$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = F(x) \quad (5.60)$$

แก้สมการ (5.59) และ (5.60) ซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าคือ v_1', v_2' เมื่ออินทิเกรต (โดยไม่ต้องบอกค่าคงที่) จะได้

$$v_1 = \int g_1(x)dx \ , \quad v_2 = \int g_2(x)dx$$

แทนค่า v_1 และ v_2 ลงในสมการ (5.59) จะได้คำตอบเฉพาะของสมการ (5.58)

<u>ตัวอย่าง</u> 5.19 จงแก้สมการ $y'' + y = \tan x$

วิธีทำ คำตอบประกอบคือ $y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

สมมติว่าคำตอบเฉพาะ $y_p = v_1(x)\sin x + v_2(x) \cos x$

ในที่นี้มีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ $v_1(x)$ และ $v_2(x)$ ซึ่งจะหาค่าได้โดยกำหนดเงื่อนไขว่า

$$v_1' \sin x + v_2' \sin x = 0 \quad (1)$$

ดังนั้นจะได้ $y_p' = v_1 \cos x - v_2 \sin x$

$$y_p'' = v_1 \sin x - v_2 \cos x + v_1' \cos x - v_2' \sin x$$

แทนค่า y และ y'' ลงในสมการที่โจทย์กำหนดให้จะได้

$$v_1' \cos x - v_2' \sin x = \tan x \quad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้ $v_1'(x) = \sin x$, $v_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

อินทิเกรตโดยไม่ต้องบวกค่าคงที่จะได้

$$v_1 = -\cos x$$

$$v_2 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

ดังนั้น $y_p = -\cos x \sin x + \cos x [\sin x - \ln(\sec x + \tan x)]$

$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

คำตอบทั่วไปคือ

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

5.8 ฟังก์ชันพิเศษต่าง ๆ

ฟังก์ชันแกมมาและฟังก์ชันเบตา

เราอาจนิยามฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(x)$ ถ้า $p > 0$ ได้ดังนี้

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

จากการอินทิเกรตโดยวิธีแยกส่วนจะได้ $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = p\Gamma(p)$

เนื่องจาก $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ ดังนั้น

$\Gamma(k+1) = k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

ฟังก์ชันเบตานิยามได้ดังนี้

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0)$$

เมื่อแทนในเทอมของฟังก์ชันแกมมาจะได้

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

<u>ฟังก์ชันเลอจองแบบต่าง ๆ และสเฟียริคอลฮาร์โมนิก</u>

สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเลอจอง (Legendre) คือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

คำตอบของสมการข้างต้นเรียกว่าฟังก์ชันเลอจอง กล่าวคือ

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$\text{เมื่อ } y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \ldots$$

$$\text{และ } y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots$$

ถ้า n เป็นเลขคู่ $y_1(x)$ จะกลายเป็นโพลีโนเมียลดีกรี n และถ้า n เลขคี่ $y_2(x)$ จะกลายเป็นโพลีโนเมียลดีกรี n โพลีโนเมียลเหล่านี้เมื่อคูณกับค่าคงที่บางค่าแล้วเรียกว่าโพลีโนเมียลเลอจอง ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$P_n(x) = \sum^{m} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

เมื่อ $m = n/2$ หรือ $(n-1)/2$ ตัวอย่างเช่น

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ในพิกัดทรงกลม ฟังก์ชันใด ๆ มีตัวแปรอิสระเป็น (θ, φ) เราอาจจะกระจายเป็นอนุกรมของสเฟียริคอลฮาร์โมนิกได้ดังนี้

$$Y_{\ell, m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

เมื่อ $P_\ell^m(\cos\theta)$ คือแอสโซซิเอทเลอจองฟังก์ชัน

<u>ฟังก์ชันเบสเซล</u>

สมการดิฟเฟอรเชียลของเบสเซล (Bessel) คือ

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

คำตอบของสมการข้างต้นแทนด้วย

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}\, m!\,(n+m)!}$$

$J_n(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันเบสเซลของ first kind อันดับที่ n

กรณี $n = 0$ สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเบสเซลคือ

$$xy'' + y' + xy = 0$$

คำตอบสมการข้างต้นคือ

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_o(x)(\ln\frac{x}{2} + \gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right.$$

$Y_o(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลของ second kind อันดับศูนย์ เมื่อ $h_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}$ และ γ คือค่าคงที่ของออยเลอร์

__ฟังก์ชันเฮอร์มีท__

สมการดิฟเฟอเรนเชียล : $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

คำตอบของสมการข้างต้นคือ $y = Ay_1(x) + By_2(x)$

กรณีที่ n เป็นเลขจำนวนเต็มที่เป็นเลขคู่ คำตอบจะเป็นโพลีโนเมียลดีกรีทคือ

$$y_1(x) = (-1)^{n/2} \frac{(n-2)!}{n!} H_n(x) \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มที่เป็นเลขคี่ คำตอบจะเป็น

$$y_2(x) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{[(n-1)/2]!}{2(n!)} H_n(x), \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$H_n(x)$ คือฟังก์ชันเฮอร์มีทที่นิยามว่า

$$H_n(x) = (-1)^n \left(e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}\right)$$

เราอาจนิยามฟังก์ชันเฮอร์มีทโดยใช้ generating function

$$F(x,y) = e^{-y^2+2xy} = e^{x^2} e^{-(y-x)^2}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n$$

5.9 __การประยุกต์ของสมการเชิงเส้น__

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำสมการเชิงเส้นอันดับที่ 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงที่ไปใช้ในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์

