บทที่ 5
สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา

วัตถุประสงค์

หลังจากที่ศึกษาบทที่ 5 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. แก้สมการแบบซึ่งแยกตัวแปรได้
2. ทดสอบว่าเป็นสมการแบบแน่นอนหรือไม่ และหาคำตอบของสมการแบบแน่นอนได้
3. หาคำตอบของสมการเบอร์นูลีและสมการเอกพันธ์ได้
4. หาคำตอบของสมการเชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ เมื่อด้านขวามือเป็นศูนย์และไม่เป็นศูนย์ โดยวิธีการตรวจพินิจ วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์และวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

บทที่ 5
สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา

5.1 <u>บทนำ</u>

สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์เรียกว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียล ถ้าประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบพาร์เชียล (partial differential equation) แต่ถ้าประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น เรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดา (ordinary differential equation) บทนี้จะพิจารณาวิธีบางวิธีในการหาคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาซึ่งพบบ่อย ๆ สำหรับการประยุกต์ ตัวอย่างของปัญหาทางฟิสิกส์ เช่น กฎข้อที่สองของนิวตันในรูปเวกเตอร์ คือ $\vec{F} = m\vec{a}$ ถ้าเขียนความเร่งเป็น $d\vec{v}/dt$ เมื่อ $\vec{v}$ คือความเร็ว หรือเขียนเป็น $d^2\vec{r}/dt^2$ $\vec{r}$ เป็นการขจัดเราจะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล (หรือเซทของสมการดิฟเฟอเรนเชียลของแต่ละองค์ประกอบ) ปัญหาในกลศาสตร์นั้นเราต้องการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้การกระทำของแรงที่กำหนดให้ ซึ่งปัญหาดังกล่าวนี้จะเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลหรือเซทของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

อัตราการสูญเสียความร้อนผ่านหน้าต่างหรือจากท่อน้ำร้อนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับพื้นที่และอัตราการเปลี่ยนอุณหภูมิของระยะทางในทิศทางการไหลของความร้อน นั่นเอง

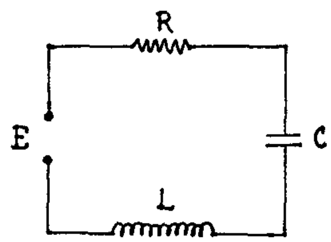
$$\frac{dH}{dt} = kA\frac{dT}{dx}$$

(k เรียกว่า สภาพนำความร้อน ซึ่งขึ้นกับชนิดของสสารที่ความร้อนไหลผ่าน)

ในที่นี้มี 2 อนุพันธ์ที่แตกต่างกันในสมการดิฟเฟอเรนเชียล ปัญหาเช่นนี้เรา

อาจจะรู้ dT/dx หรือ dH/dt ค่าใดค่าหนึ่ง แล้วแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล เพื่อหา T เป็นฟังก์ชันของ x หรือ H เป็นฟังก์ชันของ T

พิจารณาวงจรอนุกรมง่าย ๆ (รูป 5.1) ที่ประกอบด้วยความต้านทาน R ความจุ C ความเหนี่ยวนำ L และแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้า emf, E ถ้ากระแสที่ไหลในวงจรที่เวลา t คือ $I(t)$ ประจุบนตัวเก็บประจุคือ $q(t)$ และ $I = dq/dt$



รูป 5.1

โวลต์เตจคร่อม R คือ IR

โวลต์เตจคร่อม C คือ q/C และ

โวลต์เตจคร่อม L คือ $L(dI/dt)$

ดังนั้นที่เวลา t ใด

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E$$

ถ้าดิฟเฟอเรนชิเอตสมการข้างต้นเทียบกับ t และแทน $dq/dt = I$ จะได้

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE}{dt}$$

สมการข้างต้นเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลซึ่งเราจะพิจารณาการหาคำตอบในตอนต่อไป

อันดับ (order) ของสมการดิฟเฟอเรนเชียลคืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ของตัวแปรที่ปรากฏในสมการนั้นเช่น

$$y' + xy^2 = 1$$

$$xy' + y = e^x$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

สมการข้างต้นเป็นสมการอันดับที่ 1 ทั้งหมด แต่สมการสองสมการต่อไปนี้เป็นสมการอันดับที่ 2

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{RdI}{dt} + \frac{I}{C} = St-$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น(ที่มี x เป็นตัวแปรอิสระ) อยู่ในรูปของ

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + a_3y'''+\dots = b$$

เมื่อ a และ b อาจเป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของ x ตัวอย่างของสมการที่ไม่ใช่สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นคือ

$$y' + xy^2 = 1$$

$$y' = \cot y$$

$$yy' = 1$$

$$(y')^2 = xy$$

ดีกรี (degree) หมายถึง เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด เมื่อทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการดิฟเฟอเรนเชียลมีกำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวก

คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล (ในตัวแปร x และ y) เป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y และเมื่อแทนในสมการดิฟเฟอเรนเชียลแล้วทางซ้ายมือจะเท่ากับทางขวามือ

ถ้าอินทิเกรต $y' = f(x)$ เพื่อหา y จะได้

$$Y = \int f(x)dx + C$$

y จะประกอบด้วยค่าคงที่ของการอินทิเกรตหนึ่งตัว ถ้าเราอินทิเกรต $y'' = g(x)$ สองครั้ง จะได้ y ซึ่งประกอบด้วยค่าคงที่ของการอินทิเกรต 2 ตัว สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นอันดับที่ n มีคำตอบที่ประกอบด้วยค่าคงที่ใด ๆ ตามใจชอบ (arbitary constance) n ตัว คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ประกอบด้วยค่าคงที่ตามใจชอบ เรียกว่า คำตอบทั่วไป (general solution) แต่ถ้ามีเงื่อนไขหรือกำหนดค่าคงที่ตามใจชอบเท่ากับค่าคงที่ที่แน่นอน เรียกว่าคำตอบเฉพาะ (particular solution) สำหรับเงื่อนไขที่กำหนดให้ซึ่งคำตอบเฉพาะต้องปฏิบัติตามเรียกว่า เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition ในกรณีเงื่อนไขขอบเขตเกิดที่เวลา $t = 0$ อาจเรียกว่า เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

5.2 สมการแบบซึ่งแยกตัวแปรได้

สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ 1 ส่วนใหญ่สามารถทำให้อยู่ในรูป

$$g(y)y' = f(x) \tag{5.1}$$

เนื่องจาก $y' = dy/dx$ สมการข้างต้นอาจเขียนได้เป็น

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{5.2}$$

เราเรียกสมการข้างต้นว่าเป็นสมการแบบซึ่งแยกตัวแปรได้ (equation with separable variables) เพราะในสมการ (5.2) นั้นตัวแปร x และ y สามารถแยกกันได้กล่าวคือ ตัวแปร x จะปรากฏเฉพาะด้านขวา และตัวแปร y จะปรากฏเฉพาะด้านซ้าย อินทิเกรตสมการ (5.2) ทั้งสองข้างเราจะได้

