น อย่างไรก็ตามเนื่องจากมีกระแสอีเทอร์เป็นผลให้ลำแสงทั้งสองใช้เวลามาถึง E ต่างกัน ดังนั้นจึงเกิดการแทรกสอดแบบหักล้างกัน แต่ในการทดลองจริง ๆ นั้นไม่สามารถจัดให้กระจกเงา M_1 และ M_2 ตั้งได้ฉากกันอย่างสมบูรณ์ เป็นเหตุให้ริ้วการแทรกสอด (interference frings) มีลักษณะเป็นแถบมืดสว่างสลับกันดังแสดงในรูป1.4 ถ้าทางเดินของแสงเปลี่ยนไปจะทำให้แถบแสงเลื่อนไปจากตำแหน่งเดิม ด้วยเหตุนี้เครื่องมือทดลองที่อยู่นิ่งกับที่จึงไม่สามารถบอกอะไรได้ ดังนั้นในการทดลองจึงต้องหมุนเครื่องมือทดลองไป 90ํ เป็นผลให้ลำแสงทั้งสองสลับตำแหน่งกันสัมพัทธ์กับกระแสอีเทอร์ จึงคาดคะเนได้ว่าแถบการแทรกสอดต้องเลื่อนตำแหน่งไป



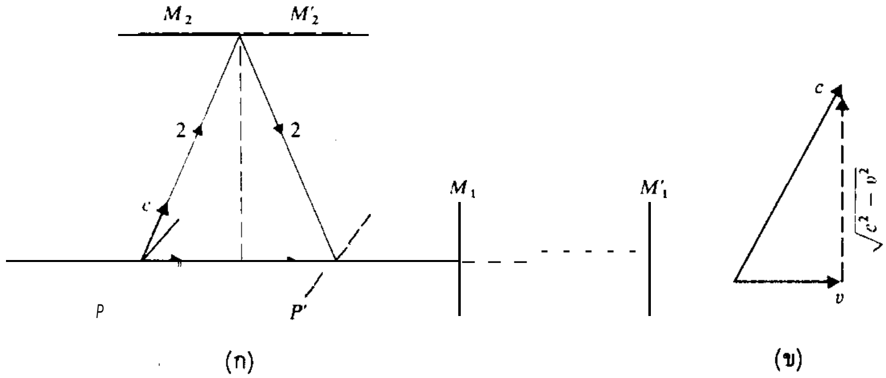
รูป 1.4 แสดงริ้วการแทรกสอดในการทดลองของไมเคิลสัน-มอร์เลย์

พิจารณาการทดลอง สมมติว่าโลกเคลื่อนที่ไปทางขวา ดังแสดงในรูป 1.3 ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ สัมพัทธ์กับอีเทอร์ จัดเครื่องมือให้ $PM_1 = PM_2 = L$ และให้ PM_1 ขนานกับ $\vec{v}$ ใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ ความเร็วของสัญญาณแสงจาก P ไปยัง M_1 คือ c-v ขณะที่จาก M_1 ไปยัง P (หลังจากสะท้อนกระจกเงา M_1) มีความเร็วเป็น c+v ถ้าให้ t_1 เป็นเวลาที่แสงใช้เดินทางจาก P ไป M_1 และจาก M_1 มายัง P จะได้

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v}$$

$$= \frac{2\,Lc}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2L}{c}/(1 - \frac{v^2}{c^2}) \qquad (1.14)$$



รูปที่ 1.5 (ก) ทางเดินของลำแสงที่ 2 ขณะที่เครื่องวัดการแทรกสอดเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ขนานกับ PM_1 (ข.) ไดอะแกรมแสดงความเร็วลัพธ์ของ c และ v

ลำแสงที่ 2 มีแนวทางเดินดังรูป 1.5 (ก) องค์ประกอบของความเร็วแสงที่ตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ของเครื่องวัดการแทรกสอด (interferometer) หาได้จากการรวมเวกเตอร์ (ดูรูป1.5 ข.) ซึ่งได้ค่าเป็น $\sqrt{c^2-v^2}$ ดังนั้นเวลา t_2 สำหรับลำแสงที่ 2 ใช้เดินทางจาก PM_2P คือ

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$= \frac{2L}{c} \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.15}$$

ช่วงเวลาซึ่งลำแสงที่ 1 แตกต่างจากลำแสงที่ 2 คือ

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

$$= \frac{2L}{c}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right] \tag{1.16}$$

เนื่องจาก v/c มีค่าน้อยมาก เราสามารถกระจายเทอมในวงเล็บของสมการข้างต้น และใช้เฉพาะ 2 เทอมแรก จะได้

$$\Delta t = \frac{2L}{c}\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \ldots\ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \ldots\ldots\right)\right]$$

$$\simeq \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\simeq \frac{Lv^2}{c^3}$$

ถ้าหมุนเครื่องวัดการแทรกสอดไปเป็นมุม 90° จะได้ว่าความแตกต่างของช่วงเวลาของลำแสงทั้งสองเท่ากับ $2\Delta t$ ดังนั้นจำนวน ΔN ของริ้วการแทรกสอดที่เลื่อนไปจากตำแหน่งเดิมเมื่อหมุนเครื่องวัดการแทรกสอด คือ

$$\Delta N = \frac{\text{ความแตกต่างของทางเดินแสง}}{\text{ความยาวคลื่น}}$$

$$= \frac{2\Delta tc}{\lambda}$$

แทนค่า Δt จากสมการ (1.17) ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta N = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \tag{1.18}$$

ในการทดลอง ไมเคิลสันและมอร์เรย์สะท้อนลำแสงที่ 1 และ 2 กลับไปกลับมาหลายครั้ง จนกระทั่งได้ทางเดินของแสงประมาณ 10 เมตร ใช้แหล่งกำเนิดแสงที่มีความยาวคลื่น λ = 5000 Å ดังนั้นคาดว่าแถบแสงจะเลื่อนไป

$$\Delta N = \frac{(2\times 10 \text{ เมตร}) \times (3\times 10^4 \text{ เมตร/วินาที})^2}{(5.0\times 10^{-7} \text{ เมตร}) \times (3\times 10^8 \text{ เมตร/วินาที})^2}$$

$$= 0.4$$

เครื่องมือการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เรย์ มีความไวพอที่จะวัดแถบแสงที่เลื่อนไปเพียงเล็กน้อยได้ (คือประมาณ 1/100 ของแถบแสง) และเขาได้ลดการสั่นสะเทือนโดยจัดเครื่องมือทดลองทั้งหมดวางบนภาชนะที่ลอยอยู่ในปรอท ผลการทดลองปรากฏว่าแถบแสงไม่มีการเลื่อนที่ไป (ได้ผลตรงข้ามกับที่คาดหวังไว้) ไมเคิลสันและมอร์เรย์ได้ทำการทดลองซ้ำหลายครั้งในสถานที่ต่าง ๆ กัน ฤดูต่าง ๆ กัน และที่เวลาต่าง ๆ กันในแต่ละวัน แต่ผลการทดลองปรากฏว่ายังคงไม่มีแถบแสงเลื่อนที่ไป ท่านทั้งสองจึงสรุปว่าไม่มีการเลื่อนที่ของแถบแสง กล่าวคือ

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

หรือ $t_1 = t_2$

ผลการทดลองนี้แสดงว่าเราไม่สามารถวัดความเร็วสัมบูรณ์ของโลกสัมพัทธ์กับอีเทอร์ (ซึ่งสมมติว่าเป็นกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์) ได้

อย่างไรก็ตามผลการทดลองสามารถอธิบายได้ โดยใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ แต่ต้องสมมติว่าอัตราเร็วของแสงคงที่นั่นคืออัตราเร็วของแสงมีค่าเท่ากันในทุก ๆ กรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล จะได้ว่า สำหรับลำแสงที่ 1 $t_1 = 2L/c$ และสำหรับลำแสงที่ 2 $t_2 = 2L/c$ ดังนั้น

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

จากสมการ (1.18) ΔN เข้าใกล้ศูนย์เมื่อ v เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งทำให้ไม่มีแถบแสงเลื่อนไปสอดคล้องกับผลการทดลอง ดังนั้นเราอาจกล่าวว่าการแปลงแบบกาลิเลโอใช้ได้ดีเมื่อ v น้อย ๆ และต้องมีการดัดแปลงเมื่อ v มีค่ามาก ๆ

1.4 สัจจพจน์ของไอน์สไตน์

ในปี ค.ศ.1905 ไอน์สไตน์ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะขึ้น ทำให้ความยุ่งยากเกี่ยวกับกรอบอีเทอร์หมดไป สรุปเป็นสัจจพจน์ได้ 2 ข้อคือ

1. กฎทั้งหลายในฟิสิกส์มีรูปแบบสมการที่เหมือนกันในทุก ๆ กรอบอ้างอิงอินเนอร์-เชียล (กรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กัน)

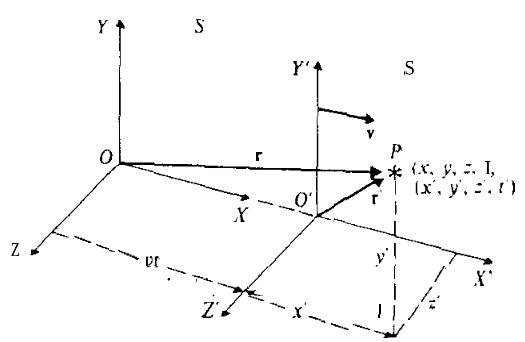
2. ความเร็วของแสงในสุญญากาศมีค่าคงที่เท่ากับ c และไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของกรอบอิงอินเนอร์เชียล ของแหล่งกำเนิดแสง และของผู้สังเกต

สัจจพจน์ข้อ 1 แสดงว่ากฎต่าง ๆ ของกลศาสตร์และของแม่เหล็กไฟฟ้าไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อใช้การแปลงโคออร์ดิเนต นอกจากนี้ยังกล่าวได้ว่ากรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ (เช่นกรอบอีเทอร์) ไม่มี สัจจพจน์ข้อสองเป็นความจริงที่ได้จากการทดลอง

ก่อนอื่นเราต้องหาสมการการแปลงโคออร์ดิเนตสำหรับกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กัน โดยที่สมการการแปลงโคออร์ดิเนตนี้ต้องใช้ได้ทั้งกลศาสตร์นิวตันและแม่เหล็กไฟฟ้า การแปลงแบบนี้เรียกว่าการแปลงแบบลอเรนตซ์ (Lorentz transformation)

1.5 การแปลงโคออร์ดิเนตแบบลอเรนตซ์

พิจารณากรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล S ที่อยู่นิ่ง และกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล S′ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v ตามแกน XX′ ดังแสดงในรูป 1.6



