บทที่ 7
เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 7 นี้ แล้วนักศึกษาสามารถ

1. บวกเมตริกซ์ คูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ และคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ได้
2. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จัตุรัสมิติ n เมื่อ $n > 2$
3. หาเมตริกซ์ชนิดพิเศษต่าง ๆ ได้เช่น เมตริกซ์ผกผัน แอดจอยต์เมตริกซ์ เป็นต้น
4. ใช้กฎของเครมเมอร์หารากของสมการระบบเชิงเส้นได้
5. หาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์ได้

บทที่ 7
เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

7.1 เมตริกซ์

พิจารณาเซทของสมการเชิงเส้น

$$x + 2y = 5$$

$$3x - y = 8$$

สมการข้างต้นสามารถนำตัวเลขมาจัดเรียงได้ดังนี้

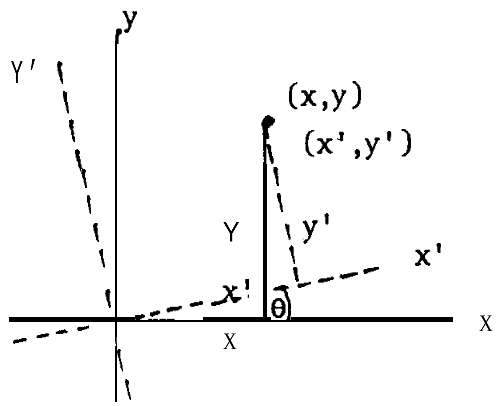
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

โดยที่หลักแรกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าตัวแรกทั้งสองสมการ หลักที่สองประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าตัวที่สองและหลักที่สามประกอบด้วยค่าคงที่ทางด้านขวามือของสมการ การจัดเรียงตัวเลขให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเช่นนี้ภายในเครื่องหมาย [ ] เรียกว่าเมตริกซ์

หรืออาจพิจารณาสมการการหมุน สมการนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด (x, y) ของจุดที่สัมพัทธ์กับแกน xy และพิกัด (x', y') ของจุดเดิมที่สัมพัทธ์กับแกนหมุน x'y' ดูรูป 7.1 ถ้ามุมการหมุนเท่ากับ θ ได้สมการนี้คือ

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$



รูป 7.1

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด (x, y) และ (x', y') ดังกล่าวข้างต้นสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ซึ่งเรียกว่า เมตริกซ์การหมุน (rotation matrix)

ดังนั้นระบบของสมการเชิงเส้น (linear equations) หรือการแปลงเชิงเส้น (linear transformation) สามารถแสดงได้ในรูปเมตริกซ์

เมตริกซ์เป็นกลุ่มของตัวเลขหรือฟังก์ชันซึ่งเขียนเรียงกันเป็นแถวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย [ ] จำนวนแต่ละจำนวนในเครื่องหมาย [ ] เรียกว่าสมาชิก (element) ของเมตริกซ์ แถวในแนวนอนเรียกว่าแถว (row) และแถวในแนวตั้งเรียกว่าหลัก (column) เมตริกซ์ที่มี m แถวและ n หลักเรียกว่าเป็น m x n เมตริกซ์ และกล่าวว่าเมตริกซ์นี้มีมิติ (order) m x n ถ้าให้ A แทนเมตริกซ์และเขียน a_{ij} แทนสมาชิกตัวที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์ A ดังนั้นจะเขียนเมตริกซ์ A ได้เป็น

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \qquad a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

หรืออาจเขียนสั้น ๆ ได้ว่า A $= \left[a_{ij}\right]_{mxn}$

เมตริกซ์ที่มีแถวเดียวแต่มีจำนวนหลักเท่าใดก็ได้ เรียกว่าเมตริกซ์แถว (row matrix) เขียนได้ในรูป

$$\left[\, a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_n \,\right]$$

เมตริกซ์ที่มีหลักเดียวแต่มีจำนวนแถวเท่าใดก็ได้ เรียกว่าเมตริกซ์หลัก (column matrix) เขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์เรียกเมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากันเรียกเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกอยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมจากมุมซ้ายสุดลงมายังมุมขวาสุดเป็นเลข 1 ทุกตัว และสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น 0 หมด เรียกว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) แทนด้วย I เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าให้เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ เราจะกล่าวว่า A เท่ากับ B ถ้า $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกค่าของ i และ j ดังนั้นจะเขียนได้ว่า

$$A = B$$

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 1-x \\ x & 1+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 3+x \\ v-2 & w \end{bmatrix}$

ก็ต่อเมื่อ

$$1 = u \quad , \quad 1-x = 3+x$$

$$x = v-3 \quad , \quad 1+x = w$$

ดังนั้น $u = 1$, $x = -1$

$v = 2$, $w = 0$

7.2 การบวกและการคูณเมตริกซ์

เมตริกซ์สองเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากันสามารถบวกกันได้โดยนำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน ถ้าเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ จะได้ว่า $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$

<u>ตัวอย่าง</u> 7.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

จงหา $A + B$

วิธีทำ

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+7 & 6+1 \\ 0+2 & 5+(-1) & -2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของการบวกเมตริกซ์

ถ้า A, B, C และ 0 เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน โดยที่ 0 คือเมตริกซ์ศูนย์

1. $A+B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$

4. $A + (-A) = 0$

ถ้าให้ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ และเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ผลคูณของ A ด้วย c แทนด้วย cA โดยที่ cA จะเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และ $cA = [ca_{ij}]_{mxn}$ ทุกค่าของ i และ j@

<u>ตัวอย่าง</u> 7.2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $2A$ และ $\frac{1}{3}A$