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \qquad (5.3)$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ ถ้า g และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง อินทิกรัลใน (5.3) จะสามารถหาค่าได้ จากการหาค่าอินทิกรัลเหล่านี้ เราจะได้คำตอบที่จริงของสมการ (5.1)

<u>ตัวอย่าง</u> **5.1** จงแก้สมการ $9yy' + 4x = 0$

วิธีทำ แยกตัวแปรจะได้ $9y\,dy = -4x\,dx$

อินทิเกรตได้ $\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + C'$

หรือ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C$

สำหรับการประยุกต์ทางฟิสิกส์ เราไม่สนใจคำตอบทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้ แต่ต้องการคำตอบเฉพาะที่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) มาให้ ซึ่งเป็นเงื่อนไขบางจุด เช่น x_0 และคำตอบมีค่าเป็น y_0 กล่าวคือ

$$y(x_0) = y_0$$

ดังนั้นในปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้เราจะหาคำตอบเฉพาะของสมการที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 5.2 ทองแดงทรงกลมถูกทำให้ร้อนจนกระทั่งมีอุณหภูมิ $100^\circ C$ หลังจากนั้นนำไปใส่น้ำซึ่งมีอุณหภูมิ $30^\circ C$ ที่เวลา $t = 0$ ต่อมาเมื่อเวลา $t = 3$ นาที อุณหภูมิของทองแดงลดลงเป็น $70^\circ C$ จงหาว่าเวลาเท่าใดอุณหภูมิของทองแดงจึงเท่ากับ $31^\circ C$

วิธีทำ จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) ที่ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ T ของวัตถุกับเวลาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิ T ของวัตถุและอุณหภูมิของตัวกลางรอบ ๆ วัตถุนั้น นั่นคือ

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

(ใช้เครื่องหมายลบเพราะว่าเมื่อเวลาผ่านไปนานขึ้น T มีค่าน้อยลง และค่าคงที่ $k > 0$)

แยกตัวแปรจะได้ $\frac{dT}{T-30} = -kdt$

อินทิเกรตได้ $\ln(T - 30) = -kt + C'$

หรือ $T(t) = C\,e^{-kt} + 30$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 100$ และ $T(3) = 70$

$t = 0;$ $T(0) = c + 30 = 100$

$C = 70$

นั่นคือ $T(t) = 70\,e^{-kt} + 30$

$t = 3;$ $T(3) = 70\,e^{-3k} + 30 = 70$

$k = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{4} = 0.1865$

ดังนั้น $T(t) = 70\, e^{-0.1865t} + 30$

ในกรณี $T = 31^{\circ}C$; $t = ?$

$$31 = 70\, e^{-0.1865t} + 30$$

$$1 = 70\, e^{-0.1865\, t}$$

หรือ $0.1865\, t = \ln 70$

$$t = 22.78 \simeq 23$$

นั่นคือ เวลาประมาณ 23 นาที อุณหภูมิของทองแดงทรงกลมเป็น $31^{\circ}C$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาความเร็วเริ่มต้นที่น้อยที่สุดของโปรเจกไตล์ซึ่งถูกยิงออกมาในทิศแนวรัศมีจากโลกและหลุดพ้นจากแรงโน้มถ่วงของโลกไม่คิดแรงต้านทานของอากาศ

วิธีทำ ตามกฎการโน้มถ่วงของนิวตัน แรงโน้มถ่วงทำให้โปรเจกไตล์เกิดความเร่ง a ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $1/r^2$ เมื่อ r เป็นระยะจากศูนย์กลางของโลกไปยังโปรเจกไตล์ ดังนั้น

$$a(r) = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \qquad (1)$$

เมื่อ v เป็นความเร็ว และ t เป็นเวลา ให้ R เป็นรัศมีของโลกเมื่อ $r = R$ จะได้ $a = -g$ (ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงที่ผิวโลก)

ดังนั้น $-g = a(R) = k$

ได้ $k = -gR^2$

แทนค่า k ลงในสมการ (1)

$$a(r) = -\frac{gr^2}{r^2} \qquad (2)$$

เนื่องจาก $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$

แทนค่าในสมการ (๒)

$$v\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{r^2}$$

แยกตัวแปรจะได้ $v\,d\,v = -gR^2\frac{dr}{r^2}$

อินทิเกรต $\frac{v^2}{2} = -g\frac{R^2}{r} + c \qquad (3)$

ที่ผิวโลก $r = R$ และ $v = v_o$ เป็นความเร็วเริ่มต้น ดังนั้น

$$\frac{v_o^2}{2} = -gR + C$$

ได้ $C = \frac{v_o^2}{2} - gR$

แทนค่า c ลงในสมการ (3) ได้

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{r} + v_o^2 - 2gR \qquad (4)$$

ถ้า $v = 0$ โปรเจกไตล์จะหยุดนิ่งและความเร็วจะเปลี่ยนจากบวกเป็นลบ นั่นคือ โปรเจกไตล์จะเคลื่อนที่กลับมายังโลก ดังนั้นเราต้องเลือก v_o ให้มีค่ามากที่จะ $v \neq 0$ ถ้าเลือก

$$v_o = \sqrt{2gR} \qquad (5)$$

จะทำให้สมการ (4) เป็น $v^2 = 2g \frac{R^2}{r}$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์สำหรับค่า r ใด ๆ แต่ถ้าเลือกค่า V_0 ที่น้อยกว่านี้ จะทำให้ $V = 0$ สำหรับ r ค่าหนึ่ง ความเร็ว v_o ในสมการ (5) เรียกว่าความเร็วหลุดพ้น (velocity of escape) จากโลก เนื่องจาก R = 6372 กิโลเมตร และ g = 9.80 เมตร/(วินาที)^2 จะได้

$$v_o = \sqrt{2(9.8)(6372)}$$
$$= 11.2 \text{ กิโลเมตร/วินาที}$$

ความเร็วเริ่มต้นที่น้อยที่สุดของโปรเจกไตล์ที่จะทำให้หลุดพ้นจากแรงโน้มถ่วงของโลก คือ 11.2 กิโลเมตร/วินาที

5.3 สมการแบบแน่นอน

สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ 1 ซึ่งอยู่ในรูป

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (5.4)$$

เป็นสมการแบบแน่นอน (exact equation) ถ้าจำนวนทางซ้ายมือเป็นอนุพันธ์รวมหรืออนุพันธ์แน่นอน (total or exact differential) ของฟังก์ชัน u(x, y) กล่าวคือ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (5.5)$$