รูป 1.6 โคออร์ดิเนตของจุด P วัดจากระบบอินเนอร์เชียล S และ S′

มีผู้สังเกต 2 คน ผู้สังเกตคนแรกอยู่นิ่งเทียบกับกรอบ S และผู้สังเกตอีกคนอยู่นิ่งเทียบกับกรอบ S′ โคออร์ดิเนตของกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียลทั้งสองทับกันที่ $t = t' = 0$ ที่เวลาเดียวกันนี้ (คือ

$t = t' = 0$) มีแสงไฟวาบขึ้นที่จุดออริจินร่วมกันของ S และ S′ หลังจากนั้นสัญญาณไฟไปถึงจุด P (ดูรูป 1.6) จุดนี้อยู่ที่ระยะ r จากออริจินของกรอบ S และระยะ r′ จากกรอบ S′ ตามสัมพัทธภาพของนิวตัน อัตราเร็วของสัญญาณควรมีค่าต่างกันสำหรับผู้สังเกตทั้งสองถึงแม้ว่าเวลาที่ใช้ไปถึงจุด P จะเท่ากัน แต่ตามสัจจพจน์ข้อ 2 ของทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะ อัตราเร็วของแสง c ต้องเท่ากันในกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียลใด ๆ ดังนั้นเวลาที่ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงทั้งสองเห็นว่าแสงใช้ในการเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ r และ r′ ควรต่างกัน นั่นคือ

$$r = ct \tag{1.19}$$

$$r' = ct' \tag{1.20}$$

สมการ (1.19) และ (1.20) อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2 \tag{1.21}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2 \tag{1.22}$$

ระยะทางที่ตั้งฉากกับความเร็วสัมพัทธ์ของกรอบอ้างอิงทั้งสองจะไม่เปลี่ยนแปลง เนื่องจากกรอบอ้างอิง S และ S′ เคลื่อนที่สัมพัทธ์กันเฉพาะตามแกน XX′ ดังนั้น

$$y = y' \text{ และ } z = z' \tag{1.23}$$

สมมติว่าจุด P นี้อยู่ในแนวแกน XX′ (ดังนั้น $y = y' = 0,\ z = z' = 0$) สมการ (1.21) และ (1.22) จะเหลือเพียง

$$x^2 - c^2t^2 = 0 \tag{1.24}$$

$$x'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{1.25}$$

ดังนั้น $$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{1.26}$$

เราสนใจที่จะหา x' และ t' ในเทอมของ x และ t กล่าวคือ

$$x' = x'(x, t)$$

$$t' = t'(x, t)$$

สมมติว่าการแปลงโคออร์ดิเนตนี้เป็นเชิงเส้น (linear) สมการข้างต้นอาจเขียนได้ว่า

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \tag{1.27}$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t \tag{1.28}$$

เมื่อ a_{11}, a_{12}, a_{21} และ a_{22} เป็นค่าคงที่ซึ่งต้องการหา (เหตุที่สมมติการแปลงโคออร์ดิเนตเป็นเชิงเส้นเพราะสำหรับหนึ่งเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิงใด ๆ จะถูกแปลงเป็นหนึ่งเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิงอื่น ๆ แต่ถ้าการแปลงโคออร์ดิเนตเป็นกำลังสอง (quadratic transformation) หมายความว่าจะมีมากกว่าหนึ่งเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิงอื่น ๆ ซึ่งเป็นไปไม่ได้)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของออริจินของระบบ S' สำหรับกรณีที่ $x' = 0$ เมื่อ $t' = 0$ ผู้สังเกตใน S เห็นระบบ S' เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ดังนั้น

$$x = vt \tag{1.29}$$

จากสมการ (1.27) เมื่อ $x' = 0$ จะได้

$$a_{11}x = -a_{12}t \tag{1.30}$$

สมการ (1.30) เขียนให้อยู่ในรูปของสมการ (1.29) ได้เมื่อ

$$a_{12} = -va_{11}$$

แทนค่า a_{12} ลงในสมการ (1.27) ได้

$$x' = a_{11}(x-vt) \tag{1.31}$$

แทนค่า x'และ t' จากสมการ (1.31) และ (1.28) ลงในสมการ (1.26)

$$x^2-c^2t^2 = a_{11}^2(x-vt)^2-c^2(a_{21}x+a_{22}t)^2$$

$$= a_{11}^2(x^2-2vt+v^2t^2) - c^2(a_{21}^2x^2 + 2a_{21}a_{22}xt + a_{22}^2t^2)$$

สมการข้างต้นจัดรูปใหม่ ได้

$$(a_{11}^2 - c^2a_{21}^2 - 1)x^2 - 2(va_{11}^2 + c^2a_{21}a_{22})xt - (c^2a_{22}^2 - v^2a_{11}^2 - c^2)t^2 = 0 \tag{1.32}$$

เทอมในวงเล็บของสมการข้างต้นต่างเท่ากับศูนย์ จะได้

$$a_{11}^2 - c^2a_{21}^2 = 1$$

$$va_{11}^2 + c^2a_{21}a_{22} = 0$$

$$c^2a_{22}^2 - v^2a_{11}^2 = c^2$$

หาคำตอบ a_{11}, a_{21} และ a_{22} ของสมการข้างต้น และให้ $\beta = v/c$ และ $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ จะได้

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

และ

$$a_{21} = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{-\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta\gamma}{c}$$

แทนค่า a_{11}, a_{21} และ a_{22} ลงในสมการ (1.31), (1.28) และจากสมการ (1.23) เราได้สมการแปลงโคออร์ดิเนตแบบลอเรนตซ์ (Lorentz coordinate transformation equations) (จากกรอบอ้างอิง S ไปยังกรอบอ้างอิง S')

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad\qquad x' = \gamma(x-vt)$$

$$y' = y \qquad \text{หรือ} \qquad y' = y \tag{1.33}$$

$$z' = z \qquad\qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)\,x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad\qquad t' = \gamma\,(t - \frac{\beta}{c}x)$$

สำหรับการแปลงโคออร์ดิเนตที่กลับกัน (จากกรอบอ้างอิง S′ ไปยังกรอบอ้างอิง S) สามารถหาได้โดยการแทน v ด้วย -v และเปลี่ยนโคออร์ดิเนตไพรม์ (prime) และอันไพรม์ (unprime) กล่าวคือ

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1\ \ (v^2/c^2)}} \qquad\qquad x = \gamma\ (x' + vt')$$

$$Y = y' \qquad \text{หรือ} \qquad Y = y' \tag{1.34}$$

$$z = z' \qquad\qquad z = z'$$

$$t = \frac{t' + (v/c^2)\,x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2)}} \qquad\qquad t = \gamma\,(t' + \frac{\beta}{c}x')$$

ข้อสังเกต ในสมการเหล่านี้ t เป็นฟังก์ชันของ t′ และ x′ ขณะที่ t′ เป็นฟังก์ชันของ t และ x

ในกรณีที่ความเร็วต่ำ (สำหรับกลศาสตร์ยุคเก่าหรือกลศาสตร์นิวตัน) สมการการแปลงแบบลอเรนตซ์ต้องกลายเป็นการแปลงแบบกาลิเลโอ เราแสดงให้เห็นได้ง่าย ๆ ดังนี้ สมมติว่า $v \to 0$ ดังนั้น $v/c << 1$, $v^2/c^2 <<< 1$ และ $v/c^2 <<< 1$ ด้วย สมการ (1.33) กลายเป็น

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z \text{ และ } t' = t$$

ซึ่งเป็นการแปลงแบบกาลิเลโอ ดังนั้นเราสรุปได้ว่า

$$\lim_{v \to 0} \text{(การแปลงแบบลอเรนตซ์)} = \text{การแปลงแบบกาลิเลโอ} \tag{1.35}$$

การแปลงแบบลอเรนตซ์ยังให้ขีดจำกัดแก่ค่าสูงสุดของ v ด้วย กล่าวคือ v ต้องน้อยกว่า c ถ้า v มากกว่า c ปริมาณ $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ จะเป็นปริมาณจินตภาพ ทำให้โคออร์ดิเนตอวกาศและเวลาเป็นจินตภาพด้วย ซึ่งในทางฟิสิกส์เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นในสูญญากาศจะไม่มีสิ่งใดเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าความเร็วแสง

1.6 การแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์

ถ้ากรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล S และ S′ เคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยความเร็ว v ไปตามแกน XX′ พิจารณาอนุภาคที่จุด P กำลังเคลื่อนที่ในอวกาศด้วยความเร็ว $\bar{u}\,(u_x, u_y, u_z)$ ซึ่งวัดโดยผู้สังเกตในกรอบ S และด้วยความเร็ว $\bar{u}'\,(u_x', u_y', u_z')$ ที่วัดโดยผู้สังเกตในกรอบ S′ จุดประสงค์ของเราคือจะหาความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

และองค์ประกอบ

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad u_y' = \frac{dy'}{dt'}, \qquad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต สมการ (1.33) ได้

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma\,(dx - v dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma\,(dt - \frac{v}{c^2}\,dx) \end{aligned} \tag{1.36}$$

ดังนั้น

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,(dx - vdt)}{\gamma\,[\,dt - (vdx/c^2)\,]}$$

$$= \frac{(dx/dt) - v}{1 - (v/c^2)\,(dx/dt)}$$

หรือ

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma\,[\,1 - (vu_x/c^2)\,]} \tag{1.37}$$

และ

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma\,[\,1 - (vu_x/c^2)\,]}$$

สมการข้างต้นเหล่านี้เรียกว่าสมการการแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์ และสามารถหาการแปลงความเร็วที่กลับกันได้ กล่าวคือ u_x, u_y, u_z ในเทอมของ u_x', u_y' และ u_z' โดยการแทน v ด้วย $-v$ และเปลี่ยนโคออร์ดิเนตไพรม์และอันไพรม์ จะได้

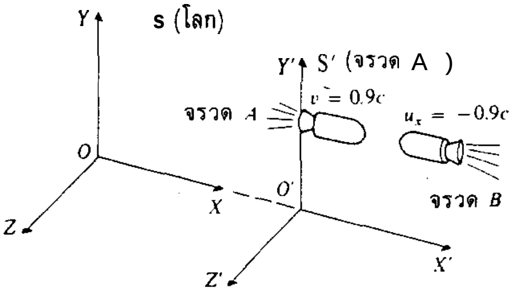
$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + (vu_x'/c^2)}$$

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma\,[\,1 + (vu_x'/c^2)\,]} \tag{1.38}$$

$$u_z = \frac{u_z'}{\gamma\,[\,1 + (vu_x'/c^2)\,]}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 พิจารณาจรวด 2 ลำ A และ B แต่ละลำเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับโลก ผู้สังเกตบนโลกเห็นจรวดทั้งสองเคลื่อนที่เข้าหากัน โดยที่จรวด A วิ่งออกจากโลก และจรวด B วิ่งเข้าหาโลก จงหาความเร็วของจรวด B สัมพัทธ์กับจรวด A

