บทที่ 3
เวกเตอร์

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 3 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. ประยุกต์การบวกลบเวกเตอร์ ผลคูณสเกลาร์ และผลคูณเวกเตอร์กับปัญหาทางฟิสิกส์ได้
2. หาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ทั้งในพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วได้
3. ประยุกต์อนุพันธ์บ่งทิศกับปริมาณสเกลาร์ทางฟิสิกส์เพื่อหาทิศทางที่ปริมาณทางฟิสิกส์นั้นมีอัตราการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด
4. เขียนไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ในพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลมได้
5. เปลี่ยนพิกัดเชิงเส้นโค้งที่มีแกนพิกัดตั้งฉากกัน เช่นพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลมได้
6. อธิบายความหมายของไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลในทางฟิสิกส์ได้
7. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์และทฤษฎีของสโตกส์กับปัญหาทางฟิสิกส์ได้

บทที่ 3
เวกเตอร์

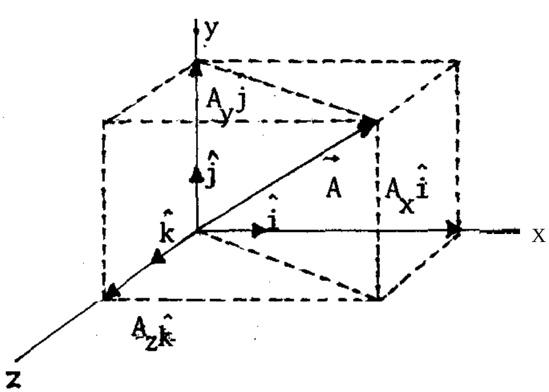
3.1 สเกลาร์และเวกเตอร์

ปริมาณในฟิสิกส์ที่บอกแต่ขนาดอย่างเดียวก็สมบูรณ์ เช่น มวล อุณหภูมิ และเวลา ปริมาณเหล่านี้เรียกว่าปริมาณสเกลาร์ แต่มีปริมาณในฟิสิกส์บางอย่างต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะสมบูรณ์ เช่น การขจัด ความเร็ว ความเร่ง แรงที่กระทำต่อวัตถุ และสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กที่จุดต่าง ๆ ปริมาณดังกล่าวนี้เรียกว่าปริมาณเวกเตอร์ ปริมาณเวกเตอร์อาจแทนได้ด้วยรูปลูกศร ทิศของลูกศรเป็นตัวแสดงทิศทางของเวกเตอร์และความยาวของลูกศรแสดงขนาดของเวกเตอร์ หรืออาจระบุเวกเตอร์จากการทำโปรเจกชั่น (projection) ไปบนแกนของระบบพิกัดใด ๆ โปรเจกชั่นเหล่านี้เรียกว่าองค์ประกอบของเวกเตอร์ (ที่สัมพัทธ์กับระบบพิกัดนั้น) ตัวอย่างเช่น ใน 2 มิติ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในพิกัดฉากตามแกน x และ y คือ A_x และ A_y หรือใน 3 มิติ เป็น A_x A_y และ A_z ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หมายถึงความยาวของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แสดงได้ด้วย $|\vec{A}|$ หรือ A และมีค่าเป็น

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{ใน 2 มิติ} \qquad (3.1)$$

หรือ

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{ใน 3 มิติ} \qquad (3.2)$$



รูป 3.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในพิกัดฉาก 3 มิติ

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย $\vec{A}$ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $|\vec{A}| \neq 0$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{a}$ ที่มีทิศทางเดียวกับทิศทาง $\vec{A}$ คือ $\vec{A}/|\vec{A}|$ และเวกเตอร์ $\vec{A}$ อาจเขียนได้เป็น $\vec{A} = A\hat{a}$ พิจารณาแกนของพิกัดฉาก ดังรูป 3.1 ให้เวกเตอร์ $\hat{i}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในทิศ +x $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในทิศ +y และ +z ตามลำดับ เวกเตอร์ทั้งสาม $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เรียกว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับระบบพิกัดนี้ เวกเตอร์ใด ๆ สามารถเขียนในเทอมขององค์ประกอบของมันและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยดังนี้ ถ้า A_x และ A_y เป็น (สเกลาร์) องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระนาบ xy ดังนั้น $\hat{i}A_x$ และ $\hat{j}A_y$ เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\vec{A}$ และผลบวกของเวกเตอร์องค์ประกอบคือเวกเตอร์ $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (3.3)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ 3 มิติ

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (3.4)$$

การรวมเวกเตอร์อาจแสดงได้โดยรูปทางเรขาคณิต เช่น จะหา $\vec{A} + \vec{B}$ ให้วางหางของ $\vec{B}$ ที่หัวของ $\vec{A}$ แล้วลากเวกเตอร์จากหางของ $\vec{A}$ ไปยังหัวของ $\vec{B}$ ดังแสดงในรูป 3.2 อีกวิธีหนึ่งสำหรับหา $\vec{A} + \vec{B}$ คือรวมองค์ประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ที่อยู่ในแกนเดียวกันจะได้องค์ประกอบของ $\vec{A} + \vec{B}$ คือ $A_x + B_x$ และ $A_y + B_y$ จากรูป 3.2 และ 3.3 สรุปได้ว่า

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ กฎการสลับที่ (commutative law) สำหรับการบวก
2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) สำหรับการบวก

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$ เราเขียนได้เป็น $3\vec{A}$ จากวิธีการรวมเวกเตอร์ อาจกล่าวได้ว่า เวกเตอร์ $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$ มีความยาวเป็น 3 เท่าของ $\vec{A}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ โดยที่แต่ละองค์ประกอบของ $3\vec{A}$ เป็น 3 เท่าขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ ดังนั้นเรากำหนดเวกเตอร์ $c\vec{A}$ (เมื่อ c เป็นเลขจำนวนจริงที่เป็นบวก) ได้ว่าเป็นเวกเตอร์ที่ยาว c เท่าของ $\vec{A}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ แต่ละองค์ประกอบของ $c\vec{A}$ เป็น c เท่าขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ (ดูรูป 3.4) การคูณของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยสเกลาร์ m จะได้เวกเตอร์ $m\vec{A}$ ที่มีขนาด $|m|$ เท่าของ $\vec{A}$ โดยที่

ถ้า $\vec{A} \neq 0$ และ $m > 0$ $m\vec{A}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

ถ้า $\vec{A} \neq 0$ และ $m < 0$ $m\vec{A}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{A}$

