$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = F(x) \qquad (5.60)$$

แก้สมการ (5.59) และ (5.60) ซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าคือ v_1', v_2' เมื่ออินทิเกรต (โดยไม่ต้องบอกค่าคงที่) จะได้

$$v_1 = \int g_1(x)dx , \quad v_2 = \int g_2(x)dx$$

แทนค่า v_1 และ v_2 ลงในสมการ (5.59) จะได้คำตอบเฉพาะของสมการ (5.58)

<u>ตัวอย่าง</u> 5.19 จงแก้สมการ $y'' + y = \tan x$

วิธีทำ คำตอบประกอบคือ $y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

สมมติว่าคำตอบเฉพาะ $y_p = v_1(x)\sin x + v_2(x) \cos x$

ในที่นี้มีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ $v_1(x)$ และ $v_2(x)$ ซึ่งจะหาค่าได้โดยกำหนดเงื่อนไขว่า

$$v_1' \sin x + v_2' \sin x = 0 \qquad (1)$$

ดังนั้นจะได้ $y_p' = v_1 \cos x - v_2 \sin x$

$$y_p'' = v_1 \sin x - v_2 \cos x + v_1' \cos x - v_2' \sin x$$

แทนค่า y และ y'' ลงในสมการที่โจทย์กำหนดให้จะได้

$$v_1' \cos x - v_2' \sin x = \tan x \qquad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้ $v_1'(x) = \sin x$, $v_2'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

อินทิเกรตโดยไม่ต้องบวกค่าคงที่จะได้

$$v_1 = -\cos x$$

$$v_2 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

ดังนั้น $y_p = -\cos x \sin x + \cos x\,[\sin x - \ln(\sec x + \tan x)]$

$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

คำตอบทั่วไปคือ

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

5.8 ฟังก์ชันพิเศษต่าง ๆ

ฟังก์ชันแกมมาและฟังก์ชันเบตา

เราอาจนิยามฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(x)$ ถ้า $p > 0$ ได้ดังนี้

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

จากการอินทิเกรตโดยวิธีแยกส่วนจะได้ $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p\,dx = p\Gamma(p)$

เนื่องจาก $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ ดังนั้น

$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ฟังก์ชันเบตานิยามได้ดังนี้

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad (x > 0,\ y > 0)$$

เมื่อแทนในเทอมของฟังก์ชันแกมมาจะได้

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ฟังก์ชันเลอจองแบบต่าง ๆ และสเฟียริคอลฮาร์โมนิก

สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเลอจอง (Legendre) คือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

คำตอบของสมการข้างต้นเรียกว่าฟังก์ชันเลอจอง กล่าวคือ

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \quad , \quad -1 < x < 1$$

เมื่อ $y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \ldots$

และ $y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots$

ถ้า n เป็นเลขคู่ $y_1(x)$ จะกลายเป็นโพลีโนเมียลดีกรี n และถ้า n เลขคี่ $y_2(x)$ จะกลายเป็นโพลีโนเมียลดีกรี n โพลีโนเมียลเหล่านี้เมื่อคูณกับค่าคงที่บางค่าแล้วเรียกว่าโพลีโนเมียลเลอจอง ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$P_n(x) = \sum^{m} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

เมื่อ $m = n/2$ หรือ $(n-1)/2$ ตัวอย่างเช่น

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

ในพิกัดทรงกลม ฟังก์ชันใด ๆ มีตัวแปรอิสระเป็น (θ, φ) เราอาจจะกระจายเป็นอนุกรมของสเฟียริคอลฮาร์โมนิกได้ดังนี้

$$Y_{\ell, m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

เมื่อ $P_\ell^m(\cos\theta)$ คือแอสโซซิเอทเลอจองฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเบสเซล (Bessel) คือ

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

คำตอบของสมการข้างต้นแทนด้วย

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$$

$J_n(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันเบสเซลของ first kind อันดับที่ n

กรณี $n = 0$ สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเบสเซลคือ

$$xy'' + y' + xy = 0$$

คำตอบสมการข้างต้นคือ

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_o(x)(\ln\frac{x}{2} + \gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right.$$

$Y_o(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลของ second kind อันดับศูนย์ เมื่อ

$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}$ และ γ คือค่าคงที่ของออยเลอร์

