บทที่ 4
อนุกรมฟูเรียร์

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 4 นี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย การเคลื่อนที่ของคลื่น และฟังก์ชันเป็นคาบได้
2. กระจายฟังก์ชันเป็นคาบ $f(x)$ ที่มีคาบ 2π และ $-\pi < x < \pi$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์-โคไซน์ หรือแบบเอกซ์โปเนนเชียลได้
3. บอกได้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่
4. อธิบายทฤษฎีของไดริชเลท์ได้
5. กระจายฟังก์ชันเป็นคาบในช่วงอื่น ๆ เช่น $-\ell < x < \ell$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์-โคไซน์หรือแบบเอกซ์โปเนนเชียลได้
6. ใช้อินทิกรัลฟูเรียร์แทนอนุกรมฟูเรียร์ในกรณีที่ฟังก์ชันไม่เป็นคาบหรือฟังก์ชันมีความถี่ต่อเนื่อง
7. ประยุกต์ใช้อนุกรมฟูเรียร์กับปัญหาทางฟิสิกส์ได้

บทที่ 4
อนุกรมฟูเรียร์

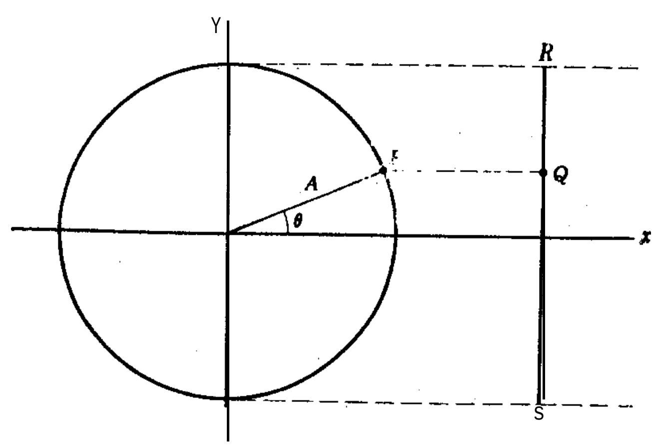
4.1 <u>การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย การเคลื่อนที่ของคลื่นและฟังก์ชันเป็นคาบ</u>

ให้อนุกรม P (ดูรูป 4.1) เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่รอบวงกลมรัศมี A ที่เวลาเดียวกันนี้ ให้อนุภาค Q เคลื่อนที่ตามเส้นตรง RS โดยที่พิกัด y ของ P และ Q เท่ากันเสมอ ถ้า ω เป็นตามความเร็วเชิงมุมของ P ในหน่วยเรเดียน/วินาที และ $\theta = 0$ เมื่อ $t = 0$ (รูป 4.1) เมื่อเวลา t ต่อมา

$$\theta = \omega t \qquad (4.1)$$

พิกัด y ของ Q (ซึ่งเท่ากับพิกัด y ของ P) คือ

$$Y = A\sin\theta = A\sin\omega t \qquad (4.2)$$



รูป 4.1

การเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของ Q เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย (simple harmonic motion) จากนิยามวัตถุจะเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย ถ้าการขจัดของมันจากตำแหน่งสมดุลย์สามารถเขียนได้ในรูป $A \sin\omega t$ (หรือ $A \cos\omega t$ หรือ $A \sin(\omega t + \varphi)$ ซึ่งฟังก์ชันทั้งสองนี้จะต่างจาก $A \sin\omega t$ เฉพาะเพียงแต่การเลือกออริจินเท่านั้น ฟังก์ชันเหล่านี้เรียกว่า ฟังก์ชันไซนูซอยดอล (sinusoidal)

พิกัด x และ y ของอนุภาค P (ในรูป 2.1) คือ

$$x = A \cos\omega t \qquad y = A \sin\omega t \tag{4.31}$$

ถ้าเราคิดว่า P เป็นจุด $z = x + iy$ ในระนาบเชิงซ้อน (complex plane) เราสามารถแทนสมการ (4.3) ด้วยสมการเพียงสมการเดียวที่อธิบายการเคลื่อนที่ของ P คือ

$$z = x+iy = A(\cos\omega t + i \sin\omega t)$$

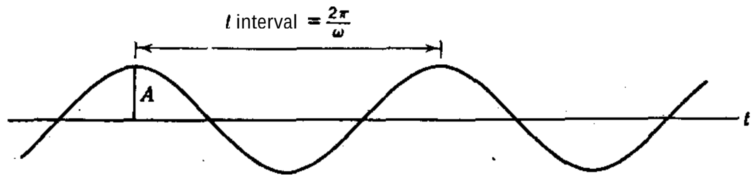
$$= A e^{i\omega t} \tag{4.41}$$

นอกจากจะใช้สัญญลักษณ์เชิงซ้อนอธิบายการเคลื่อนที่ของจุด P แล้วยังใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของ Q ได้ด้วย แต่ต้องตระหนักว่าตำแหน่งจริง ๆ ของ Q นั้นเป็นส่วนจินตภาพของ z ความเร็วของ Q ก็เป็นเช่นเดียวกันกล่าวคือ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = A\, i\omega e^{i\omega t}$$

$$= A\, i\omega(\cos\omega t + i \sin\omega t) \tag{4.5}$$

ส่วนจินตภาพของสมการ (4.5) คือ $A\, \omega\cos\omega t$ ซึ่งเท่ากับ dy/dt จากสมการ (4.2)



รูป 4.2

ถ้าเขียนกราฟของ x หรือ y ในสมการ (4.2) หรือ (4.3) เป็นฟังก์ชันของ t จะได้กราฟดังรูป 4.2 รูป 4.2 แทนฟังก์ชัน $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sin(\omega t + \varphi)$ ซึ่งขึ้นกับเราเลือกออริจิน A เรียกว่า อัมปลิจูดของการสั่นหรืออัมปลิจูดของฟังก์ชัน ในฟิสิกส์อัมปลิจูดเป็นการขจัดสูงสุดของ Q จากตำแหน่งสมดุลย์ คาบของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายหรือคาบของฟังก์ชันนี้เป็นช่วงเวลาที่การสั่นครบหนึ่งรอบซึ่งเท่ากับ $2\pi/\omega$

เราสามารถเขียนความเร็วของ Q จากสมการ (4.5) ได้เป็น

$$\frac{dy}{dt} = A\omega\cos\omega t = B\cos\omega t \qquad (4.6)$$

ในที่นี้ B เป็นค่าสูงสุดของความเร็วและเรียกว่าอัมปลิจูดของความเร็ว (velocity amplitude) ข้อสังเกตความเร็วมีคาบเท่ากับการขจัด ถ้า m เป็นมวลของอนุภาค Q จะได้พลังงานจลน์ของอนุภาค Q คือ

$$\text{พลังงานจลน์} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mB^2\cos^2\omega t \qquad (4.7)$$

เมื่อพิจารณาฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ในอุดมคติซึ่งไม่มีการสูญเสียพลังงาน จะได้พลังงานทั้งหมด (พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์) ต้องเท่ากับค่าพลังงานจลน์มากที่สุดกล่าวคือ $\frac{1}{2}mB^2$

$$\text{พลังงานทั้งหมด} = \frac{1}{2}mB^2 \qquad (4.8)$$

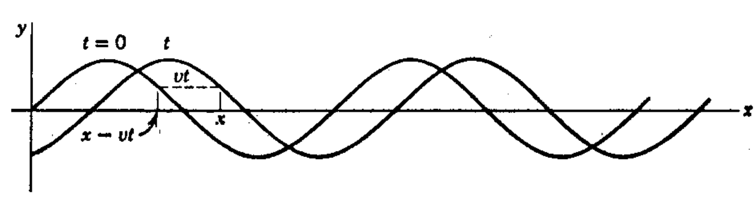
คลื่นก็เป็นตัวอย่างที่สำคัญอีกตัวอย่างหนึ่งของการออสซิเลต

พิจารณาคลื่นน้ำซึ่งรูปร่างของผิวน้ำเป็นเส้นโค้งรูปไซน์ ถ้าเราถ่ายรูป (ที่เวลา $t = 0$) ของผิวหน้าน้ำ สมการของรูปนี้ควรเขียนได้เป็น

$$y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (4.9)$$

เมื่อ x แทนระยะในแนวระดับ และ λ เป็นระยะระหว่างยอดของคลื่น โดยปกติแล้ว λ เรียกว่าความยาวคลื่น แต่ในทางคณิตศาสตร์ λ มีค่าเท่ากับระยะ x ที่เป็นคาบของฟังก์ชันนี้