วิธีทำ

$$2A = \begin{bmatrix} (2)(1) & (2)(2) & (2)(6) \\ (2)(0) & (2)(5) & (2)(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})(1) & (\frac{1}{3})(2) & (\frac{1}{3})(6) \\ (\frac{1}{3})(0) & (\frac{1}{3})(5) & (\frac{1}{3})(-2) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของการคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน a, b, c เป็นสเกลาร์

1. $a(A + B) = aA + aB$
2. $(b + c)A = bA + cA$
3. $b(cA) = (bc)A$
4. $1A = A$

ถ้าให้ A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ m x n โดยที่ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ n x p โดยที่ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ ผลคูณของ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ m x p ให้ $AB = C = [c_{ij}]_{mxp}$ ดังนั้น

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{โดยที่} \quad i = 1, 2, \ldots m \quad (7.2)$$

$$\text{และ} \quad j = 1, 2, \ldots p$$

<u>ข้อสังเกต</u> เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะคูณกันได้เมื่อจำนวนหลักของเมตริกซ์ตัวหน้าเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ตัวหลัง สมาชิกของเมตริกซ์ผลคูณตัวที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j หาได้โดยการนำสมาชิกในแถวที่ i ของเมตริกซ์ตัวหน้าคูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของเมตริกซ์ตัวหลังแบบตัวต่อตัว แล้วนำผลคูณของแต่ละคู่มารวมกัน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mp} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_{1p} = a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots \quad a_{1n}b_{np}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots \quad a_{2n}b_{n1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_{2p} = a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots \quad a_{2n}b_{np}$$

$$c_{m1} = a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots \quad a_{mn}b_{n1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots \quad a_{mn}b_{n2}$$

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $AB \neq BA$ และถ้า $AB = 0$ แล้วไม่จำเป็นว่า $A = 0$ หรือ $B = 0$ เมื่อ 0 คือเมตริกซ์ศูนย์

<u>ตัวอย่าง</u> 7.3 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

i & i

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(0) & (1)(1)+(2)(1) \\ (-1)(2)+(3)(0) & (-1)(1)+(3)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1)+(1)(-1) & (2)(2)+(1)(3) \\ (0)(1)+(1)(-1) & (0)(2)+(1)(3) \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของการคูณเมตริกซ์

ถ้า A, B, C เป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้ และ k เป็นปริมาณสเกลาร์

1. $(kA)B = k(AB) = A(kB)$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $C(A+B) = CA + CB$
5. $AI = IA = A$ เมื่อ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์

ทรานสโพสของเมตริกซ์ ทรานสโพสของ A เขียนแทนด้วย A^t ถ้าเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ จะได้ $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ นั่นคือการทรานสโพสของ A ก็เป็นการสลับที่เอาแถวที่ i ไปเป็นหลักที่ i ทุก ๆ ค่า i เช่น

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

คุณสมบัติของการทรานสโพส

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่สามารถบวกและคูณกันได้ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(AB)^t = B^tA^t$
4. $(kA)^t = kA^t$

7.3 ดีเทอร์มิแนนต์

พิจารณาสมการเชิงเส้น 2 สมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

ซึ่งมีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว x_1 และ x_2 การหาคำตอบอาจทำได้ง่าย ๆ โดยคูณสมการแรกด้วย a_{22} และสมการที่สองด้วย $-a_{12}$ แล้วรวมกันได้เป็น

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

ถ้า $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}$ ไม่เท่ากับศูนย์

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

ส่วนของ x_1 และ x_2 อาจเขียนในรูป

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ซึ่งเรียกว่าดีเทอร์มิแนนต์มิติที่ 2 ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (7.3)$$

เลข a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} เรียกว่าสมาชิกของดีเทอร์มิแนนต์ แถวของสมาชิกในแนวนอนเรียกว่าแถวและแถวของสมาชิกในแนวตั้งเรียกว่าหลักของดีเทอร์มิแนนต์

เราอาจเขียนคำตอบ x_1 และ x_2 ในรูป

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad (D \neq 0)$$

เมื่อ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

สูตรนี้เรียกว่ากฎของเครมเมอร์ (Cramer's rule) ข้อสังเกต D_1 หาได้จากการแทนหลักแรกของ D ด้วยหลักที่มีสมาชิก b_1, b_2 และ D_2 หาได้จากการแทนหลักที่ 2 ของ D ด้วยหลักที่มีสมาชิก b_1, b_2 เช่นกัน

ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ n โดยที่ $A = [a_{ij}]_{nxn}$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A จะหมายถึงจำนวนค่าหนึ่งเขียนแทนด้วย

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7.4)$$

ในกรณีที่ $n \geq 0$ ไมเนอร์ (minor) ของสมาชิก a_{ij} ของ A คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ซึ่งเกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ออก เขียน M_{ij} แทนไมเนอร์ของ a_{ij} เช่น

$$\text{ถ้า } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (7.5)$$

จะได้ $$M_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

และโคแฟกเตอร์ (cofactor) ของสมาชิก a_{ij} คือ $(-1)^{i+j}M_{ij}$ เขียนแทนด้วย C_{ij} เช่นกรณีสมการ (7.5) จะได้

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ค่า det A สมการ (7.4) สำหรับ $n \geq 2$ กำหนดได้เป็น

$$\det A = = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots a_{in}C_{in} \text{ สำหรับ } i = 1,2,.. \text{ หรือ } n$$

หรือ $\det A = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots a_{nk}C_{nk}$ สำหรับ $k = 1,2,\ldots$หรือ n