ให้โลกเป็นกรอบอ้างอิง S ที่หยุดนิ่ง จรวด A เป็นกรอบอ้างอิง S′ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = 0.9c$ ตามแกน XX′ และจรวด B เป็นจุด P ซึ่งเคลื่อนที่ในอวกาศด้วยความเร็ว $u_x = -0.9c$ ดังแสดงในรูป



รูป 1.7 จรวด A และ B 2 ลำเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับโลก ผู้สังเกตบนโลกเห็นจรวดทั้ง 2 เคลื่อนที่เข้าหากัน

จากสมการแรกของสมการ (1.37)

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)}$$

$$= \frac{-0.9c - 0.9c}{1 - [(0.9c)(-0.9c)/c^2]}$$

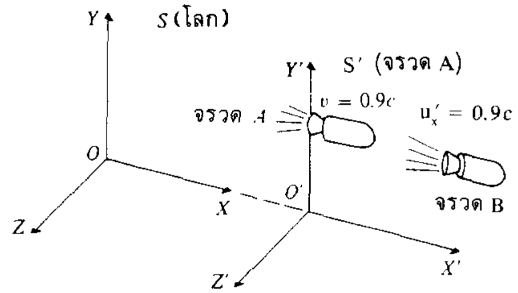
$$= \frac{-1.8c}{1.81}$$

$$u_x' = -0.9945\ c$$

ดังนั้น ผู้สังเกตในจรวด A จะเห็นจรวด B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9945 c ตามแกน - X′ ถ้าตามสัมพัทธภาพของนิวตัน ความเร็วของจรวด B สัมพัทธ์กับ A′ ควรจะเป็น - 0.9c - 0.9c = - 1.8c นั่นคือ | - 1.8c | มากกว่า c

ข้อสังเกต ถ้า $u_x = c$ จะได้ $|u_x'| = c$ กล่าวคือ ความเร็วแสงไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดและผู้สังเกต

ตัวอย่างที่ 1.3 พิจารณาจรวด 2 ลำ A และ B จรวด A เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับโลก จรวด B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับจรวด A ผู้สังเกตบนโลกเห็นจรวดทั้งสองลำเคลื่อนที่ตามกันไปโดยมีจรวด B อยู่ข้างหน้า จงหาความเร็วของจรวด B สัมพัทธ์กับโลก



รูป 1.8 จรวด A เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับโลก
จรวด B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับจรวด A

ให้โลกเป็นกรอบอ้างอิง S ที่หยุดนิ่ง
จรวด A เป็นกรอบอ้างอิง S′ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับโลก (v) ตามแกน XX′
จรวด B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับจรวด A (u_x')

จากสมการ $$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_x = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + (0.9c)(0.9c)/c^2}$$

$$= \frac{1.8}{1.81}c$$

$$u_x = 0.9945c$$

ความเร็วของจรวด B สัมพัทธ์กับโลกคือ 0.9945c

ตัวอย่างที่ 1.4 อนุภาคในระบบ S เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.8c ทำมุม 45° กับแกน x จงหาขนาดและทิศทางของความเร็วของอนุภาคเมื่อผู้สังเกตอยู่ในระบบ S′ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.8c ตามแกน XX′ สัมพัทธ์กับระบบ S

ให้ความเร็วของอนุภาคเมื่อสังเกตในระบบ S' (คือ u') ทำมุม θ กับแกน x' ดังนั้นองค์ประกอบของ u' ในแนวแกน x' และ y' คือ

$$u'_x = u' \cos\theta$$

$$u'_y = u' \sin\theta$$

จากสมการ $$u'_x = \frac{u_x \quad v}{1 \quad (vu_x/c^2)}$$

เมื่อ $u_x = 0.8c \cos 45° = \frac{0.8c}{\sqrt{2}}$

$v = 0.8c$

แทนค่าในสมการข้างต้น จะได้

$$u'_x = \frac{(0.8c/\sqrt{2}) \quad 0.8c}{1 - (0.8c)(0.8c)/\sqrt{2}\, c^2}$$

$$= \frac{-0.234c}{0.547}$$

$$= -0.428c$$

จากสมการ $$u'_y = \frac{u_y \; (1 \quad v^2/c^2)^{1/2}}{1 - vu_x/c^2}$$

เมื่อ $u_y = 0.8c \sin 45" = \frac{0.8c}{\sqrt{2}}$

$v = 0.8c$

แทนค่าลงในสมการข้างต้น ได้

$$u'_y = \frac{(0.8c/\sqrt{2}) \quad I \; (0.8c)^2/c^2 \; |^{1/2}}{1 \; (0.8c) \; (0.8c)/\sqrt{2}\, c^2}$$

$$= \frac{0.339}{0.547} c$$

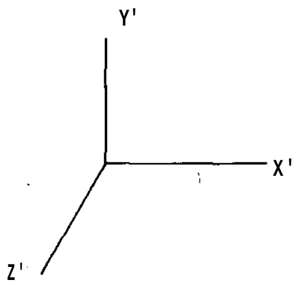
$$= 0.620\ c$$

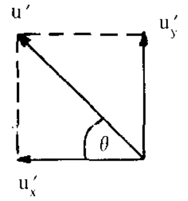
จาก $$u' = (u_x'^2 + u_y'^2)^{1/2}$$

$$= \; (-0.428c)^2 + (0.620c)^2 \; |^{1/2}$$

$$= 0.75c$$

ความเร็วของอนุภาคเมือสังเกตในระบบ S' คือ $0.75c$





$$\tan\ \theta = \frac{u'_y}{u'_x}$$

$$= \frac{01620\ c}{0.428\ c}$$

$$= 1.448$$

$$\theta = 55.4^\circ$$

ทิศของความเร็วของอนุภาคเมื่อสังเกตในระบบ S′ คือ θ (ดูรูป) = 55.4°

1.7 ความยาว, เวลา และความเป็นเวลาเดียวกันในสัมพัทธภาพ

เมื่อพิจารณาการแปลงแบบลอเรนตซ์ เราจะต้องตระหนักว่า ความยาว ช่วงเวลา และความเป็นเวลาเดียวกัน (simultaneity) ทั้งหมดนี้มีความหมายต่างจากความหมายในกลศาสตร์ยุคเก่า ในทฤษฎีสัมพัทธภาพนั้น นอกจากจะไม่มีกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์แล้ว ยังไม่มีความเป็นเวลาเดียวกันที่สัมบูรณ์ด้วย ปริมาณเหล่านี้ (ความยาว เวลา และความเป็นเวลาเดียวกัน) ขึ้นกับการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของผู้สังเกต ตามแนวความคิดของไอน์สไตน์ไม่มีสิ่งที่มีการเคลื่อนที่อย่างสัมบูรณ์เว้นแต่ความเร็วของแสงในสูญญากาศ มีค่าเท่าเดิมในทุก ๆ กรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล

1.7.1) การหดของความยาว

พิจารณาผู้สังเกตสองคนที่อยู่นิ่งในกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียล S และ S′ ผู้สังเกตใน S′ มีไม้เมตรความยาว L_0 วางขนานกับแกน X′ กล่าวคือ $L_0 = x'_2 - x'_1$ ซึ่งยาวเท่ากันทั้งในกรอบ S และ S′ เมื่อผู้สังเกตทั้งสองหยุดนิ่งสัมพัทธ์กัน สมมติว่ากรอบอ้างอิง S′ เริ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ตามแกน XX′ สำหรับผู้สังเกตใน S′ นั้นยังคงเห็นความยาวของไม้เมตรเป็น L_0 แต่สำหรับผู้สังเกตใน S ความยาวของไม้เมตรเป็น $L = x_2 - x_1$ เราแปลง x_1 และ x_2 โดยใช้การแปลงโคออร์ดิเนตแบบลอเรนตซ์สมการ (1.33) ได้เป็น

$$x'_2 = \gamma (x_2 - vt_2)$$

และ $$x'_1 = \gamma (x_1 - vt_1)$$

นำสมการข้างต้นลบกัน จะได้

$$x'_2 - x'_1 = \gamma \left[(x_2 - x_1) - v (t_2 - t_1) \right]$$

เนื่องจากผู้สังเกตใน S ต้องวัดปลายไม้เมตรทั้งสองพร้อม ๆ กัน หมายความว่า $t_1 = t_2$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1')$$

เมื่อ $x_2' - x_1' = L_0$ $1/\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ และ $x_2 - x_1 = L$ เป็นความยาวของไม้เมตรที่วัดโดยผู้สังเกตใน S แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการข้างต้น จะได้

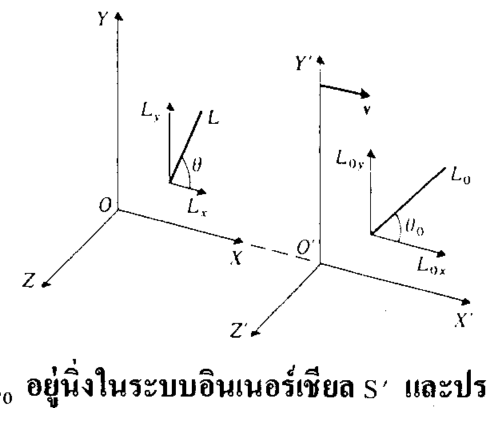
$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1.39}$$

ปริมาณ $\sqrt{1 - \beta^2}$ น้อยกว่า 1 เสมอ (และ $\gamma > 1$) ด้วยเหตุนี้ ความยาว L ต้องน้อยกว่า L_0 กล่าวคือ สำหรับผู้สังเกตใน S จะมองดูเหมือนกับว่าไม้เมตรหดสั้นลง (เนื่องจาก $y' = y$ และ $z' = z$ ไม่มีการสังเกตว่าความยาวในทิศทางเหล่านี้เปลี่ยนไป) ปรากฏการณ์ในลักษณะเช่นนี้กลับกันได้เช่น ถ้า S มีไม้เมตรยาว L_0 ขณะที่ S′ เคลื่อนที่ และสังเกตไม้เมตร จะปรากฏว่ายาว $L_0\sqrt{1 - \beta^2}$ (คือหดสั้นลง)

ดังนั้นสรุปได้ว่า การวัดความยาวของวัตถุมีค่ามากที่สุด เมื่อวัตถุนั้นหยุดนิ่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกตและจะปรากฏว่าหดสั้นลงด้วยแฟกเตอร์ $\sqrt{1 - \beta^2}$ กับผู้สังเกตที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับวัตถุ ความยาว L_0 ที่วัดในกรอบซึ่งอยู่นิ่งเรียกว่าความยาวแท้ (proper length) ปรากฏการณ์สั้นลงของไม้เมตรเราเรียกว่า การหดของลอเรนตซ์-ฟิตซ์เจอรัลด์ (Lorentz-Fitzgerald contraction)

