บทที่ 2
แคลคูลัสประยุกต์

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 2 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. หาอนุพันธ์ อนุพันธ์ย่อย และอนุพันธ์รวมของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้
2. ประยุกต์ใช้อนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อยในปัญหาเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันต่าง ๆ และประยุกต์ใช้อนุพันธ์รวมในการหาค่าประมาณต่าง ๆ ได้
3. หาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์ย่อยและโดยวิธีของลากรางจ์
4. ประยุกต์การอินทิเกรตกับปัญหาต่าง ๆ ได้
5. เปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลของปัญหาให้อยู่ในรูปพิกัดที่ต้องการได้เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบของปัญหานั้น

บทที่ 2
แคลคูลัสประยุกต์

2.1 การหาอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ กล่าวคือค่าของ y เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ x ถ้าให้ x มีค่าเปลี่ยนแปลงจาก x_o ถึง $x_o + \Delta x$ ค่าของ y จะเปลี่ยนแปลง Δy โดยที่ $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$
ดังนั้น

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

เป็นอัตราการเปลี่ยยแปลงเฉลี่ยของ f ภายในช่วง x_o ถึง $x_o + \Delta x$ ถ้า Δx เข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือเรากำหนดให้ช่วงของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f น้อยลงจนเกือบเข้าใกล้ศูนย์ จะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ f เมื่อ $\Delta x \to 0$ ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ x_o

แต่อัตราการเปลี่ยนแลปงโดยเฉลี่ยของ f เมื่อ $\Delta x \to 0$ คือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ f ที่จุด x_o

จากนิยามอนุพันธ์ของ f ที่จุด x_o คือ

$$f'(x_o) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{AX - 0} \frac{f(x_o + AX) - f(x_o)}{AX} \quad (2.1)$$

หากเราสามารถหาอนุพันธ์ของ f ที่ x_o ได้แสดงว่า f มีความต่อเนื่องที่ x_o สำหรับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนั้น ถ้าจะให้เข้าใจความหมายต้องพิจารณาถึงลักษณะของฟังก์ชันนั้นด้วย เช่น

ถ้า $s(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา t $s'(t)$ คือความเร็วของวัตถุที่เวลา t

หรือ $v(t)$ แทนความเร็วของวัตถุที่เวลา t $v'(t)$ คือความเร่งของวัตถุที่เวลา t

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> พิจารณาก้อนหินตกจากหน้าผา ระยะทางที่ก้อนหินตกลงมาคือ s เป็นฟังก์ชันของเวลา t ตามสมการการเคลื่อนที่ $s(t) = 5t^2$ เมื่อเวลาผ่านไป t_1 ก้อนหินอยู่ห่างจากจุดที่ตกเป็นระยะ $s(t_1) = 5t_1^2$ เมตร ที่เวลา $t_2(t_2 > t_1)$ ก้อนหินอยู่ห่างจากจุดตกเป็นระยะ $s(t_2) = 5t_2^2$ เมตร ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 วินาที ก้อนหินตกในช่วงเวลานี้เป็นระยะ

$$s(t_2) - s(t_1) = 5t_2^2 - 5t_1^2$$

ความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของก้อนหินในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 คือ

$$v_{av} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{5t_2^2 - 5t_1^2}{t_2 - t_1}$$

ถ้าให้ช่วงเวลาจาก t_1 ถึง t_2 มีค่าน้อย กล่าวคือ t_2 มีค่าใกล้เคียง t_1 สมการข้างต้นจะเป็นความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ใกล้กับ t_1 เราจึงนิยามความเร็วชั่วขณะ (instantaneous velocity) ณ เวลา t_1 ได้เป็น

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ถ้าให้ AS $= s(t_2) - s(t_1)$ และ At $= t_2 - t_1$ เมื่อ $t_2 \to t_1$

จะได้ At $\to 0$ นั่นคือ

$$v(t_1\ ) = \lim_{t\text{-so}} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \frac{ds}{dt}$$

ดังนั้นสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งที่เป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ $s(t) = 5t^2$ จะได้ความเร็วชั่วขณะ (เรียกสั้น ๆ ว่าความเร็ว) ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใด ๆ เท่ากับ $10t$ เมตรต่อวินาที เช่น เมื่อ $t = 3$ วินาที ความเร็วของก้อนหินที่เวลา $t = 3$ วินาที คือ $(10)(3) = 30$ เมตรต่อวินาที แต่ถ้าคิดความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t_1 = 3$ วินาที ถึง $t_2 = 4$ วินาที จะได้

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{5(4)_2 - 5(3)_2}{4 - 3} = 35 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรง ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้เมื่อเวลา t คือ $s = t^3 - 3t^2 + 5t$ เมตร จงหาความเร็วและความเร่งของวัตถุนี้เมื่อเวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ ให้ $s = t^3 - 3t^2 + 5t$

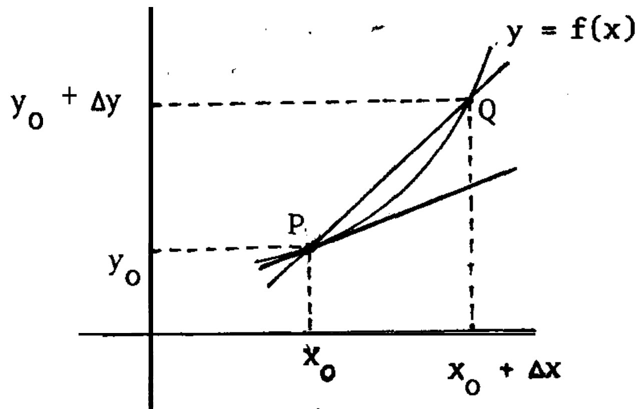
ความเร็วของวัตถุ $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 5$

ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา $t = 2$ คือ $v(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 5 = 5$ เมตร/วินาที

ความ 15งของวัตถุ $\quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$

ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา $t = 2$ คือ $a(2) = 6$ เมตร/วินาที^{2} ...

