$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad (3.35)$$

โดยที่ $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์

ถ้าให้ $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ เมื่อ $f$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันดังนั้น

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$ = div (grad f) ซึ่งเป็นลาปลาเชียนของ $f$ นั่นเอง

$$\text{div (grad f)} = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ในตัวอย่างของแรงโน้มถ่วง $\vec{F}$ ที่ได้สมการของลาปลาซ $\nabla^2 f = 0$

แสดงว่า $\text{div}\,\vec{F} = 0 \quad (r > 0)$

ถ้า f และ g เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน $\vec{U}$ และ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชัน จะได้ ไอเดนติตี้ต่าง ๆ ของอนุพันธ์ของเวกเตอร์ดังนี้

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \text{div. grad } f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$

2. $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} f = \text{curl grad } f = 0$

3. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \text{div curl }\vec{V} = 0$

4. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \text{curl curl }\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$

5. $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{V}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla} f)$

6. $\vec{\nabla}\times(f\vec{V}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{V}) - \vec{V}\times(\vec{\nabla} f)$

7. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\times\vec{V}) = \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{U}) - \vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})$

8. $\vec{\nabla}\times(\vec{U}\times\vec{V}) = (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{V} - \vec{V}(\vec{\nabla}.\vec{U}) + \vec{U}(\vec{\nabla}.\vec{V})$

9. $\vec{\nabla}.(\vec{U}.\vec{V}) = \vec{U}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U}) + (\vec{V}.\vec{\nabla})$

10. $\vec{\nabla} . (\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}g) = 0$

สำหรับ curl (grad f) = 0 แสดงว่าถ้าเวกเตอร์ฟังก์ชันเป็นเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชัน จะได้เคิร์ลของเวกเตอร์ฟังก์ชันนี้เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และเนื่องจากเคิร์ลเป็นคุณลักษณะของการหมุน ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าสนามเกรเดียนต์เป็นสนามเวกเตอร์ที่คงตัว (conservative vector field) ซึ่งเวกเตอร์ทุกเวกเตอร์จะไม่หมุน (irrotational vector)

## 3.9 ระบบพิกัดเชิงเส้นโค้ง

ที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นปริมาณเวกเตอร์ในพิกัดฉาก ซึ่งเป็นการสะดวกในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์บางกรณีเท่านั้น ต่อไปนี้เราจะศึกษาเวกเตอร์ในระบบพิกัดเชิงเส้นโค้ง (curvilinear coordinate system) เพราะจะช่วยให้การคำนวณในวิชาฟิสิกส์สะดวกรวดเร็วและง่ายขึ้นสำหรับสนามที่มีความสมมาตร

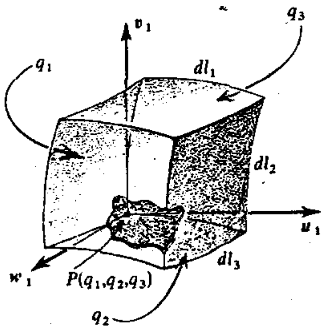
ในระบบเส้นโค้งที่มีแกนทั้งสามตั้งฉากซึ่งกันและกัน จุดใด ๆ ในระบบเส้นโค้งกำหนดได้ด้วยพิกัด $q_1, q_2, q_3$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดฉาก $x, y, z$ คือ

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{3.36}$$

และสมมติว่าสามารถหาค่า $q_1, q_2, q_3$ ในเทอม $x, y, z$ ได้เป็น

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z) \quad (3.37)$$

สมการ (3.37) เป็นฟังก์ชันของพื้นผิว 3 ชุดที่ตัดกันที่จุดพิกัด $q_1, q_2, q_3$ โดยที่ฟังก์ชันในสมการ (3.36) และ 3.37) เป็นแบบค่าเชิงเดี่ยว (single-valued) และมีอนุพันธ์ที่ต่อเนื่อง ดังนั้นถ้ากำหนดจุด P ด้วยพิกัด (x, y, z) จากสมการ (2) จะสามารถหาชุดของพิกัด $(q_1, q_2, q_3)$ ชุดหนึ่งที่สัมพันธ์กันได้ซึ่งเรียกว่าพิกัดเชิงเส้นโค้งของ P




รูป 3.14

ให้ $d\ell_1$ เป็นความยาวย่อยตั้งฉากกับพื้นผิว $q_1$ ซึ่งเป็นระยะทางระหว่างพื้นที่ผิว $q_1$ และ $q_1 + dq_1$ พิจารณาบริเวณเล็ก ๆ ความยาวย่อย $d\ell_1$ มีความสัมพันธ์กับ $dq_1$ ตามสมการ

$$d\ell_1 = h_1\, dq_1 \qquad (3.38)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับพื้นผิว $q_2$ และ $q_3$ จะได้

$$d\ell_2 = h_2\, dq_2 \qquad (3.39)$$

$$d\ell_3 = h_3 dq_3 \qquad (3.40)$$

$h_1$, $h_2$, $h_3$ เรียกว่า "แฟกเตอร์มาตราส่วน" (scale factors) ในระบบพิกัดฉาก $h_1$, $h_2$, $h_3$ มีค่าเป็น 1

กำหนดให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบเส้นโค้ง คือ $\hat{u}_1$, $\hat{v}_1$, $\hat{w}_1$ โดยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว $q_1$, $q_2$, $q_3$ ตามลำดับ การจัดเรียงตัวของ $\hat{u}_1$, $\hat{v}_1$ และ $\hat{w}_1$ จะมีทิศตามทิศที่มีค่าพิกัดเพิ่มขึ้นสอดคล้องกับ $\hat{u}_1 \times \hat{v}_1 = \hat{w}_1$ นั่นคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสามจะมีการจัดเรียงตัวได้ทุกทิศทางในสเปซขึ้นอยู่กับจุดที่เราจะพิจารณา แต่อย่างไรก็ตามทั้ง $\hat{u}_1$ , $\hat{v}_1$ และ $\hat{w}_1$ ต้องตั้งฉากกันเสมอ (ต่างจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ในพิกัดฉากที่ชี้ทิศทางแน่นอนทั้งสามแกนในทุก ๆ จุด)

ปริมาตรย่อย $d\tau$ ในระบบพิกัดเชิงเส้นโค้งหาได้จาก

$$d\tau = d\ell_1 \; d\ell_2 \; d\ell_3$$

$$= h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \qquad (3.41)$$

ค่า $h_1 h_2 h_3$ เรียกว่าค่าสมบูรณ์ของดีเทอร์มิแนนท์จาโคเบียนใช้สัญลักษณ์เป็น $J$ นั่นคือ

$$J = h_1 h_2 h_3$$

โดยที่ $$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

ดังนั้นปริมาตรย่อย $d\tau = J \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 \qquad$ **(3.42)**

ระยะทางย่อย $d\vec{\ell}$ เป็นเวกเตอร์ระหว่างจุดสองจุดเขียนในรูปองค์ประกอบของระบบพิกัดเชิงเส้นโค้งได้เป็น

$$d\vec{\ell} = d\ell_1 \hat{u}_1 + d\ell_2 \hat{v}_1 + d\ell_3 \hat{w}_1$$

$$= \quad h_1 dq_1 \hat{U}_1 + h_2 d\hat{q}_2 v_1 + h_3 d\hat{q}_3 w_1 \tag{3.43}$$

ขนาดของ $d\vec{\ell}$ ยกกำลังสองคือ

$$(d\ell)^2 = (de,\ )^2 + (d\ell_2)^2 + (d\ell_3)^2$$

$$= h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \tag{3.44}$$

ในพิกัดฉาก

$$(d\ell)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{icl}^{3} dx_i^2 \tag{3.45}$$

จากสมการ (3.36) ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก $x_i$ กับพิกัดเชิงเส้นโค้ง $q_i$ คือ

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \tag{3.46}$$

แทนสมการ (3.46) ลงในสมการ (3.45) จะได้

$$(d\ell)^2 = Q_{11}\, dq_1^2 + Q_{22}\, dq_2^2 + Q_{33} dq_3^2$$

$$+ 2Q_{12}\, dq_1 dq_2 + 2Q_{13} dq_1 dq_3$$

$$+ 2\, Q_{23}\, dq_2 dq_3 \tag{3.47}$$

เมื่อ $\quad {}_{ij} \quad \frac{a}{\partial q_i} x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}$