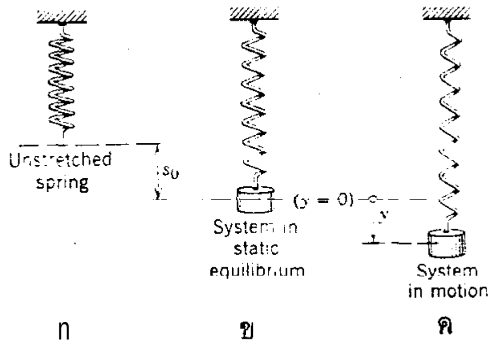
<u>การออสซิลเลตอย่างอิสระ</u> (free oscillations)

เมื่อนำลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งโดยให้ปลายบนยึดติดกับเพดานหรือเสายึด ส่วนปลายล่างผูกวัตถุมวล m ไว้ดังรูป 5.3 สมมติว่า m มีค่ามากเมื่อเทียบกับมวลของสปริง ถ้าเราดึงวัตถุลงตรง ๆ เป็นระยะ y แล้วปล่อยมือ แรงจากสปริงจะดึงมวลให้เคลื่อนกลับ

จากการทดลองพบว่าแรงจากสปริงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทางที่สปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุลย์ นั่นคือ

$$f = -ky \qquad \text{(กฎของฮุค)}$$

เมื่อ f เป็นแรงจากสปริง และ $y = y(t)$ เป็นการขจัดของวัตถุจากตำแหน่งสมดุลย์ (เครื่องหมายลบเพราะ f และ y มีทิศตรงข้ามกัน)



รูป 5.3

อีกแรงหนึ่งที่กระทำต่อวัตถุในระหว่างการเคลื่อนที่คือแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก ซึ่งมีค่า

$$F_1 = mg \tag{5.61}$$

g เป็นความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับ $9.8\ m/s^2$

เมื่อวัตถุหยุดนิ่ง สปริงจะถูกยืดออกเป็นระยะ s_o เราจะให้ตำแหน่งนี้เป็นตำแหน่งสมดุลย์ (ดูรูป 5.3 ข.) ที่ตำแหน่งนี้แรงลัพท์ของแรงสปริงและแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$ks_o = mg \tag{5.62}$$

จากกฎของฮุคแรงสปริงที่สอดคล้องกับการขจัด y คือ

$$F_2 = -ks_o - ky \tag{5.63}$$

แรงลัพท์ที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$F_1 + F_2 = mg - ks_o - ky$$

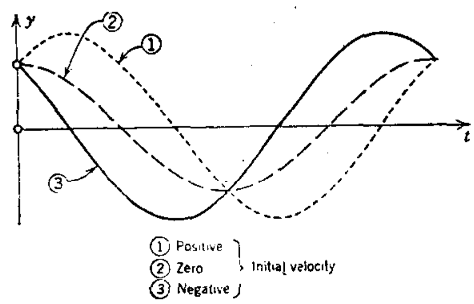
$$= -ky \tag{5.64}$$

<u>undamped system</u> ถ้าการแดมพ์ของระบบมีค่าน้อยมากเราสามารถละทิ้งได้ แรงลัพท์ที่กระทำต่อวัตถุคือสมการ (5.64) จากกฎข้อสองของนิวตัน $F = ma = md^2y/dt^2$ จะได้

$$\frac{md^2y}{dt^2} = -ky$$

หรือ $m\ddot{y} + ky = 0$

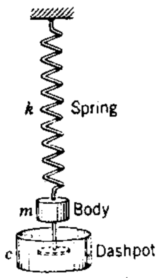
คำตอบทั่วไปคือ $y(t) = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$ เมื่อ $\omega_o = \sqrt{k/m}$ การเคลื่อนที่ในลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ฮาร์โมนิกออสซิลเลชัน วัตถุจะสั่นขึ้นลงด้วยความถี่ $\omega_o/2\pi$ รอบต่อวินาที



รูป 5.4 การออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก

damped system ถ้าเราต่อมวล m เข้ากับ dashpot (ดูรูป 5.5) จะมีการแดมพ์เนื่องจากความหนืด แรงแดมพ์มีทิศตรงข้ามการเคลื่อนที่ในขณะใด ๆ สมมติว่าแรงแดมพ์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็ว $\dot{y} = dy/dt$ ของวัตถุ นั่นคือเขียนแรงแดมพ์ได้เป็น

$$F_3 = -c\dot{y}$$



รูป 5.5

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ของการแดมพ์ซึ่งเป็นค่าบวกเสมอ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุในกรณีนี้คือ

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - c\dot{y}$$

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน ได้ $m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$

$$\text{หรือ } m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = 0 \qquad (5.65)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ของระบบเชิงกลที่มีการแดมพ์จะเป็นสมการ

ดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ สมการช่วยของสมการ (5.65) คือ

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$

ให้ $\alpha = \frac{c}{2m}$ และ $\beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$ **(5.66)**

จะได้ $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ และ $\lambda_2 = -\alpha - \beta$

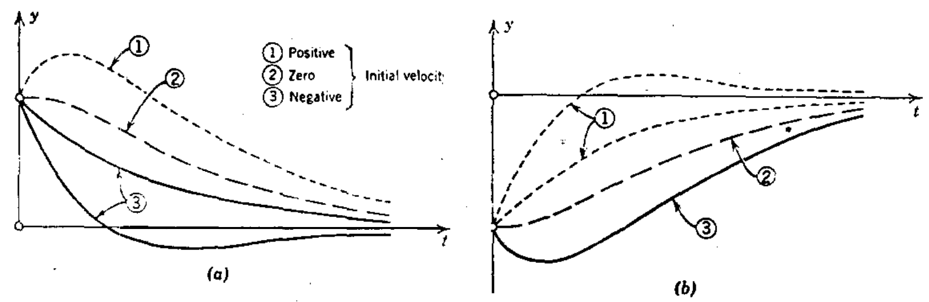
คำตอบของสมการ (5.65) ขึ้นกับการแดมพ์ แบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี

1. $c^2 > 4mk$ ได้รากเป็นจำนวนจริง 2 รากต่างกัน (overdamping)
2. $c^2 < 4mk$ ได้รากเป็นสังยุคเชิงซ้อน (underdamping)
3. $c^2 = 4mk$ ได้รากเป็นจำนวนจริงเหมือนกัน 2 ราก (critical damping)

<u>กรณีที่ 1 overdamping</u> ถ้าค่าคงที่ของการแดมพ์ c มีค่ามาก ฉะนั้น $c^2 > 4mk$, λ_1 และ λ_2 เป็นรากจำนวนจริงที่ต่างกัน คำตอบทั่วไปของสมการ (5.65) คือ

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t} \qquad (5.67)$$

เราจะเห็นว่ากรณีนี้วัตถุจะไม่ออสซิลเลต สำหรับ $t > 0$ เอกซ์โปเนนเชียลทั้งสองในสมการ (5.67) เป็นลบเพราะ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ และ $\beta < \alpha$ เมื่อ t เข้าใกล้อนันต์ ทั้งสองเทอมในสมการ (5.67) เข้าใกล้ศูนย์ กล่าวคือ เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ มวลจะอยู่นิ่งในตำแหน่งสมดุลย์ เนื่องจากการแดมพ์นั้นเป็นการใช้พลังงานจากระบบและไม่มีแรงภายนอกมากระทำให้วัตถุนี้เคลื่อนที่ต่อไป



รูป 5.6 ชนิดของการเคลื่อนที่ในกรณี overdamped

(ก) การขจัดเริ่มต้นเป็นบวก

(ข) การขจัดเริ่มต้นเป็นลบ

<u>กรณีที่ 2 underdamping</u> ถ้าค่าคงที่ของการแดมพ์ c มีค่าน้อย กล่าวคือ $c^2 < 4mk$ นั่นคือ β ในสมการ (5.66) เป็นจินตภาพ ให้เป็น

$$\beta = i\omega \qquad \text{เมื่อ} \quad \omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \tag{5.68}$$

รากของสมการช่วยเป็นสังยุคเชิงซ้อน

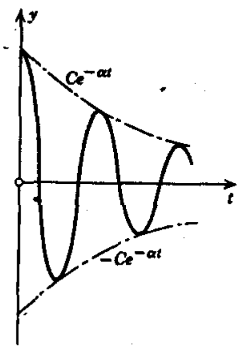
$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega \qquad \text{และ} \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\omega$$

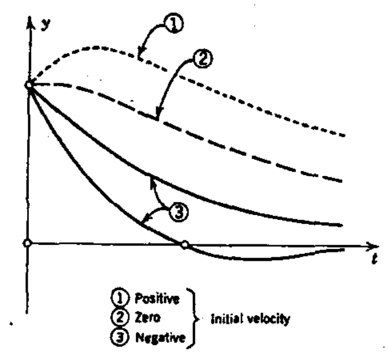
คำตอบทั่วไปคือ

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos \omega t + B\sin \omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t-\delta) \tag{5.69}$$

เมื่อ $C^2 = A^2 + B^2$ และ $\tan\delta = B/A$

คำตอบนี้แทนแดมพ์ออสซิลเลชัน $\cos(\omega t-\delta)$ มีค่าอยู่ระหว่าง −1 และ 1 ดังนั้นเส้นโค้งของคำตอบจะอยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = Ce^{-\alpha t}$ และ $y = -Ce^{-\alpha t}$ (ดูรูป 5.7) เมื่อ c มีค่าน้อยลง ω จะมีค่ามากขึ้นและการสั่นจะเร็วขึ้น เมื่อ c เข้าใกล้ศูนย์ ω เข้าใกล้ $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ซึ่งสอดคล้องกับฮาร์โมนิกออสซิลเลชัน





รูป 5.7 damped oscillation กรณีที่ 2 รูป 5.8 critical damping

<u>กรณีที่ 3 crdamping</u> ถ้า $c^2 = 4mk$ จะได้ $\beta = 0$,
$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ คำตอบทั่วไปคือ

$$y(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t} \tag{5.70}$$

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลไม่เป็นศูนย์ และ $c_1 t + c_2$ สามารถให้ค่า y เป็นศูนย์ได้อย่างมากที่สุดหนึ่งค่า แสดงว่าการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้จะผ่านจุดสมดุลย์ ($y = 0$) ได้เพียงครั้งเดียว และถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้ c_1 และ c_2 มีเครื่องหมายเดียวกัน การเคลื่อนที่นี้จะไม่ผ่านจุดสมดุลย์เลย ลักษณะเช่นนี้คล้ายกรณีที่ 1 (ดูรูป 5.8)

<u>การออสซิลเลตเมื่อมีแรงภายนอก</u> (forced oscillations)