สมการ (7.6) หมายความว่าค่าดีเทอร์มิแนนต์จะเท่ากันทั้งหมดไม่ว่าจะกระจายแถวที่เท่าไรก็ตาม และสมการ (7.7) แสดงว่าไม่ว่าจะกระจายหลักที่เท่าไรก็ตาม จะให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์เท่ากันทั้งหมด ดังนั้นจะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะกระจายตามแถวหรือหลักที่เท่าไรก็ตาม ค่าดีเทอร์มิแนนต์จะเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> 7.4 จงหาค่า det A เมื่อ

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0' \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> ถ้าเรากระจายตามหลักที่ 3 จะได้

$$\det A = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

ดังนั้น det A = (0)(6) + (4)(-3) + (2)(0) = -12

หรือถ้าเ รากระจายตามแถวที่ 1 จะได้

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M12 = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{13} = 6$$

ได้ det A = (1)(12) + (3)(-8) + (0)(6) = -12

จะเห็นได้ว่าได้ค่า det A เท่ากันไม่ว่าจะกระจายหลักที่ 3 หรือแถวที่ 1

<u>คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์</u>

1. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ n x n แล้ว

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

2. ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์เป็นศูนย์ถ้า
   (1) เมตริกซ์มีสามาชิกแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์หมดทุกตัว
   (2) เมตริกซ์มีแถวคู่หนึ่ง (หรือหลักคู่หนึ่ง) เหมือนกัน
   (3) เมตริกซ์มีแถวหนึ่งเป็น k เท่าของอีกแถวหนึ่ง (หรือหลักหนึ่งเป็น k เท่าของอีกหลักหนึ่ง)

3. การสลับที่ระหว่างแถวสองแถวใด ๆ (หรือหลักสองหลักใด ๆ) ของเมตริกซ์จัตุรัสจะทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนต์มีเครื่องหมายต่างกัน

4. ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ n และ k เป็นจำนวนจริง ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วย k จะได้ว่า $\det B = k\det A$

5. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ n และ k เป็นจำนวนจริง ถ้า $B = kA$ จะได้ว่า $\det B = k^n \det A$

6. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสเมื่อแทนแถวที่ i ด้วยแถวที่ i บวกกับ k เท่าของแถวที่ p $(p \neq i)$ (หรือแทนหลักที่ j ด้วยหลักที่ j บวกกับ k เท่าของหลักที่ q $(q \neq j)$ แล้วค่าดีเทอร์มิแนนต์ไม่เปลี่ยนแปลง

<u>ตัวอย่าง</u> 7.5 จงหาค่าของ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> แทนแถวที่ 2 ด้วยแถวที่ 2 + (−3) แถวที่ 3

แทนแถวที่ 3 ด้วยแถวที่ 3 + (−1) แถวที่ 1

แทนแถวที่ 4 ด้วยแถวที่ 4 + (2) แถวที่ 1

จะได้

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

กระจายตามหลักที่ 1 จะได้

$$D = 1C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -4 \\ -12 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1- \end{vmatrix}$$

แทนแถวที่ 2 ด้วย แถวที่ 2 + (2) แถวที่ 1 จะได้

$$D = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

กระจายตามหลักที่ 1 จะได้

$$D = 1C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = \frac{6}{3} \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 90$$

7.4 <u>เมตริกซ์ชนิดพิเศษต่าง ๆ</u>

1. <u>แอดจอยต์เมตริกซ์</u> ถ้าเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{nxn}$ B เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} จะเรียก B^t ว่าแอดจอยต์เมตริกซ์ (adjoint matrix) ของ A ใช้สัญลักษณ์เป็น adj A

2. <u>เมตริกซ์ผกผัน</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ n x n โดยที่ $n \geq 2$ และ $\det A \neq 0$ จะได้ว่าเมตริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของ A แทนด้วย A^{-1} คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A \qquad (7.6)$$

ซึ่งทำให้ $$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (7.7)$$

และเรียกว่าA ว่าเป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (non singular matrix) แต่ถ้า A ไม่มีเมตริกซ์ผกผัน เรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

3. <u>สังยุคเชิงซ้อนของเมตริกซ์</u> ให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{nxn}$ ทำสังยุคเชิงซ้อนกับสมาชิกในเมตริกซ์ A ทุกตัวได้เป็น $[a^*_{ij}]_{nxn}$ เรียกว่าเป็นสังยุคเชิงซ้อนของเมตริกซ์ A แทนด้วย A^* นั่นคือ

$$A^* = [a^*_{ij}]_{nxn} \qquad (7.8)$$

4. สังยุคเฮอร์มิเทียนหรือเฮอร์มิเทียนแอดจอยต์ ให้ A เป็นเมตริกซ์มิติ nxn ถ้าทำสังยุคเชิงซ้อนกับสมาชิกทุกตัวในเมตริกซ์ A แล้วทำทรานสโพส จะเรียกว่าเป็นสังยุคเฮอร์มิเทียนหรือเฮอร์มิเทียนแอดจอยต์ (Hermitian conjugate or Hermitian adjoint) ใช้สัญลักษณ์ $A^\dagger$ (อ่านว่า A dagger) ดังนั้น

$$A^\dagger = (A^*)^t \qquad (7.9)$$

5. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์จริง (real matrix) ถ้า $A = A^*$

6. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์จินตภาพ (imaginary matrix) ถ้า

$$A = -A^*$$

7. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

ถ้า $$A = A^t$$

8. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร (antisymmetric matrix) หรือเมตริกซ์สมมาตรสกิว (skew-symmetric matrix)

ถ้า $A = -A^t$

9. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นออร์โธโกนอลเมตริกซ์ (orthogonal matrix) ถ้า $A^{-1} = A^t$ หรือ $AA^t = I$

10. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นเฮอร์มิเทียน ถ้า $A = A$

11. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นสกิวเฮอร์มิเทียน (skew hermitian) ถ้า $A = -A^t$

12. เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นยูนิทารีเมตริกซ์ (unitary matrix) ถ้า $A^{-1} = A^\dagger$ หรือ $AA^\dagger = I$

7.5 กฎของเครมเมอร์

ถ้าระบบของสมการเชิงเส้นซึ่งมี n สมการ และตัวแปร n ตัวคือ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \qquad (7.10)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad \cdots,\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n$$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} , \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{vmatrix}$$

สมการ (7.10) เขียนได้เป็น $AX = B$ ในกรณีที่ $\det A \neq 0$ รากของระบบสมการข้างต้น (สมการ 7.10) คือ

$$x_i = \frac{\det_{A_i}}{\det A} \qquad (7.11)$$

เมื่อ A_i เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วย B

7.6 เวกเตอร์สเปซและฮิลเบอร์ทสเปซ

สมมติให้ $\vec{v}$ เป็นเซทของเวกเตอร์และ $\vec{f}$ เป็นเซทของฟังก์ชันสเกลาร์ ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซและ F เป็นฟิลด์ โดยที่ $\vec{v}\varepsilon V$ และ $\vec{f}\varepsilon F$ จากนิยามเราจะเรียกเซท V ว่าเป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ก็ต่อเมื่อ

(1) $f\vec{v}\varepsilon V$ (2) $f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = f\vec{v}_1 + f\vec{v}_2$

(3) $(f_1+f_2)\vec{v} = f_1\vec{v} + f_2\vec{v}$ และ (4) $(f_1 f_2)\vec{v} = f_1(f_2\vec{v})$

คุณสมบัติทั้งสี่ประการนี้จะทำให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ถ้า a เป็นเวกเตอร์ใด ๆ $\vec{a}\varepsilon V$ และ

$$\vec{a} = f_1\vec{v}_1 + f_2\vec{v}_2 + \ldots f_n\vec{v}_n$$

เรากล่าวว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีมิติจำกัด และถ้า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน $V = V_n$ = เวกเตอร์สเปซ n มิติ

ฮิลเบอร์ทสเปซคือ นอร์มเวกเตอร์สเปซของเลขเชิงซ้อน เวกเตอร์ในกลศาสตร์ควอนตัมมี 2 ชนิดคือ ket vector ซึ่ง Dirac ใช้สัญญลักษณ์เป็น $|\,\rangle$ และ bra vector มีสัญญลักษณ์เป็น $\langle\,|$ คุณสมบัติต่าง ๆ ของฮิลเบอร์ทสเปซจะเขียนได้ในรูปสัญญลักษณ์ของ Dirac

(1) $$(f\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f^*(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f^*\langle v_1|v_2\rangle$$

(2) $$\vec{v}_1+\vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{v}_1,\vec{v}_3) + (\vec{v}_2,\vec{v}_3) = \langle v_1|v_3\rangle + \langle v_2|v_3\rangle$$

(3) $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_2,\vec{v}_1)^*$ หรือ $\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_2|v_1\rangle^*$

(4) $(\vec{v}_1, \vec{v}_1) > 0$ ถ้า $\vec{v} \neq 0$ หรือ $\langle v_1|v_1\rangle > 0$ ถ้า $|v\rangle \neq |0\rangle$

(5) $(\vec{v}_1, \vec{v}_1)^{1/2} = \|\vec{v}_1\|$ หรือ $|\langle v|v\rangle|^{1/2} = |v|$

7.7 ค่าไอเกนของเมตริกซ์

ให้เมตริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ พิจารณาสมการเวกเตอร์

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{7.12}$$

λ เป็นสเกลาร์ จากสมการข้างต้นจะเห็นว่าเมตริกซ์ A ไม่ทำให้ทิศของ $\vec{x}$ เปลี่ยนไป เรียก $\vec{x}$ ว่าเป็นไอเกนเวกเตอร์ (eigenvector) ของเมตริกซ์ A และ λ เรียกว่าค่าไอเกน (eigenvalue) ของเมตริกซ์ A สมการ (7.12) อาจเขียนได้ในรูป

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_{nn} = \lambda x_n$$

ย้ายเทอมทางขวามือไปทางซ้ายมือ จะได้

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \tag{7.13}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

เซทของสมการข้างต้นเขียนในรูปสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (7.141$$

จากกฎของเครมเมอร์ ระบบเอกพันธ์ของสมการเชิงเส้นเหล่านี้มีคำตอบที่มีค่า (nontrivial solution) ถ้าดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots \quad a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots \quad a_{nn}- \end{vmatrix} = 0 \quad (7.15)$$

สมการ **(7.15)** เรียกว่า characteristic equation

<u>ตัวอย่าง</u> 7.7 จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ค่าไอเกนหาได้จาก characteristic equation คือ

$$\begin{vmatrix} 5-x & 4 \; 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

รากของสมการข้างต้น $\lambda_1 = 6$ และ $\lambda_2 = 1$

กรณี $\lambda = A, = 6$ สมการ (7.12) คือ

$$-x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 = 0$$

จะได้ $x_1 = 4x_2$ ให้ $x_2 = 1$ ดังนั้น $x_1 = 4$ ฉะนั้น

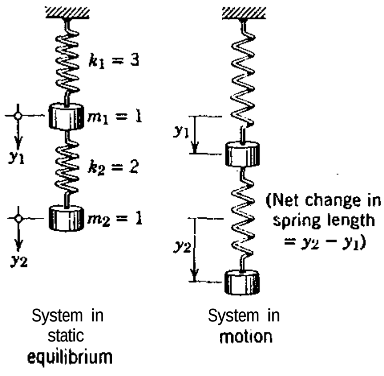
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ_1 ในทำนองเดียวกัน จะได้ไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับ λ_2 เป็น