ถ้า $\vec{A} = 0$ หรือ $m = 0$ (หรือศูนย์ทั้งคู่) ได้ $m\vec{A} = 0$

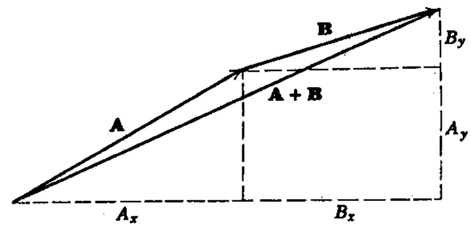
ดังนั้น 1. $m\vec{A} = \vec{A}m$ กฎการสลับที่สำหรับการคูณ

2. $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$ กฎการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ

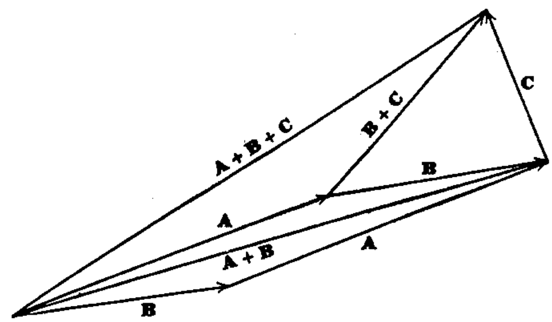
3. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$ กฎการแจกแจง

4. $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$ กฎการแจกแจง

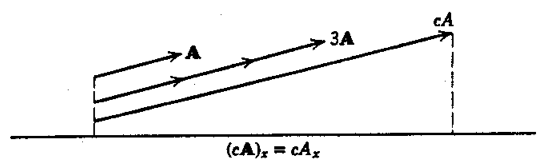
ลบของเวกเตอร์กำหนดว่าเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่าเดิมแต่มีทิศตรงกันข้าม แต่ละองค์ประกอบของ $-\vec{A}$ จะเป็นลบขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ (ดูรูป 3.5) การลบเวกเตอร์ เช่น $\vec{A} - \vec{B}$ หมายถึงการรวมเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $-\vec{B}$ แต่ละองค์ประกอบของ $\vec{A} - \vec{B}$ ได้จากการลบกันขององค์ประกอบ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กล่าวคือ $(\vec{A} - \vec{B})_x = A_x - B_x$ (ดูรูป 3.6)



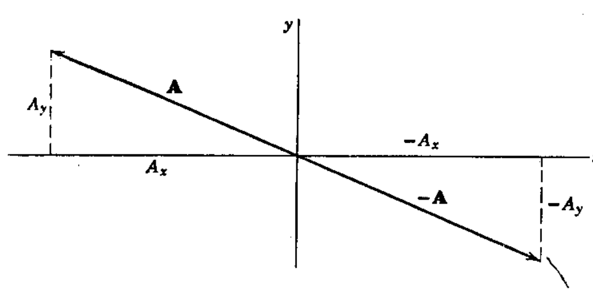
รูป 3.2



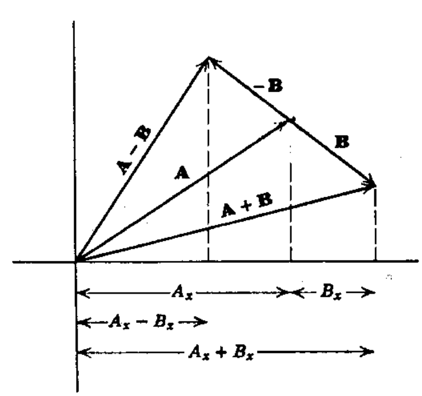
รูป 3.3



รูป 3.4

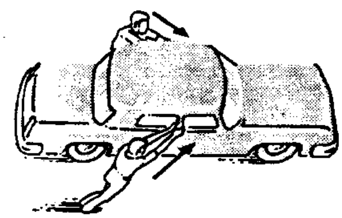


รูป 3.5

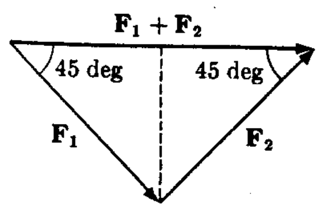


รูป 3.6

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1 ชาย 2 คน อยู่คนละข้างของรถยนต์ ออกแรงเข็นรถคนละ 100 N โดยทำมุม 45° กับแกนตามยาวของตัวรถ และมีแรงเสียดทานซึ่งมีขนาด 120 N (ดูรูป) จงหาแรงลัพธ์ที่กระทำต่อรถ



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากแรงเป็นปริมาณเวกเตอร์ ให้ $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ เป็นแรงที่ชาย 2 คนเข็นรถยนต์ ใช้รูปทางเรขาคณิตรวมแรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ ได้ดังนี้



ขนาดของแรง $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ คือ

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 2F_1 \cos 45^\circ$$

$$= 141.4 \text{ N}$$

เวกเตอร์ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ มีทิศตรงข้ามกับแรงเสียดทาน $\vec{F}_f$ ซึ่งมีขนาด 120 N

แรงลัพธ์ $\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_f$

ดังนั้นแรงลัพธ์ $\vec{F}_T$ มีทิศพุ่งไปข้างหน้าและมีขนาด (141.4 - 120) = 21.4 N

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2 เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร็วสูงสุด 10 เมตร/วินาที ข้ามแม่น้ำสายหนึ่งกว้าง 400 เมตร ซึ่งมีกระแสน้ำไหลด้วยอัตราเร็ว 5 เมตร/วินาที ถ้าต้องการข้ามแม่น้ำช่วงระยะสั้นที่สุดเท่าที่จะทำได้เพื่อให้ถึงจุดหนึ่งบนฝั่งตรงข้าม จะต้องตั้งหัวเรืออย่างไร และกินเวลานานเท่าใดเรือจึงจะแล่นถึงจุดหมาย

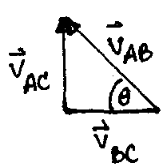
<u>วิธีทำ</u> ให้ A แทนเรือ, B แทนน้ำ และ C แทนโลก

ความเร็วเรือสัมพัทธ์กับน้ำ ; $\vec{v}_{AB}$ = 10 เมตร/วินาที ทิศ $\longrightarrow$

ความเร็วน้ำสัมพัทธ์กับโลก ; $\vec{v}_{BC}$ = 5 เมตร/วินาที ทิศ $\uparrow$

ความเร็วของเรือสัมพัทธ์กับโลก ; $\vec{v}_{AC}$ = ?