ในหัวข้อที่แล้วเรากล่าวถึงการออสซิลเลตอย่างอิสระของวัตถุที่ผูกติดกับสปริง ดังรูป (5.5) ซึ่งสมการการเคลื่อนที่เขียนได้เป็น

$$m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = 0 \tag{5.71}$$

ถ้ามีแรงภายนอก $F(t)$ กระทำต่อวัตถุ สมการการเคลื่อนที่จะเขียนได้เป็น

$$m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = F(t) \tag{5.72}$$

เมื่อ $F(t)$ เรียก driving force การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้ driving force เรียกว่า forced motion พิจารณากรณี $F(t)$ มีลักษณะเป็นไซนูซอยดอล คือ $F(t) = F_0 \cos \omega t$ สมการ (5.72) เขียนได้เป็น

$$m\ddot{y} + cy + k\dot{y} = F_0 \cos \omega t \tag{5.73}$$

เราจะหาคำตอบเฉพาะของสมการข้างต้นด้วยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยให้

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \tag{5.74}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต y_r แทนลงในสมการ (5.73) แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$\left[(k-m\omega^2)a+\omega cb\right] \cos \omega t + \left[-\omega ca+(k-m\omega^2)b\right] \sin \omega t = F_o \cos wt$$

เทียบสัมประสิทธิ์ $\quad (k-m\omega^2)a + \omega cb = F_o$

$$-\omega ca + (k-m\omega^2)b = 0 \tag{5.75}$$

ค่า a และ b หาได้โดยใช้กฎของเครมเมอร์ (ดูรายละเอียดบทที่ 7) ได้

$$a = F_o \frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2c^2}, \quad b = F_o \frac{wc}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

โดยที่ส่วนไม่เป็นศูนย์ ให้ $\sqrt{k/m} = \omega_o (>0)$ จะได้

$$a = F_o \frac{m(\omega_o^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}, \quad b = F_o \frac{\omega c}{m^2(\omega_o^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

คำตอบทั่วไป $\quad y(t) = y_c(t) + y_p(t) \qquad (5.76)$

เมื่อ $y_c(t)$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (5.71) และ y_p คือสมการ (5.74) ที่มีสัมประสิทธิ์ตามสมการ (5.75) พิจารณากรณีต่อไปนี้

<u>undamped forced oscillation</u> ถ้าไม่มีการแดมพ์ $c = 0$ สมมติว่า $\omega^2 \neq \omega_o^2$ จากสมการ (5.74) และ (5.75) จะได้

$$y_p(t) = \frac{\frac{F_o}{m}\cos\omega t}{(\omega_\sigma^2 - \omega^2)} = \frac{F_o}{k\left[1-(\omega/\omega_o)^2\right]}\cos\omega t \qquad (5.77)$$

$y_c(t)$ คือสมการ (5 . 6 9) คำตอบทั่วไป

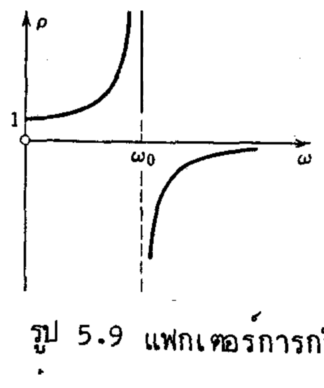
$$y(t) = C\cos(\omega_o t - \delta) + \frac{F_o}{k\left[1-(\omega/\omega_o)^2\right]}\cos\omega t \qquad (5.78)$$

คำตอบข้างต้นแทนการรวมกัน (superposition) ของ 2 ฮาร์โมนิกออสซิลเลชันความถี่ทั้งสองได้แก่ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) $\omega_o/2\pi$ ของระบบ (เป็นความถี่ของ free undamped motion) และความถี่ $\omega/2\pi$ ของ input (คือความถี่ของ driving force)

จากสมการ (5.77) จะเห็นว่าอัมปลิจูดสูงสุดของ y_p คือ

$$a_0 = \frac{F_o}{k}\rho \quad \text{เมื่อ} \quad \rho = \frac{1}{1-(\omega/\omega_o)^2}$$

ซึ่งขึ้นกับ ω และ ω_o เมื่อ $\omega \to \omega_o$ ปริมาณ ρ และ a_o มีค่าไปสู่อนันต์ ปรากฏการณ์ของการกระตุ้นให้เกิดการออสซิลเลตขนาดใหญ่ ๆ โดยการ matching R-aามถี่ของ input และความถี่ธรรมชาติ ($w = \omega_o$) เรียกว่าเกิดการกำทอน (resonance) ρ เรียกว่าแฟคเตอร์การกำทอน (resonance factor)



รูป 5.9 แฟกเตอร์การกำทอน

ในกรณีที่เกิดการกำทอน สมการ (5.73) จะเป็น

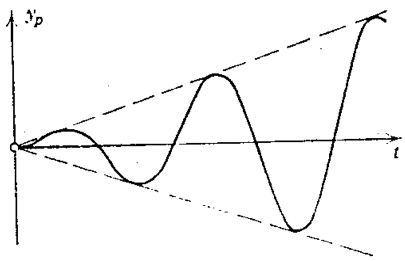
$$\ddot{y} + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{m}\cos\omega_o t \qquad (5.79)$$

คำตอบเฉพาะของสมการ (5.79) อยู่ในรูป

$$y_p(t) = t(a\cos\omega_o t + b\sin\omega_o t)$$

แทนค่าลงในสมการ **(5.79)** จะได้ $a = 0$ และ $b = F_o/2m\omega_o$ นั่นคือ

$$y_p(t) = \frac{F_o}{2m\omega_o} t\sin\omega_o t \qquad (5.80)$$



รูป 5.10 คำตอบเฉพาะในกรณีของการกำทอน

จากสมการ (5.80) จะเห็นว่า y_p มีค่ามากขึ้น ๆ (ดูรูป 5.10) หมายความว่า ระบบที่มีการแดมพ์จำนวนน้อย ๆ อาจจะเกิดการสั่นอย่างรุนแรงซึ่งอาจทำลายระบบได้

