บทที่ 6
สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 6 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

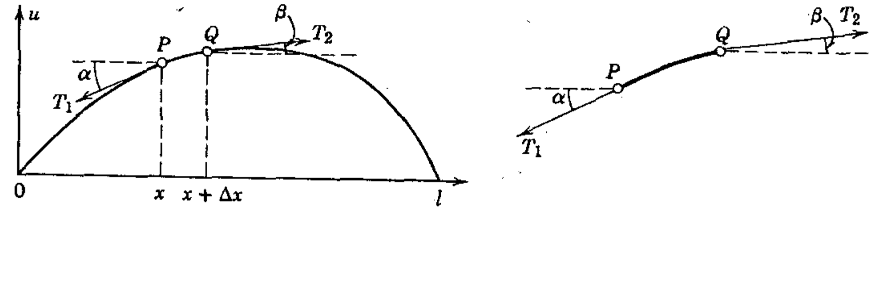
1. สร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการสั่นของเส้นลวด (สมการคลื่นในหนึ่งมิติ) และหาคำตอบของสมการนี้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (และเงื่อนไขเริ่มต้น (ที่สมมติขึ้นมา))
2. สร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการนำความร้อนและแท่งโลหะกรณีหนึ่งมิติ และหาคำตอบของสมการนี้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต
3. สร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการสั่นของแผ่นบาง ๆ (สมการคลื่นในสองมิติ) เมื่อแผ่นบาง ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและเป็นวงกลม และหาคำตอบของสมการเหล่านี้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

บทที่ 6
สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลซึ่งมีตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวหรือมากกว่า ตัวแปรเหล่านี้อาจเป็นเวลาหรือพิกัดในสเปซ การศึกษาเรื่องนี้จะกระทำเฉพาะสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลอย่างง่าย โดยจะกล่าวถึงสมการคลื่นในหนึ่งมิติและสองมิติ นอกจากนี้จะกล่าวถึงปัญหาการนำความร้อนของแท่งโลหะในหนึ่งมิติ เนื้อเรื่องที่จะนำมากล่าวถึงอาจจะแบ่งได้เป็นสองส่วนใหญ่ ๆ คือ การสร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลและการหาคำตอบของสมการเหล่านี้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

6.1 <u>การสั่นของเส้นลวด</u>

เมื่อนำเส้นลวดมาขึงให้ตึงระหว่างจุด 2 จุดคือ $x = 0$ และ $x = \ell$ ณ เวลา $t = 0$ ดึงตรงจุดกึ่งกลางของเส้นลวดขึ้นเป็นระยะ h แล้วปล่อยเส้นลวดจะสั่นขึ้น ๆ ลง ๆ ในทิศทางของแกน y เราจะหาสมการการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้โดยสมมติว่า มวลของเส้นลวดต่อหนึ่งหน่วยความยาวมีค่าคงที่ แรงตึงในเส้นลวดที่ขึงตึงมีค่ามากจนไม่คิดแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อเส้นลวดและความชันของทุก ๆ จุดบนเส้นลวดที่สั่นขึ้นลงในแนวดิ่งมีค่าน้อย สมมติว่าเวลา t เส้นลวดมีรูปร่างดังรูป 6.1



พิจารณาแรงที่กระทำต่อส่วนเล็ก ๆ Δx ของเส้นลวด ซึ่งประกอบด้วยแรง 2 แรงคือ แรงตึง T_1 ที่จุด P ไปทางซ้ายมือ และแรงตึง T_2 ที่จุด Q ไปทางขวามือ (ดูรูป 6.1) แตกแรง T_1 และ T_2 ตามแนวราบและแนวดิ่ง จะได้

$$\text{แรงลัพธ์ตามแนวดิ่ง} = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$$

$$\text{แรงลัพธ์ตามแนวราบ} = T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha$$

เนื่องจากเส้นลวดไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวราบ ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวราบต้องเท่ากับศูนย์ จะได้

$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha \qquad (6.1)$$

จากกฎข้อสองของนิวตัน แรงลัพธ์ในแนวดิ่งเท่ากับมวล $\rho\Delta x$ ของส่วนเล็ก ๆ นี้ (เมื่อ ρ เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว) คูณกับความเร่ง d^2y/dt^2 นั่นคือ

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (6.2)$$

จากสมการ (6.1) ให้ $T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T \qquad (6.3)$

ใช้สมการ (6.3) จะได้

$$\frac{T_1 \sin\beta}{T_2 \cos\alpha} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (6.4)$$

เนื่องจาก $\tan\alpha$ และ $\tan\beta$ เป็นความชันของเส้นลวดที่ x และที่ $x + \Delta x$

นั่นคือ $\tan\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$ และ $\tan\beta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$

ความชันในที่นี้เราเขียนในรูปอนุพันธ์บางส่วนเพราะ y ขึ้นกับ t ด้วย

หารสมการ (6.4) ด้วย Δx จะได้

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ศูนย์ จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลเชิงเส้นเป็น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

หรือ $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \qquad (6.5)$$

สมการ (6.5) เรียกว่าสมการคลื่น (wave equation) ในหนึ่งมิติ

เงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้คือ ณ จุดปลาย $x = 0$ และ $x = \ell$ เป็นจุดคงที่ ดังนั้น

$$y(0, t) = 0, \quad y(\ell, t) = 0 \text{ ทุกค่า } t \geq 0 \qquad (6.6)$$

รูปแบบการเคลื่อนที่ของเส้นลวดจะขึ้นกับการดึงเส้นลวดตอนเริ่มต้น $(t = 0)$ และความเร็วเริ่มต้น (ความเร็วที่ $t = 0$) ถ้าตอนเริ่มต้น เส้นลวดมีรูปร่างแทนด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และความเร็วเริ่มต้นแทนด้วย $g(x)$ ดังนั้นเราจะได้เงื่อนไขเริ่มต้น 2 เงื่อนไข คือ

$$y(x, 0) = f(x) \qquad (6.7)$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \qquad (6.8)$$

เราจะต้องแก้สมการ (6.5) โดยที่คำตอบต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น การหาคำตอบสมการ (6.5) จะใช้วิธีการแยกตัวแปร กล่าวคือคำตอบของสมการ (6.5) จะอยู่ในรูป

$$y(x, t) = F(x)G(t) \tag{6.9}$$

ซึ่งเป็นผลคูณของสองฟังก์ชัน โดยที่ฟังก์ชันหนึ่งขึ้นกับตัวแปร x และอีกฟังก์ชันหนึ่งขึ้นกับตัวแปร t ดิฟเฟอเรนซิเอตสมการ (6.9) จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''G$$

เมื่อ " • " แทนอนุพันธ์เทียบกับ t และ " ' " แทนอนุพันธ์เทียบกับ x สมการ (6.5) เขียนได้เป็น

$$F\ddot{G} = c^2F''G$$

หารตลอดด้วย c^2FG จะได้

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่าเทอมทางซ้ายมือเป็นฟังก์ชันขึ้นกับ t อย่างเดียว ขณะที่เทอมทางขวามือเป็นฟังก์ชันขึ้นกับ x อย่างเดียว ดังนั้นแสดงว่าทั้งสองข้างต้องเท่ากับค่าคงที่ k นั่นคือ