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}$ และ $\vec{Y}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระซึ่งกันและกัน

<u>ตัวอย่าง</u> 7.8 จงหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบเชิงกล ดังรูปข้างล่างซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_2(0) = -2\sqrt{6}$, $y_2(0) = \sqrt{6}$



<u>วิธีทำ</u> ระบบในรูปข้างต้นเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง จากกฎของฮุค

$$F = m\ddot{y} = -ky$$

จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลของระบบคือ

$$\ddot{y}_1 = -3y_1 + 2(y_2 - y_1)$$

$$\ddot{y}_2 = -2(y_2 - y_1) \qquad (1)$$

$y_1(t)$ และ $y_2(t)$ เป็นการขจัดของมวลทั้งสอง โดยที่ $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ สอดคล้องกับตำแหน่งสมดุลย์ สมการข้างต้นอาจเขียนได้เป็น

$$\ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2$$

$$\ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2$$

เขียนในรูปของสมการเวกเตอร์ได้เป็น

$$\ddot{\vec{y}} = A\vec{y} \qquad (2)$$

เมื่อ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

แทนค่า $y = xe^{i\omega t}$ ลงในสมการ (2) แล้วหารตลอดด้วย $e^{i\omega t}$ จะได้

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad \text{เมื่อ} \quad \lambda = \omega^2$$

characteristic equation คือ

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

รากของสมการข้างต้นคือ $\lambda_1 = -1$ และ $\lambda_2 = -6$ ซึ่งเป็นค่าไอเกนของ A ที่สอดคล้องกับไอเกนเวกเตอร์

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

สำหรับ $\lambda_1 = -1$ และ $\lambda_2 = -6$ จะสอดคล้องกับ $\omega_1 = \pm i$ และ $\omega_2 = \pm i\sqrt{6}$ ตามลำดับ ดังนั้นคำตอบคือ

$$\vec{y}(t) = a_1\vec{x}_1\cos t + b_1\vec{x}_1\sin t + a_2x_2\cos\sqrt{6} + b_2\vec{x}_2\sin\sqrt{6}t \tag{3}$$

เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ เขียน $\vec{y}(t)$ ในเทอมขององค์ประกอบได้เป็น

$$y_1(t) = a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos\sqrt{6}t + b_2\sin\sqrt{6}t \tag{4}$$

$$y_2(t) = 2a_1\cos t + 2b_1\sin t - \frac{1}{2}a_2\cos\sqrt{6}t - \frac{1}{2}b_2\sin\sqrt{6}t$$

จากสมการ (3) และเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ เขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{y}(0) = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จากสมการข้างต้นได้ $a_1 = 1$ และ $a_2 = 0$ แทนค่าลงในสมการ (3) แล้วดิฟเฟอเรนชิเอต จะได้

$$\dot{\vec{y}}(t) = -\vec{x}_1 \sin t + b_1 \vec{x}_1 \cos t + b_2 \sqrt{6} \vec{x}_2 \cos \sqrt{6}\, t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นอีก 2 เงื่อนไขคือ $\dot{y}_1(0) = -2\sqrt{6}$, $\dot{y}_2(0) = \sqrt{6}$ จะได้

$$\dot{\vec{y}}(0) = b_1\vec{x}_1 + b_2 \sqrt{6}\vec{x}_2 = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b_2 \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นได้ $b_1 = 0$ และ $b_2 = -2$ คำตอบของปัญหานี้คือ

$$\vec{y}(t) = \vec{x}_1 \cos t - 2\vec{x}_2 \sin \sqrt{6}\, t$$

ในเทอมขององค์ประกอบ

$$y_1(t) = \cos t - 2 \sin \sqrt{6}t$$

$$y_2(t) = 2 \cos t + \sin \sqrt{6}t$$

โดยปกติแล้วเมตริกซ์ที่ใช้แทนตัวดำเนินการในทางฟิสิกส์เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเทียน ค่าไอเกนของเมตริกซ์เฮอร์มิเทียนต้องเป็นค่าจริงเสมอ และไอเกนเวกเตอร์ที่ให้ค่าไอเกนต่างกันย่อมตั้งฉากกัน เมตริกซ์เฮอร์มิเทียนสามารถทำให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ทะแยง (diagonalized matrix) ได้ จากทำการเปลี่ยนรูปยูนิทารี (unitary transformation) จะได้เมตริกซ์ทะแยงโดยที่สมาชิกของเมตริกซ์ทะแยงคือค่าไอเกนนั่นเอง จะแสดงวิธีการดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 7.9 กำหนดเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าไอเกนของ A และทำให้เมตริกซ์ A อยู่ในรูปของเมตริกซ์ทะแยง

วิธีทำ ค่าไอเกนหาได้จาก characteristic equation คือ

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)-4\right] = 0$$

รากของสมการข้างต้นคือ $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 5$

ดังนั้นค่าไอเกนคือ 0, 0, 5

ให้ $\vec{X}, \vec{Y}$ และ $\vec{Z}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ปกติ (normalized eigenvectors) โดยที่

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

และ $AX = 0\vec{X}$ (2)

$$AY = OY \qquad (3)$$

$$\vec{AZ} = 5Z \qquad (4)$$

จากสมการ (2) ในรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ได้ $x_1 = 2x_3$ x_2 เป็นเลขใด ๆ ก็ได้ ให้ $x_2 = 0$,