เมื่อ $Q_{ii} = h_i^2 \qquad i = j = 1, 2, 3$

$Q_{ij} = 0 \qquad i \neq j$

ดังนั้นแฟกเตอร์มาตราส่วน $h_i$ หาได้จากความสัมพันธ์

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.48)$$

ถ้าให้ $f(q_1, q_2, q_3)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ อนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์ในระบบทั่วไปที่มีแกนพิกัดตั้งฉากกันคือ

$$\frac{\partial f}{\partial \ell_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_3}$$

ดังนั้นเกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $f(q_1, q_2, q_3)$ เขียนได้เป็น

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \ell_1}\hat{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial \ell_2}\hat{v}_1 + \frac{\partial f}{\partial \ell_3}\hat{w}_1 \qquad (3.49)$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\hat{v}_1 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\hat{w}_1 \qquad (3.50)$$

หรือตัวดำเนินการ

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\hat{v}_1 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\hat{w}_1 \qquad (3.51)$$

ถ้าให้ $\vec{A}(q_1, q_2, q_3)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_1\hat{u}_1 + A_2\hat{v}_1 + A_3\hat{w}_1 \tag{3.52}$$

ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถหาค่าได้เป็น

$$\vec{\nabla}. A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[(\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right] \tag{3.53}$$

ถ้า $\vec{A}(q_1, q_2, q_3)$ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากเกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์ $f(q_1, q_2, q_3)$ กล่าวคือ

$$A = \nabla f \tag{3.54}$$

เทียบสมการ **(3.50)** และสมการ (3.52) จะได้

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}$$

$$A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}$$

$$A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}$$

ดังนั้น $\vec{\nabla} \vec{A} = \vec{\nabla} . \vec{\nabla} f = \nabla^2 f$

แทนค่า $A_1$, $A_2$ และ $A_3$ ลงในสมการ (18) จะได้

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right] \qquad (3.55)$$

สมการข้างต้นคือลาปลาซเชียนของสนามสเกลาร์ใด ๆ ในระบบทั่วไปที่แกนพิกัดตั้งฉากกัน

เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถหาค่าได้เป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{v}_1 & h_3\hat{w}_1 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_3)\right]\hat{u}_1$$

$$+ \frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3A_3)\right]\hat{v}_1$$

$$+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_1)\right]\hat{w}_1 \qquad (3.56)$$

ฑ. **พิกัดทรงกระบอก**

ที่ตำแหน่งใด ๆ ของจุด P ในสเปซกำหนดด้วยพิกัด r, θ, z. ดูรูป 3.15 โดยที่

$r$ เป็นระยะทางที่ตั้งฉากกับแกน z

$\theta$ เป็นมุมแอซิมัท (azimuth) ของระนาบที่จุด P และแกน z เมื่อวัดเทียบกับระนาบ xz ในทิศการหมุนของสกรูมือขวา

$z$ เป็นระยะทางของจุด P จากระนาบ xy

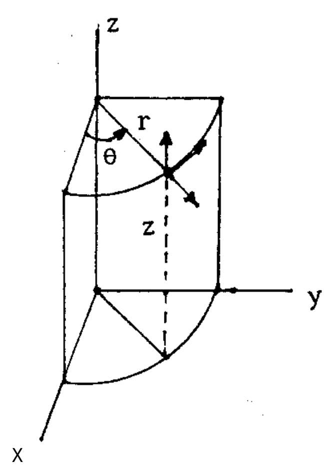
ทิศของ $r, \theta, z$ กำหนดได้ด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{z}$ ซึ่งมีทิศตั้งฉากซึ่งกันและกันโดยที่

$\hat{r}$ มีทิศตั้งฉากออกมาจากแกน z ผ่านจุด P

$\hat{\theta}$ มีทิศชี้ตามทิศการเพิ่มของมุม θ โดยตั้งฉากกับระนาบที่แกน z และจุด P

$\hat{z}$ มีทิศขนานกับแกน z

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{z}$ จะไม่ชี้ทิศใดทิศหนึ่งที่แน่นอน แต่ทิศจะเปลี่ยนไปขึ้นกับการเคลื่อนที่ของจุด P อย่างไรก็ตาม $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{z}$ จะยังคงตั้งฉากซึ่งกันและกันเสมอ โดยการวัดเรียงตัวเป็นไปตาม $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$




รูป 3.15

ความสัมพันธ์ของพิกัดทรงกระบอก $r, \theta, z$ กับพิกัดฉาก $x, y, z$ คือ

$$x = r\cos\theta$$

$$Y = r\sin\theta$$

$$z = z \qquad (3.57)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

โดยที่ $r \geq 0$ ; $0 \leq \theta < 2\pi$ ; $-\infty < z < \infty$

เวกเตอร์ที่ใช้อธิบายตำแหน่งของP เขียนได้เป็น

$$\vec{l} = r\hat{r} + z\hat{z} \qquad (3.58)$$

ข้อสังเกตมุม $\varphi$ ไม่ปรากฏในสมการ (3.58) เพราะ $\varphi$ เป็นเพียงค่าที่บอกการจัดวางตัวของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ความยาวย่อยที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนพิกัดเพียงเล็กน้อยของจุดมีความสำคัญ ถ้าให้พิกัดของจุดนั้นเปลี่ยนไปเล็กน้อย $dr$, $d\theta$, $dz$ จะได้ค่าความยาวย่อยที่เพิ่มขึ้นของ $d\ell$ เป็น

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + z\hat{z} \qquad (3.59)$$

และ $$|d\vec{l}| = \left[(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

เทียบสมการ ( 3 . 4 3 ) กับสมการ (3.59) จะได้

$$h_p = 1 \qquad h_\theta = r \qquad h_z = 1$$

ปริมาตรย่อย $d\tau$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกคือ

$$d\tau = r dr d\theta dz \tag{3.60}$$

ให้ $f(r, \theta, z)$ และ $\vec{A}(r, \theta, z)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์และฟังก์ชันเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก ค่าเกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ ลาปลาซเชียน และเคิร์ลในระบบพิกัดทรงกระบอกคือ

1) เกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $f(r,\theta, z)$ จากสมการ (3.50)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

ในพิกัดทรงกระบอก ตัวดำเนินการ $\vec{\nabla}$ คือ

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.61}$$

2) ไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{A}(r,\theta, z)$ ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น

$$\vec{A}(r, \theta, z) = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_z\hat{z}$$

จากสมการ (3.53) ค่าไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{A}$ คือ

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.62}$$

3) ลาปลาซเชียนของ $f$ คือ

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.63}$$

4) เคิร์ลของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในรูปของดีเทอร์มิแนนท์คือ

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix} \qquad (3.64)$$

ข. <u>พิกัดทรงกลม</u>

ในพิกัดทรงกลมจะมีความสมมาตรได้ดีกว่าพิกัดทรงกระบอก ดังนั้นการใช้พิกัดทรงกลมจะให้ความสะดวกและง่ายในการแก้ปัญหาฟิสิกส์ในกรณีที่มีสมมาตรทุกทิศทาง

พิจารณาจุด P ใด ๆ ในสเปซซึ่งคิดว่าอยู่บนผิวของทรงกลมรัศมี r ตำแหน่งของจุด P บนผิวทรงกลมรัศมี r กำหนดด้วยพิกัด r, θ, φ
r เป็นระยะจากจุดออริจินถึงจุด P, θ เป็นมุมที่ r ทำกับแกน z
φ เป็นมุมที่วัดจากแกน x ถึงส่วนโปรเจกชันของ r บนระนาบ xy ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกลม r, θ, φ กับพิกัดฉาก x, y, z มีดังนี้

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$Y = r \sin\theta \sin\varphi$$