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k$$

จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาสองสมการคือ

$$F'' - kF = 0 \tag{6.10}$$

$$\ddot{G} - c^2kG = 0 \qquad (6.11)$$

ในการหาคำตอบ F และ G ของสมการ (6.10) และ (6.11) นั้น $y = FG$ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตสมการ (6.6) กล่าวคือ

$$y(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad y(\ell, t) = F(\ell)G(t) = 0 \quad \text{ทุกค่า } t$$

ถ้า $G = 0$ จะได้ว่า $y = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่น่าสนใจ ดังนั้น $G \neq 0$ และ

$$F(0) = 0, \quad F(\ell) = 0 \qquad (6.12)$$

สำหรับ $k = 0$ คำตอบทั่วไปของสมการ (6.10) คือ $F = ax + b$ และจากสมการ (6.12) เราได้ $a = b = 0$ นั่นคือ $F = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่ต้องการ (เพราะจะทำให้ $y = 0$) สำหรับ k ที่เป็นบวก $(k \geq 0)$ ให้ $k = q^2$ คำตอบทั่วไปของสมการ (6.6) คือ

$$F = Ae^{qx} + Be^{-qx}$$

และจากสมการ (6.12) จะได้ $F = 0$ เช่นกัน เราจะเลือกค่า k ที่เป็นลบคือ ให้ $k = -p^2$ สมการ (6.10) จะอยู่ในรูป

$$F'' + pF = 0$$

คำตอบทั่วไปคือ $F(x) = A \cos px + B \sin px$

จากสมการ (6.12) จะได้ $F(0) = A = 0$ และ $F(\ell) = B \sin p\ell = 0$

ให้ $B \neq 0$ ดังนั้น $\sin p\ell = 0$ นั่นคือ

$$p\ell = n\pi \quad \text{หรือ} \quad p = \frac{n\pi}{\ell} \quad (\ell \text{ เป็นเลขจำนวนเต็ม})$$

ให้ $B = 1$ จะได้คำตอบจำนวนมากคือ $F(x) = F_n(x)$ เมื่อ

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(6.13)}$$

คำตอบข้างต้นจะเป็นไปตามสมการ (6.12) แทนค่า $k = -(n\pi/\ell)^2$ ลงในสมการ (5.11) จะได้

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{\ell}$$

คำตอบทั่วไปคือ

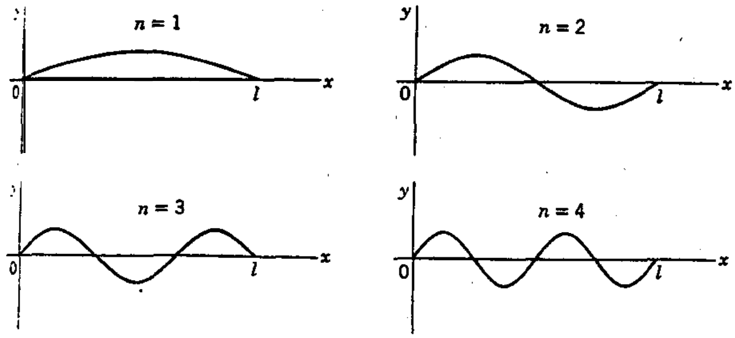
$$G_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $y_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$ เขียนได้ในรูป

$$y_n(x, t) = = (B_n\cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \; n = 1, 2, \quad (6.14)$$

ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (6.5) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต ฟังก์ชันเหล่านี้เรียกว่า ฟังก์ชันไอเกน และค่า $\lambda_n = cn\pi/\ell$ เรียกว่า ค่าไอเกนของการสั่นของเส้นลวด เซท $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ เรียกว่าสเปกตรัม

เราจะเห็นว่าแต่ละ y_n แทนการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกที่มีความถี่ $\lambda_n/2\pi = cn/2\ell$ รอบต่อหนึ่งหน่วยเวลา การเคลื่อนที่นี้เรียกว่าโหมดปกติ (normal mode) ที่ n ของเส้นลวด โมดปกติโมดแรงเรียกว่าโมดมูลฐาน ($n = 1$) และโมดถัดมาเรียกว่า โอเวอร์โทนที่ 1, 2,... (สอดคล้องกับ $n = 2, 3, \ldots$ ตามลำดับ ดูรูป 6.2



รูป 6.2 แสดงโมดปกติของการสั่นของเส้นลวด

ในตอนต่อไปเราจะหาคำตอบ $y_n(x, t)$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สมการ (6.7) และ (6.8) เนื่องจากสมการ (6.5) เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธ์จะได้ว่าผลรวมเชิงเส้นของคำตอบ y_n เป็นคำตอบของสมการ (6.5) ด้วย ให้

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{6.15}$$

จากสมการข้างต้นและเงื่อนไขเริ่มต้น สมการ (6.7) จะได้ว่า

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x) \tag{6.16}$$

ดังนั้นเพื่อให้สมการ (6.15) เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สมการ (6.7) B_n ต้องเป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x)$ กล่าวคือ

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.17}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (6.15) เทียบกับ t แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้นสมการ (6.8) จะได้

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t + B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x)$$

เพื่อให้สมการ (6.15) เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (6.8) ต้องเลือกสัมประสิทธิ์ B_n^* ซึ่งทำให้ $\partial y/\partial t$ ที่ $t = 0$ เป็นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $g(x)$ กล่าวคือ

$$B_n^*\lambda_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

ได้

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad \textbf{(6.18)}$$

นั่นคือ $y(x, t)$ ที่กำหนดโดยสมการ (6.15) และมีสัมประสิทธิ์คือสมการ **(6.17)** และ (6.18) เป็นคำตอบของสมการ (6.5) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สมการ (6.6), (6.7) และ (6.8)

<u>ตัวอย่าง</u> 6.1 จงหาคำตอบของสมการคลื่นเมื่อการดึงเส้นลวดตอนเริ่มต้นเป็นรูปสามเหลี่ยม กล่าวคือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2kx}{\ell} & \text{เมื่อ } 0 < x < \dfrac{\ell}{2} \\[2ex] \dfrac{2k(\ell-x)}{\ell} & \text{เมื่อ } \dfrac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

และความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ .

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $g(x) = 0$ จะได้ $B_n^* = 0$

และจากเรื่องอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ในบทที่ 4 สามารถหา B_n ได้เป็น

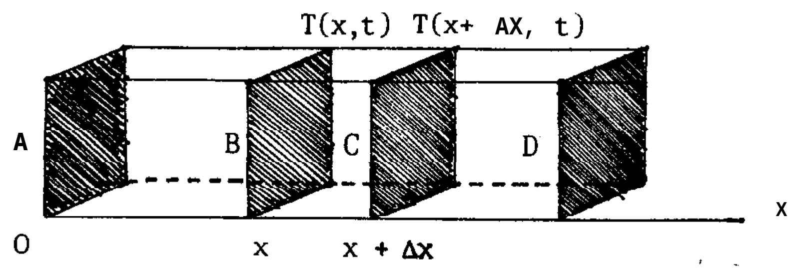
$$B_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

สมการ (6.15) จะอยู่ในรูป

$$y(x, t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos\frac{\pi ct}{\ell} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{\ell}\cos\frac{3\pi ct}{\ell} + \dots\right]$$

6.2 <u>การนำความร้อนของแท่งโลหะ</u>

สมมติว่าแท่งโลหะมีความยาวสม่ำเสมอเท่ากับ ℓ ทำให้แท่งโลหะร้อน (เช่นนำไปแช่ในน้ำร้อน) แล้วใช้ฉนวนความร้อนหุ้มแท่งโลหะไว้เพื่อไม่ให้ความร้อนภายในแท่งโลหะไหลผ่านผิวรอบ ๆ แท่งโลหะ นำก้อนน้ำแข็ง (อุณหภูมิ 0° C) มากระหนาบแท่งโลหะไว้ ถ้าให้ T เป็นอุณหภูมิของแท่งโลหะที่จุดห่างปลายหนึ่งเป็นระยะ x ที่เวลา t แสดงว่าอุณหภูมิของแท่งโลหะเป็นฟังก์ชันของ x และ t คือ T(x, t)



รูป 6.3

ให้จุดใกล้ ๆ จุด x คือจุด $x + \Delta x$ มีอุณหภูมิเป็น $T(x + \Delta x, t)$ เนื่องจากปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดหนึ่งหน่วยต่อหนึ่งหน่วยเวลาในแนวตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดนั้นจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ถ้าให้ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของโลหะ Q เป็นปริมาณความร้อนที่ไหลไปทางขวามือ Δt เป็นช่วงเวลาที่เกิดการไหลของความร้อน จะได้ว่า

$$Q = -KA\Delta t \frac{\partial T}{\partial x} \tag{6.19}$$

K เป็นค่าคงที่เรียกว่าสภาพนำความร้อน (thermal conductivity) เครื่องหมายลบเพราะ $\partial T/\partial x$ เป็นลบ (เนื่องจากอุณหภูมิลดลงเมื่อ x เพิ่มขึ้นไปทางขวา) ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด B คือ $-KA\Delta t \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x$ จากซ้ายมือไปขวามือ และปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด C จากซ้ายไปขวาคือ $-KA\Delta t \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ ปริมาณความร้อนที่สะสมอยู่ระหว่างพื้นที่หน้าตัด B และ C คือปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าทาง B ลบด้วยปริมาณความร้อนที่ไหลออกทาง C จะได้

$$-KA\Delta t \left[\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \right] = ms\Delta T \tag{6.20}$$

เมื่อ s เป็นความร้อนจำเพาะของโลหะนี้ m เป็นมวลของแท่งโลหะในช่วง Δx และ ΔT เป็นอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปของแท่งโลหะในช่วง Δx นี้

แทนค่า $m = dA\Delta x$ (เมื่อ d เป็นความหนาแน่นของโลหะ) ลงในสมการ (6.20) แล้วหารตลอดด้วย $A\Delta x\Delta t$ ต่อจากนั้นให้ $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ จะได้

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = sd \frac{\partial T}{\partial t}$$

หรือ $$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (6.21)$$

โดยที่ $k = K/sd = c^2$ มีชื่อว่า diffusivity ของโลหะ และสมการ (6.21) เรียกว่า การไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ (one-dimensional heat flow) หรือสมการความร้อนในหนึ่งมิติ (one-dimensional heat equation) เงื่อนไขขอบเขตที่จะนำมาแก้สมการในกรณีนี้คือ

$$T(0, t) = 0, \quad T(\ell, t) = 0 \qquad \text{ทุกค่า } t > 0 \qquad \mathbf{(6.22)}$$

ในตอนเริ่มต้น $t = 0$ ให้ $f(x)$ เป็นอุณหภูมิเริ่มต้นในแท่งโลหะ ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$T(x, 0) = f(x) \qquad (6.23)$$

เราจะหาคำตอบ $T(x, t)$ ของสมการ (6.21) ที่เป็นไปตามสมการ (6.22) และ (6.23) ใช้วิธีการแยกตัวแปร ให้

$$T(x, t) = F(x)\,G(t) \qquad (6.24)$$

แทนค่าลงในสมการ (6.21) จะได้สมการ $F\dot{G} = c^2F''G$ แล้วหารด้วย c^2FG

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \qquad (6.25)$$

ทางซ้ายมือของสมการ (6.25) ขึ้นกับ t อย่างเดียว แต่ทางขวามือขึ้นกับ x อย่างเดียว แสดงว่าแต่ละข้างต้องเท่ากับค่าคงที่ ให้เป็น w ถ้า $w \geq 0$ คำตอบ $T = FG$ ที่เป็นไปตามสมการ (6.22) มีเพียงกรณีเดียวคือ $T = 0$ สำหรับ w ที่เป็นลบ $k = -p^2$ สมการ (6.25) จะเป็น

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

ได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาเชิงเส้นสองสมการคือ

$$F'' + p^2F = 0 \qquad (6.261$$

และ

$$\dot{G} + c^2p^2G = 0 \qquad (6.27)$$

คำตอบทั่วไปของสมการ (6.26) คือ

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \qquad (6.28)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต (6.22) ได้ว่า

$$T(0, t) = F(0)G(t) = 0 \text{ และ } T(\ell, t) = F(\ell)G(t) = 0$$

ถ้า $G(t) = 0$ แสดงว่า $T(x, t) = 0$ ซึ่งไม่ต้องการ ดังนั้น
$F(0) = 0$ และ $F(\ell) = 0$ จากสมการ (6.28) $F(0) = A = 0$
และ $F(\ell) = B\sin p\ell = 0$ เพราะว่า $B \neq 0$ นั่นคือ
$\sin p\ell = 0$ หรือ $p = \frac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$ ให้ $B = 1$
จะได้คำตอบของสมการ (6.26) ที่เป็นไปตามสมการ (6.22)

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

พิจารณาสมการ (6.27) สำหรับ $p = n\pi/\ell$ จะได้

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \lambda_n = \frac{cn}{I--}$$

คำตอบทั่วไปของสมการข้างต้นคือ

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

เมื่อ Bn เป็นค่าคงที่ ดังนั้นฟังก์ชัน

$$T_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} e^{-\lambda_n^2 t}, n = 1, 2, \ldots \quad (6.29)$$

เป็นคำตอบของสมการ (6.21) ที่เป็นไปตามสมการ (6.22)

การหาคำตอบที่เป็นไปตามสมการ (6.23) เราจะพิจารณาอนุกรม

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t) = \sum_{n-1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} e^{-\lambda_n^2 t} \quad (6.30)$$

จากสมการ **(6.30)** และสมการ **(6.23)** จะได้

$$T(x, 0) = \sum_{n-1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = f(x)$$