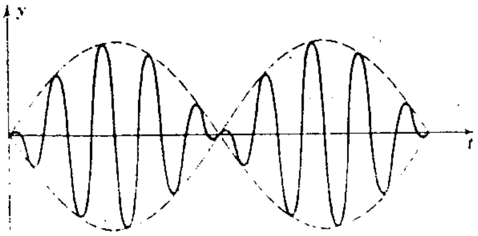
กรณีที่น่าสนใจอีกกรณีหนึ่งของการออสซิลเลตคือเมื่อ ω เข้าใกล้ ω_o จะได้คำตอบเฉพาะ

$$y_p(t) = \frac{F_o}{m(\omega_o^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_o t)\ ;\ \omega \neq \omega_o \qquad (5.81)$$

ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ คือ

$$y_p(t) = \frac{2F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_o + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_o - \omega}{2} t$$

แต่ ω เข้าใกล้ ω_o นั่นคือ $\omega_o - \omega$ มีค่าน้อย ดังนั้นคาบของฟังก์ชันไซน์เทอมสุดท้ายของสมการข้างต้นมีค่ามาก จะได้การสั่นแสดงดังรูป 5.11



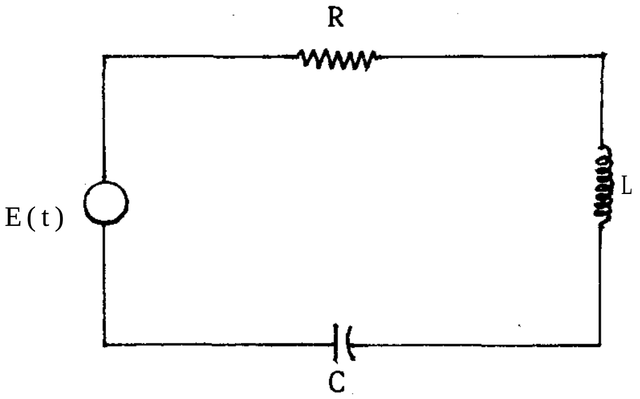
รูป 5.11 undamped forced oscillation เมื่อความแตกต่างระหว่างความถี่ของ input และความถี่ธรรมชาติมีค่าน้อย (บีตส์)

<u>damped force oscillation</u> ถ้ามีการแดมพ์ $c > 0$ จากที่กล่าวมาแล้ว คำตอบทั่วไปของสมการ (5.71) เข้าใกล้ศูนย์เมื่อ t เข้าใกล้อนันต์และคำตอบทั่วไป (สมการ 5.76) ของสมการ (5.72) แทน transient solution ซึ่งมีแนวโน้มจะเป็น steady state solution ดังนั้นหลังจากใช้เวลานานระยะหนึ่ง output ที่สอดคล้องกับ intput แบบไซนูซอยดอลจะเป็นการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกที่มีความถี่เท่ากับของ input ในทางปฏิบัติแล้วไม่มีระบบทางฟิสิกส์ใด ๆ ที่เป็น undamped อย่างสมบูรณ์

กรณีของ undamped อัมปลิจูดของ y_p เข้าใกล้อนันต์เมื่อ ω เข้าใกล้ ω_o ลักษณะเช่นนี้จะไม่เกิดขึ้นกับกรณีแดมพ์ ในกรณีแดมพ์อัมปลิจูดมีค่าจำกัดเสมอ แต่อาจจะมีค่าสูงสุดสำหรับบาง ω ขึ้นกับ c เรียกว่าการกำทอนเชิงปฏิบัติ (practical resonance) ลักษณะเช่นนี้มีความสำคัญมากเพราะมันแสดงให้เห็นว่าบางค่า input นั้นอาจจะกระตุ้นให้เกิดการสั่นที่มีอัมปลิจูดขนาดใหญ่ ซึ่งเป็นการทำลายระบบนั้นได้

<u>วงจรไฟฟ้า RLC</u>

พิจารณาวงจรไฟฟ้าอย่างง่ายที่ประกอบด้วยต้นกำเนิดไฟฟ้า ความต้านทาน ขดลวดเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุที่ต่อกันเป็นอนุกรม (วงจร *RLC*) กฎเกณฑ์ที่ใช้คือกฎของโอห์มและกฎของเคอร์ชอฟฟ์ (ดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อวงจรไฟฟ้า RL และ RC)



รูป 5.12

การหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของวงจร RLC ในรูป 5.12 อาจใช้สมการของวงจร RC และรวมโวลท์เตจลด $L\dot{I}$ ที่คร่อมขดลวดเหนี่ยวนำ L เพิ่มเข้าไป

จะได้ $$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) = E_o \sin \omega t \qquad \textbf{(5.82)}$$

เนื่องจาก $I = \dot{Q} = dQ/dt$ จะได้

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E_o \sin \omega t \qquad (5.83)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับประจุ Q บนตัวเก็บประจุ C ในวงจร RLC ในทางฟิสิกส์สนใจกระแส I(t) มากกว่าประจุ Q(t) ดิฟเฟอ-

เรนชิเอตสมการ (5.82) เทียบกับ t จะได้

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = E_o \omega \cos \omega t \qquad (5.84)$$

การหาคำตอบเฉพาะของสมการ (5.84) จะแทนค่า

$$I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \qquad (5.85)$$

ลงในสมการ (5.84) แล้วใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$a = \frac{-E_o S}{R^2+S^2}, \quad b = \frac{E_o R}{R^2+ S^2} \qquad (5.86)$$