<u>ฟังก์ชันเฮอร์มีท</u>

สมการดิฟเฟอเรนเชียล : $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

คำตอบของสมการข้างต้นคือ $y = Ay_1(x) + By_2(x)$

กรณีที่ n เป็นเลขจำนวนเต็มที่เป็นเลขคู่ คำตอบจะเป็นโพลีโนเมียลดีกรีทคือ

$$y_1(x) = (-1)^{n/2} \frac{(n-2)!}{n!} H_n(x) \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มที่เป็นเลขคี่ คำตอบจะเป็น

$$y_2(x) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{[(n-1)/2]!}{2(n!)} H_n(x), \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$H_n(x)$ คือฟังก์ชันเฮอร์มีทที่นิยามว่า

$$H_n(x) = (-1)^n \left(e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}\right)$$

เราอาจนิยามฟังก์ชันเฮอร์มีทโดยใช้ generating function

$$F(x,y) = e^{-y^2+2xy} = e^{x^2} e^{-(y-x)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n$$

5.9 <u>การประยุกต์ของสมการเชิงเส้น</u>

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำสมการเชิงเส้นอันดับที่ 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงที่ไปใช้ในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์

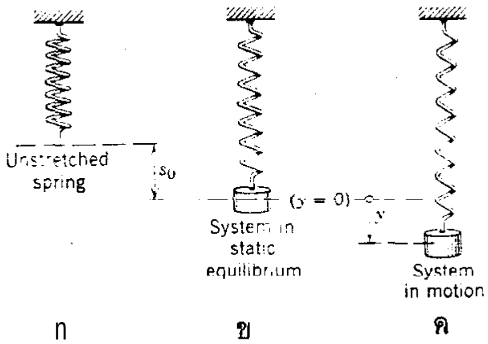
<u>การออสซิลเลตอย่างอิสระ</u> (free oscillations)

เมื่อนำลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งโดยให้ปลายบนยึดติดกับเพดานหรือเสายึด ส่วนปลายล่างผูกวัตถุมวล m ไว้ดังรูป 5.3 สมมติว่า m มีค่ามากเมื่อเทียบกับมวลของสปริง ถ้าเราดึงวัตถุลงตรง ๆ เป็นระยะ y แล้วปล่อยมือ แรงจากสปริงจะดึงมวลให้เคลื่อนกลับ

จากการทดลองพบว่าแรงจากสปริงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทางที่สปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุลย์ นั่นคือ

$$f = -ky \qquad \text{(กฎของฮุค)}$$

เมื่อ f เป็นแรงจากสปริง และ $y = y(t)$ เป็นการขจัดของวัตถุจากตำแหน่งสมดุลย์ (เครื่องหมายลบเพราะ f และ y มีทิศตรงข้ามกัน)



รูป 5.3

อีกแรงหนึ่งที่กระทำต่อวัตถุในระหว่างการเคลื่อนที่คือแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก ซึ่งมีค่า

$$F_1 = mg \tag{5.61}$$

g เป็นความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับ $9.8\ m/s^2$

เมื่อวัตถุหยุดนิ่ง สปริงจะถูกยืดออกเป็นระยะ s_o เราจะให้ตำแหน่งนี้เป็นตำแหน่งสมดุลย์ (ดูรูป 5.3 ข.) ที่ตำแหน่งนี้แรงลัพท์ของแรงสปริงและแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$ks_o = mg \qquad (5.62)$$

จากกฎของฮุคแรงสปริงที่สอดคล้องกับการขจัด y คือ

$$F_2 = -ks_o - ky \qquad (5.63)$$

แรงลัพท์ที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$F_1 + F_2 = mg - ks_o - ky$$

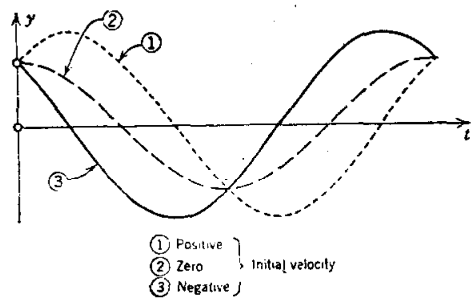
$$= -ky \qquad (5.64)$$

<u>undamped system</u> ถ้าการแดมพ์ของระบบมีค่าน้อยมากเราสามารถละทิ้งได้ แรงลัพท์ที่กระทำต่อวัตถุคือสมการ (5.64) จากกฎข้อสองของนิวตัน $F = ma = md^2y/dt^2$ จะได้

$$\frac{md^2y}{dt^2} = -ky$$

หรือ $$m\ddot{y} + ky = 0$$

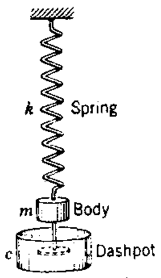
คำตอบทั่วไปคือ $y(t) = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$ เมื่อ $\omega_o = \sqrt{k/m}$ การเคลื่อนที่ในลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ฮาร์โมนิกออสซิลเลชั่น วัตถุจะสั่นขึ้นลงด้วยความถี่ $\omega_o/2\pi$ รอบต่อวินาที