เพราะว่า $\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$



จากรูป $v_{AC} = \sqrt{v_{AB}^2 - v_{BC}^2}$

$= \sqrt{10^2 - 5^2}$

$= \sqrt{75}$

= a.7 เมตร/วินาที

$$\cos\theta = \frac{v_{BC}}{v_{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \theta = 60^{\circ}$$

$$t = \frac{400}{v_{AC}} = \frac{400}{8.7} = 46 \text{ วินาที}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3 ฝนตกลงมาด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที ในแนวดิ่ง ถ้ามีลมเหนือพัดมาด้วยความเร็ว 17.6 เมตร/วินาที แล้วชายคนหนึ่งซึ่งกำลังเดินไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 4.4 เมตร/วินาที จะมองเห็นเม็ดฝนตกลงทำมุมเท่าใดกับแนวระดับ และตกถูกชายผู้นั้นด้วยความเร็วเท่าใด

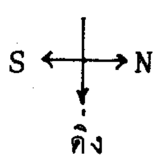
<u>วิธีทำ</u> ให้ r แทนฝน w แทนลม, m แทนคน และ e แทนโลก

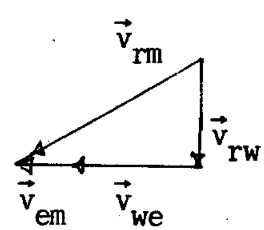
จากโจทย์ $\vec{v}_{rw}$ = 10 m/s ทิศ ↓ ดิ่ง

$\vec{v}_{we}$ = 17.6 m/s ทิศ เหนือ ⟶ ใต้

$\vec{v}_{me}$ = 4.4 m/s ทิศ ⟶ เหนือ

$\vec{v}_{rm}$ = ?





จากรูป $\vec{v}_{rm} = \vec{v}_{rw} + \vec{v}_{we} + \vec{v}_{em}$

$$= \vec{v}_{rw} + \vec{v}_{we} - \vec{v}_{em}$$

$$v_{rm} = \left[(v_{rw}^2 + (v_{we} + v_{em})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[10^2 + (17.6 + 4.4)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (584)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 24.16$$

ดังนั้นเม็ดฝนถูกชายผู้นั้นด้วยความเร็ว 24.16 m/s

ทำมุมกับแนวระดับ $\theta = \tan^{-1}\frac{10}{22} = 24.4^{\circ}$

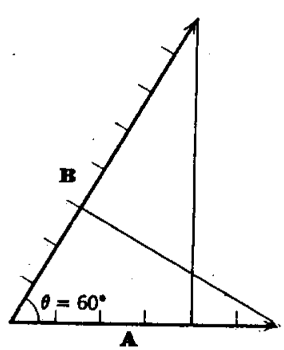
3.2 ผลคูณสเกลาร์และผลคูณเวกเตอร์

ผลคูณของ 2 เวกเตอร์มี 2 ประเภทคือ ผลคูณสเกลาร์จะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์และผลคูณเวกเตอร์จะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

ผลคูณสเกลาร์ (scalar product or dot productor) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เขียนได้เป็น $\vec{A}\cdot\vec{B}$ มีค่าเท่ากับขนาดของ $\vec{A}$ คูณกับขนาดของ $\vec{B}$ คูณกับโคไซน์ของมุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (3.5)$$

จากกฎการสลับที่ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$



รูปที่ 3.7

ถ้า $|\vec{B}| = 8,\quad |\vec{A}| = 6$

โปรเจกชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A} = 4$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 6\cdot 4 = 24$$

หรือโปรเจกชันของ $\vec{A}$ บน $\vec{B} = 3$

$$\vec{B}\cdot\vec{A} = 8\cdot 3 = 24$$

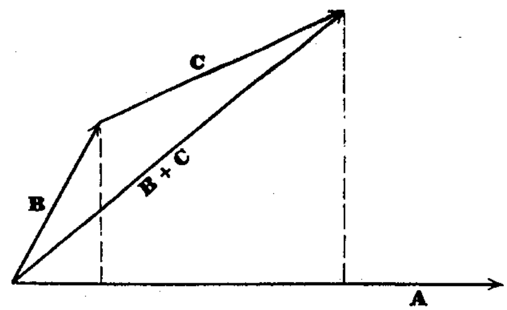
จากรูป (3.7) เราอาจเขียนได้ว่า

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}| \text{ คูณกับ (โปรเจกชันของ } \vec{B} \text{ บน } \vec{A}) \qquad (3.6)$$

หรือ

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{B}| \text{ คูณกับ (โปรเจกชันของ } \vec{A} \text{ บน } \vec{B}) \qquad (3.7)$$

และ $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 \cos 0^o = |\vec{A}|^2 = A^2$



รูป 3.8

จากรูป (3.8) จะเห็นว่าโปรเจกชันของ $(\vec{B} + \vec{C})$ บน $\vec{A}$ เท่ากับโปรเจกชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ บวกโปรเจกชันของ $\vec{C}$ บน $\vec{A}$ จากสมการ (3.6)

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = |\vec{A}|$คูณกับ (โปรเจกชันของ $(\vec{B} + \vec{C})$ บน $\vec{A}$)

$= |\vec{A}|$คูณกับ (โปรเจกชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ + โปรเจกชันของ $\vec{C}$ บน $\vec{A}$)

$= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

และ $(\vec{B} + \vec{C}) \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

ถ้ารู้องค์ประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ อาจเขียน $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ได้เป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{i} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

และถ้ากำหนดเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ เราสามารถหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองได้

เช่น $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ และ $\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = (3).(-2) + (6).(3) + (9).(1) = 21$$

$$A = (3^2 + 6^2 + 9^2)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{14}$$

$$B = (22 + 32 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = /ii-$$

ดังนั้น $(3\sqrt{14}) \cdot (\sqrt{14}) \cos\theta = 21$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^{\circ}$$

สรุปคุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์มีดังนี้

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ กฎการสลับที่

2. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{A} \cdot \vec{C}$ กฎการแจกแจง

3. $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m$, m เป็นปริมาณสเกลาร์

4. $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

   $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

5. ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

   $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

   $\vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{B}^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$

และ $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.4 จงหาโปรเจกชันของเวกเตอร์ $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ บนเวกเตอร์ $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = |\vec{B}||\vec{A}| \cos\theta$

เนื่องจาก $|\vec{A}| \cos\theta$ คือโปรเจกชันของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ ดังนั้น

$$|\vec{A}| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

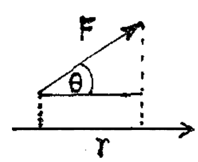
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$= 4 + 8 + 7 = 19$$

$$\vec{B} = (4^2 + (-4)^2 + 7^2)^{\frac{1}{2}} = 9$$

โปรเจกชันของ $\vec{A}$ บน $\vec{B} = \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.5 จงหางานที่ทำในการเคลื่อนที่วัตถุไปตามเวกเตอร์ $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ เมื่อให้แรง $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ กระทำต่อวัตถุ