เมื่อ S เรียกว่ารีแอกแตนซ์ (reactance) กำหนดว่ามีค่าเป็น

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad (5.87)$$

เพราะว่า $R \neq 0$ดังนั้นส่วนในสมการ (5.86) ไม่เป็นศูนย์ คำตอบ I_p ในสมการ (5.85) อาจเขียนอยู่ในรูป

$$I_p = I_o \sin(\omega t - \theta) \qquad (5.88)$$

เมื่อ $I_o = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_o}{R^2 + S^2}$, $\tan = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}$ **(5.89)**

ปริมาณ $\sqrt{R^2 + S^2}$ เรียกว่าอิมพีแดนซ์ (impedance) จากสมการ (5.89) แสดงว่า อิมพีแดนซ์เท่ากับอัตราส่วน E_o/I_o ซึ่งคล้ายกับ $E/I = R$ (กฎของโอห์ม) คำตอบประกอบของสมการ (5.84) คือ

$$I_c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

เมื่อ λ_1 และ λ_2 เป็นรากของสมการช่วย

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

จากสมการข้างต้นอาจเขียนได้ในรูป $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ และ $\lambda_2 = -\alpha - \beta$ เมื่อ

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

ถ้า $R > 0$, $I_c(t)$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ t ไปสู่อนันต์ (ในทางปฏิบัติจะเป็นช่วงเวลาระยะหนึ่ง) ดังนั้นกระแส transient $I = I_c + I_p$ จะมีค่าไปสู่กระแส steady state I_p และหลังจากช่วงเวลาหนึ่งแล้ว output จะออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกซึ่งกำหนดโดยสมการ (5.88) ด้วยความถี่ของ input

<u>ตัวอย่าง</u> 5. จงหากระแส $I(t)$ ในวงจร RLC ที่มี $R = 100$ โอห์ม $L = 0.1$ เฮนรี $C = 10^{-3}$ ฟารัด ซึ่งต่อกับแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E(t) = 155 \sin 377\, t$ (ความถี่ 60 Hz) สมมติว่าประจุและกระแสเป็นศูนย์เมื่อ $t = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการ (5.84) ของปัญหานี้คือ

$$0.1\, \ddot{I} + 100\, \dot{I} + 1000 I = (155)(377) \cos 377\, t \qquad (1)$$

รีแอกแตนซ์ $S = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 37.7 - \frac{1}{0.377} = 35.0$

และกระแส steady state $I_p(t) = a \cos 377\, t + b \sin 377\, t$

เมื่อ $a = \frac{-(155)(35.0)}{100^2 + 35^2} = -0.483$, $b = \frac{(155)(100)}{100^2 + 35^2} = 1.381$

สมการช่วยของสมการ (1) คือ $0.1\lambda^2 + 100\lambda + 1000 = 0$

ได้ราก 2 รากคือ $\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = -990$ ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ

$$I(t) = c_1e^{-10t} + c_2e^{-990t} - 0.482 \cos 377\, t + 1.381 \sin 377\, t \quad (2)$$

ค่า c_1 และ c_2 หาจากเงื่อนไขเริ่มต้น $Q(0) = 0$ และ $I(0) = 0$

$$I(0) = c_1 + c_2 - 0.483 = 0 \qquad (3)$$

จากสมการ (5.82) $\dot{I} = \frac{1}{L}\left[E(t) - RI(t) - \frac{Q(t)}{C}\right]$

เนื่องจาก $\int Idt = Q$ ในที่นี้ $E(0) = 0$, $I(0) = 0$ และ $Q(0) = 0$
ดังนั้น $\dot{I}(0) = 0$ ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (2) จะได้

$$\dot{I}(0) = -10\ c_1 - 990\ c_2 + (1.381)(377) = 0 \qquad (4)$$

จากสมการ (3) และ (4) ได้ $c_1 = -0.043$, $c_2 = 0.526$ นั่นคือ

$$I(t) = -0.043\ e^{-10t} + 0.526e^{-990t} - 0.483 \cos 377t + 1.381 \sin 377t$$

สองเทอมแรกจะลดลงอย่างรวดเร็วและหลังจากช่วงเวลาสั้น ๆ กระแสจะออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกด้วยความถี่ 60 Hz ซึ่งเป็นความถี่ของโวลท์เตจที่ให้จากสมการ (5.88) สามารถเขียนกระแส steady state ได้ในรูป

$$I_p(t) = 1.463 \sin(377t - 0.34)$$

<u>วิธีหาคำตอบเฉพาะโดยใช้จำนวนเชิงซ้อน</u>

การหาคำตอบเฉพาะอาจใช้วิธีการของจำนวนเชิงซ้อนได้ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายกว่าที่กล่าวมาแล้ว ตัวอย่างเช่น สมการที่ต้องการหาคำตอบ $I(t)$ คือ

$$\ddot{I} + \dot{I} + 2I = 6\cos t \qquad (5.90)$$

สำหรับวิธีนี้เทอม $6\cos t$ เป็นส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $6e^{it}$ แทนค่าลงในสมการ (5.90) จะได้

$$\ddot{I} + \dot{I} + 2I = 6e^{it}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{5.91}$$

คำตอบเฉพาะของสมการข้างต้นอยู่ในรูป

$$I_p^*(t) = Ke^{it} \tag{5.92}$$

แทนสมการ (5.92) ลงในสมการ (5.91) จะได้

$$(-1 + i + 2)Ke^{it} = 6e^{it}$$

ได้ $\quad K = 3 - 3i$

ดังนั้น $\quad I_p^*(t) = (3-3i)e^{it} = (3-3i)(\cos t + i\sin t)$

เป็นคำตอบของสมการ (5.91) ส่วนจริงของ I_p^* คือ

$$I_p(t) = 3\cos t + 3\sin t$$

สมการข้างต้นเป็นคำตอบเฉพาะของสมการ (5.90)