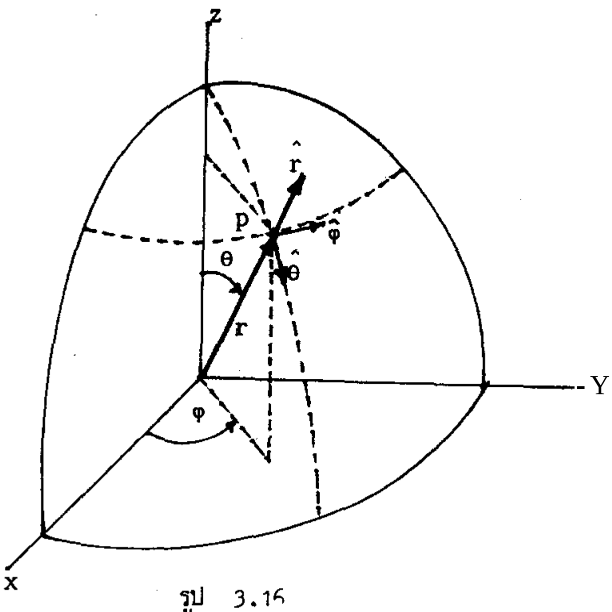
$$Z = r \cos\theta \qquad (3.64)$$

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$r \geq 0 \; ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \; ; \quad 0 < \varphi \leq 2\pi$$




รูป 3.16

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัดทรงกลมที่จุด P กำหนดได้ด้วย $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ และ $\hat{\varphi}$ ซึ่งมีทิศตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยที่

$\hat{r}$ มีทิศทางตามเวกเตอร์รัศมี r จากจุดออริจินผ่านจุด P

$\hat{\theta}$ มีทิศชี้ตามทิศการเพิ่มของมุม θ โดยตั้งฉากกับเวกเตอร์รัศมี r และอยู่ในระนาบของแกน z

$\hat{\varphi}$ มีทิศตามทิศการเพิ่มของมุม φ และตั้งฉากกับระนาบที่ $\hat{\varphi}$ อยู่

ทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r}$ , $\hat{\theta}$ และ $\hat{\varphi}$ จะไม่ชี้ทิศใดทิศหนึ่งที่แน่นอน แต่ทิศจะเปลี่ยนไปขึ้นกับการเคลื่อนที่ของจุด P อย่างไรก็ตาม $\hat{r}$ , $\hat{\theta}$ และ $\hat{\varphi}$ จะยังคงตั้งฉากซึ่งกันและกันโดยจัดเรียงตัวไปตาม $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$

เวกเตอร์ $\vec{\ell}$ ที่ใช้อธิบายตำแหน่งของจุด P คือ

$$\vec{\ell} = r\hat{r} \qquad (3.65)$$

สมการ (3.64) จะไม่ปรากฏค่า θ และ φ เพราะ θ และ φ เป็นมุมที่แสดงการจัดวางตัวของ $\vec{\ell}$ เท่านั้น

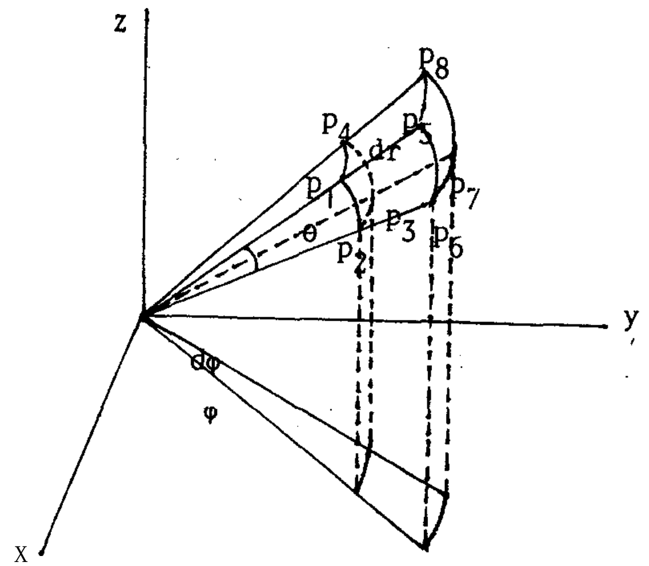
ถ้าให้พิกัดของจุด P เปลี่ยนไปเล็กน้อย dr, dθ, dφ ความยาวย่อยที่เปลี่ยนไปซึ่งสอดคล้องกับการเพิ่มของพิกัดคือ

$$d\vec{\ell} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\ \sin\theta\hat{\varphi} \qquad (3.66)$$

และ $|d\ell|^2 = , \left[(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2 (d\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

เทียบสมการ (3.66) กับสมการ (3.43) ได้

$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_Q = r\ \sin\theta$




รูป 3.17

ปริมาตรย่อย $d\tau$ ในพิกัดทรงกลมคือ

$$d\tau = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

ให้ $f(r,\theta,\varphi)$ และ $A(r,\theta,\varphi)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์และฟังก์ชันเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลม ค่าเกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ ลาปลาซเชียน และเคิร์ล ในระบบพิกัดทรงกลมคือ

1) เกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $f(r,\theta,\varphi)$ ตามสมการ (3.49)

คือ $$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \qquad (3.67)$$

ในพิกัดทรงกลม ตัวดำเนินการ $\vec{\nabla}$ คือ

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.68)$$

2) ไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

จากสมการ (3.53) ค่าไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{A}$ คือ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (3.69)$$

3) ลาปลาซเซียนของ $f$ คือ

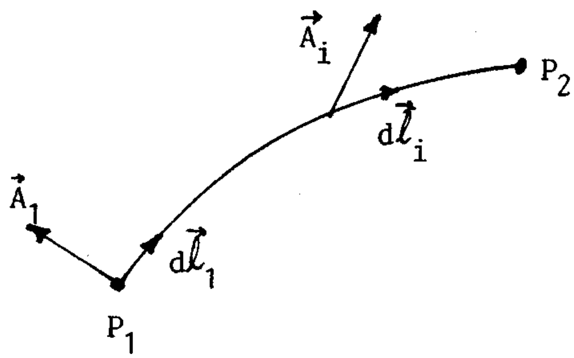
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \quad (3.70)$$

4) เคิร์ลของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในรูปของดีเทอรมิแนนท์คือ

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (3.71)$$

## 3.10 อินทิกรัลตามเส้น

พิจารณาสนามเวกเตอร์ $\vec{A}(x, y, z)$ และเส้นทาง C ผ่านสนามเวกเตอร์ $\vec{A}(x, y, z)$ จากจุด $P_1$ ไปยัง $P_2$ ถ้าแบ่งเส้นทาง C ออกเป็นเวกเตอร์ย่อย n ส่วนคือ $d\vec{\ell}_1, d\vec{\ell}_2, \ldots d\vec{\ell}_n$ ดูรูป 3.18 โดยที่แต่ละส่วนของเวกเตอร์ย่อย $d\vec{\ell}_1, d\vec{\ell}_2, \ldots d\vec{\ell}_n$ ต่างก็มีฟังก์ชันเวกเตอร์ เช่น $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ ตามลำดับ




รูป 3.18

ผลคูณสเกลาร์ของ $d\vec{\ell}_1, d\vec{\ell}_2, \ldots, d\vec{\ell}_n$ กับค่าของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ ในบริเวณนั้นคือ $\vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_1, \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_2, \ldots, \vec{A}_n \cdot d\vec{\ell}_n$ ดังนั้นผลรวมทั้งหมดของผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $\vec{A}$ และ $d\vec{\ell}$ ตลอดเส้นทาง C คือ $\sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \cdot d\vec{\ell}_i$

ถ้าเราแบ่งเส้นทาง C ออกเป็นเวกเตอร์ย่อยจำนวนมาก กล่าวคือ $n \to \infty$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_i = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{-P_2}^{P_1} \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.72)$$

สมการข้างต้นเรียกว่า อินทิกรัลตามเส้น (line integral) ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{d\ell}$ มีองค์ประกอบในระบบพิกัดฉากเป็น

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + Az\hat{k}$$

และ

$$d\vec{\ell} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}$$

จะได้ค่าอินทิกรัลตามเส้นเป็น

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากเกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $(x, y, z)$

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi \tag{3.73}$$

ค่าอินทิกรัลตามเส้นจากจุด $P_1$ ถึง $P_2$ คือ

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{\nabla}\varphi) \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz\right)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} d\varphi$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \tag{3.74}$$