<u>วิธีทำ</u> งานที่ทำ = (ขนาดของแรงในทิศการเคลื่อนที่)(ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไป)

$$= (F \cos\theta)(r)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{r}$$

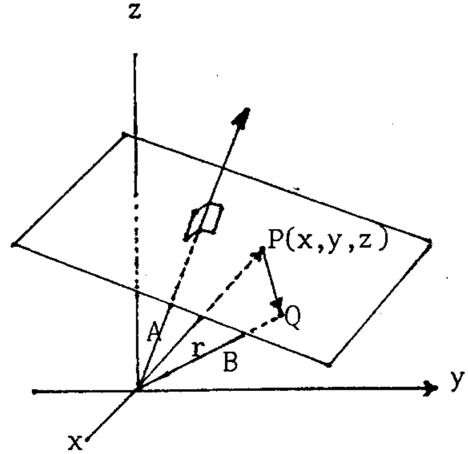
$$= (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$= 9$$

การประยุกต์ทางเรขาคณิต เช่นใช้หาสมการของระนาบใด ๆ

<u>ตัวอย่าง</u> 3.6 จงหาสมการของระนาบที่ตั้งฉากเวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ และผ่านจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{B} = \hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$ และจงหาระยะทางซึ่งตั้งฉากกับระนาบระหว่างจุดออริจินกับระนาบ

<u>วิธีทำ</u>



ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบที่ต้องการหา เวกเตอร์ $\vec{r}$ ลากจากจุดออริจินไปยังจุด P จุด Q เป็นจุดปลายสุดของ $\vec{B}$ ซึ่งอยู่บนระนาบนี้ด้วย

จากรูป $\vec{PQ} = \vec{B} - \vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{A}$

ดังนั้น $(\vec{B} - \vec{r}) \cdot \vec{A} = 0$

หรือ $\vec{r} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

แทนค่า $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ และ $\vec{B} = \hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$ ลงในสมการข้างต้นจะได้

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) = (\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$2x + 3y + 6z = (1)(2) + (5)(3) + (3)(6) = 35$$

สมการของระนาบนี้คือ $2x + 3y + 6z = 35$

ระยะทางซึ่งตั้งฉากกับระนาบนี้ระหว่างจุดออริจินกับระนาบคือโปรเจกชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$

โปรเจกชันของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ คือ $|\vec{B}|\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|}$

$$= \frac{35}{(2^2 + 3^2 + 6^2)}$$

$$= \frac{35}{7}$$

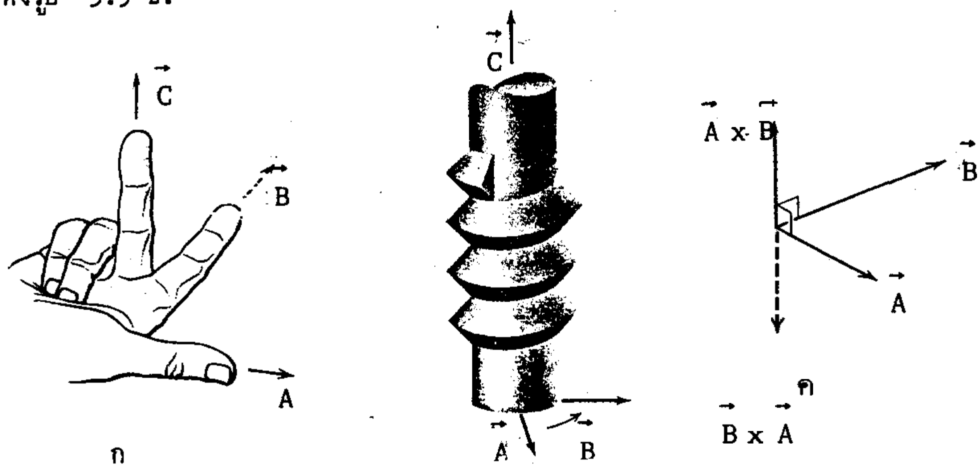
ระยะทางระหว่างจุดออริจินกับระนาบ $= 5$

ผลคูณเวกเตอร์ (vector product หรือ cross product) ของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เขียนได้เป็น $\vec{A} \times \vec{B}$ ซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางดังนี้ ให้ $\vec{C}$ เป็นขนาดของ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะได้

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \quad \vec{B} \sin\theta \quad 0 < \theta < \pi \qquad (3.8)$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทิศทางของ $\vec{A} \times \vec{B}$ ตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในทิศตามแนวการหมุนสกรูเกลียวขวา (right-handed screw) จาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$ ดังรูป 3.9 ก. หรือใช้ระบบมือขวา โดยกางนิ้วชี้ นิ้วกลาง และนิ้วหัวแม่มือออกตั้งฉากซึ่งกันและกัน ให้นิ้วหัวแม่มือและนิ้วชี้

ชี้ตามทิศของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะชี้ตามแนวนิ้วกลาง ดังรูป 3.9 ข.



ข

รูป 3.9

ให้ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ และให้ $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ จากสมการ (3.8) จะได้ $|\vec{C}| = |\vec{D}|$

และจากระบบมือขวาเราจะได้ $\vec{C} = -\vec{D}$ (ดังรูป 3.9 ค.) ดังนั้น

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (3.9)$$

แต่อย่างไรก็ตาม $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ (3.10)

หรือ $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{B} \times \vec{C})$ (3.11)

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|^2 \left|\vec{B}\right|^2 - \left|\vec{A}\right|^2 \left|\vec{B}\right|^2 \cos^2\theta$$

$$= (\vec{A}.\vec{A})(\vec{B}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{B})^2$$ เรียกไอเดนติตี้ของลากรานจ์

(the Lagrange Idendity) ;θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

พิจารณาผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย กล่าวคือ

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \qquad (3.12)$$

และ $|\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{i}||\hat{j}| \sin 90^{o} = 1$

ทิศของ $x\hat{i} \times \hat{j}$ คือ $\hat{k}$ และเนื่องจากขนาดของ $i \times j = 1$ ดังนั้น

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \tag{3.13}$$

ในทำนองเดียวกัน $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ และ $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ (3.14)

ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$
องค์ประกอบของ $\vec{A} \times \vec{B}$ คือ

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

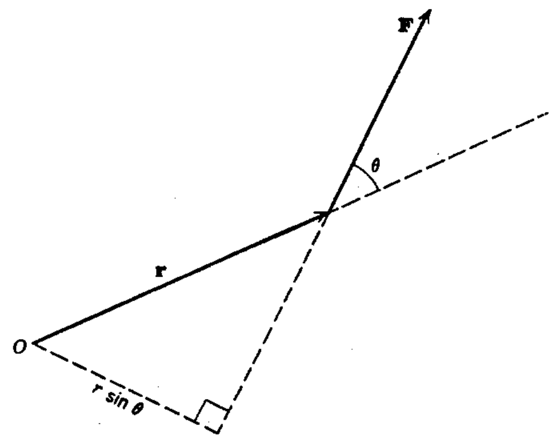
$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