ตัวอย่างที่ 1.5 สำหรับผู้สังเกตที่อยู่นิ่งในระบบ S′ สังเกตไม้เมตรความยาว 1 เมตร ทำมุม 45° กับแกน x' ให้คำนวณหาความยาวของไม้เมตรและมุมที่ไม้เมตรทำแกน x เมื่อผู้สังเกตอยู่ในระบบ S เมื่อระบบ S′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = (\sqrt{3}/2)\,c$ สัมพัทธ์กับ S ตามแกน xx'

สมมติว่าความยาวของไม้เมตรเมื่อหยุดนิ่งสัมพัทธ์กับ S′ คือ L_0 เราต้องหาองค์ประกอบ L_{0x} และ L_{0y} ดังแสดงในรูป 1.9



รูป 1.9 ไม้เมตรยาว L_0 อยู่นิ่งในระบบอินเนอร์เชียล S′ และปรากฏว่ายาว L ในระบบ S

$$L_{0x} = L_0 \cos\theta_0 \text{ และ } L_{0y} = L_0 \sin\theta_0$$

เมื่อสังเกตความยาวของไม้เมตรจากระบบ S องค์ประกอบของ L_0 ในแนวตั้งฉากกับ v คือ L_{0y} ยังคงไม่เปลี่ยน กล่าวคือ

$$L_y = L_{0y} = L_0 \sin\theta_0$$

องค์ประกอบของ L_0 ในแนวเดียวกับ v จะหดสั้นลงเมื่อสังเกตจากระบบ S กล่าวคือ

$$\begin{aligned} L_x &= \sqrt{1-\beta^2}\, L_{0x} \\ &= \sqrt{1-\beta^2}\, L_0 \cos\theta_0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผู้สังเกตใน S เห็นความยาวไม้เมตรเป็น

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \\ &= \sqrt{[(1-\beta^2)^{1/2} L_0 \cos\theta_0]^2 + (L_0 \sin\theta_0)^2} \\ &= L_0 \sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta_0} \end{aligned}$$

แทนค่า $L_0 = 1$ เมตร $\theta_0 = 45^\circ$ และ $v = (\sqrt{3}/2)\,c$ ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$\begin{aligned} L &= (1 \text{ เมตร}) \sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2\cos^2 45^\circ} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \text{เมตร} \\ &= 0.625 \quad \text{เมตร} \end{aligned}$$

และผู้สังเกตใน S เห็นมุม θ ที่ทำกับแกน x คือ

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{L_y}{L_x} \\ &= \frac{L_0 \sin\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}\, L_0 \cos\theta_0} \\ &= \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{\tan 45^\circ}{\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

หรือ $\theta = 63^\circ\ 27'$

ข้อสังเกต การหดสั้นนี้มีเฉพาะในแนวแกน x กล่าวคือ

$$\begin{aligned} L_x &= \sqrt{1-\beta^2}\, L_{0x} \\ &= \sqrt{1-\beta^2}\, L_0 \cos\theta_0 \\ &= \sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}\,(1 \text{ เมตร})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0.353 \quad \text{เมตร} \end{aligned}$$

1.7.2) การยืดของเวลา

ช่วงเวลามีลักษณะเช่นเดียวกับช่วงความยาว คือไม่ใช่ปริมาณที่สัมบูรณ์ ตัวอย่าง เช่น พิจารณาเหตุการณ์ต่างกันสองเหตุการณ์ ช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์ทั้งสองถูกบันทึกด้วยนาฬิกาสองเรือนในระบบอินเนอร์เชียล S และ S′ แต่นาฬิกาทั้งสองถูกสังเกตจากระบบ S จากสมการ (1.34) เรามี

$$t_1 = \frac{t_1' + (v/c^2)\, x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + (v/c^2)\, x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

และดังนั้น $t_2 - t_1 = \dfrac{(t_2' - t_1') + (v/c^2)(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}}$

ตามสมการข้างต้นนี้ ผู้สังเกตในระบบ S มองดูนาฬิกาของ S′ (ซึ่งต้องอยู่นิ่งระหว่างการสังเกต กล่าวคือ $x_1' = x_2'$) อ่านช่วงเวลาของ $t_2' - t_1'$ เปรียบเทียบกับช่วงนาฬิกาของตนเอง $(t_2 - t_1)$ ดังนั้น

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ถ้าเรากำหนดให้ $t_2' - t_1' = T_0$ เป็นช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์ทั้งสองที่ถูกบันทึกโดยผู้สังเกตใน S′ ซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับนาฬิกาของตัวเอง และ $t_2 - t_1 = T$ เป็นช่วงเวลาที่ถูกบันทึกโดยผู้สังเกตใน S ซึ่งเคลื่อนที่ (ด้วยความเร็ว - v สัมพัทธ์กับ S′ และนาฬิกาใน S′) เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\, T_0} \tag{1.40}$$

เนื่องจาก $\sqrt{1-\beta^2}$ น้อยกว่าหนึ่งเสมอ และ $\gamma > 1$ จะได้ช่วงเวลา T ยาวกว่า T_0 ดังนั้นจะปรากฏแก่ผู้สังเกตใน S (ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว - v ตามแกน XX′) ว่า นาฬิกาของ S′ คล้ายกับเดินช้ากว่าเมื่อเทียบกับนาฬิกาของตัวเอง ลักษณะเช่นนี้เกิดกลับกันได้ กล่าวคือ เมื่อผู้สังเกตใน S′ มองนาฬิกาใน S จะปรากฏว่าเดินช้ากว่าเมื่อเทียบกับนาฬิกาของตัวเอง

ดังนั้นนาฬิกาปรากฏว่าเดินเร็วที่สุดเมื่อมันหยุดนิ่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกต และปรากฏว่าเดินช้าลงด้วยแฟกเตอร์ $1/\sqrt{1-\beta^2}$ เมื่อนาฬิกานี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับผู้สังเกต ช่วงเวลาที่วัดในกรอบอ้างอิงที่นาฬิกาหยุดนิ่ง คือ T_0 เรียกว่า เวลาแท้ (proper time)

ตัวอย่างที่ 1.6 ผู้สังเกตบนโลกสังเกตเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ไปได้ 1 กิโลเมตร ในเวลา 50 วินาที บนถนนสายตรง สำหรับผู้สังเกตในยานอวกาศซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับโลกด้วยอัตราเร็ว 0.95 c จะเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่าใด เมื่อใช้นาฬิกาของเขาจับเวลาการเคลื่อนที่ของรถยนต์ โดยที่ความเร็วของยานอวกาศนี้ (ก) ตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ และ (ข) อยู่ในแนวเดียวกันกับการเคลื่อนที่ของรถยนต์

เวลาแท้ T_0 คือ 50 วินาที ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตในยานอวกาศ

$$T = \gamma T_0$$

เมื่อ $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(0.95)^2}}$$

$$= 3.2$$

ดังนั้น $T = 3.2 \times 50$

$= 160$ วินาที

ก) ไม่มีการหดของความยาวสำหรับระยะทางที่รถเคลื่อนที่ ถ้าความเร็วของยานอวกาศมีทิศตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ แต่อย่างไรก็ตาม ผู้สังเกตในยานอวกาศจะเห็นว่ารถยนต์ต้องใช้เวลา 160 วินาที จึงเคลื่อนที่ไปได้ 1 กิโลเมตร

ข) ถ้ายานอวกาศเคลื่อนที่ในแนวเดียวกันกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ จะมีการหดตัวของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ไปได้ คือ

$$L = L_0/\gamma$$

$$= L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \frac{1\text{ กม.}}{3.2}$$

$$= 0.31\text{ กม.}$$

ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตในยานอวกาศ จะสังเกตเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ได้เพียง 0.31 กม. ในเวลา 160 วินาที กล่าวคือจะเคลื่อนที่ 1 กม. ในเวลา 517 วินาที หรือ 8.6 นาที

1.7.3) ความเป็นเวลาเดียวกัน

ในกลศาสตร์นิวตัน เวลาสมมติว่าเป็นปริมาณสัมบูรณ์ กล่าวคือ $t = t'$ ดังนั้นสเกลของเวลาเดียวกันใช้ได้กับกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียลทั้งหมด เมื่อเรากล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อมกัน หมายความว่าเหตุการณ์ทั้งสองนี้เกิดขึ้นที่เวลาเดียวกัน โดยไม่คำนึงถึงกรอบอ้างอิงใด ๆ เพราะเหตุการณ์เหล่านี้พิจารณาว่าเป็นเวลาเดียวกัน (simultaneous) ในระบบอินเนอร์เชียลทั้งหลาย ซึ่งเป็นจริงเฉพาะในกลศาสตร์ยุคเก่าสำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ

อย่างไรก็ตามในสัมพัทธภาพ ความยาวและเวลาไม่เป็นปริมาณสัมบูรณ์ เหตุการณ์หนึ่งที่เป็นเวลาเดียวกันกับผู้สังเกตในระบบอินเนอร์เชียลหนึ่ง ไม่จำเป็นต้องเป็นเวลาเดียวกันกับผู้สังเกตในระบบอินเนอร์เชียลอื่น ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับระบบแรก ความหมายของความเป็นเวลาเดียวกันตามแนวคิดของไอน์สไตน์มีดังนี้

เหตุการณ์สองเหตุการณ์ซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงใด ๆ ที่จุด A (x_1, t_1) และ B (x_2, t_2) เป็นเวลาเดียวกัน ถ้าสัญญาณแสงที่ปล่อยออกมาพร้อม ๆ กันจากจุดกึ่งกลางทางเรขาคณิตระหว่าง x_1 และ x_2 มาถึง x_1 ที่เวลา t_1 และถึง x_2 ที่เวลา t_2

ดังนั้นในทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ความเป็นเวลาเดียวกันไม่มีความหมายสัมบูรณ์เพราะโคออร์ดิเนต t และ t' นอกจากจะไม่เท่ากันแล้วยังขึ้นกับโคออร์ดิเนต x และ x' ซึ่งกำหนดโดยการแปลงแบบลอเรนตซ์ ตัวอย่างเช่น (i) เหตุการณ์สองเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กันที่ x_1 และ x_2 ในระบบ S เหตุการณ์ A และ B นี้เป็นเวลาเดียวกันใน S เพราะ $t_1 = t_2$ แต่ไม่เป็นเวลาเดียวกันใน S$'$ เพราะตามสมการ (1.34) $t_1' \neq t_2'$ (ii) เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ C และ D เกิดขึ้นที่ x ในระบบ S ที่เวลา t_1 และ t_2 เมื่อสังเกตจาก S$'$ ปรากฏว่าไม่เฉพาะเกิดขึ้นต่างเวลากันเท่านั้น แต่ยังเกิดที่ตำแหน่งต่างกันด้วย กล่าวคือ $t_1' \neq t_2'$ และ $x_1' \neq x_2'$