ดังนั้นสมการ (5.4) เขียน ได้เป็น

$$du = 0$$

จากการอินทิเกรตจะได้คำตอบทั่วไปของสมการ (5.4) อยู่ในรูป

$$u(x,\ y) = c \tag{5.6}$$

ถ้าเปรียบเทียบสมการ (5.4) และสมการ (5.2) จะเห็นได้ว่า สมการ (5.4) เป็นสมการแบบแน่นอน ถ้ามีบางฟังก์ชัน u(x, y) ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{แต่} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5.8}$$

สมการ (5.8) นี้นอกจากจะเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) ที่สมการ (5.4) จะเป็นสมการแน่นอนแล้วยังเป็นเงื่อนไขที่พอเพียง (sufficient condition) อีกด้วย กล่าวคือ ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ แล้วสมการ (5.4) จะเป็นสมการแน่นอนเสมอ และจะมีฟังก์ชัน u(x, y) ในลักษณะที่ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ และ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ จากสมการแรกของสมการ (5.7) อินทิเกรตจะได้

$$u = \int M\, dx + k(y) \tag{5.9}$$

ในการอินทิเกรตสมการข้างต้นนี้ให้อินทิเกรตเทียบกับ x เท่านั้น ถือว่า y เป็นตัวคงที่ ดังนั้นตัวคงที่ของการอินทิเกรตจึงเป็นฟังก์ชัน k(y) การหา f(y) นั้นเราจะหาอนุพันธ์ $\partial u/\partial y$ จากสมการ (5.9) ต่อจากนั้นใช้สมการ (5.7) จะได้ dk/dy แล้วจึงอินทิเกรต

สมการ (5.9) เป็นคำตอบของสมการ (5.4) (ในกรณีที่เป็นสมการแน่นอนแล้ว) การหาคำตอบของสมการแน่นอนนอกจากจะได้คำตอบแบบสมการ (5.9) แล้วก็อาจหาได้โดยการจัดกลุ่มของตัวแปรของสมการใหม่ให้เหมาะสม

<u>ตัวอย่าง</u> 5 . 4 จงแก้สมการ $(2x + e^y)\,dx + xe^y dy = 0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $M = 2x + e^y$, $N = xe^y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^M = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการจึงเป็นสมการแน่นอน จัดเทอมสมการใหม่จะได้

$$2x\,dx + (e^y dx + x\,e^y dy) = 0$$

$$2x\,dy + d(xe^y) = 0$$

อินทิเกรตได้ $2xy + xe^y = c$

<u>การหาตัว ประกอบอินทิเกรต</u> ในกรณีที่สมการ (5.4) เป็นสมการไม่แน่นอน นั่นคือ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ เราต้องหาตัวประกอบอินทิเกรต $F(x, y)$ คูณกับสมการ (5.4) (เป็นสมการไม่แน่นอน) ซึ่งจะทำให้สมการ

$F(Mdx + Ndy) = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน

ดังนั้น $$\frac{\partial(FM)}{\partial y} = \frac{\partial(FN)}{\partial x} \qquad (5.10)$$

หรือ $$F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial F}{\partial x} - M\frac{\partial F}{\partial y} = F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{F}\left(N\frac{\partial F}{\partial x} - M\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial}{\partial x}(\ln F) - M\frac{\partial}{\partial y}(\ln F) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (5.111$$

การหา $F(x, y)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ (5.11) ค่อนข้างยาก แต่ก็อาจหาได้ถ้า F เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว หรือฟังก์ชันของ y อย่างเดียวเท่านั้น

ถ้า F เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ สมการ (5.11) จะได้

$$\partial(\ln F) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

เนื่องจากเทอมทางซ้ายมือเป็นเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้น เทอมทางขวามือต้องเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียวเช่นกัน

ให้ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$

จะได้ $\frac{\partial(\ln F)}{\partial x} = f(x)dx$

อินทิเกรตได้ $\ln F = \int f(x)dx + c$

หรือ $F = K\, e^{\int f(x)dx}$

ดังนั้นสรุปได้ว่าถ้าสมการ $Mdx + Ndy = 0$ โดย $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว จะได้ตัวประกอบของการอินทิเกรตคือ

$$F = e^{\int f(x)dx} \qquad (5.12)$$

ถ้า F เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ สมการ (5.11) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln F) = \frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})$$

เทอมทางซ้ายมือเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ดังนั้นเทอมทางขวามือต้องเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียวเช่นกัน ให้

$$\frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) = g(y)$$

จะได้ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$F = e^{\int g(y)dy}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ถ้าสมการ $Mdx + Ndy = 0$ โดยที่ $\frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) = g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว จะได้ตัวประกอบของการอินทิเกรตเป็น

$$F = e^{\int g(y)\,dy} \qquad (5.13)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.5 จงแก้สมการ $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$

วิธีทำ ให้ $M = (1 - xy),\ N = xy - x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$

เนื่องจาก $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{1}{xy-x^2}\left[-x-(y-2x)\right]$

$$= \frac{1}{x(y-x)}\left[-(y-x)\right]$$

$$= \frac{-1}{x}$$

เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

คูณสมการด้วย $\frac{1}{x}$ แล้วจัดเทอมใหม่ได้

$$\frac{1}{x}dx + ydy - d(xy) = 0$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln x + \frac{y^2}{2} - xy = C$

5.4 สมการเชิงเส้นอันดับแรก

สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับแรกได้ชื่อว่าเป็นสมการเชิงเส้น (linear equation) ถ้าสมการนั้นสามารถเขียนได้เป็น

$$y' + f(x)y = r(x) \tag{5.14}$$

ลักษณะเฉพาะของสมการนี้คือต้องเป็นเชิงเส้นใน y และ y' ขณะที่ f และ r อาจเป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x พิจารณากรณีง่าย ๆ ในการหาคำตอบ

ของสมการ (5 . 1 4) คือกรณีที่ $r = 0$ สมการ (5 . 1 4) จะเป็น

$$y' + f(x)y = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = -f(x)y \qquad (5.15)$$

สมการ (5.15) เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ เช่นในหัวข้อ 2 ซึ่งจะหาคำตอบได้ดังนี้

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

อินทิเกรตจะได้ $\ln y = -\int f(x)dx + c$

$$Y = e^{-\int f(x)dx + C}$$

$$= A\, e^{-\int f(x)dx} \qquad (5.16)$$

เมื่อ $A = e^C$ เพื่อให้เขียนง่ายขึ้นให้

$$B = \int f dx \qquad (5.17)$$

ดังนั้น $\frac{dB}{dx} = f$ (5.18)

สมการ (5.16) เขียนได้เป็น

$$y = Ae^{-B}$$

หรือ $ye^B = A$ (5.19)

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (5.19) เทียบกับ x แล้วแทนสมการ (5.18) ลงไปจะได้

$$\frac{d}{dx}(ye^B) = y'e^B + ye^B\frac{dB}{dx} = y'e^B + ye^B f = e^B(y' + fy) \tag{5.20}$$