เลือกกรณีที่ง่ายที่สุดของ $\vec{X}$ เป็น

$$\vec{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการ (3) จะได้ $y_1 = 2y_3$ เนื่องจาก $\vec{Y}$ ต้องออร์โธโกนอลกับ $\vec{X}$ เลือกให้ $y_2 = 1$ และ $y_1 = y_3 = 0$ จะได้

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สมการ (4) เขียนได้เป็น $(A-5I)\vec{Z} = 0$ ในรูปเมตริกซ์คือ

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$$

ได้ $z_3 = -2z_1$, $z_2 = 0$ ให้

$$\vec{z} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

เราอาจสร้างเมตริกซ์ยูนิทารีซึ่งทำให้เมื่อทำการเปลี่ยนรูปยูนิทารีแล้วจะทำให้เมตริกซ์ A มีค่าเฉพาะตามแนวทะแยงได้ดังนี้

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ทำการเปลี่ยนรูปยูนิทารี

$$U^{\dagger}AU = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(กรณีนี้บังเอิญได้ $U^{\dagger} = U$)

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ที่ได้มีค่าไอเกนเป็นค่าตามแนวทะแยง

<u>บทสรุป</u>

เมตริกซ์ เป็นกลุ่มของตัวเลขหรือฟังก์ชันซึ่งเขียนเรียงกันเป็นแถวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย [ ] จำนวนแต่ละจำนวนในเครื่องหมาย [ ] เรียกสมาชิกของเมตริกซ์

เมตริกซ์สองเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากันสามารถบวกกันได้ โดยนำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน

เมกตริซ์สองเมตริกซ์จะคูณกันได้เมื่อจำนวนหลักของเมตริกซ์ตัวหน้าเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ตัวหลัง สมาชิกของเมตริกซ์ผลคูณตัวที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j หาได้โดยการนำสมาชิกในแถวที่ i ของเมตริกซ์ตัวหน้าคูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของเมตริกซ์ตัวหลังแบบตัวต่อตัว แล้วนำผลในแต่ละคู่มารวมกัน

การทรานสโพสของเมตริกซ์ในการสลับที่เอาแถวที่ i ไปเป็นหลักที่ i ทุก ๆ ค่า i

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์หมายถึง จำนวนค่าหนึ่งเขียนแทนด้วย

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ของ A แทนด้วย M_{ij} คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ออก

โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij} คือ $(-1)^{i+j}M_{ij}$ แทนด้วย C_{ij}

ค่า $\det A$ สำหรับ $n \geq 0$ คือ

$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}$ สำหรับ $i = 1$ หรือ $2, \ldots,$ หรือ n

$\det A = a_{1k}c_{1k} + a_{2k}c_{2k} + \ldots + a_{nk}c_{nk}$ สำหรับ $k = 1$ หรือ $2, \ldots,$ หรือ n

เมตริกซ์ชนิดพิเศษต่าง ๆ

<u>ชื่อของเมตริกซ์</u>	<u>สัญลักษณ์</u>	<u>วิธีการ</u>
ทรานสโพสของ A	A^t	สลับแถวและหลักใน A
สังยุคเชิงซ้อนของ **A**	A^*	ทำสังยุคเชิงซ้อนกับแต่ละสมาชิก แล้วทรานสโพส
แอดจอยต์ของ A	adj A	แทนแต่ละสมาชิกด้วยโคแฟกเตอร์ของมัน แล้วทรานสโพส
เมตริกซ์ผกผันของ **A**	A^{-1}	หารแต่ละสมาชิกของ adj A ด้วย det A

เราเรียกเมตริกซ์ว่าสมมาตร ถ้า $A = A^t$ (เมตริกซ์ = ทรานสโพส) สกิวสมมาตร ถ้า $A = -A^t$, , เป็นจริง ถ้า $A = A$, เป็นจินตภาพ ถ้า $A = -A^*$, ออร์โธโกนอล ถ้า $A^t = A^{-1}$ (เมตริกซ์ผกผัน = ทรานสโพส), เฮอร์มิเทียน ถ้า $A = A^\dagger$ (เมตริกซ์ = สังยุคเฮอร์มิเทียน), ยูนิทารี ถ้า $A^{-1} = A^\dagger$ (เมตริกซ์ผกผัน = สังยุคเฮอร์มิเทียน)

ถ้าสมการเชิงเส้น n สมการเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น $Ax = B$ ในกรณีที่ $\det A \neq 0$ รากของระบบสมการนี้คือ

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

เมื่อ A_i เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการแทนที่หลักที่ i ของ A ด้วย B วิธีการหารากของสมการนี้เรียกว่า กฎของเครมเมอร์

ค่าไอเกนของระบบหาได้จากสมการ characteristic คือ

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

เมื่อ λ เป็นค่าไอเกน I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

โดยปกติแล้วเมตริกซ์ที่ใช้แทนตัวดำเนินการในทางฟิสิกส์เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเทียน และค่าไอเกนของเมตริกซ์เฮอร์มิเทียนเป็นค่าจริงเสมอ

<u>แบบฝึกหัดบทที่ 7</u>

1. จงเขียนระบบของสมการที่กำหนดให้ในรูปของเมตริกซ์ $Ax = B$

n. $2x_1 - 3x_2 = 4$

$4x_1 + 2x_i = -6$

ข. ix, + 3x2 $- x_3 = 7$

$x_1 + x_2 = 8$

$19x_2 - x_3 = 17$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ และ B = -102 124

จงหา n. A^2 ข. BB^t ค. $A^2 - 3A - 2$ 1

3. จงแสดงว่าการแปลงเชิงเส้น $y = Ax$ ที่มีเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