สมมติว่าเมื่อเวลา t ต่อมาเราถ่ายภาพคลื่นอีกครั้ง เมื่อคลื่นเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ vt (v เป็นความเร็วของคลื่น) รูป 4.3 แสดงรูปถ่ายคลื่น 2 ภาพที่เขียนซ้อนกัน

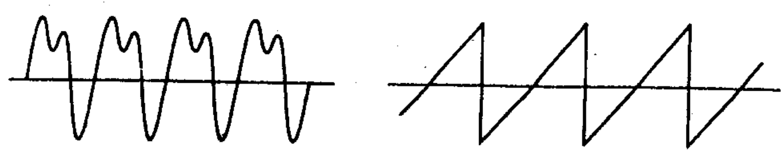


รูป 4.3

จากรูป 4.3 จะเห็นว่าค่าของ y ที่จุด x บนกราฟซึ่งระบุด้วย t จะเท่ากับค่าของ y ที่จุด $x - vt$ บนกราฟที่ระบุด้วย $t = 0$ ถ้าสมการ (4.9) เป็นสมการคลื่นที่ $t = 0$ ดังนั้น

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \qquad (4.10)$$

สมการ (4.10) เป็นสมการคลื่นที่เวลา t

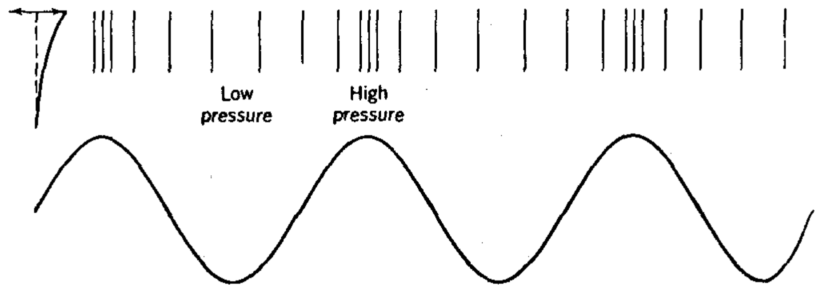


รูป 4.4

ไซน์และโคไซน์เป็นฟังก์ชันเป็นคาบซึ่งมีคาบเท่ากับ 2π แต่ฟังก์ชันเป็นคาบอาจเป็นกราฟที่ยุ่งยากซึ่งมีลักษณะซ้ำ ๆ กัน ดูรูป 4.4 ช่วงของการซ้ำกันคือคาบ จากนิยามฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นคาบ ถ้า $f(x + T) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x และ T เรียกว่า คาบของ $f(x)$ เช่นคาบของ $\sin x$ คือ 2π เนื่องจาก $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ คาบของ $\sin 2\pi x$ คือ 1 เพราะ $\sin 2\pi(x + 1) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi x$ และคาบของ $\sin(\pi x/\ell)$ คือ 2ℓ เพราะ $\sin(\pi/\ell)(x + 2\ell) = \sin(\pi x/\ell)$ โดยทั่วไปแล้วคาบของ $\sin(2\pi x/T)$ คือ T

4.2 การประยุกต์ของอนุกรมฟูเรียร์

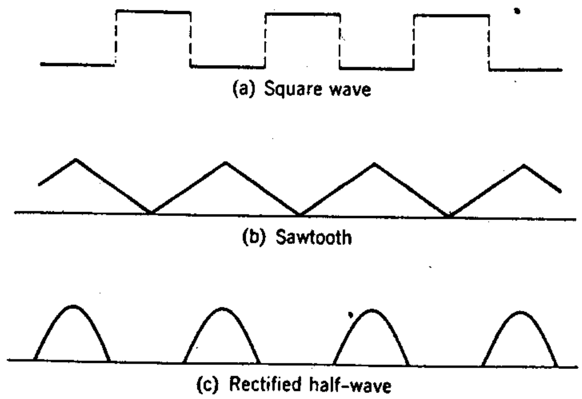
การสั่นของส้อมเสียงเป็นตัวอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย เมื่อเราได้ยินเสียงที่เกิดขึ้นจากส้อมเสียงหมายความว่า คลื่นเสียงได้เคลื่อนที่ผ่านอากาศจากส้อมเสียงมายังหูเรา ขณะที่ส้อมเสียงสั่นนั้นมันจะผลักดันโมเลกุลของอากาศทำให้เกิดบริเวณความดันสูงและต่ำสลับกัน (ดูรูป 4.5) ถ้าเราวัดความดันเป็นฟังก์ชันของ x และ T จากส้อมเสียงไปยังตัวเรา เราจะพบว่าความดันนั้นอยู่ในรูปของสมการ (4.10)



รูป 4.5

คลื่นเสียงเป็นคลื่นไซน์ที่มีความถี่แน่นอน ในภาษาดนตรีคือ pure tone สมมติว่าเราได้ยิน pure tone จำนวนมากพร้อม ๆ กัน ซึ่งผลสุดท้ายก็คือคลื่นเสียงความดันจะไม่ใช่ฟังก์ชันไซน์เดียวแต่เป็นผลรวมของฟังก์ชันไซน์หลาย ๆ ฟังก์ชัน หรือถ้าเรากดคีย์เปียโนเสียงที่เราได้ยินจะไม่ใช่คลื่นเสียงที่มีความถี่เดียวแต่จะเป็นคลื่นเสียงที่ประกอบด้วยจำนวนโอเวอร์โทน (overtone) หรือฮาร์โมนิกของความถี่ 2, 3, 4 เป็นต้น คูณกับความถี่มูลฐาน (fundamental) ถ้า $\sin\omega t$ และ $\cos\omega t$ สอดคล้องกับความถี่มูลฐาน ดังนั้น $\sin n\omega t$ และ $\cos n\omega t$ สอดคล้องกับฮาร์โมนิกที่สูงขึ้น ผลรวมของมูลฐานและฮาร์โมนิกต่าง ๆ จะเป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่ยุ่งยากซึ่งมีคาบเท่ากับของมูลฐาน เมื่อกำหนดฟังก์ชันที่ยุ่งยากนี้มาให้ เราจะเขียนฟังก์ชันนี้ได้อย่างไรในลักษณะเป็นผลรวมของเทอมที่สอดคล้องกับฮาร์โมนิกทั้งหลาย กล่าวคือ เทอมของอนุกรมอนันต์ที่เรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์

นอกจากจะประยุกต์อนุกรมฟูเรียร์กับคลื่นเสียงแล้ว ยังใช้อธิบายคลื่นชนิดต่าง ๆ เช่น คลื่นวิทยุ แสงช่วงที่ตามองเห็นได้ คลื่นน้ำ เป็นต้น เราอาจเคยเห็นเส้นโค้งไซน์ที่ใช้แทนกระแสสลับ (a-c) หรือโวลต์เตจในไฟฟ้า ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ตัวอย่างของฟังก์ชันเหล่านี้ แสดงดังรูป 4.6 ซึ่งอาจจะแทนสัญญาณ (โวลท์เตจ หรือกระแส) ที่ให้แก่วงจรไฟฟ้า เราต้องการทราบความถี่ a-c (ฮาร์โมนิก) ทั้งหลายที่มารวมกันด้วยสัดส่วนที่พอเหมาะเพื่อทำให้เกิดสัญญาณนั้นขึ้น



รูป 4.6

ในกรณีที่สัญญาณไฟฟ้าผ่าน net work เช่น วิทยุ บางฮาร์โมนิกอาจสูญหายไป แต่ถ้าส่วนที่สำคัญเกือบทั้งหมดของสัญญาณที่ให้เข้าไปผ่านออกมาได้ เราจะกล่าวว่าวิทยุนั้นมีคุณภาพสูง การหาว่าฮาร์โมนิกไหนมีความสำคัญในสัญญาณที่กำหนดให้ เราต้องกระจายสัญญาณให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ เทอมของอนุกรมที่มีสัมประสิทธิ์มีค่ามากจะแทนฮาร์โมนิก (ความถี่) ที่มีความสำคัญ

เนื่องจากไซน์และโคไซน์เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ เรามักจะใช้ไซน์และโคไซน์ในรูปตรีโกณมิติมากกว่าในรูปของอนุกรมกำลังเพราะฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ได้ทุกอันดับเท่านั้นจึงสามารถกระจายในรูปอนุกรมกำลังได้ แต่ฟังก์ชันเป็นคาบส่วนใหญ่มักจะไม่ต่อเนื่องหรือไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (ดูรูป 4.6) อย่างไรก็ตามอนุกรมฟูเรียร์สามารถแทนฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องหรือฟังก์ชันที่กราฟมีมุมได้ ปัญหาของเราคือการกระจายฟังก์ชันเป็นคาบที่กำหนดให้ในอนุกรมของไซน์และโคไซน์ ขั้นต้นเพื่อให้สูตรอยู่ในรูปที่ง่ายจะเริ่มต้นด้วยฟังก์ชันที่มีคาบ 2π สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดให้ที่มีคาบ 2π เราจะเขียนได้เป็น