คูณสมการ (5.14) ด้วย e^B ได้

$$(y' + fy)e^B = re^B \tag{5.21}$$

แทนสมการ (5.20) ในสมการ (5.21)

$$\frac{d}{dx}(ye^B) = re^B \tag{5.22}$$

เนื่องจาก r และ e^B เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียวเท่านั้น เราสามารถอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (5.22) จะได้

$$ye^B = \int re^B\,dx + C$$

หรือ
$$y = e^{-B}\int r\,e^{-B}\,dx + Ce^{-B} \tag{5.23}$$

สมการ (5.23) เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (5.14) ในรูปของอินทิกรัล

ตัวอย่าง 5.6 จงแก้สมการ $xy' + 3y = x^2$

วิธีทำ
$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = x^2$$

ในที่นี้ $f(x) = \frac{3}{x}$; $r(x) = x^2$

$$\int f(x)dx = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln x$$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{3\ln x} = x^3$

ดังนั้น $x^3 \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} x^3 = x^5$

หรือ $d(x^3 y) = x^5 dx$

อินทิเกรตได้ $x^3 y = \frac{x^6}{6} + C$

คำตอบคือ $y = \frac{x^3}{6} + \frac{C}{x^3}$

สมการของเบอร์นูลี สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่เขียนได้เป็น

$$y' + f(x)y = r(x)y^n \tag{5.24}$$

เรียกสมการข้างต้นว่าสมการของเบอร์นูลี (Bernoulli) เมื่อ f และ r เป็นฟังก์ชันของ x ถ้า n = 0 และ n = 1 สมการ (5.24) จะเป็นสมการเชิงเส้นแบบสมการ (5.14) ค่า n นอกจากสองค่านี้แล้วสมการ (5.24) ไม่เป็นสมการเชิงเส้น แต่เราอาจเปลี่ยนสมการ (5.24) ให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบเดียวกับสมการ (5.14) ได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

ให้ $y = y^{1-n}$ (5.25)

$$\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

หรือ $y' = (1-n)y^{-x}\,y'$ (5.26)

คูณสมการ (5.24) ด้วย $(1-n)y^{-n}$ จะได้

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)fy^{1-n} = (1-n)r$$

แทนสมการ (5.25) และ (5.26) ลงในสมการข้างต้นได้

$$y' + (1-n)fy = (1-n)r \quad (5.27)$$

สมการ (5.27) เป็นสมการเชิงเส้นแบบสมการ (5.14) และสามารถหาคำตอบได้เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว

<u>สมการเอกพันธ์</u> สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่เขียนอยู่ในรูป

$$M(x, y)dy + N(x, y)dy = 0 \quad (5.28)$$

เรียกว่าเป็นสมการเอกพันธ์ (homogeneous equation) เมื่อ M และ N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ (**ฟังก์ชัน** $f(x, y)$ เรียกว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีที่ n เมื่อ $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$)

การแก้สมการแบบนี้อาจกระทำได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรคือให้

$$y = vx \ , \quad dy = vdx + xdv$$

แทนค่าในสมการ (5.28) จะได้สมการแบบแยกตัวแปรดังนี้

$$M(x, vx)dx + N(x, vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^nM(1, v)dx + x^nN(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

$$\left[M(1, v) + vN(1, v)\right]dx + xN(1, v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, v)}{M(1, v) + vN(1, v)}dv = 0 \qquad (5.29)$$

สมการ (5.29) เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้และสามารถหาคำตอบได้เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 5.2

5.5 การประยุกต์ของสมการอันดับหนึ่ง

การเพิ่มของจำนวนประชากร

การเพิ่มของจำนวนประชากรขึ้นกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ นั่นคือ อัตราการเพิ่มของจำนวนประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรในขณะนั้น ให้ (N(t) เป็นจำนวนประชากรที่เวลา t จะได้

$$\frac{dN}{dt} \propto N$$

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$\frac{dN}{N} = kdt$$

อินทิเกรต $\quad \ln N = kt + C$

$$N = e^{kt+C} = e^C . e^{kt} = C'e^{kt}$$

ที่ $t = 0, N = N_o$ นั่นคือ $C' = N_o$

ดังนั้น $$N = N_o e^{kt} \qquad (5.30)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.7 เมื่อวันที่ 1 ม.ค. 2518 ประเทศไทยมีประชากร 36 ล้านคน และเมื่อวันที่ 1 ม.ค. 2520 ประเทศไทยมีประชากร 38 ล้านคน ถามว่า ในวันที่ 1 ม.ค. 2530 ประเทศไทยจะมีประชากรกี่คน

วิธีทำ ที่ $t = 0$, $N_o = 36$ ล้านคน

ที่ $t = 2$, $N = 38$ ล้านคน

ดังนั้น $$38 = 36 . e^{2k}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{38}{36}$$

$$= 0.02704$$

ได้ $$N = N_o . e^{0.02704t}$$

เมื่อ $t = 12$ ปี ; $N = ?$

$$N = 36 . e^{(0.02704)(12)}$$

$$= \mathbf{49.80}$$

ในวันที่ 1 ม.ค. 2530 ประเทศไทยมีประชากร 49.8 ล้านคน

<u>การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี</u>

อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนของสารกัมมันตรังสีในขณะนั้น ให้ N เป็นจำนวนของสารกัมมันตรังสีที่เวลา t ดังนั้น อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีคือ

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

(เครื่องหมายลบแสดงถึงการลดลงของจำนวนของสารกัมมันตรังสี เมื่อเวลาผ่านไป dt) λ เรียกว่า ค่าคงที่การสลายตัว (decay constant) มีหน่วยเป็น (เวลา)$^{-1}$ อินทิเกรตสมการข้างต้นจะได้

$$N = Ce^{-\lambda t}$$

เวลา $t = 0;\ N = N_o$ ได้ $c = N_o$

$$\text{ดังนั้น} \quad N = N_o\, e^{-\lambda t} \tag{5.31}$$

ที่เวลา $t = T_{1/2}$ เรียกว่าครึ่งชีวิต (half life) ซึ่งกำหนดว่าเป็นช่วงเวลาที่จำนวนสารกัมมันตรังสีเริ่มแรกสลายตัวจนกระทั่งเหลือเพียงครึ่งหนึ่งของจำนวนเริ่มแรก นั่นคือ $t = T_{1/2};\ N = \frac{N_o}{2}$ จากสมการ (5.31)

$$\frac{N_o}{2} = N_o \cdot e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$e^{\lambda T_{1/2}} = 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{5.32}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.8 ถ้าครึ่งชีวิตของเรเดียมคือ 1700 ปี ถามว่าในเวลา 100 ปี เรเดียมจะสลายตัวไปกี่เปอร์เซ็นต์