สมการข้างต้นแสดงให้เห็นว่า ถ้า $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$ แล้วค่าอินทิกรัลของ $\vec{A}$ จะขึ้นกับค่าของ $\varphi$ ที่จุดปลาย $P_1$ และ $P_2$ ของทางเดินของการอินทิเกรตเท่านั้น โดยไม่ขึ้นกับแนวเส้นทางระหว่างจุดทั้งสอง

สำหรับเส้นโค้งปิด (เมื่อจุด $P_2$ อยู่ที่เดียวกับจุด $P_1$ ) ถ้า $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$ และ $\varphi(P_2) = \varphi(P_1)$ จะได้ค่าอินทิกรัลเป็น

$$\oint A \cdot d\ell = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.12 ให้แรง $\vec{F} = (x^2 - y)\hat{i} + (y^2 - z)\hat{j} + (z^2 - x)\hat{k}$ กระทำต่อวัตถุแล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุดออริจินถึงจุด (1, 1, 1) จงหางานที่ทำโดยแรง $\vec{F}$ แล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่ตามทางเดิน

1. เส้นตรง
2. เส้นโค้ง $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$d\vec{r} = dx.\hat{i} + dy.\hat{j} + dz.\hat{k}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (x^2 - y)dx + (y^2 - z)dy + (z^2 - x)dz$$

งานที่ทำโดย $\vec{F} = w = \int (x^2 - y)dx + (y^2 - z)dy + (z^2 - x)dz$

ตามทางเดินเส้นตรง $x = y = z$ จะได้ $dx = dy = dz$ และลิมิตสำหรับ $x$ หรือ $y$ หรือ $z$ คือ $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$

ดังนั้น
$$w = \int_0^1 3(x^2 - x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}$$

(อาจใช้ y หรือ z เป็นตัวแปรอิสระก็ได้จะได้คำตอบเดียวกัน)

ตามทางเดินเส้นโค้ง $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ สามารถใช้ $t$ เป็นพารามิเตอร์ โดยที่ $dx = dt$, $dy = 2tdt$, $dz = 3t^2dt$ ; $0 \leq t \leq 1$ ดังนั้น

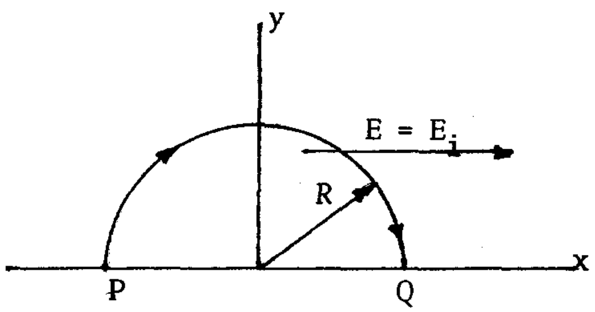
$$W = \int_0^1 (t^2 - t^2)dt + (t^4 - t^3)2tdt + (t^6 - t)3t^2dt$$

$$= \int_0^1 (3t^8 + 2t^5 - 2t^4 - 3t^3)dt$$

$$= -\frac{29}{60}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.13 สนามไฟฟ้า $\vec{E}$ มีค่า $\vec{E} = \vec{E}_i$ ถ้า $\vec{E}$ เป็นความเข้มสนามไฟฟ้ามีค่าคงที่ จงหางานในการทำให้ประจุไฟฟ้า q เคลื่อนที่ไปตามแนว PQ ซึ่งเป็นแนวเส้นโค้งครึ่งวงกลมรัศมี R

<u>วิธีทำ</u>



จากนิยาม งาน $W = \int_{P}^{Q} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

เมื่อวางประจุ q ในสนามเวกเตอร์ $\vec{E}$ จะเกิดแรง

$$F = qE = q \cdot E\hat{i}$$

ที่ตำแหน่ง $(r, \theta)$ ใด ๆ บน PQ เวกเตอร์ตำแหน่งคือ

$$\vec{r} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

$$d\vec{r} = -R\sin\theta d\theta\hat{i} + R\cos\theta d\theta\hat{j}$$

แทนค่า $\vec{F}$ และ $d\vec{r}$ จะได้

$$w = \int_{\pi}^{0} (qE\hat{i}).(-R\sin\theta d\theta\hat{i} + R\cos\theta d\theta\hat{j})$$

$$= -\int_{\pi}^{0} qER\sin\theta d\theta$$

$$= 2qER$$

จากตัวอย่าง 3.12 แสดงว่างานที่ได้จากอินทิกรัลตามเส้น $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ขึ้นกับทางเดินของวัตถุ (เป็นกรณีทั่ว ๆ ไป เมื่อมีความเสียดทาน) สนามของแรงที่มี $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ขึ้นกับทางเดินนี้ เรียกว่า "สนามไม่คงตัว" (non-conservative field) แต่ในตัวอย่าง 3.13 งานที่ได้จากอินทิกรัลตามเส้น $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ไม่ขึ้นกับเส้นทางเดินของอนุภาคแต่ขึ้นกับตำแหน่งจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของการเคลื่อนที่ของอนุภาค สนามของแรงที่มี $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ไม่ขึ้นกับทางเดินนี้เรียกว่า "สนามคงตัว" (conservative field) ในกรณีสนามคงตัว

สนามของแรงนี้เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ $\vec{F} = \nabla f$ ที่มี curl $\vec{F}$ = curl $(\vec{\nabla} f) = 0$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำหรับสนามคงตัว สำหรับสนามไม่คงตัว curl $\vec{F} \neq 0$

ในกลศาสตร์เมื่อ $\vec{F} = \vec{\nabla} W$ โดยที่ W คืองานที่ทำโดย $\vec{F}$ ตัวอย่าง เช่น ถ้ามวล m ตกลงมาเป็นระยะทาง z ภายใต้ความโน้มถ่วง งานที่กระทำบนวัตถุ คือ mgz แต่ถ้ายกมวล m ต้านความโน้มถ่วงเป็นระยะทาง z งานที่ทำโดยแรง $\vec{F}$ ของความโน้มถ่วง คือ W = -mgz (เพราะทิศการเคลื่อนที่ตรงข้ามกับ $\vec{F}$ ) พลังงานศักย์ของมวล m ที่เพิ่มขึ้นในกรณีนี้คือ $\varphi$ = mgz นั่นคือ $W = -\varphi$ หรือ $\vec{F} = -\nabla\varphi$ ฟังก์ชัน $\varphi$ เรียกว่าพลังงานศักย์ หรือศักย์สเกลาร์ (scalar potential) ของแรง $\vec{F}$

3.11 ไดเวอร์เจนซ์และทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์ (Divergence and the divergence theorem)

ไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{V}(x, y, z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$

คือ $$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (3.75)$$

เราต้องการอธิบายความหมายและการประยุกต์ใช้ไดเวอร์เจนซ์ในฟิสิกส์

พิจารณาบริเวณที่น้ำกำลังไหล สมมติว่าทุก ๆ จุดเป็นเวกเตอร์ $\vec{v}$ ซึ่งเท่ากับความเร็วของน้ำที่จุดนั้น ดังนั้นฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{v}$ แทนสนามเวกเตอร์ เส้นโค้งที่สัมผัสกับ $\vec{v}$ เรียกว่า stream line ในทำนองเดียวกันเราสามารถศึกษาการไหลของกาซ ของความร้อน ของกระแสไฟฟ้า หรือของอนุภาคได้ ถ้า $\vec{v}$ แทนความเร็วของการไหลของสิ่งต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้น ดังนั้น div $\vec{v}$ มีความสัมพันธ์กับจำนวนของสารซึ่งไหลออกจากปริมาตรที่กำหนดให้ สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กแทนด้วย $\vec{E}$ หรือ $\vec{B}$ และปริมาณที่สอดคล้องกับการไหล

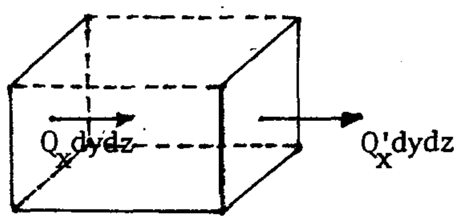
ของสารที่ตกกระทบพื้นที่ 1 หน่วยในแนวตั้งฉากในเวลา 1 วินาที เรียกว่า ฟลักซ์ (flux) ของสารนั้น