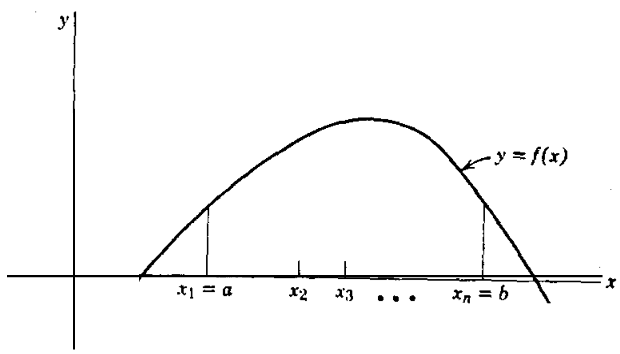
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (4.11)$$

สัมประสิทธิ์ของ a_n และ b_n จะแสดงวิธีการหาต่อไป

4.3 ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน

ค่าเฉลี่ยของกลุ่มเลขจำนวนหนึ่งหาได้จากการรวมเลขทั้งกลุ่มแล้วหารด้วยจำนวนตัวเลขในกลุ่ม สำหรับการประมาณเพื่อเฉลี่ยฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง (a, b) หาได้โดยการเฉลี่ยจำนวนค่าของ $f(x)$ (ดูรูป 4.7)



รูป 4.7

ค่าเฉลี่ยของ $f(x)$ ในช่วง (a, b) ประมาณเท่ากับ

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n} \qquad (4.12)$$

การประมาณนี้จะมีค่าดีขึ้นเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น ให้จุด $x_1, x_2, \ldots$ ห่างกัน Δx คูณเศษและส่วนของค่าเฉลี่ยที่ประมาณด้วย Δx ดังนั้นสมการ (4.12) คือ

$$\frac{[f(x_1) + \ldots + f(x_n)]\,\Delta x}{n\,\Delta x} \qquad (4.13)$$

เนื่องจาก $n\Delta x = b-a$ เป็นความยาวทั้งหมดของช่วงที่เราเฉลี่ย ถ้าเราให้ $n \to \infty$ และ $\Delta x \to 0$ เศษจะมีค่าเป็น $\int_a^b f(x)dx$ และ ดังนั้น

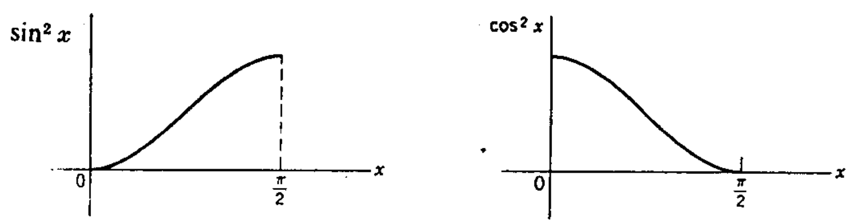
$$\text{ค่าเฉลี่ยของ } f(x) \text{ ในช่วง } (a,\ b) = \int_a^b \frac{f(x)dx}{b-a} \qquad (4.14)$$

สำหรับปัญหาบางปัญหาพบว่าค่าเฉลี่ยของ sin x ในช่วงหนึ่งคาบเป็นศูนย์ ค่าเฉลี่ยของความเร็วของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์อย่างง่ายในช่วงของการสั่นเป็นศูนย์ ในกรณีเช่นนี้เราจะสนใจค่าเฉลี่ยของกำลังสองของฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น กระแสไฟฟ้าสลับในเส้นลวดอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันไซน์ รากที่สองของค่าเฉลี่ยของไซน์กำลังสองเรียกว่ารากของกำลังสองเฉลี่ย (root mean square) หรือค่ายังผล (effective) ของกระแสซึ่งเป็นค่าที่จะวัดได้ด้วย ac แอมมิเตอร์ หรือกรณีฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย พลังงานจลน์เฉลี่ย (ค่าเฉลี่ยของ $\frac{1}{2}mv^2$) คือ $\frac{1}{2}m$ คูณกับค่าเฉลี่ยของ v^2 การหาค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 x$ ในหนึ่งคาบ (เช่นจาก $-\pi$ ไป π) ทำได้โดยการอินทิเกรตสมการ (4.14) เมื่อ $f(x)$ คือ $\sin^2 x$ โดยที่ $b = \pi$ และ $a = -\pi$ แต่มีวิธีการที่ง่ายกว่านี้จากการพิจารณากราฟของ $\cos^2 x$ และ $\sin^2 x$ (ดูรูป 4.8) จะเห็นได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟทั้งสองในช่วงหนึ่งในสี่ของคาบใด ๆ จะเท่ากัน ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \tag{4.15}$$

ในทำนองเดียวกัน (สำหรับอินทิกรัล $n \neq 0$) .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx \tag{4.16}$$



รูป 4.8

แต่เนื่องจาก $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 nx + \cos^2 nx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \tag{4.17}$$

ใช้สมการ (4.16) เราจะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi$$

จากสมการ (4.14) จะเห็นได้ว่า

ค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 nx$ (ในหนึ่งคาบ) = ค่าเฉลี่ยของ $\cos^2 nx$ (ในหนึ่งคาบ)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

จากสมการข้างต้นแสดงว่าค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$ คือ 1 ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 nx$ หรือของ $\cos^2 nx$ คือ $\frac{1}{2}$

4.4 สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์

การหาสูตรสำหรับ a_n และ b_n ในสมการ (4.11) เราต้องใช้อินทิกรัล ต่อไปนี้

ค่าเฉลี่ยของ sin mx cos nx (ในหนึ่งคาบ)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

ค่าเฉลี่ยของ sin mx sin nx (ในหนึ่งคาบ)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = -0 \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ยของ cos mx cos nx (ในหนึ่งคาบ)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \end{cases}$$

เราได้แสดงในหัวข้อที่แล้วว่าค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 nx$ และ $\cos^2 nx$ คือ $\frac{1}{2}$

การหา a_o เราหาค่าเฉลี่ยในช่วง $(-\pi , \pi)$ ของแต่ละเทอมในสมการ (4.11)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_o}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\, dx$$

$$+ a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x dx + \ldots + b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx + \ldots$$

เนื่องจากอินทิกรัลทางด้านซ้ายมือเป็นศูนย์ยกเว้นเทอมแรกเพราะเป็นอินทิกรัลของ sin mx cos nx หรือ cos mx cos nx เมื่อ $n = 0$ และ $m \neq 0$ (นั่นคือ $m \neq n$) ดังนั้นเราจะได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_o}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_o}{2}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (4.18)$$

ถ้ากำหนด $f(x)$ สำหรับการกระจายในอนุกรมฟูเรียร์มาให้เราสามารถคำนวณหา a_o ได้

การหา a_1 ทำได้โดยคูณสมการ (4.11) ด้วย $\cos x$ แล้วหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอม นั่นคือ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = \frac{a_o}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx + a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx +$$

$$+ a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x \cos x\, dx + \ldots$$

$$+ b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x \cos x\, dx + \ldots$$

ทุกเทอมทางขวามือของสมการข้างต้นเป็นศูนย์หมด ยกเว้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}$$

จะได้ a_1 มีค่าเป็น

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx$$

สำหรับค่า a_n ใด ๆ หาได้จากการคูณสมการ (4.11) ด้วย cos nx แล้วหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอม กล่าวคือ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_o}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + a_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx$$

$$+ a_2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\,dx + \ldots$$

$$+ b_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx + \ldots$$

เทอมทางขวามือเป็นศูนย์ยกเว้นเทอม

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}$$

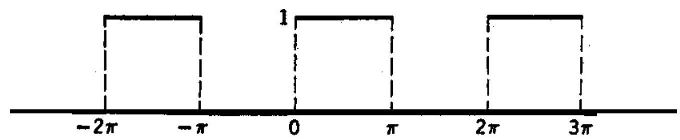
ดังนั้นจะได้ค่า a_n คือ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad (4.19)$$

การหาค่า b_n เราคูณสมการ (4.11) ด้วย sin nx แล้วหาค่าเฉลี่ย ผลสุดท้ายจะได้ค่า

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (4.20)$$

<u>ตัวอย่าง 4.1</u> จงกระจายฟังก์ชัน $f(x)$ ดังรูปข้างล่างเป็นอนุกรมฟูเรียร์



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ นี้เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ 2π จึงกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ได้ หรือแทนที่จะกำหนดกราฟของ $f(x)$ มาให้เราสามารถกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ได้เป็น