พิจารณาอนุพันธ์ในแง่เรขาคณิต สมมติกราฟของฟังก์ชั่น $y = f(x)$ มีจุด $P(x_o, y_o)$ และ $Q(x_o + \Delta x, \Delta y)$ อยู่บนกราฟ ดังรูป 2.1



รูป 2.1

ความชันของ PQ คือ $\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{x_o + AX - X_0} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{Ax}$

จากกราฟข้างต้นจะเห็นว่า ถ้า Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จุด Q ก็จะเข้าใกล้จุด P PQ ก็เบนเข้าใกล้เส้นสัมผัส PT ที่จุด P นั่นคือ ถ้า Δx เข้าใกล้ศูนย์แล้ว ค่าของ $\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$ มีค่าเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส PT ที่จุด $P(x_o, y_o)$

ดังนั้น $\quad \lim_{AX-0} \frac{f(x_{oo} + \Delta x) - f(x_o)}{Ax} = f'(x_o)$

ซึ่งก็คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_o, y_o)$

ตัวอย่าง 2.3 ถ้ารัศมีของวงกลมวงหนึ่งเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 3 นิ้วต่อนาที จงหาว่าพื้นที่ของวงกลมนี้เพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของวงกลมเมื่อเวลา t

พื้นที่ A ที่เวลา t ของวงกลมนี้คือ $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

เมื่อ $\frac{dr}{dt}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่เพิ่มขึ้นด้ยความเร็ว 3 นิ้วต่อนาที

ดังนั้นพื้นที่ของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r(3)$$

$$= 6\pi r \text{ ตารางนิ้วต่อนาที}$$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $f(x) = x^4 - 2x$ ที่ $x = 1$.

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 2x$

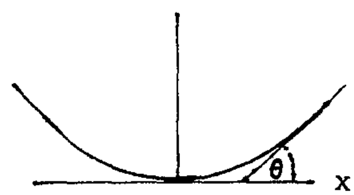
$f'(x) = 4x^3 - 2$

$f'(1) = 4(1)^3 - 2 = 2$

ความชันของเส้นโค้ง $x^4 - 2x$ ที่ $x = 1$ คือ 2

ตัวอย่าง 2.5 สายเคเบิลเส้นหนึ่งแขวนอยู่บนยอดเสาสูง 2 เสาซึ่งอยู่ห่างกัน 80 เมตร โดยที่สายเคเบิลที่แขวนนั้นเป็นรูปพาราโบลามีจุดต่ำสุดต่ำจากยอดเสา 20 เมตร จงหามุมที่สายเคเบิลทำกับเสา

วิธีทำ



ให้จุด (0, 0) เป็นจุดต่ำสุดของสายเคเบิลนี้ สมการของสายเคเบิล คือ $y = ax^2$ โดยที่จุด (40, 20) จะอยู่บนสมการนี้ด้วย ดังนั้น

$$20 = a(40)^2$$

$$a = \frac{1}{80}$$

สมการของสายเคเบิลคือ $y = \frac{1}{80}x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{40}x$$

จะได้ความชันของเส้นสัมผัสกับสายเคเบิลที่จุด (40, 20) คือ $\frac{40}{40} = 1$ แสดงว่า $\tan\theta = 1$ นั่นคือ $\theta = 45^\circ$ เส้นผัสทำมุม 45° กับแกน x และทำมุม 45° กับเสา ดังนั้นสายเคเบิลทำมุม 45° กับเสาที่จุดยอดของเสา

2.2 การหาอนุพันธ์ย่อย

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y ถ้าให้ y เป็นค่าคงที่ $= y_0$ ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x, y_0)$ จะเป็นฟังก์ชันของ x เพียงตัวแปรเดียว ถ้าฟังก์ชันนี้สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = x_0$ แล้ว ค่าของอนุพันธ์นี้จะเรียกว่า อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f_x(x_o, y_o)$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ โดยที่

$$f_x(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ x เป็นค่าคงที่ $= x_o$ ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x_o, y)$ จะเป็นฟังก์ชันของ y เพียงตัวแปรเดียว ถ้าฟังก์ชันนี้สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $y = y_o$ แล้ว ค่าของอนุพันธ์นี้จะเรียกว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_o, y_o) เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $f_y(x_o, y_o)$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$โดยที่

$$f_Y(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)}{\Delta y} \tag{2.3}$$

ค่าของ $f_x(x_o, y_o)$ และ $f_y(x_o, y_o)$ หาได้จากการหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ ก่อน (การหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ เป็นการหาอนุพันธ์ของ $f(x, y)$ เทียบกับ x โดยถือว่า y คงที่ และหาอนุพันธ์ของ $f(x, y)$ เทียบกับ y โดยถือว่า x คงที่ตามลำดับ) แล้วแทนค่า $x = x_o$ และ $y = y_o$

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> ปริมาตร V ของทรงกระบอกกลม คือ $V = \pi r^2 h$ โดยที่ r เป็นรัศมี h คือความสูง

ก. ถ้า h มีค่าคงที่ 10 นิ้ว แต่ r แปรค่า จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r ขณะที่วัด r ได้ 5 นิ้ว

ข. ถ้า r มีค่าคงที่ 4 นิ้ว แต่ h แปรค่า จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ h ขณะที่วัด h ได้ 8 นิ้ว

วิธีทำ ให้ $V = \pi r^2 h$

ก. ถ้า h คงที่, $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh$

อัตรกการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ r เมื่อ h คงที่ = 10 นิ้ว และ r = 5 นิ้วคือ

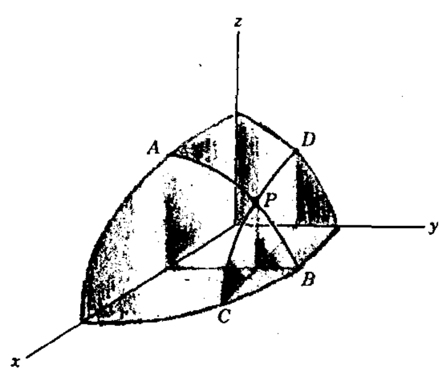
$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi(5)(10) = 100\pi$$

ข. ถ้า r คงที่, $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2 h$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ V เทียบกับ h เมื่อ r คงที่ = 4 นิ้ว และ h = 8 นิ้ว คือ

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi(4)^2(8) = 128\pi$$

พิจารณาอนุพันธ์ย่อยในแง่ของเรขาคณิต ให้ $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวในสเปซ 3 มิติ รอยตัดระหว่างพื้นผิวนี้กับระนาบ x = ค่าคงที่ (x_0) คือเส้นโค้ง APB ดังรูป 2.2