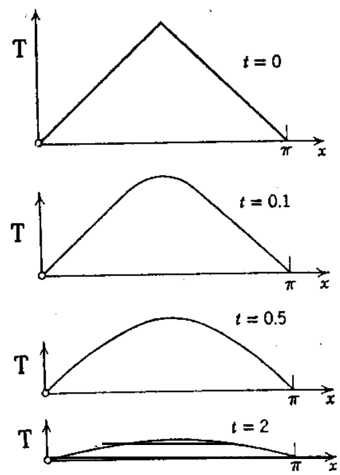
เพื่อให้สมการ (6.30) เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สมการ (6.23) B_n ต้องเป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ f(x) นั่นคือ

$$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (6.31)$$

ดังนั้น T(x, t) ที่กำหนดโดยสมการ (6.30) และมีสัมประสิทธิ์คือสมการ (6.31) จะเป็นคำตอบของสมการ (6.21) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้

<u>ตัวอย่าง</u> 6.2 จงหาคำตอบของสมการการไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ ถ้า อุณหภูมิเริ่มต้นคือ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } 0 < x < \ell/2 \\ \ell - x & \text{เมื่อ } \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$



<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (6.31)

$$B_n = \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2} x \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]$$

ในการอินทิเกรตจะให้ $B_n = 0$ เมื่อ n เป็นเลขคู่และจะได้

$$B_n = \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 5, 9, \ldots)$$

$$B_n = -\frac{4\ell}{n^2\pi^2} \qquad (n = 3, 7, 11, \ldots)$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$T(x, t) = \frac{4\ell}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{\ell} e^{-(c\pi/\ell)^2 t} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{\ell} e^{-(3c\pi/\ell)^2 t} + \ldots\right]$$

6.3 <u>การสั่นของแผ่นบาง ๆ</u> (สมการคลื่นใน 2 มิติ)

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาแผ่นบาง ๆ (membrane) ที่ขึงตึง เช่น หน้ากลอง และสมมติว่า

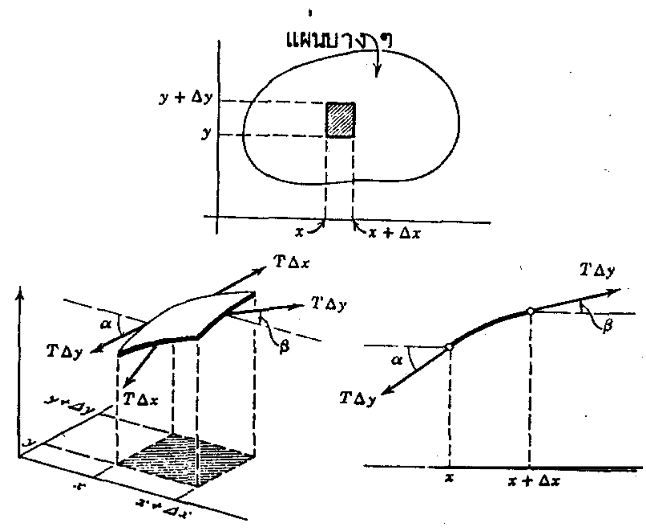
1. มวลของแผ่นบาง ๆ ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มีค่าคงที่ แผ่นบาง ๆ สามารถโค้งได้อย่างสมบูรณ์และถือว่าบางมากจนกระทั่งไม่เกิดการต้านการโค้งงอ

2. แผ่นบาง ๆ ถูกขึงตึงและบริเวณรอบ ๆ ถูกยึดไว้แน่นในระนาบ xy แรงตึง T ต่อหนึ่งหน่วยความยาวที่เกิดจากการขึงแผ่นบาง ๆ มีค่าเท่ากันทุก ๆ จุด ในทุกทิศทางและค่านี้ไม่เปลี่ยนระหว่างการเคลื่อนที่

3. การโค้งงอของแผ่นบาง ๆ ระหว่างการเคลื่อนที่ $u(x, y, t)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของแผ่นบาง ๆ และมุมเอียงทั้งหมดมีค่าน้อย

ถึงแม้ข้อสมมติข้างต้นนี้จะไม่เป็นจริงนักในเชิงปฏิบัติ แต่สำหรับการสั่นตามขวางอย่างน้อย ๆ ของแผ่นบาง ๆ จะถือว่าเป็นไปตามข้อสมมุติดังกล่าวนี้

การหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ของแผ่นบาง ๆ นี้เราจะพิจารณาแรงที่กระทำต่อส่วนเล็ก ๆ ของแผ่นบาง ๆ ดังรูป 6.4 เนื่องจากการโค้งงอและมุมเอียงของแผ่นบาง ๆ มีค่าน้อย จึงคิดได้ว่าด้านของส่วนเล็ก ๆ ที่พิจารณาประมาณเท่ากับ Δx และ Δy



รูป 6.4

ให้ T เป็นแรงตึงต่อหนึ่งหน่วยความยาว ดังนั้นแรงที่กระทำต่อขอบของส่วนเล็ก ๆ ประมาณเท่ากับ $T\Delta x$ และ $T\Delta y$ เพราะว่าแผ่นบาง ๆ นี้สามารถโค้งได้อย่างสมบูรณ์ นั่นคือแรงเหล่านี้จะสัมผัสกับแผ่นบาง ๆ เมื่อแตกแรงเหล่านี้ในแนวราบมันจะหักล้างกันหมดไปเพราะทุก ๆ จุดบนแผ่นบาง ๆ เคลื่อนที่ในแนวดิ่ง องค์ประกอบของแรงตามแนวดิ่งที่กระทำต่อขอบของส่วนเล็ก ๆ ที่ยาว Δy คือ $T\Delta y\sin\beta$ และ $-T\Delta y\sin\alpha$ เมื่อ α และ β เป็นมุมเอียงของขอบ 2 ด้านนี้ (มีเครื่องหมายลบปรากฏเพราะว่าแรงทางด้านซ้ายมือมีทิศพุ่งลง ดูรูป 6.4) เนื่องจากมุม α และ β มีค่าน้อย $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ และ $\sin\beta \approx \tan\beta$ จะได้แรงลัพธ์ขององค์ประกอบของแรงในแนวดิ่งทั้งสองนี้เป็น

$$T_1 = T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha)$$

$$= T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right] \tag{6.32}$$

เมื่อ x ที่อยู่ข้างใต้หมายถึงอนุพันธ์บางส่วน และ y_1, y_2 เป็นค่าที่อยู่ระหว่าง y และ $y + \Delta y$ ในทำนองเดียวกันแรงลัพธ์ขององค์ประกอบของแรงในแนวดิ่งที่กระทำกับสองขอบที่เหลือคือ

$$T_2 = T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right] \tag{6.33}$$