เป็นการหมุนระบบพิกัดฉาก x_1, x_2 ไปตามเข็มนาฬิกาในระนาบรอบจุดออริจิน

4. จงหาเมตริกซ์ผกผันของ

ก. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์

ก. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$

6. จงใช้กฎของเครมเมอร์หารากของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

7. จงใช้กฎของเครมเมอร์หารากของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

8. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิเทียนมิติ n x n a และ b เป็นเลขจำนวนจริง จงแสดงว่า c = aA + bB เป็นเฮอร์มิเทียนเมตริกซ์

9. จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด

บทที่ 1

1) n. $32-24i$, , ข. $-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$

2) n. $-\frac{46}{13}$, ข. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

3) n $\sqrt{(x+1)^2+y^2}\,/\,\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, ข. $1/25$ 4) n.

$2(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$, ข. $8(\cos\pi+i\sin\pi)$ 5) ก. π, ข. $\pi/3$

6) ก. $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ ข. $(\pm\sqrt{3}+i)/2,\ -i$ ค. $\pm 5i$

ง. $\pm(\sqrt{3}+i)/2$ จ. $\pm(1+i)/\sqrt{2}$, $\pm(-1+i)/\sqrt{2}$

a. $\pm(\sqrt{3}+i)/2,\ \pm i,\ \pm(\sqrt{3}-i)/2$ 7) ก. $4,\ -2\pm 2i\sqrt{3}$

ข. ให้ $z^2=p,\ z=\sqrt{p}=\pm 2,\ \pm 3i$ 8) ก. $(1-i)/\sqrt{2}$ ข. $-e^2$

9) n. $\ln 3\pm 2n\pi i\ (n=0,1,\ldots)$ ข. $\ln 2+(2n+1)\pi i$

$n=0,\ \pm 1,\ldots$ 10) n. $2\pm(2n+1)\pi i,\ n=0,\ 1,\ldots$

ข. $1+(\frac{1}{2}\pm 2n)\pi i,\ n=0,\ 1,\ldots$ ค. $(1\pm 2n\pi)i,\ n=0,\ 1,\ldots$

11) n. i ข. $-\sqrt{e}$ 12) $a=4(4t^2+1)^{-3/2}$, $v=4(4t^2+1)^{-1}$

บทที่ 2

1. $\frac{1}{4}$ 2. n. $f_x=x/x^2+y^2,\ f_y=y/x^2+y^2$ ข. $f_x=-1-y^2/(xy-1)^2$,
$f_y=-1-x^2/(xy-1)^2$ ค. $f_x=8xy^3e^{x^2y^3},\ f_y=12x^2y^2e^{x^2y^3}$

3) $4dx-9dy$ 4) 122 แกลลอน 5) $e^{-y}\sinh t+e\sin t$

6) $(1-2b-e^{2a})\cos(a-b)$ 7) n. เพิ่มขึ้น $1<t<2$ และ

$t>2.5$ ลดลง $t<1$ และ $2<t<2.5$ ข. 2, 1 8) สูง

$24/\sqrt{3}$ รัศมีฐาน $4\sqrt{6}$ นิ้ว 9) $[3\sin(1/t)]/t^2$ 10) $\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}$,

$(2-4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$ 11) n. $(2,1),\ (-2,1)$ จุดอานม้า $(0,0)$ จุดต่ำสุด

จุดสัมพัทธ์ต่ำสุด ข. (0,0), (4,0), (0, -2) จุดอานม้า $,(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

จุดต่ำสัมพัทธ์ 12) 4x4x2 ฟุต^3 13) $(e^x-1)/x$

14) 352 ฟุต 15) ก. 2 ข. 3 ค. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 16) $u^2 + v^2$

บทที่ 3

1) 6, $\sqrt{37}$ 2) S 45^{o}E , 14.14 กม./ชม. 4) 2

6) $3\hat{i} - 6\hat{k}$ 7) $13\hat{i} - 10\hat{j} + 14\hat{k}$ 11) $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{k}$

12) ก. 3 $3/\sqrt{2}$ 13) $\hat{j}$, 1,- $\frac{4}{5}$ · 14) ก. 4

ข. -15 ค. 1 ง. 6 15) ก. $\hat{i}+\hat{j}$ a. 52-33-L

ค. $5\hat{i}+3\hat{k}$ ง. $-2\hat{i}+\hat{j}+8$ 17) ข. $\phi = x^2y+xz^3+$ ค่าคงที่

ค. 202 18) ก. $\frac{8}{11}\hat{i} + \frac{5}{4}\hat{j}+\hat{k}$ ข. $-\frac{9}{10}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}+\frac{7}{5}\hat{k}$

19) $(z\cos\theta - 2r\cos\theta\sin\theta)\hat{\theta} - (z\sin\theta + 2r\cos^2\theta)\hat{r} + r\sin\theta\,\hat{z}$,

$A_r = z\cos\theta - 2r\cos\theta\sin\theta$, $A_\theta = -z\sin\theta - 2r\cos^2\theta$, $A_z = r\sin\theta$

20) 3/2 22) 32.3

บทที่ 4

1) แอมปลิจูด = 4, คาบ = $\frac{2}{3}$, ความถี่ $3/2\pi$

5) ก. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$ ข. 0 7) $f(x) = \frac{4k}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots)$

8) ก. $f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots)$

ข. $f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots)$

ค. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots)$

9) $f(x) = -\frac{i}{\pi}(\ldots - \frac{1}{3}e^{-3\pi ix} + \frac{1}{2}e^{-2\pi ix} - e^{-i\pi x} + e^{i\pi x}$
$- \frac{1}{2}e^{2\pi ix} + \frac{1}{3}e^{2\pi ix} \ldots)$

10) $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

11) $v(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}(\frac{1}{1.3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3.5}\cos 4\omega t + \ldots)$

12) ความเข้มสัมพัทธ์ 1:0:0:0:1/25:0:1/49:0:0:0...