รูป 2.2

จุดทั้งหลายบนเส้นโค้งนี้มีค่า x คงที่เท่ากับ x_0 ทุกจุด และสมการของเส้นโค้งนี้คือ

$$z = f(x,y) \quad \text{และ} \quad x = \text{ค่าคงที่} = x_0$$

หรือ $z = f(x_0,y)$ บนระนาบ $x = x_0$

สมการของเส้นโค้งบนระนาบนี้เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปร y เพียงตัวเดียว ดังนั้น dz/dy เป็นความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้

นั่นคือ $f_y(x_0, y_0)$ = ความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่จุด P

ในทำนองเดียวกันถ้าพิจารณาเส้นโค้งซึ่งเกิดจากการตัดกันระหว่างผิวนี้กับระนาบ $y = y_0$ ซึ่งมีสมการ $z = f(x, y_0)$ บนระนาบ $y = y_0$ สมการของเส้นโค้งบนระนาบนี้เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปร x เพียงตัวเดียวและจะได้ว่า

$f_x(x_0, y_0)$ = ความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่จุด P

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งซึ่งเกิดจากการตัดกันระหว่างผิว $z = x^2 + y^2$ กับระนาบ $y = 1$ ที่จุด (2, 1, 5)

วิธีทำ $$f(x, y) = z = x^2 + y^2$$

สมการของเส้นโค้งบนระนาบ $y = 1$ คือ

$$f(x, 1) = x^2 + 1$$

$$f_x(x, 1) = \frac{d}{dx} f(x, 1)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$= 2x$$

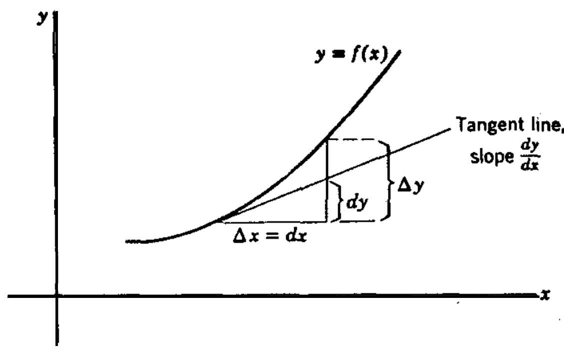
ความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่จุด (2, 1, 5) = 2(2) = 4

2.3 อนุพันธ์รวม (total differential)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งในระนาบ xy จะได้

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

เป็นความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด (x, Y) ดังได้กล่าวมาแล้ว ในการคำนวณเราใช้ Δx หมายถึงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร Δx และ Δy หมายถึงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y ที่สอดคล้องกัน



รูป 2.3

จากนิยาม $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (2.4)

กำหนดส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปของ x(dx) ว่าเป็น Δx นั่นคือ $dx = \Delta x$ แต่ dy ไม่ใช่ค่าเดียวกับ Δy จากรูป 2.3 และสมการ (2.4) จะเห็นว่า Δy เป็นการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามเส้นโค้ง แต่ $dy = y'dx$ เป็นการเปลี่ยนแปลงของ y บนเส้นสัมผัส ซึ่งเป็นค่าโดยประมาณของ Δy เช่น ถ้า $y = f(t)$ เป็นระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ ดังนั้น dy/dt คือความเร็ว ระยะทางจริง ๆ ที่อนุภาคเคลื่อนที่ระหว่างช่วงเวลา t และ $t + \Delta t$ คือ การประมาณว่า $dy = (dy/dt)dt$ เป็นระยะที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ ถ้าอนุภาคนั้นเคลื่อนที่ต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิม dy/dt (ซึ่งเป็นความเร็ว ณ เวลา t) ค่า y

ที่เปลี่ยนไปบนเส้นสัมผัสคือ dy ค่านี้จะประมาณเท่ากับ Δy ถ้า dx มีค่าน้อย เราอาจกล่าวว่า dy/dx เป็นลิมิตของ $\Delta y/\Delta x$ เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ หมายความว่า $\Delta y/\Delta x - dy/dx \rightarrow 0$ ถ้าให้ผลต่างนี้คือ ε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{ขณะที่} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

เนื่องจาก $\Delta x = dx$ ดังนั้น

$$\Delta y = (y' + \varepsilon)dx \quad \text{เมื่อ} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{ขณะที่} \quad \Delta x \rightarrow 0 \qquad (2.5)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า dy เป็นค่าประมาณที่ดีของ Δy เพราะ ε มีค่าน้อย สำหรับ dx ที่ค่าน้อย ๆ

เช่นสมมุติว่า $y = t^2$, $t = 1$, $dt = 0.1$

ดังนั้น $\Delta y = (1.1)^2 - (1)^2 = 0.21$

$$dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt = (2)(1)(0.1) = 0.2$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta t} - \frac{dy}{dt} = 2.1 - 2 = 0.1$$

$$\Delta y = (y' + \varepsilon)dt = (2 + 0.1)(0.1) = dy + \varepsilon dt$$

$$= 0.2 + 0.01$$

ดังนั้น dy เป็นค่าประมาณที่ดีของ Δy

ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชันที่มี 2 ตัวแปร $z = f(x, y)$ สามารถหาอนุพันธ์รวมได้เช่นกัน ฟังก์ชัน 2 ตัวแปรนี้แทนพื้นผิวและอนุพันธ์ $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ ที่จุดใด ๆ เป็นความชันของเส้นสัมผัสสองเส้นกับพื้นผิวนี้ในแกน x และ y ที่จุดนั้น

ที่จุดนั้น สัญลักษณ์ $\Delta x = dx$ และ $\Delta y = dy$ แทนการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x และ y ปริมาณ Δz หมายถึงการเปลี่ยน z สอดคล้องกันไปตามพื้นผิวนี้ เรากำหนด dz จากสมการ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (2.6)$$

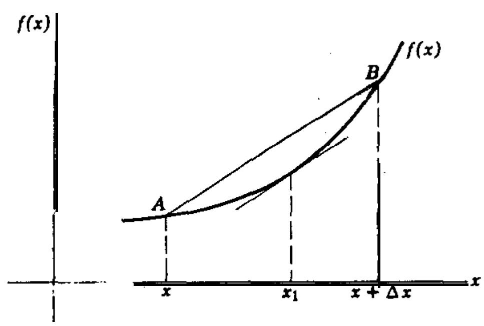
dz เรียกว่า อนุพันธ์รวมของ z dz ประมาณเท่ากับ Δz ถ้า dx และ dy มีค่าน้อย เราสามารถแสดงรายละเอียดได้เช่นเดียวกับสมการ (2.5) ถ้า $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f(x + \Delta x, y) - f(x, y) + f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &\quad - f(x + \Delta x, y) \qquad (2.7) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีค่าเฉลี่ย (mean value theorem) สำหรับฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ $f(x)$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x_1) \qquad (2.8)$$