i&i จากสมการ (5.32) $T_{\frac{1}{2}} = \frac{0.693}{\lambda}$

เมื่อ $T_{\frac{1}{2}}$ = 1700 ปี

$$\lambda = \frac{0.693}{1700}$$

$$= 0.0004076$$

เมื่อ $t = 100$ ปี จากสมการ (5.31)

$$N = N_o \cdot e^{-(0.0004076)(100)}$$

$$= 0.96\ N_o$$

ในเวลา 100 ปี เรเดียมจะสลายตัวไป $= \dfrac{N_o - 0.96\ N_o}{N_o} \times 100\ \%$

$$= 4\%$$

<u>การตกของวัตถุเมื่อมีแรงต้านทานจากอากาศ</u>

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ (ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ) ต้องใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (คือ $\vec{F} = m\vec{a}$) กรณีวัตถุมวล m ตกลงสู่พื้นโลก ถ้าไม่คำนึงถึงแรงต้านทานจากอากาศจะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุเพียงแรงเดียวคือแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก ถ้าให้ g เป็นความเร่งของวัตถุเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก แรงที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

แต่ในทางปฏิบัติจริง ๆ แล้วต้องคิดแรงต้านทานของอากาศด้วย โดยคิดว่าแรงต้านทานของอากาศเป็นสัดส่วนโดยตรงความเร็วของวัตถุและมีทิศตรงข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ของวัตถุ

<u>ตัวอย่าง</u> 5.9 วัตถุหนัก 1 กิโลกรัม ตกจากจุดหยุดนิ่งลงมาสู่พื้นโลก ในขณะที่ตกลงมาได้รับแรงต้านทานจากอากาศเท่ากับ 2v นิวตัน (เมื่อ v เป็นความเร็วของวัตถุ) จงหาความเร็วและระยะทางของวัตถุที่เวลา t วินาที (ใช้ $g = 10$ เมตร/วินาที^{2})

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ทิศทางลงสู่พื้นโลกเป็นทิศบวก แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุคือ $F = mg - F_R$ เมื่อ F_R เป็นแรงต้านทานของอากาศ

$$F = 10 - 2v$$

จาก $$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$ จะได้

$$10-2v = \frac{dv}{dt}$$

แยกตัวแปร $$\frac{dv}{10 - 2v} = dt$$

อินทิเกรตได้ $$-\frac{1}{2}\ln(10 - 2v) = t + C_1$$

$$\ln(10 - 2v) = -2t + \ln C_2$$

$$10 - 2v = C_2 e^{-2t}$$

เมื่อ $t = 0, v = 0$ จะได้ $C_2 = 10$ ดังนั้น

$$10 - 2v = 10 e^{-2t}$$

หรือ $v = 5(1 - e^{-2t})$

เป็นความเร็วของวัตถุที่เวลา t ใด ๆ เนื่องจาก $v = dx/dt$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 5(1 - e^{-2t})$$

แยกตัวแปร $dx = 5(1 - e^{-2t})dt$

อินทิเกรตได้ $x = 5(t + \frac{1}{2} e^{-2t}) + C_3$

เมื่อ $t = 0$, $x = 0$ จะได้ $C_3 = -\frac{5}{2}$

ดังนั้น $x = 5(t + \frac{1}{2} e^{-2t}) - \frac{5}{2}$

เป็นระยะทางของวัตถุที่เวลา t ใด ๆ

วงจรไฟฟ้า RL และ RC

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวงจรไฟฟ้าอย่างง่ายที่ประกอบด้วยต้นกำเนิดไฟฟ้า ความต้านทานและขดลวดเหนี่ยวนำที่ต่อกันเป็นอนุกรม (วงจร RL) และวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยต้นกำเนิดไฟฟ้า ความต้านทาน และตัวเก็บประจุที่ต่อกันเป็นอนุกรม (วงจร RC) กฎเกณฑ์ที่ใช้คือกฎของโอห์ม และกฎของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff) ที่กล่าวว่า "ผลบวกทางพีชคณิตของโวลท์เตจลด (voltage drop) รอบวงจรไฟฟ้าวงหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์" เมื่อโวลท์เตจ (E หรือ V) มีหน่วยเป็นโวลท์

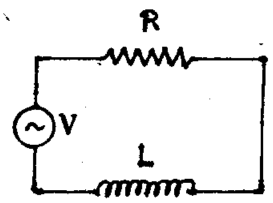
ความต้านทาน (R) เป็นโอห์ม ขดลวดเหนี่ยวนำ (L) เป็นเฮนรี ความจุ (C) เป็นฟารัด ประจุ (Q) เป็นคูลอมบ์ และกระแส (I) เป็นแอมแปร์

จากการทดลองพบว่า

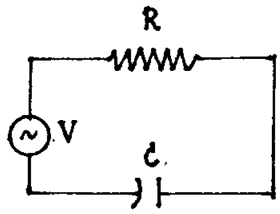
(1) โวลท์เตจลด V_R ที่คร่อมความต้านทาน R เป็นปฏิภาคโดยตรงกับกระแสในขณะนั้นที่ผ่านความต้านทาน กล่าวคือ $V_R = IR$ (กฎของโอห์ม)

(2) โวลท์เตจลด V_L ที่คร่อมขดลวดเหนี่ยวนำ L เป็นปฏิภาคโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสในขณะนั้น กล่าวคือ $V_L = L\frac{dI}{dt}$

(3) โวลท์เตจลด V_C ที่คร่อมตัวเก็บประจุ C จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับปริมาณประจุไฟฟ้าในขณะนั้น กล่าวคือ $V_C = Q/C$



วงจร RL



วงจร RC

รูป 5.2

กรณีวงจร RL ตามกฎของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$L\frac{dI}{dt} + IR = V \tag{5.33}$$

กรณีวงจร RC ตามกฎของเคอร์ชอฟฟ์ จะได้

$$RI + \frac{Q}{C} = V$$

เมื่อกระแสในวงจรขณะใดขณะหนึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงประจุ $(I = dQ/dt)$

จะได้ $$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V \tag{5.34}$$

<u>ตัวอย่าง 5.10</u> ต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 20 cos 5t โวลท์ต่ออนุกรมกับความต้านทาน 10 โอห์ม และขดลวดเหนี่ยวนำ 2 เฮนรี ถ้าขณะที่กดสวิทช์วงจรเปิดเมื่อ t = 0 จงหาค่ากระแส ณ เวลาต่าง ๆ