1.8 มวลและโมเมนตัมในสัมพัทธภาพ

โมเมนตัมเชิงเส้น $\vec{p}$ ของวัตถุใด ๆ ตามกลศาสตร์ยุคเก่ากำหนดโดย

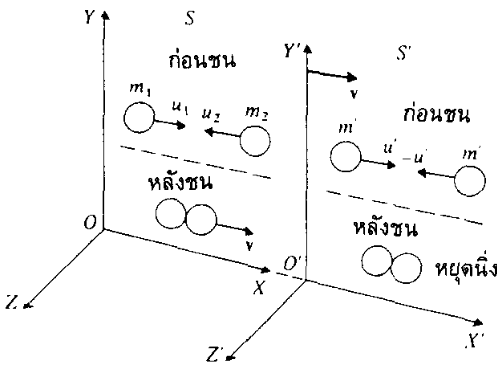
$$\vec{p} = m_0\vec{v} \tag{1.41}$$

เมื่อ m_0 เป็นมวลอินเนอร์เชียล (inertial mass) ของวัตถุ และ $\vec{v}$ เป็นความเร็วของวัตถุ สำหรับระบบโดดเดี่ยว (isolated system) ที่ประกอบด้วยอนุภาคมวล $m_{01}, m_{02}, \ldots\ldots m_{0i}$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots \vec{v}_i$ ตามลำดับ และไม่มีแรงภายนอกใด ๆ กระทำ การอนุรักษ์โมเมนตัมคือ

$$m_{01}\vec{v}_1 + m_{02}\vec{v}_2 + \ldots\ldots + m_{0i}\vec{v}_i = \sum_i m_{0i}\vec{v}_i = \text{ค่าคงที่} \tag{1.42}$$

ในกลศาสตร์นิวตันพิจารณาว่ามวลเป็นปริมาณคงที่ไม่ขึ้นกับความเร็วที่มันเคลื่อนที่ไป ดังนั้น

โมเมนตัมและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมจึงเป็นไปตามสมการ (1.41) และ (1.42) สำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพ มวลเป็นเช่นเดียวกับความยาวและช่วงเวลาคือไม่ใช่ปริมาณที่คงที่แต่เปลี่ยนไปกับความเร็วของวัตถุนั้น ที่ความเร็วต่ำมวลของวัตถุไม่เปลี่ยนมากพอที่จะสังเกตได้ และตามกลศาสตร์ยุคเก่าประมาณว่าสมการข้างต้นถูกต้อง แต่เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง สมการเหล่านี้ใช้ไม่ได้ เราอาจใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม และการแปลงแบบลอเรนตซ์เพื่อหารูปแบบของมวลที่เปลี่ยนไปกับความเร็ว



รูป 1.10 แสดงการชนกันของลูกบอลที่เหมือนกัน 2 ลูกที่สังเกตในระบบอินเนอร์เชียล S และ S′

พิจารณาการชนกันแบบยืดหยุ่น (elastic collision) ระหว่างลูกบอลที่เหมือนกัน 2 ลูกในระบบอินเนอร์เชียล S′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบ S ด้วยความเร็ว v ตามแกน XX′ ดังแสดงในรูป 1.10 ลูกบอลใน S′ แต่ละลูกมีมวล m′ และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u′ และ -u′ ตามแกน X′ มวลของลูกบอลทั้งสองนี้ถ้าสังเกตจากระบบ S คือ m_1 และ m_2 ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 และ u_2 ตามลำดับ หลังจากชนกันแล้วลูกบอลทั้งสองติดกันไปและหยุดนิ่งในระบบ S′ แต่ปรากฏว่าเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v}$ เมื่อเทียบกับระบบ S (ดูรูป 1.10) การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นในระบบอินเนอร์เชียล S และ S′ คือ

ใน S′ $\quad m'u' + m'(-u') = 0 \qquad (1.43)$

ใน S $\quad m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\,v \qquad (1.44)$

จากการแปลงความเร็วแบบลอเรนต์ซ ตามสมการ (1.38) ได้ u_1, และ u_2

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + (u'\,v/c^2)} \qquad (1.45)$$

และ
$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 - (u'\,v/c^2)} \qquad (1.46)$$

ให้ $M = m_1 + m_2$ สมการ (1.44) อาจเขียนให้อยู่ในรูป

$$m_1 (u_1 - u_2) = M (v - u_2) \quad (1.47)$$

หรือ $$m_2 (u_1 - u_2) = M (u_1 - v) \quad (1.48)$$

หารสมการ (1.47) ด้วยสมการ (1.48) แล้วแทนค่า u_1 และ u_2 จากสมการ (1.45) และ (1.46) จะได้

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v - u_2}{u_1 - v} = \frac{1 + (u' v/c^2)}{1 - (u' v/c^2)} \quad (1.49)$$

แทนค่า u_1 จากสมการ (1.45) ลงใน $[1 - (u_1^2/c^2)]^{1/2}$ ได้

$$[1-(u_1^2/c^2)]^{1/2} = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u'+v}{1+u'v/c^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \frac{[(1-v^2/c^2)(1-u'^2/c^2)]^{1/2}}{1+u'v/c^2}$$

หรือ $$\frac{1+u'v}{c^2} = \frac{[(1-v^2/c^2)(1-u'^2/c^2)]^{1/2}}{(1-u_1^2/c^2)^{1/2}} \quad (1.50)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{1-u'v}{c^2} = \frac{[(1-v^2/c^2)(1-u'^2/c^2)]^{1/2}}{(1-u_2^2/c^2)^{1/2}} \quad (1.51)$$

แทนสมการ (1.50) และ (1.51) ลงในสมการ (1.49) จะได้

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1 - u_2^2/c^2)^{1/2}}{(1 - u_1^2/c^2)^{1/2}}$$

หรือ $$m_1\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2} = m_2\left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{1/2} = \text{ค่าคงที่} = m_0 \quad (1.52),$$

เมื่อ m_0 เป็นมวลนิ่ง (rest mass) ของลูกบอลที่เหมือนกันทั้งสองลูก ดังนั้นโดยทั่วไปแล้วถ้ามวลใด ๆ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับผู้สังเกต

$$m[1 - v^2/c^2]^{1/2} = m_0$$

หรือ $$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0} \quad (1.53)$$

สมการข้างต้นแสดงว่ามวลของวัตถุใด ๆ โดยทั่วไปแล้วไม่คงที่ เฉพาะเมื่อวัตถุนั้นอยู่นิ่งมวลของมันจึงคงที่และเท่ากับ m_0 เมื่อวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับผู้สังเกตมวลของมันปรากฏว่าเพิ่มขึ้นเป็น m เรียกว่า มวลเชิงสัมพัทธ์ (relativistic mass) ซึ่งกำหนดโดยสมการ (1.53) ดังนั้น m_0 เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ อย่างไรก็ตามในกลศาสตร์ยุคเก่าไม่มีความแตกต่างกันระหว่าง m และ m_0 เพราะว่าเมื่อ $v \rightarrow 0$ จากสมการ

(1.53) ได้ $m \rightarrow m_0$ ตาราง 1.1 แสดงให้เห็นว่า m ไม่ต่างจาก m_0 มากกว่า 0.5% ในกรณีที่ v/c น้อยกว่า 1/10 ถ้า $v \rightarrow c$, $m \rightarrow \infty$ ซึ่งหมายความว่าถ้าเราต้องการให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าแสงเราควรต้องเพิ่มมวลของวัตถุเป็นอนันต์ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นในกรณีนี้จึงเป็นอีกเหตุผลหนึ่งที่กล่าวว่าวัตถุใด ๆ ไม่สามารถมีความเร็วเท่าแสงได้

จากที่กล่าวแล้วข้างต้น เรากำหนดโมเมนตัมเชิงเส้นและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ดังนี้

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}} \tag{1.54}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \gamma_i m_{oi} \vec{v}_i = \text{คงที่} \tag{1.55}$$

ตาราง 1.1 แสดงมวลเปลี่ยนไปกับความเร็ว

v/c	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50	0.80	0.90	0.98	0.99	1.00
m/m_o	1.00005	1.0001	1.0013	1.005	1.15	1.666	2.3	5.00	7.10	∞

ตัวอย่างที่ 1.7 โปรตอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด มวลของโปรตอนจึงเป็นสองเท่าของมวลนิ่ง

จากสมการ $m = \gamma m_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

สำหรับ $m = 2 m_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m}{m_0} = 2$$

นั่นคือ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$= 0.866 c$$

1.9 กลศาสตร์เชิงสัมพัทธ์

เนื่องจากมวลของอนุภาคไม่ใช่ปริมาณคงที่ดังกล่าวในหัวข้อที่แล้ว ทำให้ต้องปรับปรุงเกี่ยวกับกฎข้อสองของนิวตัน พลังงานจลน์ และพลังงานรวมในฟิสิกส์ยุคเก่า จากสมการ (1.54)

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{v}$$

เมื่อ $\vec{p}$ มี 3 องค์ประกอบ คือ

$$p_x = \gamma\, m_0 v_x \ , \ p_y = \gamma m_0\, v_y \text{ และ } p_z = \gamma\, m_0\, v_Z \qquad (1.56)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ โดยที่ } v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

ตามกฎข้อสองของนิวตัน แรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่อวัตถุกำหนดว่าคืออัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมกับเวลา อย่างไรก็ตามในกลศาสตร์เชิงสัมพัทธ์ (relativistic mechanics) แรง $\vec{F}$ คืออัตราการเปลี่ยนโมเมน-ตัมเชิงสัมพัทธ์กับเวลา กล่าวคือ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) \qquad \textbf{(1.57)}$$

เนื่องจาก m ไม่ใช่ค่าคงที่ อาจเขียน $\vec{F}$ ได้เป็น

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(1.58)}$$

กรณีที่ $v << c$ (ฟิสิกส์ยุคเก่า) จะได้ $dm/dt \rightarrow 0$ ดังนั้นสมการ (1.58) คือ

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

สมมติว่าอนุภาคที่มีมวลนิ่ง m_0 ถูกแรง F กระทำแล้วเคลื่อนที่ไปได้ระยะ x ในเวลา t ตามแกน x โดยมีความเร็วสุดท้ายเป็น v พลังงานจลน์ T กำหนดได้ว่าเป็นงานที่ทำโดยแรง F เช่นเดียวกับในกลศาสตร์ยุคเก่า คือ

$$T = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{d}{dt}(mv)\, dx = \int_0^x \frac{dx}{dt}\, d(\gamma m_0 v)$$

$$= m_0 \int_0^v v d(\gamma v) \qquad (1.59)$$

เนื่องจาก $d\gamma = d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{v}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv$