เมื่อ x_1 อยู่ระหว่าง x และ $x + \Delta x$ จากรูป 2.4 มีเส้นสัมผัสระหว่าง x และ $x + \Delta x$ โดยที่ความชันเท่ากับเส้น AB



รูป 2.4

สองเทอมแรกด้านขวามือของสมการ (2.7) มี y เป็นค่าคงที่และสองเทอมสุดท้าย x เป็นค่าคงที่ เมื่อใช้สมการ (2.8) แทนลงในสมการ (2.7) จะได้

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_1, y)\Delta x}{\partial x} + \frac{\partial f(x + \Delta x, y_1)\Delta y}{\partial y} \qquad (2.9)$$

ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ f มีความต่อเนื่อง จะได้ว่าค่าในสมการ (2.9) ที่จุดใกล้ (x, y) จะต่างจากค่าที่จุด (x, y) ด้วยปริมาณที่เข้าใกล้ศูนย์เมื่อ Δx และ Δy เข้าใกล้ศูนย์ เรียกปริมาณนี้ว่า ε_1 และ ε_2 สมการ (2.9) เขียนใหม่

$$Az = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon_2\right)\Delta y$$

$$= dz + \varepsilon_1 Ax + \varepsilon_2 Ay \qquad (2.10)$$

ε_1 และ $\varepsilon_2 \to 0$ เมื่อ Δx และ $\Delta y \to 0$

$\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ เป็นค่าที่จุด (x, y) สมการ (2.10) แสดงว่า dz เป็นค่าประมาณที่ดีของ Δz ถ้า dx และ dy มีค่าน้อย ๆ สำหรับฟังก์ชันที่มีหลายตัวแปร เช่น u = f(x, y, z,..)อนุพันธ์รวมเขียนได้ว่า

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots \qquad (2.11)$$

และ du จะเป็นค่าประมาณที่ดีของ Δu ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ f มีความต่อเนื่อง และ dx, dy, dz,... มีค่าน้อย ซึ่งเราสามารถประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าได้

ในบางครั้งสมการมีความซ้ำซ้อน เราไม่อาจหาตัวแปรได้โดยตรง แต่อาจเขียนกราฟและหาความชันของกราฟได้ ความชันที่ได้คืออนุพันธ์แบบอิมพลิซิต (implicit differentiation)

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> จงหาค่าโดยประมาณของ $\sqrt[3]{124}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

ดังนั้น $$df = \frac{1}{3}x^{-2/3}\, dx$$

ให้ $x = 125 = 5^3$ และ $dx = -1$ แทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$df = \frac{1}{3}(5^3)^{-2/3}(-1)$$

$$= -0.0133$$

ดังนั้นค่าประมาณของ $\sqrt[3]{124}$ คือ

$$\sqrt[3]{125} - 0.0133 = 5 - 0.0133$$

$$= 4.9867$$

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> เมื่อทำให้ทรงกลมรัศมี 10 ซ.ม. ร้อนจะเกิดการขยายตัว จงหาปริมาตรที่เพิ่มขึ้น ถ้ารัศมีเพิ่มขึ้น 0.1 ซ.ม.

<u>วิธีทำ</u> ปริมาตรที่เปลี่ยนไปจริง ๆ คือ ΔV แต่เราสามารถใช้ dV เป็นค่าประมาณที่ดีของ ΔV ได้

ปริมาตรทรงกลม $$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi(10)^2(0.1) \text{ ซม.}^3$$

$$= \quad 40\ x\ \text{ซ.ม.}^3$$

(เปรียบเทียบค่านี้กับ $\Delta V = 40.40\ x$ ซ.ม.^{3})

<u>ตัวอย่าง</u> 2.10 กระป๋องรูปทรงกระบอกทำด้วยดีบุก มีรัศมีภายใน 2 นิ้ว ความสูงภายใน 4 นิ้ว และความหนาของผนังภาชนะนี้เท่ากับ 0.05 นิ้ว โดยที่ภายในกลวงและมีฝาปิดทั้งสองด้าน จงหาปริมาตรของดีบุกที่ใช้ทำกระป๋องใบนี้

วิธีทำ จากสูตรปริมาตร $v = \pi r^2 h$

เราได้ $dV = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$

เมื่อ $dr = 0.05$ นิ้ว และ $dh = 2(0.05)$ นิ้ว (เพราะความแตกต่างระหว่างความสูงภายในและภายนอกจะรวมความหนาของฝาด้านบนและด้านล่าง)

$$\text{ดังนั้น} \quad dV = 2\pi(2)(4)(0.05) + \pi(2)^2(0.1)$$

$$= \frac{4}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi$$

$$= \frac{6}{5}\pi \quad (\text{นิ้ว})^3$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.11 ลูกบาศก์ลูกหนึ่งวัดแต่ละด้านยาว 6 นิ้ว พบว่าการวัดนี้มีความผิดพลาด 0.02 นิ้ว จงหาค่าประมาณของปริมาตรและพื้นที่ผิวที่ผิดพลาดไปเนื่องจากความผิดพลาดของการวัดด้าน

<u>วิธีทำ</u> ให้ด้านของลูกบาศก์ยาว x นิ้ว

ปริมาตรของลูกบาศก์ $V = x^3$

เมื่อ $x = 6$ นิ้ว $dx = \pm 0.02$ นิ้ว

ดังนั้น $dV = 3(6)^2(\pm 0.02)$

$= \pm 2.16$ (นิ้ว)^3

พื้นที่ผิวของลูกบาศก์ $A = 6x^2$

$dA = 12xdx$

$= 12(6)(\pm 0.02)$

$= \pm 1.44$

2.4 กฎลูกโซ่

ให้ $z = z(x, y)$ โดยที่ $x = x(s, t)$ และ $y = y(s, t)$ เราอาจหาอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.13}$$

หรือโดยทั่วไปถ้า $u = u(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ โดยที่ $x_n = x_n(s_1, s_2, s_3, \ldots$ $= x_n(s)$