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \; 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

โดยที่ $f(x)$ มีคาบ 2π · จากสมการ (4.19) และ (4.20) MI a_n และ b_n ได้ดังนี้

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 0 . \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} 1 . \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} & \text{สำหรับ} \quad n \neq 0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1 & \text{สำหรับ} \quad n = 0 \end{cases}$$

ดังนั้น $a_o = 1$ และ a_n อื่น ๆ $= 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ} \quad n \quad \text{เป็นเลขคู่} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{สำหรับ} \quad n \quad \text{เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในสมการ (4.11) เราจะได้

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots . + \ldots \right)$$

สำหรับฟังก์ชันนี้อาจแทนพัลซ์โวลต์เตจเป็นคาบในเทอมของอนุกรมฟูเรียร์ ควรจะคล้องจองกับความถี่ a-c ที่แตกต่างกันซึ่งรวมกันเป็นโวลท์เตจคลื่นสี่เหลี่ยม (square wave) และขนาดของสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของความถี่ต่าง ๆ สัมพัทธ์กัน

<u>ตัวอย่าง</u> 4.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) ซึ่งมีคาบ 2π โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

วิธีทำ จากสมการ (4.18)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

จากสมการ (4.19)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} - \left[\cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(1-n)x}{1-n} + \frac{\cos(1+n)x}{1+x} \right) \right|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(\pi - n\pi)}{1-n} + \frac{\cos(\pi + n\pi)}{1+n} - \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{1-n} + \frac{-\cos n\pi}{1+n} - \frac{2}{1-n^2} \right)$$

$$= \frac{1 + \cos n\pi}{\pi (1-n')} \qquad n \neq 1$$

ถ้า $n = 1$; $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = 0$

จากสมการ (4.20)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n} \right) \right|_0^{\pi}$$

$$= 0 \ ; \ n \neq 1$$

ถ้า $n = 1$,

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

b_1

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2\pi} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \ldots \right)$$

4.5 ทฤษฎีของไดริชเลท์

ทฤษฎีของไดริชเลท์ (Dirichlet's theorem) เป็นทฤษฎีเกี่ยวกับคอนเวอร์เจนซ์ (convergence) ของอนุกรมฟูเรียร์และคุณสมบัติของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งอาจแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ กล่าวคือ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ 2π อยู่ในช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$ โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกล้อมรอบ (bound) มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเป็นจำนวนที่แน่นอน และมีความไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนที่แน่นอนแล้วอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ จะคอนเวอร์สไปสู่ค่า $\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$ เมื่อ x เป็นจุดที่ฟังก์ชันมีความไม่ต่อเนื่อง $f(x+)$ เป็นลิมิตขวาของ $f(x)$ และ $f(x-)$ เป็นลิมิตซ้ายของ $f(x)$

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกล้อมรอบ หมายความว่าฟังก์ชันของมันทั้งหมดอยู่ระหว่าง $\pm M$ สำหรับค่าคงที่ M ที่เป็นบวก นั่นคือ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) \right| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = 2\pi M$$

ซึ่งมีค่าจำกัดที่แน่นอน

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ 2π เมื่อ

$$f(x) = -\pi \qquad -\pi < x < 0$$

$$= x \qquad 0 < x < \pi$$

วิธีทำ จากสมการ (4.18) $a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = -\frac{\pi}{2}$

จากสมการ (4 . 1 9) $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2}$$

$$a_{2n} = 0; \quad a_{2n-1} = \frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

จากสมการ (4.20) $b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi)$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots$$

$$+ 3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

กราฟของฟังก์ชันมีความไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ ซึ่ง ณ จุด $x = 0$ นี้ อนุกรมจะคอนเวอร์สสู่ $-\frac{\pi}{2}$ เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left[f(0_+) + f(0_-)\right]$

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

หรือ $$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots$$

4.6 รูปเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์

เนื่องจากไซน์และโคไซน์สามารถเขียนในเทอมของเลขเชิงซ้อนได้ดังสมการ

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

ถ้าแทนสมการข้างต้นลงในอนุกรมฟูเรียร์ เช่น สมการของ $f(x)$ ในตัวอย่าง 4.1 จะได้อนุกรมของเทอมที่อยู่ในรูป e^{inx} และ e^{-inx} ซึ่งเป็นรูปเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์ หรือถ้าต้องการจะหาสัมประสิทธิ์ในรูปเชิงซ้อนโดยตรงเราสมมติอนุกรมเป็น

$$f(x) = C_o + C_1 e^{ix} + C_{-1}e^{-ix} + C_2e^{2ix} + C_{-2}e^{-2ix} + \ldots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{inx} \qquad (4.21)$$

และพยายามหา C_n เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ e^{ikx} ในช่วง $(-\pi, \pi)$ เป็นศูนย์เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็มไม่เท่ากับศูนย์ การหาค่า C_o จะหาค่าเฉลี่ยของเทอมในสมการ (4.21) ดังนี้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = C_o \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \text{ค่าเฉลี่ยของเทอมในรูป } e^{ikx}$$

ซึ่ง k เป็นเลขจำนวนเต็ม $\neq 0$

$$= C_o + 0$$

$$C_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

การหา C_n เราคูณสมการ (4.21) ด้วย e^{-inx} และหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอมอีกครั้งจะได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = C_o \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dx + C_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, e^{ix} dx$$

$$+ C_{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, e^{-ix}\, dx + \ldots$$

เทอมทางขวามือเป็นค่าเฉลี่ยของเอกซ์โปเนนเชียล e^{ikx} เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นทุกเทอมเป็นศูนย์ยกเว้นเทอมที่ประกอบด้วย C_n และจะได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = C_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, e^{inx}\, dx$$

$$= C_n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = C_n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx \qquad (4.22)$$

ในกรณี n เป็นลบ มีลักษณะเช่นเดียวกับ n เป็นบวก กล่าวคือ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นจริง $C_{-n} = C_n^*$ เมื่อ C_n^* เป็นคอนจูเกตเชิงซ้อนของ C_n

<u>ตัวอย่าง</u> 4.4 จงกระจายฟังก์ชั่น $f(x)$ ของตัวอย่างที่ 4.1 ให้อยู่ในรูปของเชิงซ้อน

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (4.22)

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\, 0.\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\, .\, 1.\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-inx}}{-in}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{-2\pi in}\left(e^{-in\pi} - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi in} & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ 0 & n \text{ เป็นเลขคู่} \neq 0 \end{cases}$$

$$C_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \frac{e^{5ix}}{5} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \frac{e^{-5ix}}{-5} + \ldots\right)$$

ข้อสังเกต ถ้าเราใช้สูตรของออยเลอร์กับอนุกรมข้างต้นโดยรวมเทอมที่เหมือนกันจะได้

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{-ix} + e^{-ix}}{2i} =\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots)$$

ซึ่งมีรูปเหมือนสมการของ $f(x)$ ในตัวอย่าง 4.1

4.7 การขยายช่วงของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน $\sin nx$ และ $\cos nx$ และ e^{inx} มีคาบ 2π และเราได้พิจารณาในช่วง $(-\pi, \pi)$ ซึ่งมีความยาวของช่วง 2π ดังได้กล่าวมาแล้ว ถ้ากำหนด $f(x)$ ในช่วง $(-\pi, \pi)$ เราจะเขียนกราฟของ $f(x)$ ในช่วงนี้ได้และสามารถเขียนกราฟ $f(x)$ ซ้ำ ๆ กันสำหรับช่วง $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 5\pi)$, $(-3\pi, -\pi)$ เป็นต้น มีช่วงอื่น ๆ อีกจำนวนมากที่มีความยาวช่วง 2π ซึ่งช่วงใดช่วงหนึ่งของช่วงเหล่านี้เราใช้เป็นช่วงมูลฐานได้ ถ้ากำหนด $f(x)$ ในช่วงใด ๆ ที่มีความยาวช่วง 2π เราสามารถเขียนกราฟ $f(x)$ ในช่วงที่กำหนดนั้นได้ และเขียนซ้ำ ๆ กันอย่างเป็นคาบด้วยคาบ 2π เราต้องการกระจายฟังก์ชันเป็นคาบนี้ในเทอมของอนุกรมฟูเรียร์ การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เราใช้ค่าเฉลี่ยของคาบนั้น สูตรสำหรับสัมประสิทธิ์ยังคงไม่เปลี่ยน (ยกเว้นลิมิตของการอินทิเกรต) ถ้าเราใช้ช่วงมูลฐานอื่น ๆ ที่มีความยาวช่วง 2π ในทางปฏิบัติแล้วช่วง $(-\pi, \pi)$ และ $(0, 2\pi)$ เป็นช่วงหนึ่งที่ใช้บ่อยที่สุด สำหรับ $f(x)$ ที่กำหนดในช่วง $(0, 2\pi)$ และซ้ำกันอย่างเป็นคาบ สมการ (4.19), (4.20) และ (4.22) ควรเป็น