ในที่นี้จะใช้การไหลของความร้อนเป็นตัวอย่าง ให้ Q เป็นฟลักซ์ของความร้อน (คือ พลังงานความร้อนที่ตกกระทบพื้นที่ 1 หน่วยในแนวตั้งฉากในเวลา 1 วินาที) โดยที่

$$\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$$

พิจารณากล่องในสเปซขนาด dx, dy และ dz ความร้อนที่ทะลุเข้าไปในแนวแกน x คือ $Q_x dydz$ และความร้อนที่ทะลุออกจากผิวคือ $Q'_x dydz$ โดยที่

$$Q'_x = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} . dx$$




รูป 3.19

เมื่อ $\frac{\partial Q_x}{\partial x} . dx$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Q ในแนวแกน x คูณกับระยะทาง dx ถ้าความร้อนที่ออกจากกล่องมากกว่าความร้อนที่เข้าไปในกล่องแสดงว่ามีตัวกำเนิดความร้อน (heat source) ในกล่อง แต่ถ้าความร้อนที่ออกจากกล่องน้อยกว่าความร้อนที่เข้าไปในกล่องแสดงว่ามีการสะสมความร้อน (heat sink) เกิดขึ้นในกล่อง

อัตราการเกิดของความร้อนในแนวแกน x (กรณีความร้อนออกมากกว่าความร้อนเข้า) คือ

$$(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} . dx)dydz - Q_x dydz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} . dxdydz$$

ในทำนองเดียวกันอัตราการเกิดของความร้อนในแนวแกน y

$$(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} .dy)dxdz - Q_y dxdz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} . dxdydz$$

และอัตราการเกิดความร้อนในแนวแกน z คือ

$$(Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} .dz )dxdy - Q_z dxdy = \frac{\partial Q_z}{\partial z} . dxdydz$$

ความร้อนที่เกิดขึ้นในกล่อง $= (\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z})dxdydz$

$$(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} . dy)dxdz - Q_y dxdz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} . dxdydz$$

และอัตราการเกิดความร้อนในแนวแกนz คือ

$$(Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} . dz )dxdy - Q_z dxdy = \frac{\partial Q_z}{\partial z} .dxdydz$$

ความร้อนที่เกิดขึ้นในกล่อง $= (\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z})dxdydz$

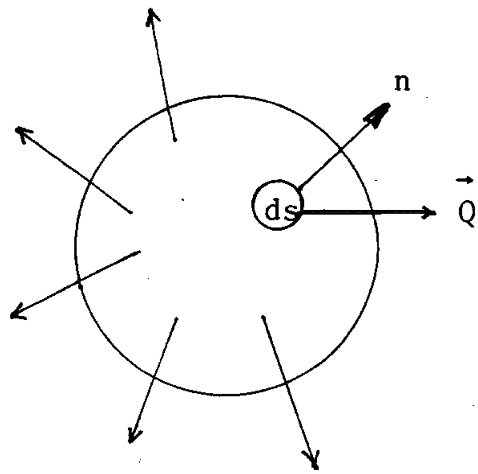
ความร้อนที่เกิดขึ้นที่จุด x, y, z ใด ๆ ต่อปริมาตร

$$= \frac{\partial Q_x}{a x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}$$

$$= \vec{\nabla} . \vec{Q}$$

ดังนั้น div $\vec{Q}$ คือ อัตราการกำเนิดความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่จุดใด ๆ ในกรณี steady state (ไม่มีตัวกำเนิดความร้อนและตัวสะสมความร้อน) จะได้ $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0$

พิจารณาบริเวณที่มีปริมาตร V ดังรูป 3.20




รูป 3.20

กรณีพื้นที่ ds เล็ก ๆ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วย (unit mormal vector)ของ ds มีทิศทางชี้ออกนอกผิว ให้ $\vec{Q}$ เป็นฟลักซ์ของความร้อน จะได้ว่า ความร้อนที่ออกมาจากพื้นที่ ds ต่อหนึ่งหน่วยเวลาในแนว $\vec{n}$ มีค่าเท่ากับ $\vec{Q} \cdot \vec{n}ds$

ดังนั้นความร้อนที่ออกมาทั้งหมด $= \oint \vec{Q} \cdot \vec{n}ds$

จากคำจำกัดความของไดเวอร์เจนซ์ กล่าวคือ $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}$ เป็นปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นต่อปริมาตร ดังนั้นความร้อนที่เกิดขึ้นทั้งหมด $= \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}dV$
แต่ความร้อนที่เกิดขึ้นทั้งหมดต้องเท่ากับความร้อนทั้งหมดที่ออกมาจะได้

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}\, dV = \oint \vec{Q} \cdot \vec{n}\, ds \qquad (3.76)$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $\vec{A}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบนปริมาตร V จะได้

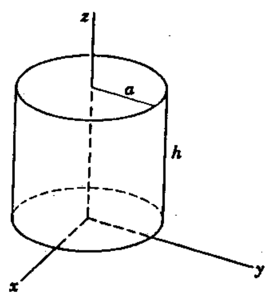
$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint \vec{A} \cdot n ds \qquad (3.77)$$

สมการข้างต้นนี้คือทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์นั่นเอง

ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ในกรณี 2 มิติมีรูปแบบคล้ายใน 3 มิติ เพียงแต่เปลี่ยนอินทิเกรตปริมาตรเป็นอินทิเกรตพื้นที่และอินทิเกรตพื้นผิวปิดเป็นอินทิเกรตตามเส้นปิด

$$\iint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, ds = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.14 กำหนดให้ $\vec{A} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ จงคำนวณหา $\oint \vec{A}\vec{n}ds$ ตลอดผิวปิดของทรงกระบอกดังรูปข้างล่าง




<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint \vec{\nabla} \cdot A ds$$

$$\vec{\nabla} \cdot A = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

ดังนั้น $\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = 3 \iiint dV$

$= 3$ เท่าของปริมาตรทรงกระบอก

$= 3\pi r^2 h$

ฉะนั้น $\oint \vec{A} \cdot \vec{n} ds = 3\pi r^2 h$

การคำนวณ $\oint \vec{A} \cdot \vec{n}ds$ โดยตรงจะยุ่งยากมากกว่า ในที่นี้จะแสดงให้ดูเพื่อเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์ กรณีเฉพาะนี้

<u>ที่ผิวด้านบน</u> $\vec{n} = \hat{k}$ ดังนั้น $\vec{A} \cdot \vec{n} = \vec{A} \cdot \hat{k} = z = h$

และ $$\int_{\text{ผิวด้านบน}} \vec{A} \cdot \vec{n}ds = h\int ds = h \cdot \pi r^2$$

<u>ที่ผิวด้านล่าง</u> $\vec{n} = -\hat{k}$, $\vec{A} \cdot \vec{n} = -z = 0$

ดังนั้นอินทีกรัลผิวด้านล่างเท่ากับศูนย์

<u>ที่ผิวด้านข้าง</u> เวกเตอร์ $\hat{i}x + \hat{j}y$ เป็นเวกเตอร์นอร์มอลกับพื้นผิว เวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วย $\vec{n}$ คือ

$$\vec{n} = \frac{\hat{i}x + \hat{j}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\hat{i}x + \hat{j}y}{r}$$

(การหาเวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วย $\vec{n}$ อาจหาได้อีกกรณีหนึ่งถ้ากำหนดสมการของพื้นผิว $\varphi(x, y, z) =$ ค่าคงที่ ดังนั้น $\vec{\nabla}\varphi$ จะตั้งฉากกับพื้นผิวนี้ สำหรับปัญหานี้สมการของทรงกระบอกคือ $x^2 + y^2 = a$ ดังนั้น $\varphi = x^2 + y^2$ ซึ่ง $\vec{\nabla}\varphi = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$ และจะได้เวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วย $\vec{n}$ เช่นเดียวกับสมการข้างต้น

และ $$\vec{A} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2}{r} = \frac{r^2}{r} = r$$

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{n}ds = r\oint ds$$

$$= r \text{ (พื้นที่ผิวรอบทรงกระบอก)}$$

$$= r\,(2\pi rh)$$

ค่าของ $\oint \vec{A} \cdot \vec{n}ds$ ตลอดทั้งพื้นผิวของทรงกระบอกคือ $\pi r^2 h + 2\pi r^2 h$ $= 3\pi r^2 h$ ซึ่งได้ค่าเท่ากันกับที่หาโดยใช้ทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์