เมื่อ x_1 และ x_2 เป็นค่าที่อยู่ระหว่าง x และ $x + \Delta x$

จากกฎของสองของนิวตัน ผลรวมของแรง T_1 และ T_2 เท่ากับมวล $\rho\Delta A$ ของส่วนเล็ก ๆ คูณกับความเร่ง $\partial^2u/\partial t^2$ เมื่อ ρ เป็นมวลของแผ่นบางต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ และ $\Delta A = \Delta x\Delta y$ เป็นพื้นที่ของส่วนเล็ก ๆ นี้ ดังนั้น

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right]$$

$$+ T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right]$$

หารด้วย $\Delta x\Delta y$ จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x,y_1)-u_x(x,y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1,y+\Delta y)-u_y(x_2,y)}{\Delta y}\right]$$

ถ้าให้ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ เราจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{6.34}$$

สมการข้างต้นเรียกว่าสมการคลื่น 2 มิติ เทอมในวงเล็บสามารถเขียนในรูปลาปลาเซียน $\nabla^2 u$ ของ u นั่นคือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u \tag{6.35}$$

6.4 การสั่นของแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมมุมฉาก

การแก้ปัญหาการสั่นของแผ่นบาง ๆ เราต้องหาคำตอบ $u(x, y, t)$ ของสมการคลื่น 2 มิติ สมการ (6.34) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

$u = 0$ บนขอบเขตของแผ่นบาง ๆ สำหรับทุกค่า $t \geq 0$ (6.36)

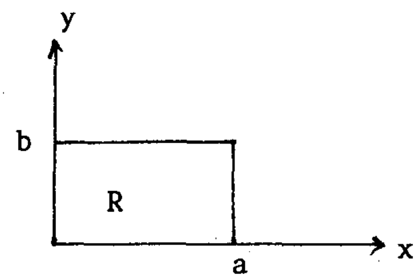
และเงื่อนไขเริ่มต้น 2 เงื่อนไข

$u(x, y, 0) = f(x, y)$ [กำหนดการขจัดเริ่มต้นเป็น $f(x, y)$] (6.37)

และ $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y)$ [กำหนดความเร็วเริ่มต้น $g(x, y)$] (6.38)

เงื่อนไขเหล่านี้คล้ายกับกรณีการสั่นของเส้นลวด

พิจารณากรณีแผ่นบาง ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular membrane) ดังรูป 6.5



รูป 6.5 รูปแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมมุมฉาก

ใช้วิธีการแยกตัวแปรเพื่อหาคำตอบของสมการ (6.34) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (6.36) โดยให้

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t) \tag{6.39}$$

แทนค่าสมการ (6.39) ลงในสมการ (6.34) จะได้

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

เมื่อ x และ y ที่อยู่ข้างใต้หมายถึงอนุพันธ์บางส่วน และ " • " แทนอนุพันธ์เทียบกับ t หารทั้งสองข้างสมการข้างต้นด้วย c^2FG ได้

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

เนื่องจากเทอมทางซ้ายมือขึ้นกับตัวแปร t อย่างเดียวและเทอมทางขวามือไม่ขึ้นกับ t แสดงว่าทั้งสองข้างต้องเท่ากับค่าคงที่ โดยที่ค่าคงที่นี้เป็นลบอย่างเดียวเท่านั้น คำตอบจึงเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (6.36) แทนค่าคงที่ซึ่งเป็นลบนี้ด้วย $-\nu^2$ จะได้

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2$$

จากสมการข้างต้นจะได้สมการดิฟิเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาคือ

$$\ddot{G} + \lambda^2 G * = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \lambda = c\nu \tag{6.40}$$

และสมการดิฟเฟอเรนเชียบแบบพาร์เชียล

$$F_{xx} + F_{YY} + \nu^2 F = 0 \tag{6.41}$$

พิจารณาสมการ (6.41) ใช้วิธีการแยกตัวแปรอีกครั้งให้F(x, y) อยู่ในรูป

$$F(x, y) = H(x)Q(y) \tag{6.42}$$

แทนสมการ (6.42) ลงในสมการ (6.41)แล้วหารตลอดด้วย HQ จะได้

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q^2}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right)$$

ฟังก์ชันทางซ้ายมือขึ้นกับ x อย่างเดียวขณะที่ฟังก์ชันขวามือขึ้นกับ y แต่เพียงอย่างเดียว ดังนั้นทั้งสองข้างต้องเท่ากับค่าคงที่ และค่าคงที่นี้ต้องเป็นลบ เพราะค่าลบเท่านั้นที่จะให้คำตอบเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (6.36) ดังนั้น

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right) + \nu^2 Q) = -k^2$$

ได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาเชิงเส้น 2 สมการคือ

$$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0 \tag{6.42}$$

และ $$\frac{d^2Q}{dy^2} + p^2Q = 0 \qquad \text{เมื่อ } p^2 = \nu^2 - k^2 \qquad (6.43)$$

คำตอบทั่วไปของสมการ **(6.42)** และ **(6.43)** คือ

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \text{ และ } Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

เมื่อ A, B, C และ D เป็นค่าคงที่ จากสมการ (3.36) และ (3.39) จะได้ว่า $F = HQ$ ต้องเป็นศูนย์บนขอบเขตซึ่งสอดคล้องกับ $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ และ $y = b$ ซึ่งจะทำให้ได้เงื่อนไข

$$H(0) = 0, \ (H(a) = 0, \ Q(0) = 0, \ Q(b) = 0$$

ดังนั้น $H(0) = A = 0$ และ $H(a) = B\sin ka = 0$ ให้ $B \neq 0$ แสดงว่า $\sin ka = 0$ หรือ $ka = m\pi$ นั่นคือ $k = m\pi/a$ (m เป็นเลขจำนวนเต็ม) ในทำนองเดียวกัน ได้ $C = 0$ และ $p = n\pi/b$ เมื่อ p เป็นเลขจำนวนเต็ม ได้คำตอบเป็น

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

และ $$Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น $$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \textbf{(6.44)}$$

เป็นคำตอบของสมการ (6.41) ซึ่งเป็นศูนย์บนขอบของแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมผืนผ้า

เนื่องจาก $p^2 = \nu^2 - k^2$ ในสมการ (6.43) และ $\lambda = c\nu$ ในสมการ (6.40) จะได้

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$$

แทนค่า $k = m\pi/a$ และ $p = n\pi/b$ ลงในสมการข้างต้นได้

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \qquad (6.45)$$

พิจารณาสมการ (6.40) จะได้คำตอบทั่วไปคือ

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

ฟังก์ชัน $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ เขียนได้ในรูป

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\lambda\frac{n\pi y}{b} \qquad (6.46)$$

ซึ่งเป็นคำตอบของสมการคลื่น (6.34) ที่เป็นศูนย์บนขอบของแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมผืนผ้า ฟังก์ชันนี้เรียกว่า ฟังก์ชันไอเกน และ λ_{mn} เรียกว่าค่าไอเกนของการสั่นของแผ่นบาง ๆ ความถี่ของ u_{mn} คือ $\lambda_{mn}/2\pi$