และ $d(\gamma v) = ydv + vdy$

$$= \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} dv + \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv\right]$$

$$= \frac{dv}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}}$$

แทนค่า $d(\gamma v)$ ลงในสมการ (1.59) แล้วอินทิเกรต จะได้

$$T = m_0 \int_o^v \frac{vdv}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}}$$

$$= m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

$$= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

ดังนั้น $$\boxed{T = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma-1)\, m_0c^2} \quad (1.60)$$

สมการข้างต้นนี้ต่างจากกลศาสตร์ยุคเก่า (ซึ่งกำหนดว่า $T = \frac{1}{2}m_0v^2$) แต่สามารถทำให้อยู่ในรูปแบบของกลศาสตร์ยุคเก่าได้ เมื่อ $v/c << 1$ หรือที่ความเร็วต่ำ กล่าวคือกระจาย γ โดยใช้ทฤษฎีไบโนเมียล (binomial theorem) แล้วใช้เพียง 2 เทอมแรกเท่านั้น ดังนี้

$$\lim_{v/c<<1} T = m_0c^2(\gamma-1) = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

$$= m_0c^2 [1-v^2/c^2)^{-1/2} - 1]$$

$$\simeq m_0c^2 [(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\ldots) - 1]$$

$$= \frac{1}{2} m_0v^2$$

ย้อนกลับมาพิจารณาสมการ (1.60) ซึ่งกล่าวว่าการเพิ่มพลังงานจลน์ของอนุภาคนั้นเนื่องจากมวลของอนุภาคเพิ่มขึ้น ถ้าเรากำหนด $\Delta m = m - m_0$ ดังนั้น (1.61)

$$T = \Delta mc^2 = (m-m_0)\, c^2 \quad (1.62)$$

ความสัมพันธ์นี้หมายความว่าพลังงานอาจถูกกำหนดให้เป็นมวลในกลศาสตร์สัมพัทธภาพปริมาณ m_0c^2 ไม่ขึ้นกับความเร็วของอนุภาคเรียกว่าพลังงานมวลนิ่ง (rest-mass energy) และแทนด้วย E_0 ปริมาณ mc^2 ($= T + m_0c^2$) เป็นผลรวมของพลังงานมวลนิ่งและพลังงานจลน์ แทนด้วย E ซึ่งเรียกว่าพลังงานรวม E ดังนั้นสมการ (1.60) อาจเขียนได้เป็น

$$\boxed{E = mc^2 = T + E_0 = \gamma m_0c^2 = \gamma E_0} \quad (1.63)$$

เมื่อ $$E_0 = m_0c^2 \quad (1.64)$$

และ $$E = mc^2 \quad (1.65)$$

สมการ (1.65) กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างมวลและพลังงาน ซึ่งรู้จักกันดีว่า คือความสัมพันธ์มวล-พลังงานของไอน์สไตน์ (Einstein's mass-energy relation)

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในสนามที่อนุรักษ์ (conservative field) มีพลังงานศักย์ V พลังงานรวม คือ

$$\boxed{E = T + V + E_0} \tag{1.66}$$

สำหรับกฎการอนุรักษ์มวลและกฎการอนุรักษ์พลังงานที่แยกกัน (ตามกลศาสตร์ยุคเก่า) นั้น ในทฤษฎีสัมพัทธภาพแทนด้วยกฎเดียวเรียกว่า การอนุรักษ์มวล-พลังงาน (conservation of mass-energy) หรือกฎการอนุรักษ์ของพลังงานเชิงสัมพัทธ์รวม (total relativistic energy) ซึ่งกล่าวว่าพลังงานเชิงสัมพัทธ์รวมไม่เปลี่ยนภายใต้การแปลงแบบลอเรนต์ซ สำหรับระบบโดดเดี่ยวพลังงานเชิงสัมพัทธ์รวมมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะสังเกตจากระบบอินเนอร์เชียลใด ๆ ดังนั้น

พลังงานรวม = พลังงานนิ่ง + พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์ = คงที่

ความสัมพันธ์อย่างง่าย ๆ ระหว่างโมเมนตัมเชิงสัมพัทธ์ p พลังงานมวลนิ่ง E_0 และพลังงานรวม E หาได้ดังต่อไปนี้ เริ่มจาก

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ยกกำลังสองสมการข้างต้น แล้วจัดรูปใหม่ ได้

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

คูณทั้งสองข้างด้วย c^4

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0^2c^4$$

แทนสมการข้างต้นด้วย $p = mv, E_0 = m_0c^2$ และ $E = mc^2$ เราได้ความสัมพันธ์ตามต้องการ คือ

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{1.67}$$

หรือ $$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

สรุปในกลศาสตร์เชิงสัมพัทธ์เราได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 v$$

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$$

$$E = mc^2 = T + E_0 = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

$$E_0 = m_0c^2$$

และ $$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

พิจารณาการประมาณที่น่าสนใจซึ่งเป็นผลจากข้อจำกัดต่าง ๆ ดังนี้

(i) $v << c$ (ii) $v = c$ (iii) $v = c$

(i) ย่านยุคเก่า : $v << c$ (หรือ $\gamma \to 1$) ในกรณีที่ความเร็วของวัตถุมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วแสง เราอาจพิจารณาอนุภาคได้โดยใช้กลศาสตร์ยุคเก่า ดังนั้นสมการเชิงสัมพัทธ์จะกลายเป็นสมการของกลศาสตร์ยุคเก่า

$$m \simeq m_0, p \simeq m_0 v, T \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{1.68}$$

การตัดสินใจว่าเมื่อไรใช้กลศาสตร์ยุคเก่า ให้พิจารณา

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{E_0 + T}{m_0 c^2} = 1 + \frac{T}{m_0 c^2} \tag{1.69}$$

เราสามารถใช้กลศาสตร์ยุคเก่าได้ ในกรณีที่ $\gamma \to 1$ ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $T << m_0 c^2$ กล่าวคือ ถ้า $v/c < \frac{1}{10}$ หรือ $T/m_0 c^2 < \frac{1}{200}$ การใช้สมการ (1.68) นั้น ผลที่ได้มีข้อผิดพลาดน้อยกว่า 1%

(ii) ย่านเชิงสัมพัทธ์สุดขีด : $v \simeq c$ (หรือ $\gamma << 1$) ในย่านนี้ E (หรือ mc^2) และ T มีค่ามากเมื่อเทียบกับ $m_0 c^2$ สมการเชิงสัมพัทธ์จะอยู่ในรูปง่าย ๆ คือ

$$p \simeq \frac{E}{c}, T \simeq E \tag{1.70}$$

กล่าวคือ $v/c > 0.99$ หรือ $E/m_0 c^2 > 7$ และการใช้สมการ (1.70) ไม่ทำให้เกิดข้อผิดพลาดเกิน 1%

(iii) กรณี $v = c$ (หรือ $\gamma = \infty$)

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วแสง สมการ $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ให้ค่า $m = \infty$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าไม่มีอนุภาคใด ๆ ที่จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วแสง แต่มีสิ่งที่น่าสนใจอีกกรณีหนึ่งคือ ความยุ่งยากเกี่ยวกับ $m = \infty$ ถ้า $v = c$ จะหมดไป ถ้าเราสมมติว่า $m_0 = 0$ ดังนั้นเราจะได้ $m = \frac{0}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ อนุภาคที่มีลักษณะเช่นนี้คือมวลนิ่งเป็นศูนย์เท่านั้นจึงสามารถเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = c$ ได้ และในกรณีนี้

$$m_0 = 0, E = pc, T = E \tag{1.71}$$

แสดงว่าอนุภาคนี้มีโมเมนตัมและพลังงานแต่ไม่มีมวลนิ่ง ตามกลศาสตร์ยุคเก่าอนุภาคที่มีลักษณะเช่นนี้ไม่มี แต่ตามไอน์สไตน์นั้นอนุภาคที่มีคุณสมบัติ ซึ่งอธิบายด้วยสมการ (1.71) คือ โฟตอนนั่นเอง

1.10 การทดลองที่สนับสนุนทฤษฎีสัมพัทธภาพ

นักวิทยาศาสตร์ได้ทดสอบทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะหลายครั้งกับเหตุการณ์ต่าง ๆ มากมาย แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะ (1) การที่มวลเปลี่ยนไปกับความเร็ว (2) การหดของความยาวและการยืดของเวลาในการสลายตัวของอนุภาคเมซอน

1.10.1) การที่มวลเปลี่ยนไปกับความเร็ว

พิจารณาอนุภาคมวลนิ่ง m_0 และประจุ q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ในสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า $\vec{B}$ และ $\vec{E}$ ตามลำดับ แรงที่กระทำต่ออนุภาค คือ

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

ถ้าสมมติว่าแรงเท่ากับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมกับเวลาเป็นปริมาณที่ถูกต้อง การเคลื่อนที่ของอนุภาคในเชิงสัมพัทธภาพ ควรอธิบายได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m_0\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.72}$$

เพื่อให้พิจารณาได้ง่ายขึ้น สมมติว่า $E=0$ และอนุภาคความเร็ว v เคลื่อนที่ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{B}$ แรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กที่กระทำต่ออนุภาคประจุ q คือ

$$F_{mag} = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB \tag{1.73}$$

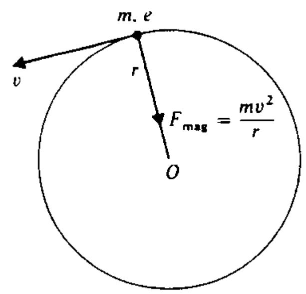
แรงนี้ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม ดังนั้น

$$qvB = F_{cent} = \frac{mv^2}{r} \tag{1.74}$$

เมื่อ F_{cent} คือแรงสู่ศูนย์กลาง r เป็นรัศมีของวงกลม และ m เป็นมวลของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ สมการข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$qBr = mv = m_0\gamma v = p \tag{1.75}$$

หรือ
$$\frac{q}{m_0} = \frac{\gamma v}{rB} = \frac{v}{rB\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.76}$$



รูป 1.11 ทางเดินของอนุภาคมีประจุที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก B เป็นวงกลมรัศมี r

ในปี ค.ศ.1909 นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันชื่อบัคเคอเรอร์ (Bucherer) ได้ทำการทดลองเพื่อพิสูจน์ว่ามวลเปลี่ยนไปกับความเร็วโดยใช้สมการ (1.76) ในการทดลองนี้เขาใช้อิเลกตรอนซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงจากสารกัมมันตรังสี และให้ลำอิเลกตรอนผ่านเข้าไปในสนามรวมของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ทำหน้าที่คล้ายกับตัวคัดเลือกความเร็ว ลำอิเลกตรอนที่ออก