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (5.33) จะได้

$$2\frac{dI}{dt} + 10\,I = 20\cos 5t$$

ตัวประกอบอินทิเกรต คือ e^{5t} คูณกับสมการข้างต้นและแยกตัวแปรจะได้

$$e^{5t}\,dI + 5\,Ie^{5t}dt = 10\cos 5t\, e^{5t}dt$$

$$d(Ie^{5t}) = 10\cos St\, e^{5t}dt$$

อินทิเกรตจะได้ $Ie^{5t} = e^{5t}(\cos St + \sin 5t) + C$

$$I = \cos 5t + \sin 5t + C\,e^{-5t}$$

เมื่อ $t = 0,\ I = 0$ จะได้ $c = -1$

$$0 = 1 + C$$

$$c = -1$$

ดังนั้น $I = \cos 5t + \sin 5t\, e^{-5t}$

ตัวอย่าง 5.11 ต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 200 e^{-5t} ต่ออนุกรมกับความต้านทาน 20 โอห์มและตัวเก็บประจุซึ่งมีความจุ 0.01 ฟารัด สมมติว่าเมื่อ t = 0, Q = 0 จงหาประจุและกระแส ณ เวลาต่าง ๆ กัน แสดงการคำนวณหาเวลาที่มีประจุมากที่สุดพร้อมทั้งจำนวนประจุด้วย

วิธีทำ จากสมการ (5.34) จะได้

$$20\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.01} = 200\, e^{-5t}$$

หรือ

$$\frac{dQ}{dt} + 5\,Q = 10\, e^{-5t}$$

จากสมการ (5.23) เมื่อ $f(t) = 5$, $r(t) = 10\, e^{-5t}$ จะได้

$$Q = e^{-5t}\int 10\, e^{-5t} e^{5t}\, dt + C\, e^{-5t}$$

$$= 10\, t\, e^{-5t} + C\, e^{-5t}$$

เมื่อ $t = 0$, $Q = 0$ จะได้ $c = 0$

ดังนั้น $Q = 10t\, e^{-5t}$

จาก $I = \frac{dQ}{dt} = 10(1-5t)e^{-5t}$

จำนวนประจุมีมากที่สุดเมื่อ $\frac{dQ}{dt} = 0$ หรือ $I = 0$

$$10(1-5t)e^{-5t} = 0$$

ได้ $\quad t = 0.2$ วินาที

ดังนั้นจำนวนประจุมากที่สุด $Q = 10(0.2)\,e^{-1} = \frac{2}{e} = 0.74$ คูลอมบ์

5.6 สมการเชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และด้านขวามือเป็นศูนย์

พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูป

$$a_0\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = 0 \qquad (5.35)$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2 เป็นค่าคงที่ สมการ (5.35) เรียกว่าสมการเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับที่ 2 เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ D, D^2 แทนการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและที่สอง นั่นคือ

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \qquad D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

เรียกสัญลักษณ์ D, D^2 ว่าตัวดำเนินการ (operators) เมื่อใช้ตัวดำเนินการจะเขียนสมการ (5.35) ได้เป็น

$$a_0D^2y + a_1Dy + a_2y = 0$$

[illegible] $= 0$ [illegible]

แยกแฟกเตอร์ของตัวดำเนินการสมการข้างบน สมมติว่าได้ค่าเป็น

$$(D - b_1)(D + b_2)y = 0 \qquad (5.37)$$

สมมติว่า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการ (5.37) จะได้ว่า

ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ซึ่งคือ $c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นคำตอบของสมการ (5.36)ด้วย โดยที่ y_1 และ y_2 ต้องเป็นอิสระเชิงเส้น(linearly independent) (เพราะถ้า y_1 และ y_2 ไม่อิสระเชิงเส้น (linearly dependent) จะได้ $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$) เซทของฟังก์ชัน $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน ถ้า $W(u_1, u_2, \ldots u_n) \neq 0$ เมื่อ $W(u_1, u_2, \ldots u_n)$ เรียกว่า Wronskian ของ $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots u_n(x)$ ที่นิยามว่าเป็นค่าดีเทอร์มิแนนท์อันดับที่ n นั่นคือ

$$W(u_1, u_2, \ldots u_n) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x)\ldots. & u_n(x) \\ u_1^{(1)}(x) & u_2^{(1)}(x)\ldots. & u_n^{(1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$u_1^{(1)}(x)$ คือ $\dfrac{du_1(x)}{dx}$, $u_1^{(n-1)}(x)$ คือ $\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u_1(x)$

เนื่องจาก $D(e^{mx}) = me^{mx}$, $D^2(e^{mx}) = m^2e^{mx}$

แทนค่า $y = e^{mx}$ ลงในสมการ (5.13) จะได้

$$(a_om^2 + a_1m + a_2)e^{mx} = 0$$

หรือ $a_om^2 + a_1m + a_2 = 0$ (5.38)

สมการ (5.38) เรียกว่าสมการช่วย (auxiliary equation) ของสมการ (5.36) สมการนี้จะให้ค่า m จำนวน 2 ค่า คือ m_1 และ m_2 คำตอบทั่วไปของสมการ (5.36) คือ

$$Y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \qquad (5.39)$$

วิธีการหาคำตอบที่กล่าวมาข้างต้นนี้สามารถขยายไปสู่กรณีสมการเชิงเส้นอันดับที่ n ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และด้านขวามือเป็นศูนย์ได้

__ตัวอย่าง__ 5.12 จงแก้สมการ $(D^2 - SD + 6)y = 0$

__วิธีทำ__ ให้ $y = e^{mx}$ จะได้สมการเป็น $m^2 - 5m + 6 = 0$

ได้ราก 2 รากคือ $m = 2, 3$ ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ

$$Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

ในการหารากของสมการช่วย (5.38) นี้ ถ้าสมการมีรากซ้ำกันหรือมีรากเป็นจินตภาพ คำตอบของสมการ (5.36) จะต่างจาก (5.39) ดังนี้

(ก) กรณีที่มีรากซ้ำกัน

พิจารณาสมการ $(D - a)^2 y = 0 \qquad (5.40)$

จะได้คำตอบทั่วไปคือ $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{ax} = (c_1 + c_2)e^{ax} = ce^{ax}$

คำตอบนี้มีค่าคงที่ตามใจชอบเพียงตัวเดียว ดังนั้นถ้าสมการช่วยมีรากซ้ำกันจะใช้คำตอบแบบ (5.39) ไม่ได้

ถ้า $y = y_1$ เป็นคำตอบซึ่งทราบค่าแล้วของสมการ (5.40) (ในที่นี้คือ e^{ax}) แทนค่า $y = vy_1 = ve^{ax}$ ลงในสมการ (5.40)

จะได้

$$(D - a)^2 \; ve^{ax} = 0$$

$$(D^2 - 2a + a^2)ve^{ax} = 0$$

หรือ $v'' \, e^{ax} = 0$

นั่นคือ $v'' = 0$

เมื่ออินทิเกรตจะได้ $v = c_1 + c_2x$ คำตอบทั่วไปของสมการ (5.40) คือ

$$y = (c_1 + c_2x)e^{ax} \tag{5.41}$$

ในทำนองเดียวกันถ้าสมการช่วยมีรากซ้ำกัน n ตัว จะได้ว่า

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots c_nx^{n-1})e^{ax} \tag{5.42}$$