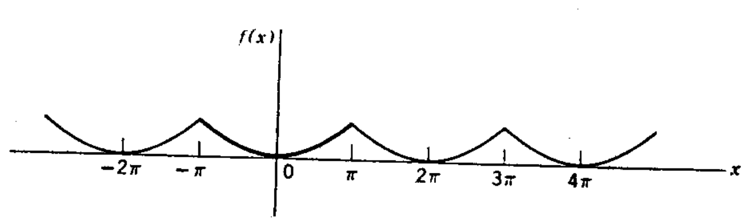
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (4.23)$$

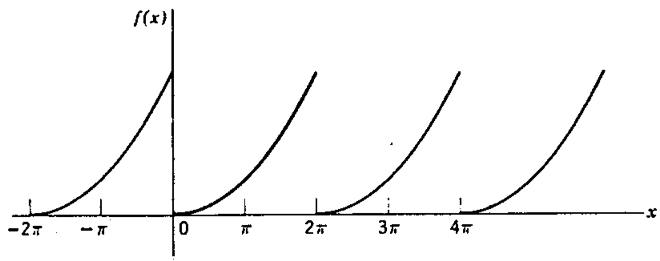
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

และสมการ (4.11) และ (4.21) ไม่เปลี่ยน

ตัวอย่างเช่น กำหนด $f(x) = x^2$ ในช่วง $(-\pi, \pi)$ ฟังก์ชันที่ถูกขยายช่วงซึ่งมีคาบ 2π แสดงดังรูป 4.9 แต่ถ้ากำหนด $f(x) = x^2$ ในช่วง $(0, 2\pi)$ ฟังก์ชันเป็นคาบที่ถูกขยายช่วงจะแตกต่างกัน (ดูรูป 4.10) ในทางตรงข้าม กำหนด $f(x) = 0$ ในช่วง $(-\pi, 0)$, $f(x) = 1$ ในช่วง $(0, \pi)$ ดังตัวอย่าง 4.1 หรือ $f(x) = 1$ ในช่วง $(0, \pi)$ $f(x) = 0$ ในช่วง $(\pi, 2\pi)$ จะเห็นได้ว่ากราฟของฟังก์ชันที่ถูกขยายช่วงนั้นเหมือนกัน ในกรณีนี้เราจะได้คำตอบเดียวกัน จากสมการ (4.19), (4.20) และ (4.22) หรือจากสมการ (4.23)



รูป 4.9



รูป 4.10

ปัญหาของฟิสิกส์ช่วงความยาวไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับ 2π เสมอไป ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจะเปลี่ยนให้อยู่ในช่วงอื่น ๆ พิจารณาช่วงความยาว 2ℓ เช่น $(-\ell, \ell)$ หรือ $(0, 2)$ ฟังก์ชัน $\sin(n\pi x/\ell)$ มีคาบ 2ℓ เนื่องจาก

$$\sin\frac{n\pi}{\ell}(x + 2\ell) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} + 2n\pi\right) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

ในทำนองเดียวกัน $\cos(n\pi x/\ell)$ และ $e^{in\, x/\ell}$ มีคาบ 2ℓ สมการ (4.11) และ (4.21) ถูกแทนด้วย

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\frac{\cos\pi x}{\ell} + a_2\cos\frac{2\pi x}{\ell} + \ldots$$

$$+ b_1\sin\frac{\pi x}{\ell} + b_2\sin\frac{2\pi x}{\ell} + \ldots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}) \qquad (4.24)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\pi x/\ell} \qquad (4.25)$$

(ค่าเฉลี่ยในช่วงของคาบของทุก ๆ ฟังก์ชันในที่นี้จำเป็นสำหรับหาค่า a_n, b_n และ c_n)

ในการหาค่าเฉลี่ยของเทอมต่าง ๆ ที่มีคาบ 2ℓ ($-\ell$ ถึง ℓ) เราจะแทน $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ ด้วย $\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}$ ข้อสังเกตค่าเฉลี่ยของกำลังสองของไซน์และโคไซน์ในช่วงของคาบ คือ $\frac{1}{2}$ และค่าเฉลี่ยของ $e^{in\pi x/\ell} \cdot e^{-in\pi x/\ell}$ เท่ากับ 1 คือ 1 ดังนั้นสมการ (4.19), (4.20) และ (4.22) สำหรับสัมประสิทธิ์กลายเป็น

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \tag{4.26}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \tag{4.27}$$

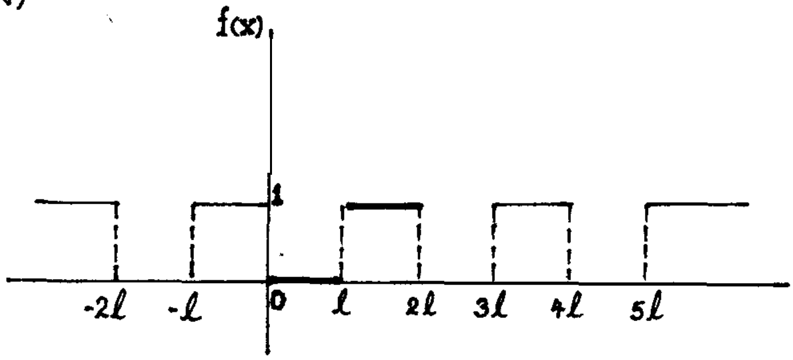
$$c_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\pi x/\ell}\,dx \tag{4.28}$$

ข้อสำคัญที่ต้องคำนึงถึงในการกระจาย $f(x)$ ในช่วง $(-\ell, \ell)$ คือ $f(x)$ นั้นอาจจะกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ได้โดยมีสัมประสิทธิ์ ดังสมการ (4.26) และ (4.27) ถ้า $f(x)$ มีคุณสมบัติครบตามทฤษฎีของไดริชเลท์ในช่วง $(-\ell, \ell)$ สำหรับช่วงอื่น ๆ เช่น $(0, 2\ell$ เราต้องเปลี่ยนลิมิตของการอินทิเกรตเป็น 0 ถึง 2ℓ โดยที่ $f(x)$ นั้นต้องมีคุณสมบัติครบตามทฤษฎีของไดริชเลท์ในช่วง $(0, 2\ell)$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \ell \\ 1 & \ell < x < 2\ell \end{cases}$

จงกระจาย $f(x)$ ในอนุกรมฟูเรียร์เอกซ์โปเนนเชียลของคาบ 2ℓ (ฟังก์ชันถูกกำหนดเช่นเดียวกับในตัวอย่าง 4.1 แต่ในช่วงที่ต่างกัน)

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นเราเขียนกราฟของ f(x) ซ้ำ ๆ กันด้วยคาบ 2ℓ (รูปข้างล่าง)



จากสมการ (4.28) เราได้

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_0^{a} 0.dx + \frac{1}{2\ell}\int_{\ell}^{2\ell} 1\ .e^{-in\pi x/\ell}dx$$

$$= \frac{1}{2\ell}\left.\frac{e^{-in\pi x/\ell}}{-in\pi/\ell}\right|_{\ell}^{2\ell} = \frac{1}{-2in\pi}\left(e^{-2in\pi} - e^{-in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{-2in\pi}\left(1 - e^{in\pi}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ เป็นเลขคู่ } \neq 0 \\ -\frac{1}{in\pi} & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$C_o = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} dx = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{i\pi} \left(e^{-i\pi x/\ell} - e^{-i\pi x/\ell} + \frac{1}{3} e^{3i\pi x/\ell}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} e^{-3i\pi x/\ell} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin\frac{\pi x}{\ell} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \ldots.\right)$$

4.8 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

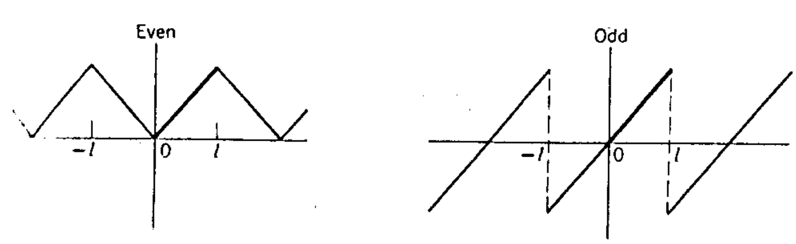
การหาสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n ของอนุกรมฟูเรียร์ จะทำได้รวดเร็วขึ้นถ้ารู้ว่าฟังก์ชันที่จะอินทิเกรตนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

$$f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันคู่ ถ้า } f(-x) = f(x) \tag{4.29}$$