ดังนั้น $$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds} \tag{2.14}$$

สมการ (2.12), (2.13) และ (2.14) เรียกว่า กฎลูกโซ่

<u>ตัวอย่าง 2.12</u> จงหา du/ds และ $\partial u/\partial t$ กำหนดให้
$U = x^2 + 2xy - y\ln z$ เมื่อ $x = s + t^2$, $y = s - t^2$, $z = 2t$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 2xy - y\ln z$

$$du = (2x + 2y)dx + (2x - \ln z)dy - \frac{y}{z}dz$$

$$= (2x+2y)(ds+2tdt)+(2x-\ln z)(ds-2tdt) - \frac{y}{z}(2dt)$$

$$= (4x+2y-\ln z)ds+(4yt+2t\ln z - \frac{2y}{z})dt$$

ดังนั้น $$\frac{\partial u}{\partial s} = 4x + 2y - \ln z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4yt + 2t\ln z - \frac{2y}{z}$$

<u>ตัวอย่าง 2.13</u> สี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านกว้าง 9 ซ.ม. กำลังยืดยาวออกด้วยอัตรา 4 ซ.ม.ต่อวินาที ขณะที่ด้านยาว 14 ซ.ม. กำลังยืดยาวออกด้วยอัตรา 2 ซ.ม.ต่อวินาที ถามว่าขณะนั้นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> ให้ด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง x และยาว y

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A = xy$

$$\frac{dA}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

เมื่อ $x = 9$ ซ.ม., $y = 14$ ซ.ม./วินาที $dx/dt = 4$ ซ.ม./วินาที และ $dy/dt = 2$ ซ.ม./วินาที

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dA}{dt} = (14)(4) + (9)(2)$$

$$= 74 \text{ ซ.ม.}^2/\text{วินาที}$$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 74 ซ.ม.^{2}/วินาที

2.5 การหาค่าต่ำสุดและสูงสุดโดยใช้อนุพันธ์ย่อย

สำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว เช่น $y = f(x)$ เงื่อนไขที่สามารถหาจุดซึ่งฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด คือ $dy/dx = 0$ ในกรณีที่ฟังก์ชันมีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปร เช่น $z = f(x,y)$ สมมติว่า $f(x, y)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a, b) และทั้ง f_x และ f_y หาค่าได้ที่ (a, b) เมื่อใช้ระนาบ $y = b$ ตัดพื้นผิว $z = f(x, y)$ จะได้เส้นโค้ง $z = f(x, b)$ และมีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = a$ ดังนั้นอนุพันธ์ของ $z = f(x, b)$ จะมีค่าเป็นศูนย์ที่ $x = a$ นั่นคือ $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = 0$

ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชัน $z = f(a, y)$ จะได้ว่า $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = 0$ ดังนั้น $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ เป็นเงื่อนไขสำหรับ $f(x, y)$ ที่จะมีค่า สุดขีด (extreme value) และจุด (a, b) นี้เรียกว่า จุดวิกฤต (critical point) ของฟังก์ชัน f

แต่เงื่อนไข $f_x(a, b) = 0$ และ $f_y(a, b) = 0$ ไม่ได้เป็นสิ่งบอกให้ทราบว่า $f(x, y)$ จะต้องมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ที่ (a, b) เช่น ฟังก์ชัน $f(x, y) = y^2 - x^2$ มีกราฟเป็นไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์

(hyperbolic paraboloid) ที่จุด (o, o) $f_x(0,0) = 0$ และ $f_y(0, 0) = 0$ แต่ที่จุด (o , o) นี้ ไม่ใช่ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x, y)$

จุดวิกฤติที่ไม่ทำให้ $f(x, y)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์นี้ เรียกว่า จุดอานม้า (saddle point) ของ f

ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองมีความต่อเนื่องบนบริเวณของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดวิกฤติ (a, b) และ $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ให้

$$A = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) \qquad (2.15)$$

1. ถ้า $\Delta > 0$ และ $f_{xx}(a, b) > 0$ จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b)
2. ถ้า $\Delta > 0$ และ $f_{xx}(a, b) < 0$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b)
2. ถ้า $\Delta < 0$ จะได้ว่า f มีจุดอานม้าที่ (a, b)
4. ถ้า $\Delta = 0$ สรุปผลไม่ได้

<u>ตัวอย่าง 2.14</u> จงหาจุดสุดขีดและจุดอานม้าของ f(x, y) = 4xy - x4 - y4

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

$$f_x(x, y) = 4y - 4x^3$$

$$f_y(x, y) = 4x - 4y^3$$

จุดวิกฤติของ f ต้องเป็นไปตามสมการ

$4y - 4x3 = 0$ หรือ $y = x^3$

$4x - 4y^3 = 0$ หรือ $x = y^3$

จะได้ $x = 0, 1, -1$

$y = 0, 1, -1$

จุดวิกฤติของ f คือ (0, o), (1, ı) และ (-I, -1)

เนื่องจาก $f_{xx}(x, y) = -12x^2$, $f_{yy}(x, y) = -12y^2$ และ

$f_{xy}(x, y) = 4$

ที่ จุด (0,0); $A = f_{xx}(0, 0)\, f_{yy}(0,0) - f^2_{xy}(0, 0)$

$= (0)(0) - 4^2$

$= -16 < 0$

ดังนั้นจุด (0, 0) เป็นจุดอานม้าของ f

ที่จุด (1, 1); $A = f_{xx}(1, 1) f_{yy}(1, 1) - f^2_{xy}(1, 1)$

$= (-12)(-12) - 42$

$= 128 > 0$

และ $f_{xx}(1, 1) = -12 < 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (1, 1)

ที่จุด (-1, -1) ; $A = f_{xx}(-1, -1)\, f_{yy}(-1, -1)$ -f&(-l, -1)

$= (-12)(-12) - 42$

$= 128 > 0$

และ $f_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-1, -1)$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.15 กล่องสี่เหลี่ยมฝาเปิดมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ทั้งหมด 48 ตารางฟุต จงหาขนาดของกล่องที่ทำให้มีปริมาตรมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ด้านฐานของกล่องยาวด้านละ x ฟุต กล่องสูง y ฟุต