<u>การประยุกต์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์กับไฟฟ้า</u>

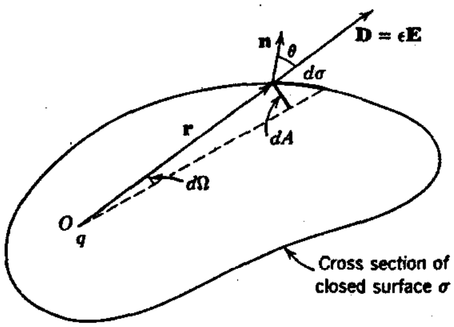
ตามกฎของคูลอมบ์สนามไฟฟ้า E ที่ระยะ r เนื่องจากจุดประจุไฟฟ้า q ที่จุดออริจินคือ

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \hat{e}_r \qquad (3.78)$$

( $\varepsilon$ คือค่าคงที่ไดอิเลกตริกและในสุญญากาศ $1/4\ \pi\varepsilon = 9 \times 10^9$ หน่วย M.K.S.)

electric displacement $\vec{D}$ กำหนด $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ดังนั้น

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \hat{e}_r \qquad (3.79)$$




รูป 3.21

ให้ S เป็นพื้นผิวปิดรอบ ๆ จุดประจุ q ที่ออริจิน

dS เป็นพื้นที่เล็ก ๆ ของพื้นผิวปิดที่จุด $\vec{r}$

dA เป็นโปรเจกชันของ dS บนทรงกลมรัศมี r ซึ่งมีศูนย์กลางที่ O

$\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วยกับพื้นที่ dS ของ

$d\Omega$ เป็นมุมตันที่รองรับโดย dS (และ dA) ที่ O จากนิยามของมุมตัน (solid angle)

$$d\Omega = \frac{1}{r^2}\,dA \qquad (3.80)$$

จากรูป 3.21 และสมการ (3.79), (3.80) จะได้

$$\vec{D}\cdot\vec{n}dS = D\cos\theta\,dS$$

$$= W\,A$$

$$= \frac{q}{4\pi r^2}\cdot r^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,q\,d\Omega \qquad (3.81)$$

เราต้องการหาค่าอินทิกรัลตามพื้นผิวของ $\vec{D}\cdot\vec{n}dS$ ภายใต้พื้นผิวปิด S จากสมการ (3.81) จะได้

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = \frac{q}{4\pi}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi}\cdot 4\pi = q \quad (q \text{ อยู่ภายใน } S)$$

สมการข้างต้นเป็นกรณีที่ง่ายที่สุดของกฎของเกาส์ กล่าวคือ เรามีเพียงหนึ่งจุดประจุ q เท่านั้น ถ้าจุดประจุ q อยู่นอกพื้นผิวปิดในกรณีนี้เราจะได้

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = 0$$

สมมุติว่า ถ้ามีหลาย ๆ ประจุ $q_i$ อยู่ภายในพื้นผิวปิด แต่ละ $q_i$ มี $\vec{D}_i$ ที่สอดคล้องกับมัน ให้ $\vec{D}$ เป็น electric displacement ลัพธ์เนื่องจาก $q_i$ ทั้งหมดซึ่งเท่ากับผลรวมเวกเตอร์ของ $\vec{D}_i$ จะได้

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = \sum_i \oint \vec{D}_i\cdot\vec{n}dS = \Sigma q_i$$

ดังนั้น สำหรับการกระจายของประจุไฟฟ้าใด ๆ ภายในพื้นผิวปิด

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \text{ประจุไฟฟ้าทั้งหมดภายในพื้นผิวปิดนั้น}$$

ถ้าให้ $\rho$ เป็นความหนาแน่นประจุ ประจุไฟฟ้าทั้งหมดคือ $\iiint \rho dV$

จากทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV$$

ดังนั้น $\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \iiint \rho dV$

สำหรับปริมาตรใด ๆ เราจะได้ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

สมการข้างต้นเป็นสมการหนึ่งของสมการแมกซ์เวลล์

ที่กล่าวมาข้างต้นนี้เริ่มจากกฎของคูลอมบ์ เราสามารถหากฎของเกาส์แล้ว ใช้ทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์หาสมการของแมกซ์เวลล์ได้

ถ้า A เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ ทฤษฎีเกรเดียนต์ในกรณี 3 มิติ เขียนได้เป็น

$$\iiint \vec{\nabla} A dV = \oint A \hat{n} ds$$

และในกรณี 2 มิติทฤษฎีเกรเดียนต์เขียนได้เป็น $\iint \vec{\nabla} A ds = \oint A d\vec{l}$

3.12 <u>เคิร์ลและทฤษฎีของสโต๊ก</u>

เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$ คือ

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right) - \frac{\partial V_y}{\partial z})\hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

เราอาจใช้สัญลักษณ์ดีเทอร์มิแนนท์เพื่อให้จำง่ายขึ้น

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

โดยที่เมื่อกระจายค่าดีเทอร์มิแนนท์แล้วให้เขียนสมาชิกแถว 2 นำหน้าสมาชิกแถว 3

เนื่องจากเคิร์ลเกี่ยวข้องกับการหมุน บางครั้งจึงใช้ rot $\vec{V}$ (rot rotation) แทน curl $\vec{V}$

ตัวอย่างเช่น วัตถุเกร็ง (rigid body) หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาคในวัตถุเกร็ง คือ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ เมื่อ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์รัศมีจากจุดบนแกนการหมุนไปยังอนุภาค เราจะคำนวณหา $\vec{\nabla} \times \vec{v}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

จาก $$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

ดังนั้น $$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\nabla} \quad \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \quad \vec{\nabla})\vec{r}$$

แต่ $\vec{\omega}$ มีค่าคงที่ ดังนั้น

$$\vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = \vec{\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3\vec{\omega}$$

และ $$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial t} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$= \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

$$= \vec{\omega}$$

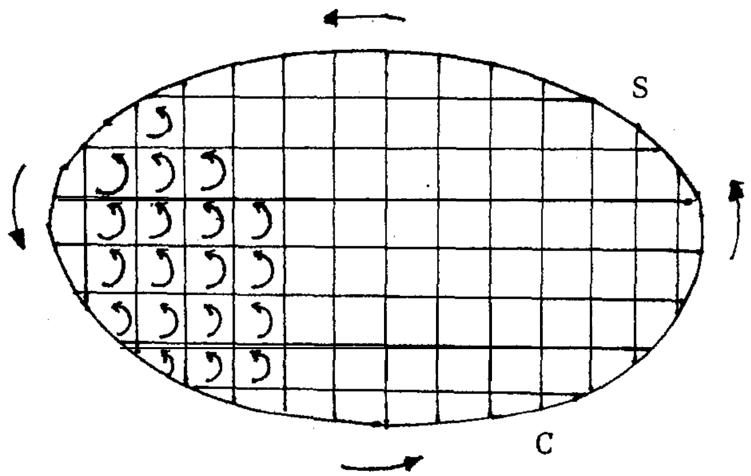
ดังนั้น $$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times r) = 2\vec{\omega}$$

หรือ $$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

ในกรณีง่าย ๆ นี้ curl $\vec{v}$ ให้ค่าสองเท่าของความเร็วเชิงมุมของการหมุน ในกรณีที่ซับซ้อนกว่านี้ เช่น การไหลของของไหล ค่า curl $\vec{v}$ ที่จุดใด ๆ เป็นการวัดความเร็วเชิงมุมของของไหลในบริเวณรอบ ๆ จุดนั้น ถ้า $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ทุก ๆ จุดในบริเวณใด สนามความเร็ว $\vec{v}$ ในบริเวณนั้นจะไม่มีการหมุน (irrotational)

ถ้า S เป็นพื้นผิวที่มี C เป็นเส้นโค้งปิด ให้ $\vec{A}(x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยอันดับแรกต่อเนื่องใน S

พิจารณาเส้นทางปิดอย่างง่ายตามรูป โดยทางเดิน C ไม่เป็นศูนย์ แบ่งพื้นผิว S ออกเป็นพื้นผิวย่อย $dS_1$, $dS_2$,..$dS_n$ เพื่อความสะดวกจะพิจารณาพื้นผิวย่อยเป็นรูปสี่เหลี่ยม ดูรูป