13) $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+e^{-iw\pi}}{1-w^2} e^{iwx}\, dw$

14) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin w - \alpha\cos w}{2} \sin wx\, dw$

บทที่ 5

1) ก. $(x-4)^2(1+2y) = c$ ข. $y = x + cxy$ ค. $1+y = C(1+x)$

ง. $y = Cxe^x$ 2) ก. $x^2y = 4$ ข. $x = e^{1-x/y}$

ค. $x^4+2x^2y^2 = 3$ 3) ก. $xy = x^3/3+C$ ข. $x^2+2y\sin x = C$

ค. $r(1+e^{2\theta}) = c$ ง. $x^2+2xy-y^2+2x-6y = c$

4) ก. $1/(x^2+y^2)$, $x^2 + y^2 = Ce^{2x}$ ข. $1/x^2$, $y^2+x\ln x = cx$

ค. x/y^2, $x^2/y-x^3 = c$ 5) ก. I.F. $= e^x$, $y = 2x + Ce^{-x}$

ข. I.F. = $1/x^2$, $y = e^x+Cx^2$ ค. I.F. = e^{-6x}, $y = -\frac{1}{2}(3\sin 2x+\cos 2x) + Ce^{6x}$

6) ก. $1/y = 1-x+Ce^{-x}$ ข. $1/y = (C+x)ye^x+1 = 0$

ค. $2/y^5 = Cx^5+5x^3$ 7) $p(h) = p_0\exp(-0.000116h)$ 8) 79 ปี .

9) $v = 5\,\frac{6+5e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$ 10) ก. $v = 18.5\ ms^{-1}$ ข. $t = 3.5$ sec

11). $i = \frac{22}{3}\,\frac{\sin 120\pi t - 24\pi\cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t}}{1 + 576\pi^2}$

13) 4.2 % 14) 295^oK 15) ก. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$

ข. $y = e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 2x)$ ค. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

ง. $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ 16) ก. $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x\sin x$

ข. $y = C_1e^{2x}+ C_2xe^x + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$

ค. $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{5}(\sin x-2\cos x)$

17) ก. $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} - e^{3x}\ln x$

ข. $Y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}(e^x-e^{3x})\ln(1+e^{-x})$

18) $y = 0.05 \cos 10t$, คาบ $= \frac{2\pi}{10} = 0.628$ sec, ความถี่ $= \frac{10}{2\pi}$

= 1.59 รอบ/วินาทีและอัมปลิจูด 0.05 m

19) $y = e^{-0.0179t}(0.05 \cos 10t + 0.000\,895 \sin 10t)$

20) $y = -0.013\sin 5t + 0.032\sin 2t$

21) ก. $I = 5e^{-200t}\sin 400t$, $Q = e^{-200t}(0.01\cos 400t-$

$0.005\sin 400t) + 0.01$

ข. $e^{-200t}(0.01\cos 400t-0.0075\sin 400t)+0.01\cos 200t+0.005\sin 200t$

<u>บทที่ 6</u>

1) ก. $0.02\cos t\sin x$ ข. $k(\cos t\sin x-\cos 2t\sin 2x)$

ค. $\frac{8k}{\pi}(\cos t\sin x + \frac{1}{3^3}\cos 3t\sin 3x+\frac{1}{5^3}\cos 5t\sin 5x+....)$

a) $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin nx \sin nt,\ B_n^* = \frac{0.04}{n^3\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$

3) ก. $T = \frac{4}{5\pi}(\frac{1}{4}\cos 2t\sin 2x-\frac{1}{36}\cos 6t\sin 6x+\frac{1}{100}\cos 10t\sin 10x+...)$

ข. $T = \frac{8k}{\pi}(\cos t\sin x+\frac{1}{3^3}\cos 3t\sin 3x+\frac{1}{5^3}\cos 5t\sin 5x+....)$

ค. $T = 12k(\cos t\sin x-\frac{1}{2^3}\cos 2t\sin 2x+\frac{1}{3^3}\cos 3t\sin 3x-....)$

4) $T = T_1+(T_2-T_1)x/\ell$ 6) ก. $y(x,y,t) =$
$k\cos\pi\sqrt{5}t\ \sin\pi x\sin 2\pi y$ ข. $k = \frac{64}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^3n^3}$

$\cos(\pi t\sqrt{m^2+n^2}\ \sin m\pi x\ \sin n\pi y)$

7) $u = 4k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2,\ J_1^2(\alpha_m)}\cos\alpha_m\left[J_o(\alpha_m.r)\right]$

บทที่ 7

1. ก. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}$

2. ก. $\begin{bmatrix} 33 & 26 & 3 \\ 14 & 14 & 7 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 20 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ค. $\begin{bmatrix} 43 & 44 & 0 \\ 23 & 12 & 13 \\ 6 & -10 & 33 \end{bmatrix}$

4. ก. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. ก. 24, ข. $4a^2b^2c^2$ 6) $x - 2,\ Y = 1,\ z = -3$

7) $x = 3,\ y = -2,\ z = 2$

9) ก. 5; $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; -5 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ข. 0, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $-2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

10) 1 $\begin{bmatrix} 2 \\ i - i\sqrt{3} \end{bmatrix}$; -1 $\begin{bmatrix} 2 \\ i + i\sqrt{3} \end{bmatrix}$