กราฟของฟังก์ชันคู่นี้จะสมมาตรกับแกน y ตัวอย่างของฟังก์ชันคู่เช่น $\cos x$ หรือ x^2

$$f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันคี่ ถ้า } f(-x) = -f(x) \tag{4.30}$$

ตัวอย่างของฟังก์ชันคี่เช่น $\sin x$ หรือ x



รูป 4.11

ผลคูณของฟังก์ชันคู่กับฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่กับฟังก์ชันคี่ จะได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันคู่ แต่ฟังก์ชันคู่คูณกับฟังก์ชันคี่จะได้ฟังก์ชันคี่

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้ว่า

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx \qquad \text{เมื่อ } \ell \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ} \tag{4.31}$$

แต่ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ว่า

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0 . \qquad \text{สำหรับจำนวนจริง } \ell \text{ ใด ๆ} \tag{4.32}$$

การพิสูจน์สมการ (4.31) และ (4.32) อาจกระทำได้ง่าย ๆ โดยการพิจารณากราฟของฟังก์ชันทั้งสองดังรูป 4.11 จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันคี่ใด ๆ รอบจุดออริจินในช่วงของการอินทิเกรตจะหักล้างกันหมดไป

สำหรับฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ สูตรการหาสัมประสิทธิ์ของ a_n และ b_n จะง่ายขึ้น ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะเห็นว่า $f(x)\sin(n\pi x/\ell)$ เป็นฟังก์ชันคู่และ $f(x)\cos(n\pi x/\ell)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น a_n ในสมการ (4.26) เป็นศูนย์ จะได้ว่าอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ มีรูปเป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{4.33}$$

โดยที่ $b = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

และเรียกอนุกรมฟูเรียร์ที่มีแต่เทอมของไซน์นี้ว่าอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine series) ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $f(x)\sin(n\pi x/\ell)$ เป็นฟังก์ชันคี่และ

$f(x)\cos(n\pi x/\ell)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จะเห็นว่า b_n ในสมการ (4.27) เป็นศูนย์ อนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) จะมีรูปเป็น

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell}) \qquad (4.35)$$

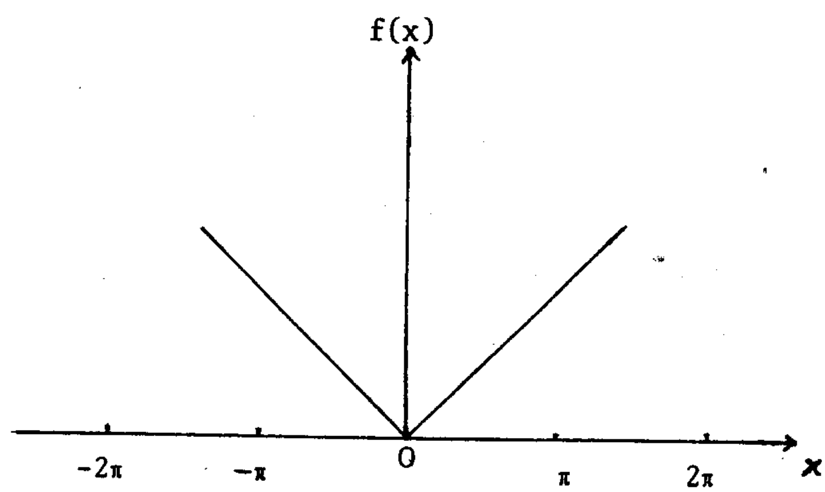
$$a_o = \frac{1}{\ell}\int_o^{\ell} f(x)dx \qquad (4.36)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_o^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})\, dx; \; n = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (4.37)$$

เรียกอนุกรมฟูเรียร์ที่มีแต่เทอมที่เป็นโคไซน์นี้ว่าอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine series)

<u>ตัวอย่าง</u> 4.6 กำหนดให้ $f(x) = |x|$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ และ f มีคาบ 2π จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x)

<u>วิธีทำ</u> กราฟของ f(x) แสดงดังรูป



จากรูปจะเห็นว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์จะมีรูปเป็น

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

โดยที่ $$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{2}{A} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$$

$$= - \frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi)$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) คือ

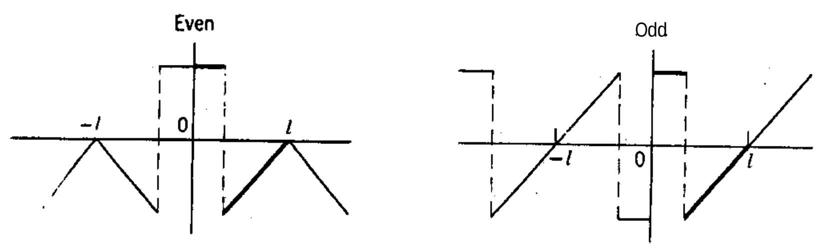
$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi)\right] \cos nx$$

ในกรณีที่ f(x) นิยามไว้เพียงครึ่งช่วงคือ $0 < x < \ell$ เราสามารถหาอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) ได้ โดยที่เราจะขยาย f(x) บน $(0, \ell)$ ไปเป็น F(x) บน $(-\ell, \ell)$ ถ้า F(x) เป็นฟังก์ชันคู่จะได้อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เมื่อ F(x) นิยามดังนี้

$$F(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \ell$$

$$= f(-x) \quad , \quad -\ell < x < 0$$

อาจแสดงด้วยกราฟ ดังรูป 4.12 ก.



รูป 4.12

และอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) บนช่วง (0, ℓ) จะมีรูปเป็น

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \qquad (4.38)$$

โดยที่ $a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \qquad n = 1, 2, 3,..$$

ถ้า F(x) เป็นฟังก์ชันคี่จะได้อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ เมื่อ F(x) นิยามดังนี้

$$F(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \ell$$

$$= -f(-x) \quad , \quad -\ell < x < 0$$

แสดงด้วยกราฟดังรูป 4.12 ข. และอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ บนช่วง $(0, \ell)$ จะมีรูปเป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \qquad (4.39)$$

โดยที่ $$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

การหาอนุกรม **(4.38)** และ (4.39) เรียกว่า การขยายครึ่งช่วง (half-range expansion) ของ $f(x)$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.7 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 1$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากต้องการอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้นต้องขยาย $f(x)$ ไปเป็นฟังก์ชันคี่บน $(-1, 1)$ โดยที่

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{1} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^{1} x^2 \sin n\pi x\, dx$$

จากการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

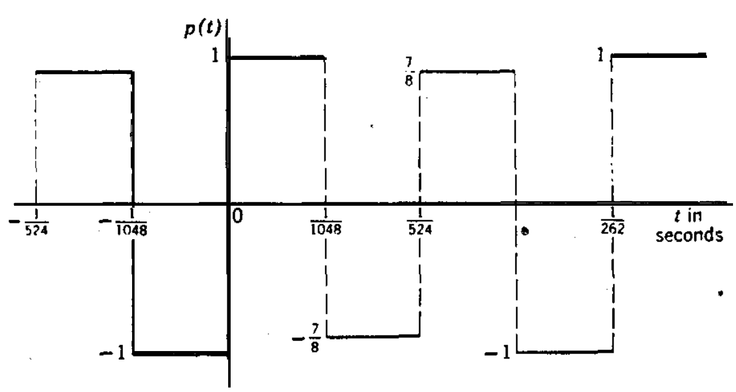
$$b_n = \frac{-4(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3} - \frac{2\cos n\pi}{n\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} - \dfrac{8}{n^3\pi^3} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ของ $f(x)$ คือ

$$\left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}\right)\sin \pi x - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{8}{3^3\pi^3}\right)\sin 3\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi x + \cdots$$

การประยุกต์อนุกรมฟูเรียร์ในคลื่นเสียงที่เกิดจากการสั่นของส้อมเสียง ดังได้กล่าวแล้วว่าขณะที่ส้อมเสียงสั่นนี้มันจะผลักดันโมเลกุลของอากาศทำให้เกิดบริเวณความดันสูงและต่ำสลับกัน สมมติว่าความดันมีลักษณะดังกราฟรูป 4.13 ถ้าต้องการทราบความถี่ของเสียงที่ได้ยินนี้ เราจะกระจาย $P(t)$ ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ จากรูป 4.13 จะเห็นได้ว่า $P(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ที่มีคาบเท่ากับ 1/262 ซึ่งคือ 2ℓ ดังนั้นในกรณีนี้ ℓ = 1/524 และจะมีเพียงเทอมไซน์ในอนุกรมฟูเรียร์เท่านั้น