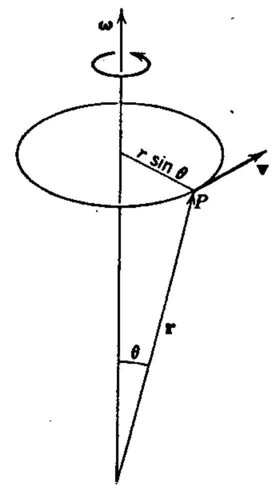
ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กับวิชาฟิสิกส์ เช่นโมเมนต์ของแรง ในกลศาสตร์โมเมนต์ $\vec{M}$ ของแรง $\vec{F}$ รอบจุด O นิยามว่า $|\vec{M}| = |\vec{F}|d$ เมื่อ d เป็นระยะทางตั้งฉากจากจุด O ไปยังแนวแรงของ $\vec{F}$ ถ้า $\vec{F}$ กระทำที่จุด P ซึ่งทำมุม θ กับ $\vec{r}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์จากจุด O ไปยังจุด P ดังรูป 3.10 จะได้ $d = |\vec{r}|\sin\theta$ ดังนั้น

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ซึ่งเรียกว่าโมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบจุด O และมีทิศตามแกนของการหมุนรอบจุด O





รูป 3.10

อีกตัวอย่างหนึ่งคือความเร็วของการหมุนของวัตถุเกร็ง (rigid body) สมมติจุด P เป็นจุดบนวัตถุเกร็งซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ และอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r sinθ ถ้า $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งของจุด P $\vec{v}$ เป็นความเร็วเชิงเส้นของจุด P ซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{r}$ และ $\vec{\omega}$ จะเห็นได้ว่าทิศของ $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ก็คือทิศของ $\vec{v}$ นั่นเอง เนื่องจาก r sinθ เป็นรัศมีของวงกลมที่ P เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ดังนั้น ωr sinθ คือขนาดของความเร็วเชิงเส้นของจุด P นั่นคือ

จะได้ว่า $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

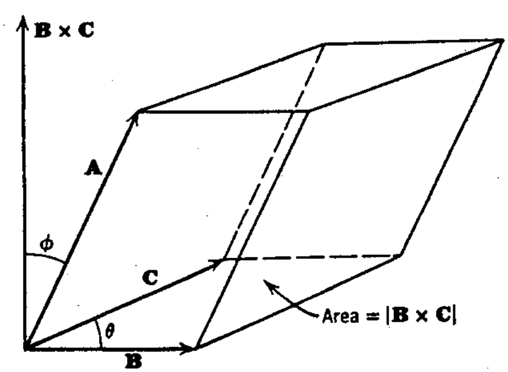
3.3 ผลคูณของเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์

ผลคูณของเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ มี 2 แบบคือ ผลคูณสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์ (scalar tripple product) ได้ผลคูณเป็นปริมาณสเกลาร์ และผลคูณของเวกเตอร์

ของ 3 เวกเตอร์ (vector tripple product) ได้ผลคูณเป็นปริมาณเวกเตอร์

ผลคูณสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เขียนได้เป็น $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ เราอาจพิจารณาได้ว่า $\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C})$ เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelepiped ที่มี $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นด้านทั้งสามโดยที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน (ดังรูป 3.11) $|\vec{B} \times \vec{C}|$ เป็นพื้นที่ฐาน เพราะ $|\vec{B} \times \vec{C}| = |\vec{B}||\vec{C}| \sin\theta$ ซึ่งเป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานของด้าน $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ความสูงของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ $|\vec{A}| \cos\varphi$ ดังนั้นจะได้ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{B}||\vec{C}| \sin\theta \, |\vec{A}| \cos\varphi = |\vec{B} \times \vec{C}||\vec{A}| \cos\varphi = \vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) \tag{3.16}$$



รูป 3.11

ถ้า φ มากกว่า 90° ผลคูณที่ได้นี้จะเป็นค่าลบ ดังนั้นโดยทั่วไปจะกล่าวถึงปริมาตรเป็น $|\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C})|$ ซึ่งจะใช้ด้านใดเป็นฐานก็ได้

จากการสลับ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ แบบอันดับวนเป็นวงกลม (cyclic order) พบว่าค่าของผลคูณสเกลาร์ไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ

$$\vec{A} \quad \vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \quad \vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \, . \quad \vec{A} \times \vec{B}) \qquad (3.17)$$

ผลคูณสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์ในเทอมขององค์ประกอบอาจเขียนดังนี้

$$\vec{A} \quad (\vec{B} \times \vec{C}) = (A_x\hat{i} + A_y\hat{i} + A_z\hat{k}) \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (3.18)$$

ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$, และ $\vec{C}$ อยู่ในระนาบเดียวกันจะได้ $\vec{A} \, . \, (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ หรือถ้าเวกเตอร์คู่ใดคู่หนึ่งเท่ากันในผลคูณสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์จะได้ $\vec{A} \, . \quad \vec{A} \times \vec{C}) = \vec{A} \, . \, (\vec{B} \times \vec{B}) = \vec{C} \, . \, (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

ผลคูณเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ อาจเขียนได้เป็น $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ หรือ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ปริมาณทั้งสองนี้จะไม่เท่ากันเพราะผลคูณของเวกเตอร์ $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ อยู่ในระนาบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แต่ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ อยู่ในระนาบของ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ พิจารณา $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบของ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ดังนั้นสามารถเขียนได้เหมือนการรวม $a\vec{B} + b\vec{C}$ เมื่อ a, b เป็นสเกลาร์ วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ a และ b สามารถหาได้จากการแยกองค์ประกอบเวกเตอร์ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็น $a = \vec{A} \quad \vec{C}$ และ $b = -\vec{A} \quad \vec{B}$ ดังนั้นจึงได้

$$\vec{A} \times \quad \vec{B} + \quad \vec{C}) = (\vec{A} \, . \, \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \quad \vec{B})\vec{C} \qquad (3.19)$$

และสำหรับผลคูณเวกเตอร์ของ $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ จะได้เป็น

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\,\vec{A} \qquad (3.20)$$

3.4 <u>ความเป็นอิสระเชิงเส้นและเรพพรีเซนเทชันของเวกเตอร์</u>

ให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ เป็นเซทของเวกเตอร์ ถ้า a, b, c,... เป็นสมาชิกของสเกลาร์ที่มีอย่างน้อยหนึ่งตัวต่างจากศูนย์ที่ทำให้ $a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} + \ldots = 0$ เรากล่าวว่า $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ เป็นเซทของเวกเตอร์ที่ไม่อิสระเชิงเส้น แต่ถ้า a, b, c,.. เป็นศูนย์ เรากล่าวว่า $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ เป็นเซทของเวกเตอร์ที่มีอิสระเชิงเส้น