ปริมาตรของกล่อง $V = x^2y$

พื้นที่ทั้งหมดของกล่อง $x^2 + 4xy = 48$

นั่นคือ $Y = \dfrac{48 - x^2}{4x}$

แทนค่า y จะได้ $V = \dfrac{x^2(48 - x^2)}{4x}$

$$= 12x - \frac{1}{4}x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 12 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

จะได้ $x = 4$

และ $Y = \dfrac{48 - (4)^2}{4(4)} = 2$

และเพราะว่า $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2} = -\dfrac{3}{2}x$

เมื่อ $x = 4$ จะได้ $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2} = -6 < 0$

ดังนั้น V จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $x = 4$ ฟุต, $y = 2$ ฟุต

ตัวอย่าง 2.16 กล่องทรงสี่เหลี่ยมมีฝาปิด มีปริมาตร 16 ลูกบาศก์ฟุต ทำจากวัสดุสองชนิด ด้านบนและด้านล่างทำจากวัสดุซึ่งมีราคา 10 บาท ต่อตารางฟุต ส่วนด้านข้างทำจากวัสดุซึ่งมีราคา 5 บาท ต่อตารางฟุต จงหาขนาดของกล่องที่จะทำให้สิ้นค่าวัสดุที่น้อยที่สุด

วิธีทำ ให้กล่องมีขนาดยาว x ฟุต กว้าง y ฟุต สูง z ฟุต

ให้ S เป็นพื้นที่ผิวของกล่อง

$$S = 2xy + 2xz + 2yz$$

M เป็นราคาของวัสดุทั้งหมด

$$M = (10)(2xy) + 5(2xz + 2yz)$$

$$= 20xy + 10z(x + y)$$

เพราะว่า $V = xyz = 16$

ดังนั้น $z = \frac{16}{xy}$

และ M จะเขียนได้เป็น

$$M = 20xy + \frac{160}{y} + \frac{160}{x}$$

ต้องการ M ให้มีค่าน้อยที่สุด

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 20y - \frac{160}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 20x - \frac{160}{y^2}$$

จุดวิกฤตต้องเป็นตามสมการ

$$20y - \frac{160}{x^2} = 0$$

$$20x - \frac{160}{y^2} = 0$$

จะได้ $x = 0$ และ $x = 2$ แต่ x เป็นความยาวของกล่อง

ดังนั้น $x = 2$ จะได้ $y = 2$ และ $z = 4$

และเพราะว่า $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{320}{x^3}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{320}{y^3}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x} = 20$

เมื่อ $x = 2$, $y = 2$ จะได้ $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 40$, $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 40$,

$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} = 20$

และ $\Delta = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x}\right)^2 = (40)(40) - (20)^2 = 1200 > 0$.

ดังนั้น M มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$

2.6 <u>การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดโดยมีตัวบังคับ</u>

ในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ ภายใต้เงื่อนไขประกอบ $g(x, y, z) = 0$ เราอาจเขียน z จากสมการ $g(x, y, z) = 0$ ให้อยู่ในรูปของ x และ y แล้วแทนค่า z นี้ลงในสมการ $f(x, y, z)$ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร แต่ในบางครั้งการแทนค่าแบบนี้จะยุ่งยากมาก เราจึง

ใช้วิธีการของลากรางจ์ (Lagrange) ดังนี้

ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดและ $g(x, y, z) \quad 0$ เป็นเงื่อนไขประกอบ เราจะสร้างฟังก์ชันขึ้นมาคือ

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

โดยที่ λ เป็นปริมาณสเกลาร์ที่ยังไม่ทราบค่าเรียกว่า ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier)

หาค่า x, y, z, λ จากสมการ

$$F_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad \text{หรือ} \quad f_x = \lambda g_x$$

$$F_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad \text{หรือ} \quad f_y = \lambda g_y$$

$$F_z = f_z - \lambda g_z = 0 \quad \text{หรือ} \quad f_z = \lambda g_z$$

$$H_\lambda = -g(x, y, z) = 0 \quad \text{หรือ} \quad g(x, y, z) = 0$$

วิธีการนี้อาจใช้หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันที่มีตัวแปร n ตัวได้เช่นกัน

<u>ตัวอย่าง</u> 2.17 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดออริจินไปยังจุดตัดกันของสมการ $xz = 4$ และ $x + 2y = 2$

<u>วิธีทำ</u> เราต้องการหาระยะที่สั้นที่สุดของ $x^2 + y^2 + z^2$ ที่มีสมการตัวบังคับ คือ $xz = 4$ และ $x + 2y = 2$ จากวิธีการของลากรางจ์ ให้

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + x,(x + 2y) + \lambda_2 xz \qquad (1)$$

แต่ละสมการของอนุพันธ์ย่อยเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 z = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 = 2y + 2\lambda_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 = 2z + \lambda_2 x = 0 \qquad (4)$$

และจากสมการตัวบังคับ

$$xz = 4 \qquad (5)$$

$$x + 2y = 0 \qquad (6)$$

แทนค่าสมการ (3) ลงในสมการ (2); $2x - y + \lambda_2 z = 0$ (7)

แทนค่าสมการ (4) ลงในสมการ (7); $2x - y - \frac{2z^2}{x} = 0$ (8)

แทนค่าสมการ (6) ลงในสมการ (8); $2x^2 - \frac{(-x)(x)}{2} - 2z^2 = 0$

กำจัดค่า z โดยใช้สมการ (5) ; $2x^2 + \frac{x^2}{2} - 2(\frac{4}{x})^2 = 0$

$$4x4 + x^4 - 32 = 0$$

$$x = \pm 2 \sqrt[4]{2/5}$$

$$Y = \pm \sqrt[4]{2/5}$$

$$z = \pm 2 \sqrt[4]{5/2}$$

ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดคือ $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$= \sqrt{5\sqrt{2/5} + 4\sqrt{5/2}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.18 T เป็นอุณหภูมิ ณ จุด (x, y, z) ใด ๆ โดย $T = 400\,xyz^2$ จงหาอุณหภูมิที่สูงที่สุดบนผิวของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $T - 400\,xyz^2$ เป็นสมการที่ต้องการหาค่ามากที่สุด