<u>ตัวอย่าง</u> **5.13** จงแก้สมการ $(D^2 - 8D + 16)y = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการช่วยคือ $m^2 - 8m + 16 = 0$

ได้รากซ้ำกันสองรากเท่ากับ 4 แสดงว่า e^{4x} เป็นคำตอบหนึ่ง แทนค่า $y = ve^{4x}$ ในสมการที่กำหนดให้ จะได้

$$v'' \, e^{4x} = 0$$

หรือ $v'' = 0$

ดังนั้น $v = c_1 + c_2x$

คำตอบทั่วไปคือ $y = (c_1 + c_2x)e^{4x}$

(ข) กรณีที่รากเป็นค่าจินตภาพ

ถ้าสมการช่วย (5.38) มีรากเป็นจินตภาพ เช่น $\alpha + i\beta$ ค่าสังยุคเชิงซ้อนของรากนี้คือ $\alpha - i\beta$ จะเป็นรากของสมการช่วยด้วย คำตอบของสมการ (5.38) จะมีรูปเป็น

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$= e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x} + c_2e^{-i\beta x})$$

$$= e^{\alpha x} \quad (c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1-c_2)\sin\beta x$$

ถ้าให้ $A = c_1 + c_2$ และ $B = i(c_1 - c_2)$ เป็นค่าคงที่ตามใจชอบจะได้

$$Y = e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x) \qquad (5.43')$$

บางครั้งอาจเขียนเทอม $A \cos\beta x + B \sin\beta x$ เป็น

$$A \cos\beta x + bB \sin\beta x = c_1\sin(\beta x + 6) = C_2 \cos(\beta x + \gamma)$$

เมื่อ c_1, c_2, 6 และ γ เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ

<u>ตัวอย่าง</u> 5.14 จงแก้สมการ $(D^2 + 2D + 2)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2 + 2m + 2 = 0$

ได้รากสองรากคือ $m_1 = -1 + i$ และ $m_2 = -1 - i$

นั่นคือ $\alpha = -1$ และ $\beta = 1$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$

5.7 สมการเชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และด้านขวามือไม่เป็นศูนย์

พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูป

$$(a_oD^2 + a_1D + a_2)y = F(x) \tag{5.44}$$

เมื่อ a_o, a_1, a_2 เป็นค่าคงที่ สมการ (5.44) เป็นสมการเชิงเส้นไม่ใช่เอกพันธ์ (nonhomogeneous linear equation) อันดับที่ 2 กรณีที่ $F(x) = 0$ สมการ (5.44) จะเป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธ์โดยที่คำตอบของสมการนี้ (กรณี $F(x) = 0$) เรียกว่าคำตอบประกอบ (complementary solution) แทนด้วย y_c กรณีที่ $F(x) \neq 0$ คำตอบของสมการนี้เรียกว่า คำตอบเฉพาะ (particular solution) แทนด้วย y_p (คำตอบเฉพาะนั้นจะไม่มีค่าคงที่ตอบใจชอบอยู่ด้วยเลย) ฉะนั้นคำตอบทั่วไปของสมการ (5.44) จึงประกอบด้วยคำตอบเฉพาะและคำตอบประกอบซึ่งอยู่ในรูป

$$y = y_p + y_c \tag{5.45}$$

เราสามารถแสดงให้เห็นง่าย ๆ ดังนี้

$$(a_oD^2 + a_1D + a_2)y_p = F(x) \tag{5.46}$$

และ

$$(a_oD^2 + a_1D + a_2)y_c = 0 \tag{5.47}$$

รวมสมการ (5.46) และ (5.47) จะได้

$$(a_oD^2 + a_1D + a_2)(y_p + y_c) = F(x)$$

นั่นคือ $y_p + y_c$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (5.44) สำหรับคำตอบประกอบได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 5.6 เหลือแต่คำตอบเฉพาะซึ่งกล่าวเพียงบางวิธี

<u>การตรวจพินิจ</u> พิจารณาสมการ

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = A \qquad (5.48)$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2 และ A เป็นค่าคงที่ เราอาจหาคำตอบเฉพาะของสมการ(5.48) ได้ง่าย ๆ จากการตรวจพินิจ(inspection) จะได้ว่า

$$y_p = A/a_2 \qquad \text{เมื่อ} \quad a_2 \neq 0$$

เนื่องจากถ้า y เป็นค่าคงที่ y'' และ y' เป็นศูนย์

<u>ตัวอย่าง</u> **5.15** จงแก้สมการ $(D^2 - 3D + 2)y = 16$

<u>วิธีทำ</u> จากวิธีการในหัวข้อ 5.6 จะได้

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

และโดยการตรวจพินิจจะได้คำตอบเฉพาะของสมการเป็น

$$y_p = 16/2 = \mathbf{8}$$

คำตอบทั่วไป $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 8$

<u>วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์</u> การหาคำตอบเฉพาะของสมการ (5.1) เมื่อ F(x) มีรูปต่าง ๆ สามารถหาได้โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ กล่าวคือ หาเทอมต่าง ๆ ซึ่งได้จากการดิฟเฟอเรนชิเอต F(x) เป็นจำนวนครั้งไม่จำกัด รวมเทอมต่าง ๆ

แล้วสมมติว่าเป็นคำตอบเฉพาะ y_p เช่น

$$F(x) = x^3 \; ; \quad y_p = c_1x^3 + 2c\,x^2 + cx + c_1$$

$$F(x) = e^{ax} \; ; \quad y_p = ce^{ax}$$

$$F(x) = \sin ax \text{ หรือ } \cos ax \; ; \quad y_p = c_1\sin ax + c_2\cos ax$$

$$F(x) = e^{ax}\sin bx \; ; \quad y_p = e^{ax}(c_1\sin bx + c_2\cos bx)$$

แทนค่า y_p แบบที่ได้สมมติไว้ลงในสมการที่กำหนดให้ เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอมต่าง ๆที่เหมือนกันจะได้คำตอบเฉพาะ

<u>ตัวอย่าง</u> 5.16 จงแก้สมการ $(D^2 + 2D + 1)y = \sin 2x + 2e^x + 2x + 3$

<u>วิธีทำ</u> คำตอบประกอบ $y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x}$

เมื่อดิฟเฟอเรนชิเอตเทอมทางขวามือของสมการที่กำหนดให้จะได้

$\cos 2x, \sin 2x, x, 1, e^x$

สมมติว่า $y_p = a_1\cos 2x + a_2 \sin 2x + a_3x + a_4 + a_5 e^x$

แทนค่า y ด้วย y_p ลงในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$(-4a_1-3a_2)\sin 2x + (4a_2-3a_1)\cos 2x + a_3x + a_4 + 2a_3 + 4a_5 e^x$$

$$= \sin 2x + 2e^x + 2x + 3$$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้