เรพพรีเซนเทชันที่ง่ายที่สุดของเวกเตอร์ใด ๆ $\vec{V}$ คือเวกเตอร์ $\vec{U}$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{V}$ เขียนง่าย ๆ ได้เป็น $\vec{V} = c\vec{U}$ ในกรณี 3 มิติ เรพพรีเซนเทชันของเวกเตอร์ใด ๆ จะต้องประกอบด้วยเวกเตอร์อย่างน้อย 3 ตัว ซึ่งไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกัน การแตกเวกเตอร์ออกเป็นเวกเตอร์ย่อยมักนิยมหาเซทของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

การหาเซทของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันจากเซทของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ $\{\vec{V}_k\}$ วิธีที่ง่ายที่สุดคือเลือกเวกเตอร์ขึ้นมา สมมติเป็น $\vec{V}_1$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{e}_1$ หาได้ดังนี้

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|}$$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{V}_2$ อาจแตกได้เป็นส่วนที่ตั้งฉากและขนานกับ $\hat{e}_1$ ส่วนที่ตั้งฉากกับ $\hat{e}_1$ คือ $\vec{V}_2 - (\vec{V}_2 \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1$ ซึ่งหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้เป็น

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{V}_2 - (\vec{V}_2 \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1}{|\vec{V}_2 - (\vec{V}_2 \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1|}$$

ในทำนองเดียวกันเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{e}_3$ จะหาได้เป็น

$$\hat{e}_3 = \frac{\vec{V}_3 - (\vec{V}_3 \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1 - (\vec{V}_3 \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2}{|\vec{V}_3 - (\vec{V}_3 \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1 - (\vec{V}_3 \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2|}$$

วิธีการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยดังกล่าวนี้เรียกว่าการหาออร์ธอนอมอลชมิดท์ (Schmidt orthonormalization)

3.5 สนามสเกลาร์และสนามเวกเตอร์

ปริมาณฟิสิกส์ส่วนใหญ่จะมีค่าแตกต่างกัน ณ จุดต่าง ๆ ในสเปซ เช่น อุณหภูมิในห้องที่จุดต่าง ๆ จะมีค่าแตกต่างกัน สนามไฟฟ้ารอบ ๆ จุดประจุมีค่ามากบริเวณใกล้ ๆ ประจุนั้นและมีค่าลดลงเมื่ออยู่ห่างจากประจุนั้นออกมา หรือแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อจรวดขึ้นกับระยะทางที่จรวดอยู่ห่างจากโลก เราใช้เทอม "สนาม" ในความหมายถึงบริเวณที่ปริมาณฟิสิกส์เหล่านี้มีค่า ถ้าปริมาณฟิสิกส์เป็นสเกลาร์ (เช่น อุณหภูมิ) เราเรียกว่า สนามสเกลาร์ (scalar field) แต่ถ้าปริมาณฟิสิกส์เป็นเวกเตอร์ (เช่น สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก) เราเรียกว่า สนามเวกเตอร์ (vector field)

สนามสเกลาร์กำหนดด้วย φ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x, y, z ในสเปซที่มีเฉพาะขนาดเพียงอย่างเดียว เขียนแทนฟังก์ชันนั้นด้วย $\varphi(x, y, z)$ ถ้าฟังก์ชัน φ ขึ้นกับตำแหน่ง (x, y, z) และเวลา t แล้วอาจเขียนแทนได้ด้วย $\varphi(x, y, z, t)$ สนามเวกเตอร์เป็นค่าของเวกเตอร์ที่ขึ้นกับฟังก์ชันของตำแหน่งโดยที่ฟังก์ชันนั้นกำหนดด้วยขนาดและทิศทางในแต่ละตำแหน่ง เช่น $\vec{F}(x, y, z) = xy^2\hat{i} - yz^2\hat{j} + x^2y\hat{k}$ หรือถ้าขึ้นกับเวลา t ด้วยก็อาจกำหนดได้เป็น $\vec{F}(x, y, z, t)$

3.6 การหาอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์

พิจารณาปริมาณเวกเตอร์ที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลา ถ้าเวลาเปลี่ยนไป Δt จะทำให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ เปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง สมมติว่า $\Delta\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่เปลี่ยนไปในเวลา Δt โดยที่ $\Delta\vec{A}$ เขียนได้ในรูปองค์ประกอบ

$$AA. = \Delta A_x\hat{i} + \Delta A_y\hat{j} + \Delta A_z\hat{k}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เทียบกับเวลาที่เปลี่ยนไป Δt คือ

$$\frac{\Delta A}{At} = \frac{\Delta A_x\hat{i} + A\ \hat{i} + \Delta A_z\hat{k}}{At}$$

จากนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์เทียบกับเวลาเมื่อ $\Delta t \to o$ จะได้

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to o} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$$

ถ้าให้ $\Delta\vec{A} = \vec{A}(t + At) - \vec{A}(t)$

จะได้ว่า $\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to o} \frac{A(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{At}$

$$= \lim_{At-o} \frac{\Delta A_x\hat{i} + A\ \hat{j} + \Delta A\ \hat{k}}{At}$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k} \qquad (3.21)$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบเป็นอนุพันธ์ขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ สำหรับการบวก การลบ ผลคูณสเกลาร์และผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์สามารถหาอนุพันธ์ได้ด้วยกฎของแคลคูลัสธรรมดา ดังนี้

$$\frac{d}{dt}(a\vec{A}) = \frac{da}{dt}\vec{A} + a\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{dA}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} - \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times B) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times (\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}) + \vec{A} \times (\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C}) + \frac{d\vec{A}}{dt} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.8 จงพิสูจน์ว่าอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v จะมีความเร่งขนาด v^2/r และมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม

<u>วิธีทำ</u> $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ = ค่าคงที่ (1)

$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ = ค่าคงที่ = (2)

ดิฟเฟอเรนชิเอตสองสมการข้างต้นเทียบกับเวลา จะได้

$2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ หรือ $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ (3)

$2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ หรือ $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ (4)

ดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (3) เทียบกับเวลา จะได้

$\vec{r} \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{r} \cdot \vec{a} = -\vec{v}^2$ (5)

สมการ (3) แสดงว่า $\vec{r}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ และสมการ (4) แสดงว่า $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ เช่นกัน ดังนั้น $\vec{a}$ และ $\vec{r}$ อาจจะมีทิศเดียวกันหรือตรงข้ามกัน มุม θ ระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{r}$ อาจเป็น 0° หรือ 180° จากสมการ (5) และนิยามของการคูณแบบสเกลาร์