และ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ เป็นสมการเงื่อนไขประกอบ

ให้ $H(z, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$

โดย $f(x, y, z) = 400\ xyz2$ และ $g(x, y, z) = x^2 + y2 + z^2 - 1$

หา x, y, z และ λ จากสมการ

$$f_x = \lambda g_x \quad \text{หรือ } 400\ yz^2 = 2\ xx \qquad (1)$$

$$f_Y = \lambda g_Y \quad \text{หรือ } 400\ xz^2 = 2\lambda y \qquad (2)$$

$$f_z = \lambda g_z \quad \text{หรือ } 800\ xyz = 2\lambda z \qquad (3)$$

$$\text{และ } x^3 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (4)$$

สมการ (1) คูณ x บวกกับสมการ (2) คูณ y จะได้

$$800\ xyz^2 = 2\lambda(x^2 + y^2) \qquad (5)$$

สมการ (3) คูณ z $\quad 800\ xyz^2 = 2\lambda z^2 \qquad (6)$

ดังนั้น $\quad 2\lambda(x^2 + y^2) = 2\lambda z^2$

หรือ $$x^2 + y^2 = z^2$$

แทนสมการ (4) ลงในสมการข้างต้น

$$1 - z^2 = z^2$$

ได้ $$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

สมการ (1)คูณ y บวกกับสมการ (2)คูณx **จะได้**

$$400\,x^2z^2 - 400\,y^2z^2 = 0\ .$$

ได้ $$x = \pm\,y$$

แทนค่า $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $x = \pm\,y$ ลงในสมการ (4) จะได้

$$y^2 + y^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

และดังนั้น $$x = \pm\frac{1}{2}$$

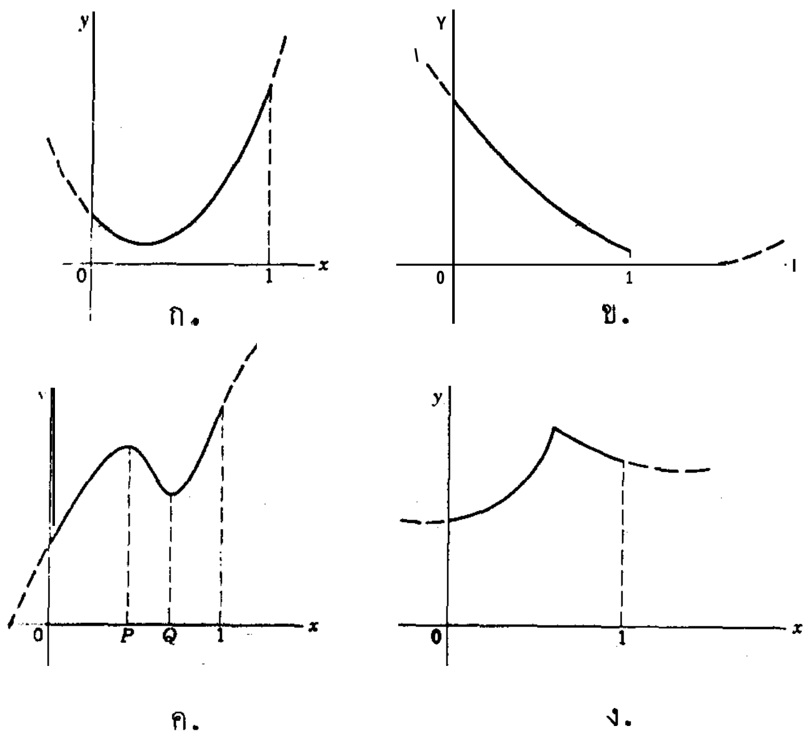
นั่นคือ จุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดบนผิวทรงกลมนี้คือ $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

และค่าอุณหภูมิที่สูงสุดที่จุด $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 400(\pm\frac{1}{2})(\pm\frac{1}{2})(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

$$= 50$$

2.7 ปัญหาจุดปลายสุดหรือจุดขอบเขตในการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด

ในการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดบางครั้งฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดที่จุดปลายสุด (end point) หรือจุดขอบเขต (boundary point) ตัวอย่างเช่น จะหาค่าสูงที่สุดและต่ำที่สุดของแต่ละฟังก์ชันในรูป สำหรับ $0 \le x \le 1$



รูป 2.5

ในรูป 2.5 ก. การคำนวณจะให้ค่าต่ำสุดแต่ค่าสูงสุดของ $f(x)$ สำหรับ x ที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 อยู่ ณ จุด $x = 1$ ซึ่งที่จุดนี้ไม่สามารถใช้วิธีคำนวณได้เพราะ $f'(x) \neq 0$

รูป 2.5 ข ทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดอยู่ที่จุดปลายสุดทั้งสองของ $f(x)$

รูป 2.5 ค. จุดต่ำสุดของ $f(x)$ อยู่ที่ $x = 0$ และจุดสูงสุดของ $f(x)$ อยู่ที่ $x = 1$ โดยที่ทั้งสองจุดนี้ $f'(x) \neq 0$ แต่มีค่าต่ำสุดเฉพาะแห่งที่ Q และค่าสูงสุดเฉพาะแห่งที่ P (เพราะทั้งที่จุด P และ Q นี้ $f'(x) = 0$)

รูป 2.5 ง. ไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้เพราะที่จุดซึ่งฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสูงสุดนั้นอนุพันธ์มีค่าไม่ต่อเนื่อง

ดังนั้นการหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชันที่มีจุดขอบเขตจะใช้วิธีปกติไม่ได้ ปัญหาในลักษณะเช่นนี้เราต้องคำนึงถึงค่าของฟังก์ชันที่จุดขอบเขตด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> 2.19 อุณหภูมิของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีเส้นรอบรูปคือ $x = \pm 1$ และ $y = \pm 1$ กำหนดโดยสมการ $T = 2x^2 - 3y^2 - 2x + 10$ จงหาจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดและอุณหภูมิต่ำสุดบนแผ่นนี้

<u>วิธีทำ</u> ถ้าใช้วิธีการหาจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดโดยวิธีปกติ จะได้

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 = 4x - 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 = -6y$$

ซึ่งจะให้ค่า $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ และ $T = 9\frac{1}{2}$

พิจารณาบริเวณขอบเขต

ที่ $x = 1 \qquad T = 10 - 3y2$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -6y = 0$$

$$y = 0, \quad T = 10$$

a $x = -1 \qquad T = 14, - 3y^2$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -6y = 0$$

$$y = 0, \quad T = 14$$

ที่ $y = 1$ $\qquad T = 2x^2 - 2x + 7$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad T = 6\frac{1}{2}$$