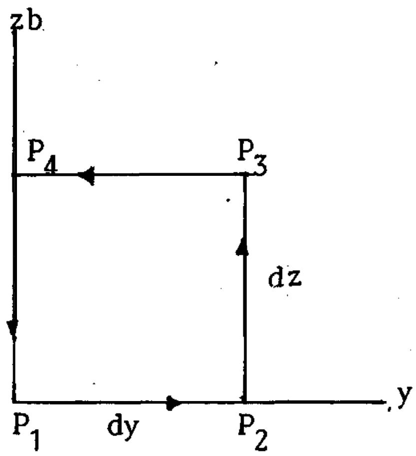



รูป 3.22

พิจารณาพื้นผิวย่อย 1 และ 2 ซึ่งมีด้านร่วมกัน เมื่อหาค่าอินทิกรัลตามเส้นด้านร่วมจะมีทิศตรงข้ามกัน ในทำนองเดียวกันกับพื้นผิวอื่นที่มีด้านร่วมอยู่ภายในจะได้ค่าอินทิกรัลตามเส้นของด้านร่วมมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับค่าอินทิกรัลตามเส้นของพื้นผิวย่อยด้านนอกทั้งหมดตามเส้นทางเดินปิดของ C ซึ่งปิดล้อมพื้นผิว S ทั้งหมดมีค่าเป็น

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

พิจารณาพื้นผิวระนาบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งอยู่ในระนาบ yz ที่มีด้านยาว dy และ dz ดังรูป 3.33




รูป 3.23

ให้ $A_y$ และ $A_z$ เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}(x, y, z)$ ที่จุด 2 ตามแนวแกน y และ z ตามลำดับ สำหรับค่า $A_y$ และ $A_z$ ที่จุด $P_2$, $P_3$ และ $P_4$ หาได้จากการกระจายค่าบนจุด $P_1$ ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์

พิจารณาค่าอินทิกรัลตามเส้นของ $A_y$ และ $A_z$ ตามแนวทางเดินต่าง ๆ ดังนี้

ตามแนวทางเดิน 12 ; $A_y dy$

ตามแนวทางเดิน 23 ; $(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy)dz$

ตามแนวทางเดิน 3 4 ; $-(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz)dy$

ตามแนวทางเดิน 4 1 ; $-A_z dz$

ตามแนวทางเดิน 34 และ 41 ได้ค่าอินทิกรัลเป็นลบเพราะเป็นแนวทาง -y และ -z

ผลรวมของค่าอินทิกรัลตามแนวเส้นทางเดินปิดคือ ผลรวมของค่าอินทิกรัลตามแนวเส้นทางเดินดังกล่าวข้างต้น จะได้

$$(\vec{A} \cdot \vec{d\ell})_{1234} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})dydz \qquad (3.82)$$

จากนิยามของเคิร์ล

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = (\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{i} \qquad (3.83)$$

ค่า dydz เป็นพื้นผิวย่อยในระนาบ zy ดังนั้นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวย่อยนี้จะชี้ตามแนวแกน x นั่นคือ พื้นที่ย่อยเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{n}_x \cdot dS_x = dydz\hat{i}$$

เมื่อ $\vec{n}_x$ เป็นเวกเตอร์นอร์มอลหนึ่งหน่วยของพื้นที่ย่อย $dS_x$

สมการ (3.83) อาจเขียนได้เป็น

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \cdot \vec{n}_x \cdot dS_x = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})dydz \qquad (3.84)$$

เทียบสมการ (3.82) กับสมการ (3.84) จะได้ว่า

$$(\vec{A} \cdot d\vec{\ell})_{1234} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \cdot \vec{n}_x \, dS_x$$

ดังนั้นผลรวมของค่าอินทิกรัลตามเส้นบนพื้นผิวย่อย $dS_1$, $dS_2$,...$dS_m$ ทั้งหมดของ S คือ

$$\sum_{i=1}^{m} (\vec{A} \cdot d\vec{\ell})_i = \sum_{i=1}^{m} \Big[(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x \cdot \vec{n}_x dS_x + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_Y \cdot \vec{n}_Y dS_Y$$

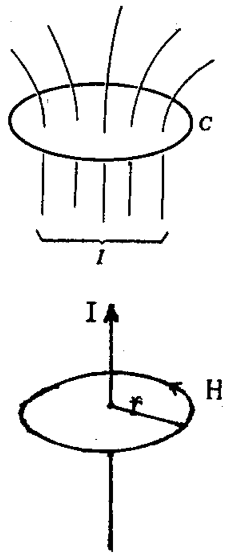
$$+ (\vec{\nabla} \times A)_z \cdot \vec{n}_z dS_z \Big]_i \qquad (3.85)$$

ถ้าเราแบ่งพื้นผิว S ออกเป็นพื้นผิวย่อยจำนวนมาก กล่าวคือ $m \rightarrow \infty$ สมการที่ (3.85) จะกลายเป็น

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS \qquad (3.86)$$

สมการข้างต้นเรียกว่า ทฤษฎีของสโต๊ก (Stokes theorem) ซึ่งเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันเวกเตอร์กับอินทิกรัลตามพื้นผิวของเคิร์ล A เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดล้อมรอบพื้นผิว S การประยุกต์ทฤษฎีของสโต๊กในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า เริ่มจากกฎแอมแปร์

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$




ก.

ข.

รูป 3.24

เมื่อ H เป็นความเข้มของสนามแม่เหล็ก C เป็นเส้นโค้งปิด และ I คือกระแสที่ผ่านพื้นผิวใด ๆ ที่ล้อมรอบด้วย C พื้นที่ผิวและเส้นโค้ง C สัมพันธ์กันตามทฤษฎีของสโต๊ก

ในกรณีลวดตรงยาวที่มีกระแส I ไหลผ่าน ที่ระยะ r จากเส้นลวดจะมีความเข้มของสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ มีทิศสัมผัสกับวงกลมรัศมี r ในระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นลวด ดังรูป 3.24 ข. โดยที่ $|\vec{H}|$ เท่ากันทุก ๆ จุดบนเส้นรอบของวงกลมรัศมี r เนื่องจากสมมาตรดังนั้นสามารถหา $|\vec{H}|$ โดยกฎแอมแปร์ด้วยการใช้ C เป็นวงกลมรัศมี r จะได้

$$\oint_C \vec{H} \cdot dr = \int_0^{2X} |H| rde , \qquad (3.86)$$

$$= \quad |\vec{H}|r.\ 2\pi$$

$$= \quad I$$

ได้ $|\vec{H}| = \dfrac{I}{2\pi r}$.

ถ้าให้ $\vec{J}$ เป็นความหนาแน่นกระแส (current density), $\vec{J}\cdot\vec{n}dS$ จะเป็นกระแสที่ผ่านพื้นผิวเล็ก ๆ $d\vec{S}$ ดังนั้น $\iint_\sigma \vec{J}\cdot\vec{n}dS$ ตลอดพื้นผิวใด ๆ $\sigma$ ที่ล้อมรอบด้วย C คือกระแสทั้งหมด I ที่ลอดเส้นโค้งปิด C ตามกฎแอมแปร์จะได้

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{J}\cdot\vec{n}dS$$

จากทฤษฎีของสโต๊ก

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{n}d\vec{S}$$

ดังนั้น $$\iint_\sigma (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{n}dS = \iint_\sigma \vec{J}\cdot\vec{n}dS$$

นั่นคือ $$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

สมการนี้เป็นสมการหนึ่งของสมการแมกซ์เวลล์หรืออาจเริ่มจากสมการของแมกซ์เวลล์แล้วใช้ทฤษฎีของสโต๊ก เพื่อหากฎแอมแปร์

สรุปสนามเวกเตอร์ $\vec{V}$ เรียกว่า สนามคงตัว หรือเป็นสนามที่ไม่หมุน (irrotational field) ถ้า curl $\vec{V} = 0$ ในกรณีนี้ $\vec{V}$ = grad $\varphi$ โดยที่ $\varphi$ คือศักย์สเกลาร์ แต่ถ้า div $\vec{V} = 0$ สนามเวกเตอร์ $\vec{V}$ เรียกว่า สนามโซลีนอยดอล (solenoidal field) ในกรณีนี้ $\vec{V}$ = curl $\vec{A}$ โดยที่ $\vec{A}$ คือ เวกเตอร์ฟังก์ชันที่เรียกว่าศักย์เวกเตอร์