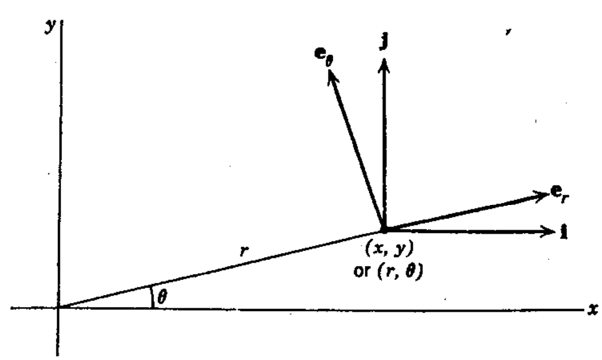
$$i \, . \, \vec{a} \quad = \quad |\vec{r}||\vec{a}| \; \text{co.93} \; = \; -v^2 \qquad (6)$$

ดังนั้น $\cos\theta < 0$ หรือ $\theta = 180^\circ$ นั่นคือ

$$|\vec{r}||\vec{a}|(-1) \quad = \quad -v^2$$

$$\text{หรือ} \qquad a \quad = \quad \frac{v^2}{r}$$

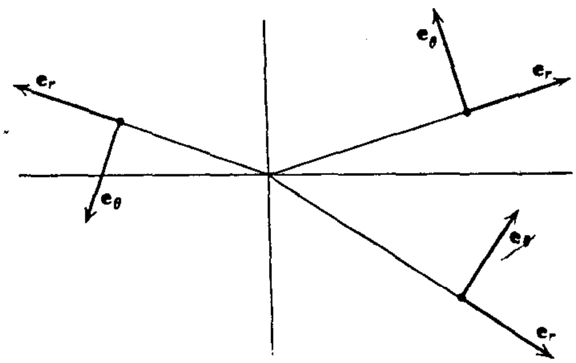
แสดงว่าอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ จะมีความเร่งขนาด v^2/r และมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม



รูป 3.12

พิจารณาการเขียนเวกเตอร์ในพิกัดเชิงขั้ว จากรูป 3.12 เริ่มจากจุด (x, y) หรือ (r, θ) คิดการเคลื่อนที่ตามเส้น θ = ค่าคงที่ในทิศของ r ที่เพิ่มขึ้น เรียกทิศนี้ว่า ทิศ r สร้างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศนี้และให้สัญลักษณ์เป็น $\hat{r}$

ในทำนองเดียวกันคิดการเคลื่อนที่ตามวงกลม r = ค่าคงที่ในทิศของ θ ที่เพิ่มขึ้น เรียกทิศนี้ว่าทิศ θ สร้างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศนี้ซึ่งสัมผัสกับวงกลมให้สัญลักษณ์เป็น $\hat{\theta}$ ดังนั้นในพิกัดเชิงขั้วจะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ เช่นเดียวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ ในพิกัดฉาก แต่ทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัดเชิงขั้วจะเปลี่ยนไปตามจุดต่าง ๆ ดังรูป 3.13 (เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}, \hat{j}$ คงที่ทั้งขนาดและทิศทาง)



รูปที่ 3.13

ดังนั้นในการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ที่เขียนในพิกัดเชิงขั้ว เราต้องหาอนุพันธ์เวกเตอร์หนึ่งหน่วยด้วยเช่นเดียวกับองค์ประกอบ เพื่อให้ง่ายขึ้นจะเขียนเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ ในเทอมของ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จะได้

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \tag{3.22}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \tag{3.23}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ เทียบกับ t ได้ว่า

$$\frac{dr}{dt} = -\hat{i}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \hat{j}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{3.24}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{i}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - \hat{j}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -\hat{r}\frac{d\theta}{dt} \qquad (3.25)$$

เราสามารถใช้สมการข้างต้นหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ใด ๆ ที่เขียนในพิกัดเชิงขั้วได้

ตัวอย่าง 3.9 กำหนดให้ $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta}$ เมื่อ A_r และ A_θ เป็นฟังก์ชันของ t จงหา $d\vec{A}/dt$

วิธีทำ

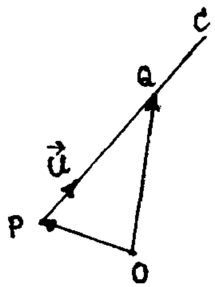
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \hat{r}\frac{dA_r}{dt} + A_r\frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{\theta}\frac{dA_\theta}{d} + A_\theta\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \hat{r}\frac{dA_r}{dt} + \hat{\theta}A_r\frac{d\theta}{dt} + \hat{\theta}\frac{dA_\theta}{dt} - \hat{r}A_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

3.7 อนุพันธ์บ่งทิศและเกรเดียนต์

สมมติว่าทราบอุณหภูมิ $T(x, y, z)$ ที่ทุก ๆ จุดของห้องหรือของแท่งโลหะแท่งหนึ่ง กำหนดจุดเริ่มต้นขึ้นมาจุดหนึ่ง จะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะทางเมื่อเคลื่อนที่ห่างจากจุดเริ่มต้นนั้น โดยที่อาจจะเพิ่มขึ้นในบางทิศทางหรือลดลงในทิศทางอื่น ๆ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะทางซึ่งขึ้นกับทิศทางที่เคลื่อนที่ไปเรียกว่าเป็นอนุพันธ์บ่งทิศ (directional derivative) เขียนได้เป็น dT/ds ซึ่งเป็นค่าลิมิตของ $\Delta T/\Delta s$ เมื่อ Δs เป็นระยะสั้น ๆ ในทิศที่กำหนด และ ΔT เป็นอุณหภูมิที่เปลี่ยนไป

พิจารณาสนามสเกลาร์ที่นิยามด้วยสเกลาร์ฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ df/ds จะเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f กับระยะทางจากจุดเริ่มต้น $P(x_o, y_o, z_o)$ ในทิศที่กำหนด



ถ้าให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่กำหนดคือ

$$\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

ให้ C เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด P ในทิศทางของ $\vec{u}$ โดยมี Q เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงนี้ และอยู่ห่างจากจุด P เป็นระยะ s

จากรูป $\vec{OP} = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + s\vec{u}$$

$$= (x_o + as)\hat{i} + (y_o + bs)\hat{j} + (z_o + cs)\hat{k}$$

$$\frac{df}{ds} = \lim_{s \to o} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

พิกัดของ Q คือ $Q(x_o + as,\ y_o + bs,\ z_o + cs)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s เพียงตัวเดียว จากกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c$$

แต่ $a = \vec{u}\cdot\hat{i}$, $b = \vec{u}\cdot\hat{j}$ และ $c = \vec{u}\cdot\hat{k}$ ดังนั้น

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}\cdot\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}\cdot\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}\cdot\hat{k}$$

$$= \vec{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= \vec{u} \cdot \text{grad } f \qquad (3.26)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $\vec{u}$ เพียงแต่แสดงทิศทางของอนุพันธ์เท่านั้น สำหรับเวกเตอร์ grad f เรียกว่า "เกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชัน f " ใช้สัญลักษณ์ $\vec{\nabla} f$ (เรียกว่า del f) โดยที่ตัวดำเนินการเวกเตอร์ (vector operator) $\vec{\nabla}$ คือ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad (3.27)$$