พิจารณาสมการ $\quad L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = E_0\omega\cos\omega t \quad$ (5.93)

สมมติ $R \neq 0$ สมการเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการข้างต้นคือ

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = E_0 We^{i\omega t} \tag{5.94}$$

ให้คำตอบเฉพาะอยู่ในรูป $\quad I_p^*(t) = Ke^{i\omega t} \quad$ (5.95)
แทนค่าลงในสมการ (5.94) จะได้

$$(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C})Ke^{i\omega t} = E_0\ \omega e^{i\omega t}$$

หารตลอดด้วย ω จะได้ค่า K เป็น

$$K = \frac{E_o}{-wL + iR + \frac{1}{\omega C}} = \frac{E_o}{iz} \qquad (5.96)$$

เมื่อ z เรียกว่าอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (complex impedance) ซึ่งกำหนดโดย

$$z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \qquad (5.97)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่าส่วนจินตภาพของ z คือ รีแอกแตนซ์ S ที่กำหนดโดยสมการ (5.87) และ $|z|$ คืออิมพีแดนซ์ ดังนั้น

$$z = |z|\, e^{i\theta} \qquad \text{เมื่อ} \quad \tan\theta = \frac{S}{R}$$

สมการ (5.95) อาจเขียนได้ในรูป

$$I_p^*(t) = \frac{E_o}{iz}\, e^{i\omega t} = -i\frac{E_o}{|z|}\, e^{i(\omega t-\theta)}$$

ส่วนจริงของสมการข้างต้นคือ

$$I_p(t) = \frac{E_o}{|z|}\sin(\omega t-\theta) = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + S^2}}\sin(\omega t - \theta)$$

ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (5.94) เราจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันนี้เหมือนกับสมการ (5.88) ในหัวข้อที่แล้ว

<u>บทสรุป</u>

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูป $g(y)dy = f(x)dx$ เป็นสมการแบบซึ่งแยกตัวแปรได้ คำตอบของสมการนี้หาได้โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

สมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่ 1 ซึ่งอยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแบบแน่นอน ถ้า $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ การหาคำตอบของสมการนี้หาได้โดยการจัดเทอมสมการใหม่แล้วอินทิเกรต แต่ถ้าเป็นสมการแบบไม่แน่นอน

$(\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x)$ ต้องหาตัวประกอบอินทิเกรตคูณเพื่อทำให้เป็นสมการแบบแนนอน

สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นอันดับแรกเขียนได้เป็น $y' + f(x)y = r(x)$ ถ้า $r = 0$จะเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ถ้าเทอมทางขวามือเป็น $r(x)y^n$ จะเป็นสมการของเบอร์นูลี กรณี $n = 0$ และ $n = 1$ สมการของเบอร์นูลีเป็นสมการเชิงเส้น คำตอบของสมการนี้หาได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่อยู่ในรูป $(a_oD^2 + a_1D + a_2)y = 0$ เมื่อ a_o, a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ การหาคำตอบของสมการนี้ทำได้โดยสมมติให้ $y = e^{mx}$ แล้วแทนค่าลงในสมการ จะได้สมการช่วยเป็น $a_om^2 + a_1m + a_2 = 0$ ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการนี้คือ $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ ถ้าสมการช่วยมีรากซ้ำกันจะได้คำตอบทั่วไปเป็น $y = (c_1 + c_2x)e^{ax}$ (เมื่อ a เป็นรากที่ซ้ำกันของสมการช่วย) ถ้ารากเป็นค่าจินตภาพ เช่น $\alpha + i\beta$ คำตอบทั่วไปคือ $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ ถ้าสมการดิฟเฟอเรนเชียลอยู่ในรูป $(a_oD^2 + a_1D + a_2)y = F(x)$ เราอาจหาคำตอบทั่วไปของสมการนี้โดยการตรวจพินิจ วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์หรือวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

การประยุกต์สมการดิฟเฟอเรนเชียลทางฟิสิกส์เช่น การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี การตกของวัตถุเมื่อมีแรงต้านทานจากอากาศ วงจรไฟฟ้า การออสซิลเลตอย่างอิสระ เป็นต้น

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   ก) $(1 + 2y)dx - (4-x)dy = 0$

   ข) $y^2dx - x^2dy = 0$

   ค) $(1 + y)dx - (1 + x)dy = 0$

   ง) $y(x-1)dx - xdy = 0$

2. จงหาคำตอบเฉพาะของสมการต่อไปนี้

   ก) $xdy + 2ydx = 0$ เมื่อ $x = 2,\ y = 1$

   ข) $(y^2+xy)dx - x^2dy = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = 1$

   ค) $(x^2 + y^2)dx+xydy = 0$ เมื่อ $x = 1,\ y = -1$

3. จงทดสอบความแน่นอนแล้วหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

   ก) $(x^2-y)dx - xdy = 0$

   ข) $(x+y\cos x)dx + \sin x dy = 0$

   ค) $(1+e^{2\theta})dr + 2re^{2\theta}d\theta = 0$

   ง) $(x+y+1)dx - (y-x+3)dy = 0$

4. จงหาตัวประกอบของการอินทิเกรตแล้วหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก) $xdx + ydy = (x^2 + y^2)dx$