รูป 5.4 การออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก

<u>damped system</u> ถ้าเราต่อมวล m เข้ากับ dashpot (ดูรูป 5.5) จะมีการแดมพ์เนื่องจากความหนืด แรงแดมพ์มีทิศตรงข้ามการเคลื่อนที่ในขณะใด ๆ สมมติว่าแรงแดมพ์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็ว $\dot{y} = dy/dt$ ของวัตถุ นั่นคือเขียนแรงแดมพ์ได้เป็น

$$F_3 = -c\dot{y}$$



รูป 5.5

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ของการแดมพ์ซึ่งเป็นค่าบวกเสมอ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุในกรณีนี้คือ

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - c\dot{y}$$

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน ได้ $m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$

$$\text{หรือ } m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = 0 \qquad (5.65)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ของระบบเชิงกลที่มีการแดมพ์จะเป็นสมการ

ดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ สมการช่วยของสมการ (5.65) คือ

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$

ให้ $\alpha = \frac{c}{2m}$ และ $\beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$ **(5.66)**

จะได้ $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ และ $\lambda_2 = -\alpha - \beta$

คำตอบของสมการ (5.65) ขึ้นกับการแดมพ์ แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี

1. $c^2 > 4mk$ ได้รากเป็นจำนวนจริง 2 รากต่างกัน (overdamping)
2. $c^2 < 4mk$ ได้รากเป็นสังยุคเชิงซ้อน (underdamping)
3. $c^2 = 4mk$ ได้รากเป็นจำนวนจริงเหมือนกัน 2 ราก (critical damping)

<u>กรณีที่ 1 overdamping</u> ถ้าค่าคงที่ของการแดมพ์ c มีค่ามาก ฉะนั้น $c^2 > 4mk$, λ_1 และ λ_2 เป็นรากจำนวนจริงที่ต่างกัน คำตอบทั่วไปของสมการ (5.65) คือ

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t} \qquad (5.67)$$

เราจะเห็นว่ากรณีนี้วัตถุจะไม่ออสซิลเลต สำหรับ $t > 0$ เอกซ์โปเนนเชียลทั้งสองในสมการ (5.67) เป็นลบเพราะ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ และ $\beta < \alpha$ เมื่อ t เข้าใกล้อนันต์ ทั้งสองเทอมในสมการ (5.67) เข้าใกล้ศูนย์ กล่าวคือ เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ มวลจะอยู่นิ่งในตำแหน่งสมดุลย์ เนื่องจากการแดมพ์นั้นเป็นการใช้พลังงานจากระบบและไม่มีแรงภายนอกมากระทำให้วัตถุนี้เคลื่อนที่ต่อไป

<u>กรณีที่ 2 underdamping</u> ถ้าค่าคงที่ของการแดมพ์ c มีค่าน้อย กล่าวคือ $c^2 < 4mk$ นั่นคือ β ในสมการ (5.66) เป็นจินตภาพ ให้เป็น

$$\beta = i\omega \qquad \text{เมื่อ} \quad \omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \tag{5.68}$$

รากของสมการช่วยเป็นสังยุคเชิงซ้อน

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega \qquad \text{และ} \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$

คำตอบทั่วไปคือ

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t-\delta) \tag{5.69}$$

เมื่อ $C^2 = A^2 + B^2$ และ $\tan\delta = B/A$

คำตอบนี้แทนแดมพ์ออสซิลเลชัน $\cos(\omega t-\delta)$ มีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 ดังนั้นเส้นโค้งของคำตอบจะอยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = Ce^{-\alpha t}$ และ $y = -Ce^{-\alpha t}$ (ดูรูป 5.7) เมื่อ c มีค่าน้อยลง ω จะมีค่ามากขึ้นและการสั่นจะเร็วขึ้น เมื่อ c เข้าใกล้ศูนย์ ω เข้าใกล้ $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ซึ่งสอดคล้องกับฮาร์โมนิกออสซิลเลชัน