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \qquad (3.28)$$

จากสมการ (3.26) จะได้

$$\frac{df}{ds} = |\vec{u}||\vec{\nabla} f| \cos\theta$$

$$= |\vec{\nabla} f| \cos\theta , \qquad (3.29)$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{\nabla} f$ ดังนั้น df/ds จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $\cos\theta = 1$ หรือ $\theta = 0^{\circ}$ และจะได้

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{max} = |\vec{\nabla} f| \qquad (3.30)$$

โดยที่ $\vec{\nabla} f$ มีทิศทางในทิศที่ f มีอัตราการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด

<u>ตัวอย่าง</u> 3.10 จงหาอนุพันธ์บังทิศของ $f = x^2 - y^2 z$ ที่จุด (1, 1, 1) ในทิศ $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

<u>วิธีทำ</u> $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย หาได้จากการหาร $\vec{A}$ ด้วย $|\vec{A}|$ จะได้

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} - 2; + \hat{k})$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$= 2x2 - 2yz\hat{j} - y^2\hat{k}$$

$\vec{\nabla}f$ ที่จุด (1,' 1, 1) $= 22 - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\frac{df}{ds}$ ที่จุด (1, 1, 1) = ii . $\vec{\nabla}f$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} - 23 - \hat{k})$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}}$$

สมมติว่า $\vec{u}$ สัมผัสกับพื้นผิว f ซึ่งเท่ากับค่าคงที่ที่จุด $P(x_o, y_o, z_o)$ จะได้ว่า df/ds ในทิศ $\vec{u}$ เป็นศูนย์ หรือ $\vec{\nabla}f.u = 0$ นั่นคือ $\vec{\nabla}f$ ตั้งฉากกับพื้นผิว f = คงที่ที่จุดนั้น เนื่องจาก $|\vec{\nabla}f|$ เป็นค่าอนุพันธ์บังทิศ บางครั้งจึงเรียกว่าอนุพันธ์แนวฉาก (normal derivative) และเขียนได้เป็น $|\vec{\nabla}f|$ = df/dn ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับอุณหภูมิ ทิศทางของ dT/ds ที่มากที่สุดคือทิศที่ตั้งฉากกับผิวไอโซเทอร์มัล (isothermal) (พื้นผิวที่มีอุณหภูมิคงที่)

<u>ตัวอย่าง</u> 3.11 สมมติว่า อุณหภูมิ T ที่จุด (x, Y, z) กำหนดโดย $T = x^2 - y^2 + xyz + 273$ จงหาว่าทิศใด ณ จุด (-1, 2, 3) อุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่สุดและอัตราการเพิ่มนี้มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $$T = x^2 - y^2 + xyz + 273$$

$$\vec{\nabla}T = (2x + yz)\hat{i} + (-2y + xz)\hat{j} + xy\hat{k}$$

$\vec{\nabla}T$ ที่จุด $(-1,\ 2,\ 3) \quad = \quad 42 - 7\hat{j} - 2\hat{k}$

ดังนั้นอุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่สุดในทิศของเวกเตอร์ $4\hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k}$

อัตราการเพิ่มคือ $\quad |\vec{\nabla}T| \quad = \quad \sqrt{16 + 49 + 4}$

$$= \sqrt{69}$$

บางสนามเวกเตอร์ในฟิสิกส์จะกำหนดโดยเวกเตอร์ฟังก์ชันที่หามาได้เหมือนเป็นเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชันที่เหมาะสม สเกลาร์ฟังก์ชันดังกล่าวนี้คือฟังก์ชันของศักย์ (potential function) หรือศักย์ของสนามเวกเตอร์ที่สอดคล้องกัน ตัวอย่างเช่น

แรงดึงดูดระหว่าง 2 อนุภาค ตามกฎนิวตันคือ

$$\vec{F} = -C\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= -C\left(\frac{x - x_o}{r^3}\hat{i} + \frac{y - y_o}{r^3}\hat{j} + \frac{z - z_o}{r^3}\hat{k}\right)$$

โดยที่ $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$ เป็นระยะทางระหว่างอนุภาคทั้งสอง และ C เป็นค่าคงที่เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(x - x_o)}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(y - y_o)}{r^3} \qquad (3.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(z - z_o)}{r^3}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า $\vec{F}$ เป็นเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชัน $f(x, y)$ โดยที่

$$f(x, y, z) = \frac{C}{r} \qquad (r > 0)$$

นั่นคือ f เป็นศักย์ของสนามแห่งความโน้มถ่วง เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (3.29) จะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_o)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_o)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z_o)^2}{r^5}$$

เมื่อรวมสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \qquad (3.32)$$

สมการนี้เรียกว่าสมการของลาปลาซ (Laplace' equation) และเรียก $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ว่าเป็นลาปลาเซียนของ f (Laplacian of f) โดยใช้สัญลักษณ์ $\nabla^2 f$ เมื่อ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

เรียกว่าตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operation) ดังนั้นสมการ (3.32) เขียนได้เป็น

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (3.33)$$

สมการของปัวซอง (Poisson) เขียนได้ในรูป

$$\nabla^2 f = u(x, y, z)$$

แสดงว่าสนามของแรงที่เกิดขึ้นเป็นเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชัน f ที่มี f เป็นไปตามสมการ (3.31) ในบริเวณใด ๆ ในสเปซโดยไม่เกี่ยวกับเนื้อสาร

หรือในไฟฟ้าสถิตย์ แรงดูด (หรือผลัก) ระหว่าง 2 อนุภาคที่มีประจุตรงกันข้าม Q_1 และ Q_2 (หรือเหมือนกัน) คือ

$$\vec{F} = K\frac{\vec{r}}{r^3}$$

เมื่อ $K = Q_1 Q_2/4\pi\epsilon$ และ $\vec{F}$ เป็นเกรเดียนต์ของศักย์ $f = -K/r$ โดยที่ f เป็นตามสมการ (3.31) เมื่อ $r > 0$

3.8 <u>ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลของสนามเวกเตอร์</u>

ให้ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่มีองค์ประกอบดังนี้

$$V(x, y, z) = V_x(x, y, z)i + V_y(x, y, z)\hat{j} + V_z(x, y, z)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div}\,\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}).(V_x.\hat{i} + V_y.\hat{j} + V_z.\hat{k})$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (3.34)$$

เรียกว่า ไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{V}$ (divergence of $\vec{V}$) ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์และสำหรับ $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ เรียกว่าเคิร์ลของ $\vec{V}$ (curl $\vec{V}$)ซึ่งมีค่าเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$