$-4a_1 - 3a_2 = 1, \quad 4a_2 - 3a_1 = 0, \quad 2a_3 + a_4 = 3$

$4a_5 = 2, \quad a_2 = 2$

ดังนั้น $a_1 = -\frac{4}{25}$, $a_2 = -\frac{3}{25}$, $a_3 = 2$

$a_4 = -1$, $a_5 = \frac{1}{2}$

คำตอบเฉพาะคือ $y_p = -\frac{4}{25}\cos 2x - \frac{3}{25}\sin 2x + \frac{1}{2}e^x + 2x - 1$

$\therefore \quad Y = y_c + y_p$

ในกรณีที่ด้านขวามือเป็นเทอมเอกซ์โปเนนเชียล สมการ (5.3) อาจเขียนได้เป็น

$(D - a)(D - b)y = F(x) = ke^{cx}$

ถ้า $c \neq a \neq b$ สมมติคำตอบเฉพาะอยู่ในรูป $y_p = Ce^{cx}$

ถ้า $c = a$ หรือ $c = b$; $a \neq b$ สมมติคำตอบเฉพาะในรูป $y_p = Cxe^{cx}$

ถ้า $c = a = b$ สมมติคำตอบเฉพาะในรูป $y_p = Cx^2e^{cx}$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.17 จงหาคำตอบเฉพาะของสมการ $(D - 1)(D + 2)y = e^x$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y_p = Cxe^x$

$$y_p' = Ce^x + Cxe^x\ , \quad y_p'' = 2Ce^x + Cxe^x$$

แทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$2Ce^x + Cxe^x + Ce^x + Cxe^x - 2Cxe^x = e^x$$

$$3Ce^x = e^x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $C = 1/3$

ดังนั้น $y_p = \frac{1}{3} xe^x$

กรณีที่ด้านขวามือประกอบด้วยหลาย ๆ เทอม เช่นในตัวอย่าง 5.16 ซึ่งมีสมการเป็น

$$(D^2 + 2D + 1)y = (\sin 2x) + (2e^x) + (2x + 3) \quad (5.49)$$

การหาคำตอบเฉพาะของสมการ (5.49) อาจแยกเป็นการหาคำตอบเฉพาะของสมการ 3 สมการ ดังนั้น

$$(D^2 + 2D + 1)y = \sin 2x \quad (5.50)$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = 2e^x \quad (5.51)$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = 2x + 3 \quad (5.52)$$

ใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์หาคำตอบเฉพาะของสมการ (5.50), (5.51) และ (5.52) ได้เป็น

$$y_{p_1} = -\frac{4}{25}\cos 2x - \frac{3}{25}\sin 2x \tag{5.53}$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{2}e^x \tag{5.54}$$

และ $y_{p_3} = 2x - 1$ ตามลำดับ

รวมสมการทั้ง 3 ข้างต้นจะได้

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -\frac{4}{25}\cos 2x - \frac{3}{25}\sin 2x + \frac{1}{2}e^x + 2x - 1$$

จะเห็นได้ว่าคำตอบ y_p ข้างต้นเหมือนกับในตัวอย่าง 5.16 ดังนั้น วิธีง่าย ๆ สำหรับกรณีที่ด้านขวามือของสมการประกอบด้วยเทอมที่ยุ่งยากหลาย ๆ เทอม เราจะแยกสมการของแต่ละเอกซ์โปเนนเชียลที่แตกต่างกันแล้วรวมคำตอบเฉพาะของแต่ละสมการ วิธีการดังกล่าวนี้เป็นจริงสำหรับสมการเชิงเส้น ซึ่งเรียกว่า หลักการรวมกัน (principle of superposition) หรืออาจกล่าวได้ว่าตัวดำเนินการที่เป็นไปตามหลักการรวมกัน เรียกว่า ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator)

<u>การใช้อนุกรมฟูเรียร์เพื่อหาคำตอบเฉพาะ</u> กรณีที่เทอมขวามือของสมการ (5.46) เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ เช่น แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เป็นคาบซึ่งให้แก่วงจรไฟฟ้า ในกรณีนี้ เราจะกระจายฟังก์ชันให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์แบบเอกซ์โปเนนเชียลเชิงซ้อน (ดูวิธีการในบทที่ 4) สมการ (5.46) เขียนได้เป็น

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5.55}$$

จากวิธีการที่กล่าวมาสามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการข้างล่างได้

$$(a_0D^2 + a_1D + a_2)y = c_n e^{inx} \tag{5.56}$$

สมการ (5.56) มีเทอมด้านขวามือเท่ากับเทอมหนึ่งของอนุกรม จากหลักการรวมกันเราสามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการ (5.55) ได้ โดยการรวมคำตอบเฉพาะของสมการ (5.56) ทั้งหมดทุกค่าของ n

<u>วิธีการแปรตัวพารามิเตอร์</u> ในกรณีที่ฟังก์ชัน $F(x)$ ของสมการ (5.46) มีอนุพันธ์แบบต่าง ๆ กันเป็นจำนวนไม่จำกัด เช่น ฟังก์ชันลอการิทึมส์ $\ln x$ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน $\sin^{-1}x$ เป็นต้น เราจะหาคำตอบเฉพาะโดยวิธีที่กล่าวแล้วข้างต้นไม่ได้แต่จะอาศัยการแปรค่าคงที่ตามใจชอบในคำตอบประกอบให้เป็นตัวพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้

สมการ (5.46) อาจเขียนได้ในรูป

$$f(D)y = F(x) \qquad (5.57)$$

สมมติว่าคำตอบประกอบของสมการ (5.57) คือ $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ เมื่อ y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน เปลี่ยนค่าคงที่ตามใจชอบ c_1, c_2 เป็นตัวพารามิเตอร์ v_1, v_2 ซึ่งต่างเป็นฟังก์ชันของ x ให้คำตอบเฉพาะของสมการ (5.57) เป็น

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2 \qquad (5.58)$$

โดยที่จะต้องหาค่าฟังก์ชัน v_1 และ v_2 ให้ได้ จึงต้องกำหนดเงื่อนไขสำหรับหา v_1 และ v_2 ดังนี้

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \qquad (5.59)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (5.59) จำนวน 2 ครั้งแล้วใช้เงื่อนไข (5.59) จะได้

$$y_p' = v_1y_1' + v_2y_2'$$

$$y_p'' = v_1y_1'' + v_2y_2''$$

แทนค่า y, y' และ y'' ลงในสมการ (5.58) จะได้

$$v_1f(D)y_1 + v_2f(D)y_2 + v_1'y_1' + v_2'y_2' = F(x)$$

แต่ y_1 และ y_2 ต่างเป็นคำตอบของสมการ $f(D)y = 0$ ดังนั้นจะได้