ฟังก์ชัน F_{mn} หลาย ๆ ฟังก์ชันอาจสอดคล้องกับค่าไอเกนค่าเดียวกันได้ขึ้นกับ a และ b ในทางฟิสิกส์หมายความว่าการสั่นอาจมีความถี่เดียวกันแต่เส้นแนวบัพ (nodal lines) ต่างกัน (เป็นเส้นโค้งของจุดบนแผ่นบาง ๆ ที่ไม่เคลื่อนที่)

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมจัตุรัส มี $a = b = 1$ จากสมการ (6.45) จะได้ค่าไอเกนเป็น

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2} \qquad (6.47)$$

ดังนั้น $\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$

แต่สำหรับ $m \neq n$ จะสอดคล้องกับฟังก์ชัน

$$F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y \text{ และ } F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y$$

ที่แตกต่างกัน เช่น $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ จะสอดคล้องกับ 2 ฟังก์ชันคือ

$$F_{12} = \sin\pi x \sin 2\pi y \text{ และ } F_{21} = \sin 2\pi x \sin\pi y$$

ดังนั้นจะสอดคล้องกับคำตอบ

$$u_{12} = (B_{12}\cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^{*} \sin c\pi \sqrt{5}t) F_{12}$$

และ $u_{21} = (B_{21}\cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^{*} \sin c\pi \sqrt{5}t)F_{21}$

มีเส้นแนวบัพ $y = \frac{1}{2}$ และ $x = \frac{1}{2}$ ตามลำดับ (ดูรูป 6.6) ให้ $B_{12} = 1$ และ $B_{12}^{*} = B_{21}^{*} = 0$ เราจะได้

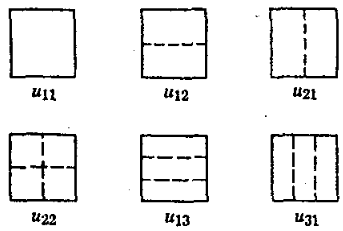
$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t\,(F_{12} + B_{21}F_{21}) \qquad (6.48)$$

ซึ่งสอดคล้องกับการสั่นอีกลักษณะหนึ่งที่มีค่าไอเกน $c\pi\sqrt{5}$ เส้นแนวบัพของฟังก์ชันนี้คือคำตอบของสมการ

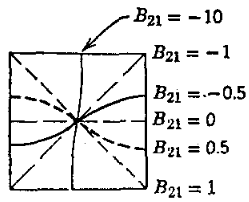
$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin\pi x \sin 2\pi y + B_{21}\sin 2\pi x \sin\pi y = 0$$

หรือ $\sin\pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21}\cos \pi x) = 0$ (6.49)

คำตอบของสมการ **(6.49)** ขึ้นกับค่า B_{21} (ดูรูป **6.7)**



รูป 6.6 เส้นแนวบัพของคำตอบ u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{13} และ u_{31} ในกรณีของแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูป 6.7 เส้นแนวบัพของคำตอบสมการ (6.49) สำหรับบางค่าของ B_{21}

การหาคำตอบที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นสมการ (6.37) และ (6.38) มีวิธีการคล้ายในหัวข้อ 6.1 กล่าวคือให้

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (6.50)$$

จากสมการข้างต้นและสมการ (6.37) จะได้

$$u(x,y,o) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y) \qquad (6.51)$$

อนุกรมข้างต้นนี้เรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์คู่(double Fourier series) สมมติว่า $f(x, y)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมได้ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ B_{mn} ของ $f(x, y)$ ในสมการ (6.51) อาจหาได้ดังนี้ ให้

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

สมการ (6.51) อาจเขียนได้ในรูป

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

สำหรับค่า y คงที่ สมการข้างต้นคืออนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ f(x, y) ที่พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันของ x และจากทฤษฎีที่ 4 จะได้สัมประสิทธิ์ $K_m(y)$ เป็น

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \, dx \tag{6.53}$$

และจากสมการ (6.52) เป็นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $K_m(y)$ จะได้สัมประสิทธิ์เป็น

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin\frac{n\pi y}{b} \, dy$$

แทนสมการ (6.53) ลงในสมการข้างต้นจะได้

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy \tag{6.54}$$

ดังนั้น B_{mn} ในสมการ (6.50) สามารถหาค่าได้ในเทอมของ f(x, y) สมการ (6.54) การหา B^*_{mn} ทำได้โดยการดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (6.50) เทียบกับ t แล้วใช้สมการ (6.38) จะได้

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^*_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y)$$

สมมติว่า g(x, y) สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมได้ ทำคล้ายกับกรณีของ f(x, y) จะได้

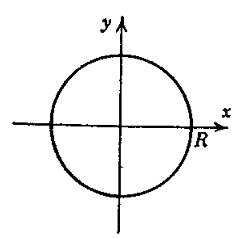
$$B^*_{nm} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dxdy \quad (6.55)$$

ดังนั้นสำหรับสมการ (6.50) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สัมประสิทธิ์ B_{mn} และ B^*_{mn} ต้องเป็นไปตามสมการ (6.54) และ (6.55)

6.5 การสั่นของแผ่นบาง ๆ วงกลม

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการสั่นของแผ่นบาง ๆ ที่เป็นวงกลม (circular membrane) รัศมี R (รูป 6.8) ใช้พิกัดเชิงขั้ว x = r cosθ และ y = r sinθ สมการคลื่น (6.34) เขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \quad (6.56)$$



รูป 6.8 แผ่นบาง ๆ วงกลม

เราจะพิจารณาเฉพาะคำตอบ u(r, t) ของสมการนี้ซึ่งสมมาตรเชิงรัศมี กล่าวคือไม่ขึ้นกับ θ ดังนั้นสมการคลื่น (5.56) จะเหลือเพียง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (6.57)$$

เนื่องจากแผ่นบาง ๆ นี้ถูกยึดไว้ตามขอบ $r = R$ จะได้เงื่อนไขขอบเขต

$$u(R, t) = 0 \qquad \text{ทุกค่า} \quad t \geq 0 \tag{6.58}$$

เนื่องจากเราพิจารณาเฉพาะคำตอบที่ไม่ขึ้นกับ θ ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นต้องไม่ขึ้นกับ θ ด้วยเช่นกัน ให้เงื่อนไขเริ่มต้นอยู่ในรูป

$$u(r, 0) = f(r) \quad \left[\text{ให้การโค้งเริ่มต้นเป็น } f(r)\right] \tag{6.59}$$

$$\text{และ} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r) \left[\text{ให้ความเร็วเริ่มต้นเป็น } g(r)\right] \tag{6.60}$$

ใช้วิธีการแยกตัวแปรเพื่อหาคำตอบของสมการ (6.57) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตสมการ (5.58) โดยให้

$$u(r, t) = W(r)G(t) \tag{6.61}$$

แทนสมการ (6.61) ลงในสมการ (6.57) แล้วหารตลอดด้วย c^2WG จะได้

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right)$$

เมื่อ " $\cdot$ " แทนอนุพันธ์เทียบกับ t และ " $'$ " แทนอนุพันธ์เทียบกับ r ทั้งสองข้างของสมการข้างต้นต้องเท่ากับค่าคงที่ และค่าคงที่นี้ต้องเป็นลบเพื่อให้คำตอบนี้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต ให้ค่าคงที่เป็น $-k^2$ ดังนั้นจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาเชิงเส้น 2 สมการคือ