ทฤษฎีสโต๊ก (หรือทฤษฎีเคิร์ล) ในกรณี 2 มิติมีรูปแบบคล้ายในกรณี 3 มิติ

<u>บทสรุป</u>

ปริมาณที่บอกแต่ขนาดอย่างเดียวก็สมบูรณ์เรียกปริมาณสเกลาร์ ปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะสมบูรณ์เรียกปริมาณเวกเตอร์

การบวกลบเวกเตอร์อาจแสดงได้โดยรูปทางเรขาคณิต

ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

ผลคูณเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$

เมื่อ $\theta$ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

ผลคูณสเกลาร์ของ 3 เวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ คือ

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

ผลคูณเวกเตอร์ของ 3 เวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ อาจเขียนได้เป็น $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ หรือ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ โดยที่ปริมาณทั้งสองไม่เท่ากัน

"สนาม" หมายถึงบริเวณที่ปริมาณฟิสิกส์มีค่า ถ้าปริมาณฟิสิกส์เป็นสเกลาร์เรียกว่า สนามสเกลาร์ ถ้าปริมาณฟิสิกส์เป็นเวกเตอร์เรียกว่า สนามเวกเตอร์

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เทียบกับ $t$ เขียนได้เป็น

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

ในพิกัดเชิงขั้ว ทิศของ $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ เปลี่ยนไปตามจุดต่าง ๆ ดังนั้น

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{r}\frac{d\theta}{dt}$$

ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ อนุพันธ์บ่งทิศของ $f$ ในทิศ $\vec{u}$ คือ $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$ (เมื่อ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย) โดยที่ $\vec{\nabla} f$ มีทิศทางในทิศที่ $f$

มีอัตราการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด เมื่อ $\vec{\nabla} f$ คือเกรเดียนต์ของสเกลาร์ฟังก์ชัน f ที่นิยามเป็น

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ถ้า $\vec{A}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ ไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{A}$ คือ

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\nabla^2$ เรียกว่าตัวดำเนินการลาปลาซเชียน เขียนได้เป็น

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ให้ $\vec{A}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ เคิร์ล $\vec{A}$ คือ

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

ถ้าปริมาณ $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ไม่มีการหมุนจะได้ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ แสดงว่าสนามเกรเดียนต์เป็นสนามเวกเตอร์ที่คงตัว ซึ่งเวกเตอร์ทุกเวกเตอร์จะไม่มีการหมุน และถ้า $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ จะได้ $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$ และ $z = z$

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

ระบบพิกัดทรงกลม

$$x = r \text{ sine } \cos\varphi, \quad y = r \text{ sine } \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sine } A,) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sine }\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

อินทิกรัลตามเส้นขององค์ประกอบเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนได้เป็น

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

ทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์นิยามได้เป็น

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \oint \vec{A} \cdot \vec{n} ds$$

ทฤษฎีของสโต๊ก นิยามได้เป็น

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times A) \cdot \vec{n} ds$$

## แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 4\hat{k}$ และ $C = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
   จงหาค่า $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$ และ $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}|$

2. คนขี่รถจักรยานไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 10 กม./ชม. เขารู้สึกว่ามีลมพัดมาจากทางทิศเหนือ เมื่อเพิ่มความเร็วของจักรยานเป็น 2 เท่า เขารู้สึกว่าลมพัดมาจากทิศตะวันออกเฉียงเหนือ จงหาทิศและความเร็วจริงของลม

3. รถไฟคันหนึ่งแล่นไปตามรางบนพื้นราบด้วยความเร็ว 30 ไมล์ต่อชั่วโมง ถ้าฝนตกลงมาตามแนวดิ่งด้วยความเร็ว 22 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าผู้โดยสารจะเห็นฝนตกลงมาในทิศใด

4. จงหางานที่ทำโดยแรง $\vec{F}$ ซึ่งกระทำต่ออนุภาคแล้วอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B ตามเส้นตรง AB เมื่อ $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ จุด $\vec{A}$ คือ (8, -2, -3) และจุด $\vec{B}$ คือ (-2, 0, 6)

5. จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j} + 2\hat{k}$ และ $\vec{C} = -10\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ออร์โธโกนอล (orthogonal) กัน

6. ให้ $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ และ $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ จงหา $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C}$

7. แรง $\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ กระทำบนเส้นตรงผ่านจุด A (4, 2, -1) จงหาโมเมนต์ $\vec{M}$ ของ $\vec{F}$ รอบจุด O(0, 1,2)

8. จงแสดงว่า $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{B} - |\vec{B}|^2 \vec{A}$

9. จงแสดงว่า $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

10. จงแสดงว่า $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่หาอนุพันธ์ได้

11. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิวของ $\varphi = x^2y + 2xy$ ที่จุด (2, -2, 3)

2. จงหาอนุพันธ์บังทิศของ f ที่จุด P ในทิศของ $\vec{A}$ เมื่อ

ก. $f = 2x + 3y$ $P = (0, 2)$ และ $\vec{A} = 3\hat{j}$

ข. $f = x + 2y - z$ $P = (1,4,0)$ และ $\vec{A} = \hat{j} - \hat{k}$

13. สมมติว่าอุณหภูมิในระนาบ xy กำหนดโดย $T = xy - x$ จงหาว่าทิศใด ณ จุด (1, 1) อุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่สุด ให้หาอัตราการเพิ่มมากที่สุดนี้ และจงหาอนุพันธ์บังทิศของ T ร จุด (1, 1) ในทิศของเวกเตอร์ $3\hat{i} - 4\hat{j}$

14. ถ้า $\vec{A} = 3xyz^2\hat{i} + 2xy^3\hat{j} - x^2yz\hat{k}$ และ $\varphi = 2x^2 - yz$ จงหา

ก. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ข. $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi$ ค. $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A})$ ง. $\nabla^2\cdot(\nabla^2\varphi)$

ที่จด ( . - . )

15. ถ้า $\vec{A} = 2xz^2\hat{i} - yz\hat{j} + 3xz^3\hat{k}$ และ $\varphi = x^2yz$ จงหา

ก. $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ข. $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A})$ ค. $\nabla\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

ง. $\vec{\nabla}\left[\vec{A}\cdot \text{curl}\,\vec{A}\right]$ ที่จุด (1, 1, 1)

6 จงพิสูจน์ว่า $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

17. ก. จงแสดงว่า $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$ เป็นสนามของแรงที่คงตัว (conservative force field) ข. จงหาศักย์สเกลาร์ ค. จงหางานที่ทำในการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามนี้จากจุด (1, -2, 1) ไปยังจุด (3, 1, 4)

18. ถ้า $\varphi = 2xyz^2$, $F = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ และ c เป็นเส้นโค้ง $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$ จาก $t = 0$ ถึง $t = 1$ จงหาอินทิกรัลตามเส้นของ

ก. $\int_C \varphi \, d\vec{r}$ ข. $\int_C \vec{F} \times d\vec{r}$

19. จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{A} = zi - 2x\hat{j} + y\hat{k}$ ในพิกัดทรงกระบอกและจงหาค่า $A_r$, $A_\theta$ และ $A_z$

20. จงหาค่า $\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ เมื่อ $\vec{F} = 4xzi - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$

และ S คือพื้นผิวของลูกบาศก์ที่ปิดล้อมด้วย $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

21. จงพิสูจน์ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์สำหรับ $\vec{A} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ ในบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ และ $z = 3$

22. จงพิสูจน์ทฤษฎีของสโต๊กสำหรับ $\vec{F} = xz\hat{i} - y\hat{j} + x^2y\hat{k}$ เมื่อ S เป็นพื้นผิวของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 2y + 2z = 8$

23. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อย $I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)dxdydz$ ของมวลที่มีความหนาแน่นเท่ากับ 1 ในบริเวณ R รอบแกน x เมื่อ R คือรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $0 \leq x \leq a$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, $-c/2 \leq z \leq c/2$