ข) $(x-y^2)dx + 2xydy = 0$

ค) $2ydx-3xy^2dx-xdy = 0$

5. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นอันดับแรกต่อไปนี้

ก) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

a) $xdy - 2ydx = (x-2)e^x dx$

ค) $\frac{dy}{dx} - 6y = 10 \sin 2x$

6. จงหาคำตอบของสมการเบอร์นูลีต่อไปนี้

ก) $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$

ข) $\frac{dy}{dx} + y = y^2e^x$

ค) $xdy + ydx = x^2y^6dx$

7. จากการสังเกตพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันบรรยากาศ p กับระดับความสูงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความดัน สมมติว่าความดันที่ระดับความสูง 6000 เมตร เป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของค่า P_o ที่ระดับน้ำทะเล จงหาสมการความดันที่ระดับความสูงต่าง ๆ

8. ถ้าจำนวนประชากรในเมืองหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 2 เท่าในเวลา 50 ปี ถามว่าในเวลากี่ปีจำนวนประชากรจึงเพิ่มเป็น 3 เท่า

9. นักกระโดดร่มตกลงมาด้วยความเร็ว $55\ ms^{-1}$ เมื่อร่มกาง ถ้าแรงต้านอากาศคือ $wv^2/25$ N โดยที่ w เป็นน้ำหนักรวมของคนและร่ม จงหาอัตราเร็วของเขาซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา t หลังจากที่ร่มกาง

10. วัตถุมวล m kg ตกลงมาจากหยุดนิ่ง โดยมีแรงต้านของอากาศเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วกำลังสอง ถ้าความเร็วสุดท้าย (terminal velocity) คือ $50\ ms^{-1}$ จงหา
   ก) ความเร็วที่ปลายเวลา 2 วินาที
   ข) ช่วงเวลาที่ใช้เมื่อความเร็วของวัตถุเท่ากับ $30\ ms^{-1}$
   (ใช้ $g = 9.8\ m/s^2$)

11. ในวงจรไฟฟ้าที่ต่อต้นกำเนิดไฟฟ้าอนุกรมกับความต้านทาน 15 โอห์ม และขดลวดเหนี่ยวนำ 3 เฮนรี ถ้าต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเป็นคลื่นไซน์ซึ่งมีอัมปลิจูด 110 โวลท์ และความถี่ 60 รอบ/วินาที และเมื่อ $t = 0$, $i = 0$ จงหากระแสไฟฟ้าที่เวลา t ใด ๆ

12. ในวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยตัวเก็บประจุ 10^{-3} ฟารัด ต่ออนุกรมกับความต้านทาน 10 โอห์ม โดยที่แรงเคลื่อนไฟฟ้าคือ $100 \sin 120\pi t$ จงหา
   ก) จำนวนประจุ ถ้าเมื่อ $t = 0$, $q = 0$
   ข) กระแส (I) สมมติว่า $I = 5$ แอมแปร์ $t = 0$

13. เรเดียมสลายตัวด้วยอัตราที่เป็นสัดส่วนกับจำนวนอะตอมเรเดียมที่มีอยู่ ถ้าในเวลา 1600 ปี มันสลายตัวเหลือเพียงครึ่งหนึ่งของจำนวน จงหาเปอร์เซนต์ที่มันสลายตัวไปในเวลา 100 ปี

14. ถ้าอุณหภูมิของอากาศเท่ากับ 290° K สารชนิดหนึ่งถูกทำให้เย็นลงจาก 370° K เหลือเพียง 240° K ในเวลา 10 นาที จงหาอุณหภูมิของสารนี้หลังจากเวลาผ่านไป 40 นาที

15. จงแก้สมการ

ก) $(D^2 + D - 6)y = 0$

ข) $(D^2 - 2D + 10)y = 0$

ค) $(D^2 + 6D + 9)y = 0$

ง) $(D^2 - 4D + 13)y = 0$

16. จงแก้สมการโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

ก) $(D^2 - 2D)y = e^x \sin x$

ข) $(D^2 - 4D + 4)y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$

ค) $(D^2 + 2D + 2)y = x^2 + \sin x$

17. จงแก้สมการโดยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

ก) $(D^2 - 6D + 9)y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

ข) $(D^2 - 4D + 3)y = (1 + e^{-x})^{-1}$

18. สปริงมี $k = 700\ \mathrm{Nm}^{-1}$ แขวนในแนวดิ่งที่มีปลายด้านบนถูกตรึงไว้ ปลายด้านล่างแขวนมวล 7 kg หลังจากระบบหยุดนิ่งแล้วมวลนี้ดึงสปริงยืดออก 0.05 m จงอธิบายการเคลื่อนที่ของมวลนี้โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศ

19. ในโจทย์ข้อ 18 ถ้าคิดแรงต้านของอากาศซึ่งมีค่าเท่ากับ $v/4$ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของมวลนี้

20. แขวนมวล 30 kg กับสปริงที่มี $k = 750\ Nm^{-1}$ แล้วทำให้หยุดนิ่ง จงหาตำแหน่งของมวลที่เวลา t ถ้าให้แรงเท่ากับ $20 \sin 2t$ แก่มวลนี้

21. วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยขดลวดเหนี่ยวนำ 0.05 เฮนรี่ ความต้านทาน 20 โอห์ม ตัวเก็บประจุ 100 ไมโครฟารัด และแรงเคลื่อนไฟฟ้าของ E ที่ต่ออนุกรมกัน จงหา I และ Q กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $Q = 0$, $I = 0$ เมื่อ $t = 0$ ถ้า ก. $E = 100$ โวลต์, ข. $E = 100 \cos 200t$