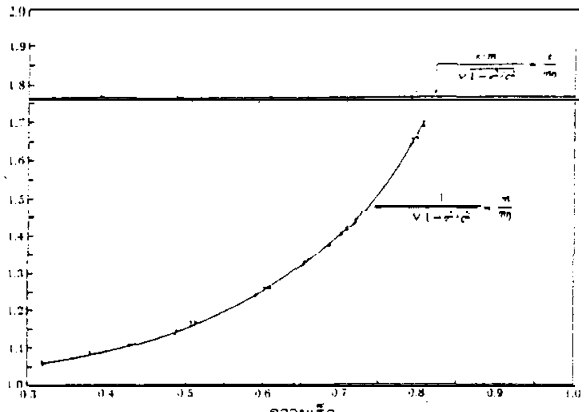
มาจะถูกผ่านเข้าไปในสนามแม่เหล็กอีกครั้งเพื่อให้มันโค้งเป็นส่วนของวงกลมรัศมี r แล้วให้ตกกระทบบนแผ่นฟิล์ม สำหรับค่า v ที่ต่างกันจะได้ค่า r ต่างกันด้วย ถ้ารู้ค่า e, v, B และ r เราสามารถคำนวณหาค่า e/m_0 (เนื่องจาก $q=e$) จากสมการ (1.76) ผลการทดลองของบัค-เคอเรอร์แสดงไว้ในตาราง 1.2

ตาราง 1.2 แสดงผลการทดลองของเบคเคอเรอร์ในการพิสูจน์ $m=\gamma m_0$

$\frac{v}{c}$	ค่าที่วัดได้ $e/m = v/rB$ (คูลอมบ์/กิโลกรัม)	ค่าที่คำนวณได้ $e/m_0 (= e/m\sqrt{1-v^2/c^2})$ (คูลอมบ์/กิโลกรัม)
0.3173	1.661×10^{11}	1.752×10^{11}
0.3787	1.630×10^{11}	1.76×10^{11}
0.4281	1.590×10^{11}	1.760×10^{11}
0.5154	1.511×10^{11}	1.763×10^{11}
0.6870	1.283×10^{11}	1.767×10^{11}

จากผลการทดลองปรากฏว่าค่า e/m_0 เป็นค่าคงที่ และไม่เท่ากับค่า e/m นอกจากนี้ยังพิสูจน์ได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง m และ m_0 เป็นไปตามสมการ $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$

ตั้งแต่ปีค.ศ. 1909 เป็นต้นมาได้มีการทดลองในลักษณะเช่นนี้อีกจำนวนมาก โดยใช้อนุภาคที่แตกต่างกันไป ผลการทดลองแสดงได้ดังรูป 1.12 สมการ $m = \gamma m_0$ ได้ผ่านการทดสอบแล้วว่ามีความถูกต้องดีกว่า 0.1%



รูป 1.12 แสดงกราฟของมวลที่เปลี่ยนไปกับความเร็ว เส้นทึบได้จากทฤษฎี และจุดต่าง ๆ ได้จากการทดลองของเบคเคอเรอร์

1.10.2) การหดของความยาวและการยืดของเวลาในการสลายตัวของอนุภาคเมซอน

มวลนิ่งของไพเมซอนบวกหรือลบ (π^+ หรือ π^-) เป็น 279 เท่าของมวลนิ่งอิเลกตรอน เมซอนเป็นอนุภาคที่ไม่เสถียร จำนวนอนุภาคเมซอนครึ่งหนึ่งจะสลายตัวไปในเวลา 1.77×10^{-8} วินาที ซึ่งเรียกว่า ครึ่งชีวิต หรือ $T_{1/2}$ ของการสลายตัวของอนุภาคเมซอน เมซอนเหล่านี้สามารถสร้างขึ้นได้ในห้องปฏิบัติการ โดยการยิงเบอริลเลียมที่เป็นเป้าด้วยลำอนุภาคโปรตอนความเร็วสูงมาก คือมีความเร็ว $v = 0.99c = 2.97 \times 10^8$ เมตร/วินาที ในช่วงเวลาเท่ากับเวลาครึ่งชีวิต ลำอนุภาคเมซอนควรจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง $x = vt = 2.97 \times 10^8 \times 1.77 \times 10^{-8} = 5.25$ เมตร ก่อนที่ความเข้มของลำอนุภาคเมซอนจะลดลงครึ่งหนึ่งแต่ค่าที่วัดได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการแสดงว่าลำของเมซอนเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 39 เมตร ก่อนที่ความเข้มของลำอนุภาคเมซอนจะลดลงครึ่งหนึ่ง ความแตกต่างนี้สามารถอธิบายได้ถ้าใช้กรอบอ้างอิงที่ถูกต้องในการคำนวณ

ก) กรอบอ้างอิงของไพเมซอน (การหดของความยาว) ครึ่งชีวิตของไพเมซอน $T_{1/2} = 1.77 \times 10^{-8}$ วินาที เป็นช่วงเวลาที่จำนวนเมซอนสลายตัวไปเหลือเพียงครึ่งหนึ่งเมื่อมันอยู่นิ่ง กล่าวคือเป็นการวัดในกรอบอ้างอิงของไพเมซอน เมื่อเมซอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = 0.99c$ ในกรอบอ้างอิงของไพเมซอน อาจพิจารณาได้ว่า ห้องปฏิบัติการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.99c$ สัมพัทธ์กับเมซอนที่อยู่นิ่ง ระยะทาง 39 เมตร ที่เมซอนเคลื่อนที่ไปได้ในกรอบอ้างอิงของห้องปฏิบัติการเมื่อวัดโดยเมซอนในกรอบอ้างอิงของตัวเอง คือ

$$
\begin{aligned}
L_{mes} = L_{lab}/\gamma &= \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L_{lab} \\
&= \sqrt{1 - (0.99)^2} \times 39 \text{ เมตร} \\
&= 5.3 \text{ เมตร}
\end{aligned}
$$

ซึ่งตรงกับค่าที่วัดได้ในกรอบอ้างอิงของไพเมซอน

ข) กรอบอ้างอิงของห้องปฏิบัติการ (การยืดของเวลา) ในกรอบอ้างอิงนี้เมซอนเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 39 เมตร แล้วจึงสลายตัวไปเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง แต่เวลาครึ่งชีวิต 1.77×10^{-8} วินาที วัดโดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงของเมซอน ซึ่งปรากฏว่าค่านี้ยืดออกเมื่อวัดโดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงของห้องปฏิบัติการ กล่าวคือ

$$\Delta t_{lab} = \gamma \Delta t_{mes} = \frac{T_{1/2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{1.77\text{x}10\text{-}8}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} \text{ วินาที}$$

$$= 1.3 \times 10^{-7} \text{ วินาที}$$

ดังนั้น เมซอนที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = 0.99c$ ในเวลา Δt_{lab} จะไปได้เป็นระยะทาง

$$L_{lab} = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.3 \times 10^{-7} \quad \text{เมตร}$$
$$= 39 \quad \text{เมตร}$$

ซึ่งตรงกับค่าที่วัดได้จากการทดลองในกรอบอ้างอิงของห้องปฏิบัติการ

1.11 ปริมาณที่ไม่เปลี่ยน

ในกลศาสตร์ยุคเก่า ระยะ r ของจุด (x, y, z) จากออริจิน ในระบบอินเนอร์เชียล S กำหนดโดย

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ระยะ r' ของจุดจากออริจินในระบบอินเนอร์เชียล S′ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับ S คือ

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ในกลศาสตร์ยุคเก่า ระยะนี้ไม่เปลี่ยน (invariant) กล่าวคือ

$$r'^2 = r^2 \qquad \text{ถ้า } v << c$$

และออริจินของ S และ S′ ซ้อนกันที่ $t = t' = 0$ หรืออาจกล่าวได้ว่า ระยะระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ ใน 3 มิติไม่ขึ้นกับความเร็วสัมพัทธ์ของผู้สังเกต เมื่อ $v << c$ ดังนั้น

$$\boxed{\text{สเปซไม่เปลี่ยน (space invariant) หมายถึง } \Delta r^2 = \Delta r'^2} \qquad (1.77)$$

ปริมาณที่ไม่เปลี่ยนอื่น ๆ ของกลศาสตร์นิวตัน คือ ช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์

$$\boxed{\text{เวลาไม่เปลี่ยน หมายถึง } \Delta t = \Delta t'} \qquad (1.78)$$

สมการ (1.78) หมายความว่าช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์สองเหตุการณ์เท่ากัน โดยไม่คำนึงถึงกรอบอ้างอิงของผู้สังเกต

จากสมการ (1.77) และ (1.78) เราอาจสรุปได้ว่าในกลศาสตร์นิวตัน สเปซและเวลาเป็นปริมาณ 2 ปริมาณที่เป็นอิสระต่อกัน และเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแยกจากกัน

ทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะที่กล่าวว่าอัตราเร็วของแสงคงที่ โดยไม่คำนึงถึงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของแหล่งกำเนิดแสงหรือผู้สังเกต ข้อความข้างต้นนี้อาจกล่าวได้อีกกรณีหนึ่งว่าอัตราเร็วของแสงเป็นปริมาณสเกลาร์ที่ไม่เปลี่ยน สำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั้งสเปซและเวลาต่างก็ขึ้นต่อกัน และมีความสัมพันธ์กันตามสมการการแปลงแบบลอเรนต์ซ ซึ่งใช้สเปซ 4 มิติ ที่ประกอบด้วย 3 โคออร์ดิเนตสเปซ x, y, z และโคออร์ดิเนตจินตภาพตัวที่ 4 (โคออร์ดิเนตเวลา)

คือ ict ($i = \sqrt{-1}$) ตำแหน่งของจุดในสเปซ 4 มิติแทนได้ด้วย 4 - เวกเตอร์ สเปซ-เวลา (space-time four-vector) $\vec{s}$ มีองค์ประกอบเป็น x, y, z และ ict ความยาวของมันกำหนดโดย

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 \tag{1.79}$$

ในสัมพัทธภาพความยาวนี้เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยน กล่าวคือ

$$\begin{aligned} s^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 + (ict')^2 = s'^2 \end{aligned} \tag{1.80}$$

เมื่อ s' เป็น 4 - เวกเตอร์ สเปซ - เวลา ที่วัดในระบบอินเนอร์เชียล S′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบอินเนอร์เชียล S

โดยทั่วไปเราอาจกล่าวว่า ในสัมพัทธภาพระยะห่างระหว่างเหตุการณ์ใด ๆ สองเหตุการณ์ในสเปซ 4 มิติ ไม่เปลี่ยน กล่าวคือ

$$\boxed{\text{สเปซ - เวลา ไม่เปลี่ยน หมายถึง } \Delta s^2 = \Delta s'^2} \tag{1.81}$$

หรือ $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (ict_2 - ict_1)^2$

$$= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 + (ict'_2 - ict'_1)^2$$

ดังนั้นการไม่เปลี่ยนของสเปซและเวลาที่แยกกันในกลศาสตร์นิวตัน ถูกแทนด้วยสมการ (1.81) เพียงสมการเดียวในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ นอกจากจะไม่มีการเปลี่ยน 4 - เวกเตอร์ สเปซ - เวลา แล้ว ยังมี 4 - เวกเตอร์ โมเมนตัม - พลังงาน ที่ไม่เปลี่ยนด้วย พิจารณาสมการ