รูป 4.13

จากสมการ(4.34) $b_n = 2(524)\int_0^{1/524} P(t)\sin(524n\pi t)dt$

$$= 1048 \int_0^{1/1048} \sin(524n\pi t)dt - \frac{7}{8}(1048)\int_{1/1048}^{1/524} \sin(524n\pi t)$$

$$= 1048\left[-\frac{\cos 2\frac{n\pi}{2} - 1}{524\ n\pi} + \frac{7}{8}\,\frac{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}}{524\ n\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{15}{8}\cos\frac{n\pi}{2}\right) + 1 + \frac{7}{8}\cos n\pi)$$

จากสมการข้างต้นค่า b_n สำหรับ n บางค่าคือ

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{4}, \quad b_5 = \frac{1}{5\pi}\cdot\frac{1}{4}$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{15}{2} \quad b_6 = \frac{1}{6\pi}\cdot\frac{15}{2}$$

$$b_3 = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{4} \quad b_7 = \frac{1}{7\pi}\cdot\frac{1}{4}$$

$$b_4 = 0 \quad b_8 = 0$$

ดังนั้น $P(t) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin(524\pi t)}{1} + 30\,\frac{\sin(524.2\pi t)}{2}\right.$

$$\left. + \frac{\sin(524.3\pi t}{3} + \frac{\sin(524.5\pi t)}{5} + \ldots\right)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่าเทอมแรกสอดคล้องกับความถี่มูลฐานที่สั้น 262 รอบต่อวินาที เทอมที่สองสอดคล้องกับความถี่ของโอเวอร์โทนที่ 1 หรือฮาร์โมนิกที่ 2 ซึ่งมีความถี่ 524 รอบต่อวินาที เป็นต้น ถ้าความดันมีการเปลี่ยนแปลงแบบไซน์ เช่น $A \sin 2\pi ft$ ความเข้มจะเป็นสัดส่วนกับ A^2 ในอนุกรมฟูเรียร์สำหรับ $P(t)$ ความเข้มของฮาร์โมนิกต่าง ๆ เป็นสัดส่วนกับกำลังสองของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ที่สอดคล้องกัน ในตัวอย่างนี้ความเข้มสัมพัทธ์ของฮาร์โมนิกคือ

n	= 1	2	3	4	5	6	7	8	......,..
ความเข้มสัมพัทธ์	= 1	225	1/9	0	1/25	25	1/49	0	....

จากความสัมพันธ์นี้จะเห็นว่าเสียงที่ได้ยินส่วนใหญ่คือฮาร์โมนิกที่ 2 ซึ่งมีความถี่ 524 รอบต่อวินาที

4.9 อินทิกรัลฟูเรียร์และเปลี่ยนรูปฟูเรียร์

ที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นการกระจายฟังก์ชันเป็นคาบในรูปอนุกรมของไซน์ โคไซน์ และเอกซ์โปเนนเชียลเชิงซ้อน ในทางฟิสิกส์เทอมของอนุกรมฟูเรียร์เหล่านี้แทนเซทของฮาร์โมนิก เช่น กรณีเสียงดนตรีเทอมเหล่านี้เป็นเซทของความถี่จำนวนนับไม่ได้ $n\nu$, $n = 1, 2, 3,$ กรณีกระแสไฟฟ้า อนุกรมฟูเรียร์สามารถแทนโวลต์เตจเป็นคาบซึ่งอาจคิดว่าเกิดจากเซทของโวลต์เตจ a-c ความถี่ $n\omega$ ที่มีจำนวนนับไม่ได้และสำหรับแสง อนุกรมฟูเรียร์สามารถแทนแสงที่ประกอบด้วยเซทของความยาวคลื่น (ที่เป็นค่า ๆ) λ/n, $n = 1, 2, ...$ ซึ่งเป็นเซทของสีต่าง ๆ นั่นเอง พิจารณาปัญหาสองปัญหา คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นคาบสามารถแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้หรือไม่ และเราสามารถขยายอนุกรมฟูเรียร์ให้ครอบคลุมถึงสเปกตรัมของความยาวคลื่นแสงที่ต่อเนื่องหรือคลื่นเสียงที่ประกอบด้วยเซทของความถี่ต่อเนื่องได้หรือไม่

ปัญหาดังกล่าวนี้ใช้อินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier integral) แทนอนุกรมฟูเรียร์ได้ อินทิกรัลฟูเรียร์สามารถใช้แทนฟังก์ชันที่ไม่เป็นคาบ เช่น พัลส์โวลต์เตจเพียงพัลส์เดียว นอกจากนี้อินทิกรัลฟูเรียร์ยังใช้แทนเซท (สเปกตรัม) ของความถี่ที่ต่อเนื่องด้วยเช่นกัน

กรณีความถี่ต่อเนื่อง ถ้า f(x) เป็นไปตามทฤษฎีของไดริชเลท์ทุก ๆ ช่วงจำกัด และถ้า $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\, dx$ มีค่าจำกัด จะได้ว่า

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx}\, dw \qquad (4.40)$$

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\, dx \qquad (4.411$$

ความสัมพันธ์ระหว่างคู่ของฟังก์ชัน f(x) และ g(w) เรียกว่าเปลี่ยนรูปฟูเรียร์ (Fourier transform) สมการ (4.40) และ (4.41) คืออินทิกรัลฟูเรียร์ ซึ่งสามารถจะหาค่า f(x) ได้เมื่อกำหนด g(w) ให้หรือกลับกัน (ในที่นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์หาสมการ (4.40) และ (4.41))ในหนังสือบางเล่มอาจใช้ $1/\sqrt{2\pi}$ คูณอินทิกรัลในสมการ (4.40) และ (4.41) หรืออาจใช้ $1/2\pi$ คูณอินทิกรัลใดอินทิกรัลหนึ่ง

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ เราจะแสดงให้เห็นว่า g(w) เป็นฟังก์ชันคี่ด้วยเช่นกัน แทนค่า $e^{-iwx} = \cos wx - i \sin wx$ ลงในสมการ (4.41) จะได้

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos wx - i \sin wx)dx$$

เนื่องจาก f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นอินทิกรัลของเทอม f(x) cos wx เป็นศูนย์ สมการข้างต้นจะเหลือเพียง

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i \sin wx)dx$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin wx \, dx \qquad (4.42)$$

จากสมการ (4.42) เราจะเห็นว่าถ้าแทน w ด้วย -w แล้วจะเปลี่ยนเครื่องหมายของ sin wx และจะเปลี่ยนเครื่องหมายของ g(w) ด้วย ดังนั้น g(-w) = -g(w) หรือ g(w) เป็นฟังก์ชันคี่ ในทำนองเดียวกันถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่จะได้ว่า g(w) เป็นฟังก์ชันคู่เช่นกัน

เมื่อแทนค่า e^{iwx} = cos wx + i sin wx ลงในสมการ (4.40) จะได้

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w) (iwx + i \sin wx)dx$$

$$= 2i \int_{0}^{\infty} g(w) \sin wx \, dx \qquad (4.43)$$

ถ้าแทน g(w) จากสมการ (4.42) ลงในสมการ (4.43) จะได้เลขหน้าอินทิกรัลเป็น $2/\pi$ แฟกเตอร์ $2/\pi$ อาจคูณอินทิกรัลใดอินทิกรัลหนึ่ง หรืออาจคูณแต่ละอินทิกรัลด้วย $\sqrt{2/\pi}$ ในที่นี้จะใช้ $\sqrt{2/\pi}$ คูณแต่ละอินทิกรัล

$f_s(x)$ และ $g_s(w)$ เป็นคู่ของเปลี่ยนรูปฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine transforms) ที่ใช้แทนฟังก์ชันคู่กำหนดโดย

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(w)\sin wx \, dx$$

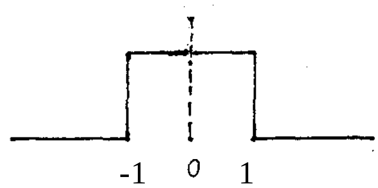
$$g_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(w)\sin wx \, dx$$

$f_c(x)$ และ $g_c(w)$ เป็นคู่ของเปลี่ยนรูปฟูเรียร์โคไซน์ที่ใช้แทนฟังก์ชันคู่ กำหนดว่า

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(w) \cos wx \, dx$$

$$g_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(w) \cos wx \, dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.8 จงหาสมการของอินทิกรัลฟูเรียร์ของฟังก์ชันดังรูป



$$f(x) = 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad |x| < 1$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad |x| > 1$$

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างนี้อาจแทนการดลในกลศาสตร์ (กล่าวคือมีแรงกระทำในช่วงเวลาสั้น ๆ เช่น การตีลูกเบสบอล) หรือพัลส์สั้น ๆ ของเสียงหรือแสงที่ไม่มีการซ้ำ