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \lambda = ck \tag{6.62}$$

$$\text{และ} \qquad W'' + \frac{1}{r}W' + k^2W = 0 \tag{6.63}$$

พิจารณาสมการ (6 . 6 3) ให้ตัวแปรอิสระใหม่ คือ $s = kr$ ใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds}k \quad \text{และ} \quad W'' = \frac{d^2W}{ds^2}k^2$$

แทน W' และ W'' ลงในสมการ (6.63) แล้วหารตลอดด้วย k^2 จะได้

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0 \qquad (6.64)$$

สมการ (6.64) คือสมการของเบสเซล (Bessel's equation) ซึ่งมีคำตอบทั่วไปเป็น

$$W(r) = C_1 J_o(s) + C_2 Y_o(s) \qquad (6.65)$$

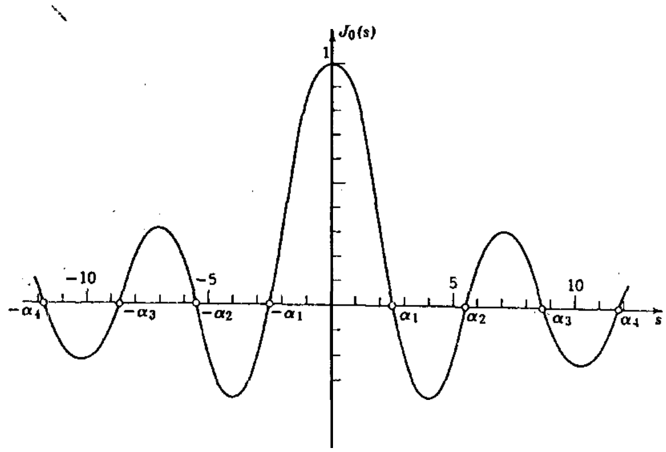
เมื่อ J_o และ Y_o เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดแรก (first kind) และชนิดที่สอง (second kind) ลำดับศูนย์ เนื่องจากการโค้งของแผ่นบาง ๆ จำกัด ขณะที่ Y_o มีค่าเป็นอนันต์ เมื่อ $s \to o$ ดังนั้นเราไม่สามารถใช้ค่า Y_o ได้ และต้องเลือก $C_2 = 0$ จะเห็นได้ว่า $C_1 \neq 0$ เพราะมิฉะนั้นแล้ว W จะเป็นศูนย์ เราอาจให้ $C_1 = 1$ และดังนั้น

$$W(r) = J_o(s) = J_o(kr) \qquad (6.661$$

ที่ขอบ $r = R$ จะได้ $u(R, t) = W(R)G(t) = 0$ แต่ $G(t) \neq 0$

ดังนั้น $W(R) = J_o(kR) = 0$

ฟังก์ชันเบสเซล J_o มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ s มีค่าบางค่า ดูรูป 6.9



ให้ค่าบวกของ s ที่ทำให้ $J_o(s)$ เป็นศูนย์คือ α_1, α_2, α_3,... ซึ่งเราจะได้ค่าเป็นตัวเลข (ทศนิยม 4 ตำแหน่ง) เป็น

α_1 = **2.4048**, α_2 = **5.5201**, α_3 = **8.6537**, α_4 = **11.7915**,

α_5 = **14.9309**

ให้ $kR = \alpha_m$ หรือ $k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}$, m = **1**, 2,..

จะได้ฟังก์ชัน

(6.67)

$$W_m(r) = J_o(k_m r) = J_o\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right), \quad m = 1, 2, .. \tag{6.68}$$

เป็นคำตอบของสมการ **(6.63)** ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ที่ $r = R$

คำตอบทั่วไปของสมการ (6.62) ที่มี $\lambda = \lambda_m = ck_m$ คือ

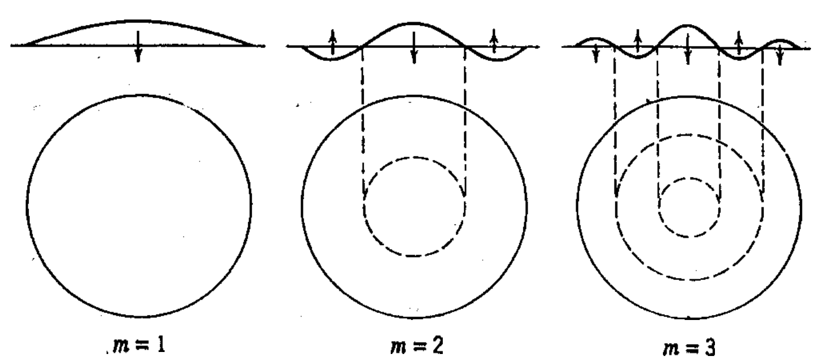
$$G_m(t) = a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t$$

ดังนั้นฟังก์ชัน

$$u_m(r,t) = W_m(r)G_m(t) = (a_m\cos\lambda_m t + b_m\sin\lambda_m t)J_o(k_m r) \qquad (6.69)$$

เมื่อ $m = 1, 2, ...$ เป็นคำตอบของสมการคลื่น (6.57) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต ฟังก์ชันนี้เรียกฟังก์ชันไอเกนของปัญหานี้และค่าไอเกนคือ λ_m

การสั่นของแผ่นบาง ๆ ที่สอดคล้องกับ u_m เรียกว่า โมดปกติที่ m มีความถี่ $\lambda_m/2\pi$ รอบต่อหนึ่งหน่วยเวลา เนื่องจากตำแหน่งของ α_m ที่ทำให้ J_o มีค่าเป็นศูนย์นั้นไม่สม่ำเสมอ (ซึ่งต่างจากตำแหน่งเป็นศูนย์ของฟังก์ชันไซน์ในกรณีของการสั่นของเส้นลวด) เสียงจากกลองจึงต่างจากเสียงของไวโอลิน รูปของโมดปกติสามารถหาได้ง่าย ๆ จากรูป 6.9 ซึ่งแสดงดังรูป 6.10 สำหรับ $m = 1$ ทุก ๆ จุดของแผ่นบาง ๆ จะเคลื่อนที่ขึ้น (หรือลง) ในเวลาเดียวกัน สำหรับ $m = 2$ ฟังก์ชัน $W_2(r) = J_o(\frac{\alpha_2 r}{R})$ เป็นศูนย์เมื่อ $\alpha_2 r/R = \alpha_1$ หรือ $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ ดังนั้นวงกลมรัศมี $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ เป็นเส้นแนวบัพและขณะที่บริเวณตรงกลางของแผ่นบาง ๆ เคลื่อนที่ขึ้น ส่วนข้างนอก $(r > \alpha_1 R/\alpha_2)$ จะเคลื่อนที่ลง หรือกลับกัน คำตอบ $u_m(r, t)$ จะมีเส้นแนวบัพจำนวน $m - 1$ ที่เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน



รูป 6.10 โมดปกติของแผ่นบาง ๆ วงกลมในกรณีของการสั่นที่ไม่ขึ้นกับมุม

การหาคำตอบที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นสมการ (6.59) และ (6.60) เราจะใช้วิธีเดียวกับกรณีการสั่นของเส้นลวด กล่าวคือให้

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r)G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t)J_o(\frac{\alpha_m}{R} r) \tag{6.70}$$

ให้ $t = 0$ และใช้สมการ (6.59) จะได้

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_o(\frac{\alpha_m}{R} r) = f(r) \tag{6.71}$$

ดังนั้นเพื่อให้สมการ (6.70) เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นสมการ (6.59) a_m ต้องเป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์-เบสเซล ซึ่งแทน $f(r)$ ในเทอมของ $J_o(\alpha_m r/R)$ กล่าวคือ

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_o^R rf(r)J_o(\frac{\alpha_m r}{R})dr, \; m = 1, 2,..$$

ถ้า $f(r)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ในช่วง $0 \leq r \leq R$ จะหาสัมประสิทธิ์ b_n ในสมการ (6.70) ได้จากสมการ (6.60) ซึ่งจะทำคล้าย ๆ กับของ a_m การหาค่า a_m และ b_m เป็นตัวเลข เราอาจใช้วิธีการอินทิเกรตอย่างประมาณโดยใช้ตารางของ J_o และ J_1

บทสรุป

การสั่นของเส้นลวดยาว ℓ ที่ขึงตึงระหว่างจุดสองจุดเขียนเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียลเชิงเส้นได้เป็น $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ซึ่งเรียกว่าสมการคลื่นกรณีหนึ่งมิติเงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้ คือ $y(0, t) = 0$ และ $y(\ell, t) = 0$ คำตอบของสมการนี้ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$y_n(x,t) = (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

การนำความร้อนของแท่งโลหะที่ยาว ℓ และมีฉนวนความร้อนหุ้มแท่งโลหะไว้โดยที่มีน้ำแข็งขนาบปลายทั้งสอง เขียนเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นได้เป็น

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ซึ่งเรียกว่าสมการการไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ เมื่อ k คือ diffusivity) ของโลหะ $(k = K/sd)$ เงื่อนไขขอบเขตของสมการนี้คือ $T(0, t) = 0$ และ $T(\ell, t) = 0$ คำตอบของสมการนี้ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตคือ $T_n(x, t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-\lambda_n^2 t}$, $\lambda_n = \frac{cn\pi}{\ell}$

สมการการสั่นของแผ่นบาง ๆ เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad , \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

กรณีแผ่นบางสี่เหลี่ยมมุมฉากยาว a และกว้าง b เงื่อนไขขอบเขตคือ $u = 0$ ขอบของแผ่นบาง ๆ คำตอบทั่วไปของสมการข้างต้นคือ

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin\lambda_{mn} t) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$

กรณีแผ่นบาง ๆ วงกลมรัศมี สมการการสั่นของแผ่นบาง ๆ วงกลมในพิกัดเชิงขั้วคือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

พิจารณาเฉพาะคำตอบที่สมมาตรเชิงรัศมี (ไม่ขึ้นกับ θ) สมการคลื่น

เป็น $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ $u(R, t) = 0$ คำตอบทั่วไปของสมการนี้คือ

$$u_m(r, t) = (a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t)J_o(k_m r)$$

เมื่อ $\lambda_m = ck_m$, $K_m = \alpha_m/R$ และ

$J_o(k_m r)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดแรก

<u>แบบฝึกหัดบทที่ 6</u>

1. จงหาฟังก์ชัน $y(x,t)$ ของการสั่นของเส้นลวด (ความยาว $\ell = \pi$, ปลายทั้งสองข้างถูกตรึง และ $c^2 = T/\rho = 1$) เมื่อความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ และการดึงเริ่มต้นเป็น

   ก. $0.02 \sin x$ ข. $k(\sin x - \sin 2x)$ ค. $k(\pi x - x^2)$

2. จงหาสมการ $y(x, t)$ ของการสั่นของเส้นลวด (ยาว $\ell = \pi$, ปลายทั้งสองข้างถูกตรึง $c^2 = 1$) ถ้าการดึงเริ่มต้น $f(x) = 0$ และความเร็วเริ่มต้น $g(x)$ คือ $g(x) = 0.01\, x$ ถ้า $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$

   $= 0.01(\pi - x)$ ถ้า $\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi$

3. จงหาอุณหภูมิ $T(x,t)$ ในแท่งเงิน (ความยาว 10 ซม. พื้นที่ภาคตัดขวางคงที่ 1 ซม^2, ความหนาแน่น 10.6 กรัม/ซม^3. สภาพนำความร้อน 1.04 แคลอรี/ซม ^oC วินาที ความร้อนจำเพาะ = 0.056 แคลลอรี/กรัม 0^oC) ซึ่งมีฉนวนความร้อนหุ้มโดยรอบ ปลายทั้งสองด้านมีอุณหภูมิ 0^oC และอุณหภูมิเริ่มต้นเริ่มต้น (ใน ^oC) คือ $f(x)$ เมื่อ

ก. $f(x) = \sin 0.1\pi x$

ข. $$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 < x < 5 \\ 10-x & \text{ถ้า } 5 < x < 10 \end{cases}$$

ค. $f(x) = x(10-x)$

4. สมมติว่าแท่งวัตถุขนาดสม่ำเสมอยาว ℓ มีอุณหภูมิคงที่ ณ ปลายทั้งสองข้าง แต่ค่าแตกต่างกันกล่าวคือ $T(0,t) = T_1$ และ $T(\ell,t) = T_2$ จงหาอุณหภูมิ $T(x)$ ที่จุดใด ๆ ในแนวนี้ หลังจากเวลาผ่านไปนาน ๆ (ตามทฤษฎีคือ $T \to \infty$)

5. จากโจทย์ข้อ 2 ถ้าให้อุณหภูมิเริ่มต้นเป็น $T(x, 0) = f(x)$ จงแสดงว่าอุณหภูมิสำหรับเวลาใด ๆ $t > 0$ คือ $T(x,t) = T_1(x) + T_2(x,t)$

เมื่อ T_1 = และ และ $T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-cn\pi/\ell}$

เมื่อ $$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left[f(x) - T_1(x)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n T_2 - T_1\right]$$

6. จงหาสมการการสั่น $y(x, y, t)$ ของแผ่นบาง ๆ สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มี $a = b = 1$ และ $c = 1$ ถ้าความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์และการดึงเริ่มต้นคือ $f(x, y)$ เมื่อ

ก. $f = k \sin \pi x \sin 2\pi y$

ข. $f = kx(1-x^2)y(1-y^2)$

7. จงหาสมการ $u(r,t)$ ของการสั่นของแผ่นบาง วงกลมรัศมี $R = 1$ ถ้า $c = 1$ ความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ และการดึงเริ่มต้นคือ $f(r) = k(1-r^2)$