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

เมื่อ $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ สมการข้างต้นอาจเขียนได้ว่า

$$\frac{-E_0^2}{c^2} = p^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

หรือ

$$\boxed{\left(\frac{i E_0}{c}\right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \left(\frac{i E}{c}\right)^2} \tag{1.82}$$

เนื่องจาก m_0 เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $E_0 = m_0c^2$ และ $E^2 - p^2c^2$ เป็นค่าคงที่ด้วย จากสมการ (1.82) จะเห็นว่า องค์ประกอบของโมเมนตัมทั้งสาม คือ p_x, p_y, p_z รวมกับองค์ประกอบที่สี่ (คือ iE/c) เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยน นั่นคือ

โมเมนตัม - พลังงาน ไม่เปลี่ยน หมายถึง

$$\begin{aligned} (i E_0/c)^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (i E/c)^2 \\ &= p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z + (i E'/c)^2 \end{aligned} \tag{1.83}$$

1.12 การแปลงโมเมนตัมและพลังงาน

พิจารณาการแปลงโมเมนตัมและพลังงานของอนุภาคตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ จากระบบอินเนอร์เชียล S ไปยังระบบอินเนอร์เชียล S′ สำหรับอนุภาคมวลนิ่ง m_0 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V ไปตามแกน +x ในระบบอินเนอร์เชียล S ในระบบนี้จะมีขนาดโมเมนตัมเป็น

$$p_x = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad p_y = 0 \qquad \text{และ } p_z = 0$$

พลังงานทั้งหมดตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

ในระบบ S′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบ S ด้วยความเร็ว v ตามแกน +x จะสังเกตขนาดโมเมนตัมของอนุภาคนี้ เป็น

$$p_x' = \frac{m_0 V'}{\sqrt{1 - V'^2/c^2}} \qquad p_y' = 0 \quad p_z' = 0$$

และพลังงานทั้งหมดเป็น

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V'^2/c^2}}$$

แทนค่า V′ ในเทอมของ V คือ $V' = (V - v)/\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right)$ ลงในสมการข้างต้น จะได้

$$p_x' = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p_y' = p_y \tag{1.84}$$

$$p_z' = p_z$$

$$\text{และ} \quad E' = \frac{E - p_x v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

สมการข้างต้นคือสมการการแปลงโมเมนตัม-พลังงานแบบลอเรนต์ซ ซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับการศึกษาปัญหาการชนกันของอนุภาคต่าง ๆ ใน ฟิสิกส์นิวเคลียร์ และฟิสิกส์พลังงานสูง (high energy physics)

สรุป

การแปลงแบบกาลิเลโอใช้ได้ดีสำหรับกลศาสตร์ (เฉพาะกรณี $v << c$) แต่ใช้ไม่ได้กับแม่เหล็กไฟฟ้า ไมเคิลสันและมอร์เลย์เป็นผู้ทำการทดลองเพื่อแสดงให้เห็นว่า กรอบอ้างอิงอีเทอร์ไม่มี ในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะขึ้น โดยตั้งสมมติฐาน 2 ข้อ คือกฎทั้งหลายในฟิสิกส์ มีรูปแบบสมการที่เหมือนกันในทุก ๆ กรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กัน และความเร็วแสงในสุญญากาศมีค่าคงที่ จากทฤษฎีนี้ลอเรนตซ์ได้หาสมการการแปลงโคออร์ดิเนตและสมการการแปลงความเร็วระหว่าง 2 กรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กัน ผลของสมการการแปลงแบบลอเรนตซ์ จะได้ว่า ความยาวของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับผู้สังเกต จะปรากฏว่าหดสั้นลงกว่าเมื่อมันอยู่นิ่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกต นาฬิกาที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับผู้สังเกต จะปรากฏว่าเดินช้ากว่านาฬิกาที่อยู่นิ่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกต และมวลของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับผู้สังเกต จะมีค่ามากกว่ามวลของมันเมื่อหยุดนิ่งสัมพัทธ์กับผู้สังเกต

ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน โมเมนตัมและพลังงานนิ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพ คือ

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

โดยที่ พลังงานรวม $E = mc^2$ พลังงานนิ่ง $E_0 = m_0c^2$

เมื่อ m_0 เป็นมวลนิ่ง และ m เป็นมวลเชิงสัมพัทธ์

ระยะห่างระหว่างเหตุการณ์ใด ๆ 2 เหตุการณ์ ในสเปซ 4 มิติไม่เปลี่ยน และ 4 - เวกเตอร์โมเมนตัม - พลังงาน ไม่เปลี่ยนเช่นกัน

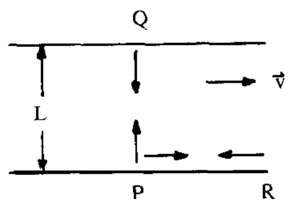
แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ระบบอินเนอร์เชียล S′ เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระบบอินเนอร์เชียล S ตามแกน XX′ ด้วยความเร็ว 50 เมตร/วินาที ออริจินของระบบทั้งสองซ้อนกันที่เวลา $t = t' = 0$ อนุภาคในระบบ S อธิบายได้ด้วยสมการ

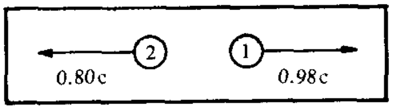
$$x = a + bt + ct^2$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่ x มีหน่วยเป็นเมตรและ t มีหน่วยเป็นวินาที จงใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ อธิบายตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของอนุภาคนี้เมื่อมองจากผู้สังเกตในระบบ S′

2. จงแสดงว่าหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอ
3. แม่น้ำกว้าง L ไหลด้วยความเร็ว v ดังแสดงในรูป นักว่ายน้ำสองคน A และ B สามารถว่ายน้ำด้วยความเร็ว c **สัมพัทธ์**กับคนบนฝั่ง นักว่ายน้ำ A ว่ายไปกลับในแนว PQP ในเวลา t_1 เมื่อ PQ = L นักว่ายน้ำ B ว่ายไปกลับในแนว PRP ในเวลา t_2 เมื่อ PR = L จงคำนวณ t_1 และ t_2 ในเทอมของ L, c และ v หลังจากได้ค่า t_1 และ t_2 แล้ว จงคำนวณ v ในเทอมของ c และ L



4. กำหนดโคออร์ดิเนต (x, y, z, t) ของเหตุการณ์ในระบบ S คือ $(10^5, 10^5, 0, 10^{-3})$ ถามว่าโคออร์ดิเนตของเหตุการณ์นี้ในระบบ S′ คืออะไร เมื่อ S′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\frac{3}{4}c$ สัมพัทธ์กับ S ตามแกน XX′
5. นิวเคลียสของอะตอมหนึ่ง ซึ่งไม่เสถียรเดิมหยุดนิ่งในระบบปฏิบัติการ และสลายตัวเป็น 2 อนุภาคดังแสดงในรูป จงหาความเร็วของอนุภาคตัวที่หนึ่ง สัมพัทธ์กับผู้สังเกตซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับอนุภาคตัวที่สอง



6. ไม้เมตรยาว 100 ซม. และกว้าง 2 ซม. ถามว่าไม้เมตรต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด จึงวัดความยาวได้เท่ากับความกว้าง 2 ซม.

7. ไม้เมตรเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.96c สัมพัทธ์กับท่าน จงหาว่า (ก) ท่านวัดไม้เมตรได้ยาวเท่าใด (ข) ไม้เมตรเคลื่อนที่ผ่านท่านใช้เวลานานเท่าใด (ค) ถ้าผู้สังเกตเคลื่อนที่ไปกับไม้เมตรจะสังเกตว่าไม้เมตรเคลื่อนที่ผ่านท่านใช้เวลานานเท่าใด
8. คาบเวลา T_0 ของลูกตุ้ม คือ 2 วินาที กล่าวคือมันใช้เวลา 2 วินาที จึงครบหนึ่งรอบ จงหาคาบเวลาของลูกตุ้มนี้ เมื่อวัดโดยผู้สังเกต ซึ่งอยู่ในระบบอินเนอร์เชียลที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.9c สัมพัทธ์กับระบบอินเนอร์เชียลของลูกตุ้ม
9. อิเลกตรอน 2 ตัว ต่างเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.9c เข้าหากัน จงหาความเร็วของอิเลกตรอนตัวหนึ่งสัมพัทธ์กับอิเลกตรอนอีกตัวหนึ่ง โดยใช้ (ก) การแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ (ข) การแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์
10. จงคำนวณหาพลังงานที่ใช้ในการเร่งอิเลกตรอนและโปรตอน จากความเร็ว
    (ก) 0.5c ไปเป็น 0.9c (ข) 0.9c ไปเป็น 0.99c
11. จงคำนวณหา
    (ก) อัตราเร็ว (ข) โมเมนตัมเชิงสัมพัทธ์
    (ค) พลังงานจลน์ และ
    (ง) พลังงานรวมเชิงสัมพัทธ์ของอิเลกตรอนที่ถูกเร่งจากหยุดนิ่ง ผ่านความต่างศักย์ 5×10^6 โวลท์
12. จงคำนวณหามวลและโมเมนตัมของ 1 Gev
    (ก) โปรตอน (ข) อิเลกตรอน
13. มวลนิ่งของอนุภาคไพออนคือ 140 MeV/c^2 ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่งของมันครึ่งชีวิตของไพออนเท่ากับ 1.8×10^{-8} วินาที ถามว่าลำของอนุภาคไพออนจะเคลื่อนที่ไปได้ไกลเท่าใดก่อนที่มันจะสลายตัวไปเหลือเพียงครึ่งหนึ่ง ถ้าพลังงานจลน์ของไพออนมีค่าเท่ากับ 140 MeV
14. จรวด A เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $v = 0.8c$ ในทิศเหนือสัมพัทธ์กับผู้สังเกต จรวด B เคลื่อนที่ในทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 0.6c สัมพัทธ์กับผู้สังเกต จรวด B ปล่อยรังสีที่มีความยาวคลื่น $\lambda = 1000$ Å ตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่คือในทิศเหนือ ผู้สังเกตในจรวด A เห็นรังสีนี้มีความยาวคลื่นเป็นเท่าใด
15. อนุภาคมวล m_0 เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.98c ชนแบบตรงกับอนุภาคที่เป็นเป้ามวล $3m_0$ ซึ่งเดิมอยู่นิ่ง ถ้าหลังจากชนแล้วอนุภาคที่เป็นเป้าเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.89c จงหาความเร็วของอนุภาคตกกระทบหลังการชน