เนื่องจากฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้ไม่ใช่ฟังก์ชันเป็นคาบ จึงไม่สามารถกระจายในรูปอนุกรมฟูเรียร์ได้ แต่จะเขียน $f(x)$ ในรูปอินทิกรัลฟูเรียร์แทน ใช้สมการ (4.41) หา $g(w)$ ได้ดังนี้

$$g(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iwx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi w}\ \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{-2i}$$

$$= \frac{\sin w}{\pi w}$$

แทนค่า $g(w)$ จากสมการข้างต้นลงในสมการ (4.40) จะได้

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{\pi w}\ e^{iwx}\ dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w(\cos wx + i \sin wx)}{w}\ dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w}\ dw$$

สมการนี้เป็นอินทิกรัลที่ใช้แทนฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งแสดงดังรูปข้างต้น จากสมการนี้สามารถหาค่าอินทิกรัลได้ดังนี้

$$\int_{o}^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w} \, dx = \frac{\pi}{2} f(x) = \begin{cases} \pi/2 \text{ เมื่อ } |x| < 1 \\ \pi/4 \text{ เมื่อ } |x| = 1 \\ 0 \text{ เมื่อ } |x| > 1 \end{cases}$$

<u>บทสรุป</u>

วัตถุจะเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายถ้าการขจัดของมันจากตำแหน่งสมดุลย์สามารถเขียนได้ในรูป A sin ω (หรือ A cos ωt) เช่น คลื่นน้ำ คลื่นเสียง

สำหรับฟังก์ชั่น f(x) ที่เป็นฟังก์ชั่นเป็นคาบซึ่งมีคาบ 2π สามารถกระจายในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ได้เป็น

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (an \cos nx + bn \sin nx)$$

เมื่อ $$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$$

และ $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

ทฤษฎีของไดริชเลท์กล่าวว่า ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชั่นเป็นคาบที่มีคาบ 2π อยู่ในช่วง $-\pi < x < \pi$ โดยที่ f(x) เป็นฟังก์ชั่นที่ถูกล้อมรอบ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดเป็นจำนวนที่แน่นอน และมีความไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนที่แน่นอนแล้ว อนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) จะคอนเวอร์สไปสู่ค่า $\frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right]$ เมื่อ x เป็นจุดที่ฟังก์ชั่นมีความไม่ต่อเนื่อง $f(x_+)$ เป็นลิมิตขวาของ f(x) และ $f(x_-)$

เป็นลิมิตซ้าย

รูปเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

เมื่อ

$$c_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ 2ℓ ($-\ell$ ถึง ℓ) อาจจะกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ได้ ถ้า $f(x)$ มีคุณสมบัติครบตามทฤษฎีของไดริชเลท์ในช่วง $(-\ell, \ell)$ จะได้

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หรือ $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,d\,x$$

$$c_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-in\pi x/\ell}\, dx$$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ถ้า $f(-x) = f(x)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ถ้า $f(-x) = -f(x)$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่จะได้อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (สัมประสิทธิ์ a_n เป็นศูนย์)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่จะได้อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์(สัมประสิทธิ์ b_n เป็นศูนย์)

ถ้า $f(x)$ เป็นไปตามทฤษฎีของไดริชเลท์ทุก ๆ ช่วงจำกัด และ

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ มีค่าจำกัด จะได้ว่า

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w) e^{iwx}\, dw$$

และ
$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-iwx}\; dx$$

สองสมการข้างต้นเรียกอินทิกรัลฟูเรียร์และความสัมพันธ์ระหว่างคู่ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(w)$ เรียกว่าเปลี่ยนรูปฟูเรียร์

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงหาอัมปลิจูด คาบ ความถี่ และความเร็วอัมปลิจูดสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งระยะจากจุดออริจินคือ $s = 4 \sin(3t + 2)$

2. ลูกตุ้มอย่างง่ายประกอบด้วยมวล m (ค่าน้อย ๆ) ที่แขวนด้วยเส้นเชือก (ไม่มีน้ำหนัก จงแสดงว่าสำหรับการแกว่งอย่างน้อย ๆ (θ มีค่าน้อย) ทั้ง θ และ x เป็นฟังก์ชันของเวลากล่าวคือ การเคลื่อนที่เป็นแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย

3. จงเขียนกราฟซึ่งเป็นผลรวมของโทนมูลฐานของเสียงดนตรีและโอเวอร์โทนอื่น ๆ ที่มีรูปเป็น $\sin\pi t + \sin 2\pi t + \sin 3\pi t$

4. จงใช้นิยามของฟังก์ชันเป็นคาบแสดงว่าผลรวมที่สอดคล้องกับโทนมูลฐานของเสียงดนตรีและโอเวอร์โทนอื่น ๆ มีคาบเท่ากับของมูลฐาน

5. จงหาค่าเฉลี่ยของ ก. $\cos^2 \frac{\pi}{2}$ ในช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$

ข. $\sin 2x$ ในช่วง $(\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6})$

6. การขจัด (จากตำแหน่งสมดุลย์) ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย อาจเขียนสมการได้เป็น $y = A \sin \omega t$ หรือ $y = A \sin (\omega t + \varphi)$ ขึ้นกับการเลือกเวลาของออริจิน จงแสดงว่าพลังงานจลน์เฉลี่ยของอนุภาคมวล m (ในหนึ่งคาบของการเคลื่อนที่) มีค่าเท่ากันทั้งสองสมการการเคลื่อนที่

7. จงกระจายฟังก์ชันเป็นคาบ $f(x)$ ซึ่งมีคาบ 2π ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ เมื่อ

$$f(x) = -k \qquad \text{เมื่อ } -\pi < x < 0$$

$$= k \qquad \text{เมื่อ } 0 < x < \pi$$

8. จงกระจายฟังก์ชันเป็นคาบต่อไปนี้ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์-โคไซน์

ก. $f(x) = 1$ ในช่วง $0 < x < \pi$ และ $f(x) = -1$ ในช่วง $-\pi < x < 0$

ข. $f(x) = x$ ในช่วง $-\pi < x < \pi$

ค. $f(x) = x^2$ ในช่วง $-\pi < x < \pi$

9. จงกระจายฟังก์ชันเป็นคาบ $f(x) = x$ เมื่อ $-1 < x < 1$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ 2 ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์เอกซ์โปเนนเชียลเชิงซ้อน

10. จงหารูปเชิงซ้อนของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = e^x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

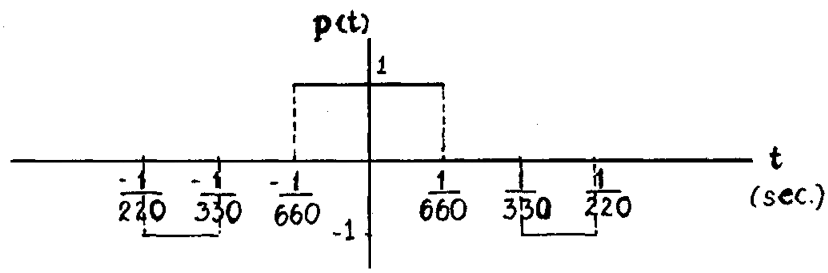
11. ผ่านโวลท์เตจ $E \sin \omega t$ เข้าเรกติไฟเออร์ครึ่งคลื่น (half-wave rectifier) ซึ่งตัดส่วนที่เป็นลบของคลื่นออก จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันนี้เมื่อ

$$V(t) = 0 \qquad -T/2 < t < 0$$

$$= E \sin wt, \qquad 0 < t < T/2$$

และ $T = 2\pi/\omega$

12. กราฟข้างล่างแสดงความดัน $p(t)$ ของคลื่นเสียง จงหาฮาร์โมนิกที่สำคัญและความเข้มสัมพัทธ์ของฮาร์โมนิกเหล่านี้



13. กำหนดให้ $f(x) = \cos x \; ; \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$

$$= 0 \qquad |x| > \pi/2$$

จงแทน $f(x)$ ด้วยเปลี่ยนรูปฟูเรียร์แบบเอกซ์โปเนนเชียลแล้วเปลี่ยนผลที่ได้เป็นเปลี่ยนรูปฟูเรียร์โคไซน์

14. กำหนดให้ $f(x) = x \quad |x| < 1$

$= 0 \quad |x| > 1$

ก. จงหาการแปลงรูปฟูเรียร์แบบเอกซ์โปเนนเชียล ของ $f(x)$

ข. จงหาการแปลงรูปฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x)$ (ซึ่งจะได้คำตอบเหมือนข้อ ก.)