ที่ $y = -1$ $\qquad T = 2x^2 - 2x + 7$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4x-2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad T = 6\frac{1}{2}$$

หาค่า T ที่มุม ที่ (1, 1) (1, -1) $\qquad T = 7$

(-1, 1) (-1, -1) $\qquad T = 11$

ดังนั้นที่ $(\frac{1}{2}, \pm 1)$, $T = 6\frac{1}{2}$ เป็นจุดที่มีค่า T ต่ำสุด

ที่ (-1, 0) , T = 14 เป็นจุดที่มีค่า T สูงสุด

2.8 <u>การหาอนุพันธ์ของอินทีกรัล</u>

ถ้า $f(x)$ มีค่าดังสมการ $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

$f(x)$ สามารถอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\int_a^x f(t)dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ถ้าเราดิฟเฟอเรนชิเอตสมการข้างต้นเทียบกับ x จะได้ f(x) ตามเดิมดังนี้

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{2.16}$$

ในทำนองเดียวกันถ้า

$$\int_x^a f(t)dt = F(a) - F(x)$$

จะได้ $$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -\frac{dF(x)}{dx} = -f(x) \tag{2.17}$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป $$I = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

จะได้ว่า $$\frac{\partial I}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

$$= \frac{d}{\partial u}\int_{u(x)}^{b} f(t)dt$$ เมื่อ b มีเป็นค่าคงที่

จากสมการ (2.17) จะได้ $\frac{\partial I}{\partial u} = -f(u)$

ในทำนองเดียวกัน $$\frac{\partial I}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

$$= \frac{d}{dv} \int_{a}^{v(x)} f(t)dt$$

$$= f(v)$$

จาก $\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial I}{\partial v}\frac{dv}{dx}$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx} \qquad (2.18)$$

ในกรณีที่ตัวถูกอินทิเกรต (integrand) เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระ เช่น $f(x, t)$ เราอาจจะเขียนสมการการหาอนุพันธ์อินทิกราลได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)dt = f(x, v)\frac{dv}{dx} - f(x, u)\frac{du}{dx} + \int_{u}^{v}\frac{\partial f}{\partial x}dt$$

(2.19)

สมการ (2.18) และ (2.19) เรียกว่า กฎของไลบ์นิซ (Leibniz' rule)

<u>ตัวอย่าง</u> 2.20 จงหาค่า $\frac{dI}{dx}$ ““I $I = \int_{x}^{3x} \frac{e^{2xt}}{2t}dt$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎของไลบ์นิซ สมการ (2.19)

$$\frac{dI}{dx} = \frac{e^{2x(3x)}}{2(3x)}(3) - \frac{e^{2x(x)}}{2x}(1) + \int_{x}^{3x}\frac{2te^{2xt}}{2t}dt$$

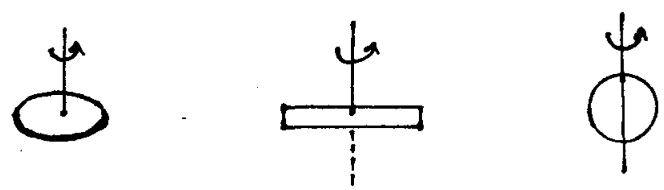
$$= \frac{1}{2x}(e^{6x^2} - e^{2x^2}) + \frac{e^{2x}}{2x}\Big|_{x}^{3x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(e^{6x^2} - e^{2x^2}\right)$$

2.9 <u>การประยุกต์ของการอินทิเกรต</u>

ในแคลคูลัสและฟิสิกส์เบื้องต้นได้กล่าวถึงการใช้อินทิเกรต เช่น การหาพื้นที่ ปริมาตร โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นต้น การใช้อินทิเกรตกับปัญหาเหล่านี้เราต้องสมมติว่าสิ่งที่เราต้องการหาถูกแบ่ง ออกเป็นส่วนเล็ก ๆ จำนวนมากเรียกว่าส่วนย่อย (element) เราจะประมาณค่าที่ต้องการหาได้ว่าเป็นผลรวมของส่วนย่อยเหล่านี้ ถ้าส่วนย่อยของผลรวมนี้) มีจำนวนมากเป็นอนันต์ และขนาดของส่วนย่อยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เรากล่าวว่าเป็นการหาค่าโดยการอินทิเกรต

<u>ตัวอย่าง</u> 2.21 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของ (1) วัตถุแผ่นกลมมวล M รัศมี R หมุนรอบศูนย์กลางดังรูป (ก) (2) ไม้ยาว ℓ มีมวล M หมุนรอบแกนดังรูป (ข) (3) วัตถุแผ่นกลมมวล M รัศมี R หมุนรอบแกน ดังรูป (ค)



ก. ข. ค.

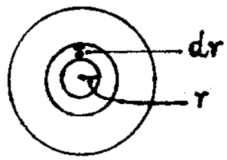
<u>วิธีทำ</u> โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นปริมาณประจำตัวของวัตถุที่เกี่ยวข้องกับการหมุนซึ่งขึ้นกับลักษณะของวัตถุและแกนที่วัตถุนั้นหมุนรอบ จากคำจำกัดความโมเมนต์ความเฉื่อย (dI) ของมวล dM

$$dI = r^2\, dM$$

$$I = \int r^2\, dM$$

เมื่อ r เป็นระยะตั้งฉากจากมวล dM มายังแกนหมุน

(1)



พิจารณาวงแหวนระหว่างรัศมี r และ $r + dr$

มวลของวงแหวนคือ $dM = 2\pi r\sigma dr$

เมื่อ σ คือมวล/พื้นที่ ซึ่งเป็นค่าคงที่

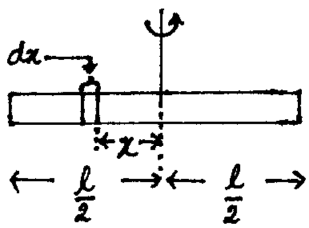
ดังนั้น $dI = 2\pi r\sigma r^2 dr$

$$I = \int_{0}^{R} 2\pi\sigma r^3 dr$$

$$= 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{2} MR^2$$

(2)



$dM = \rho dx$

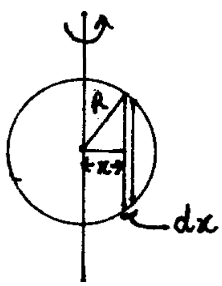
เมื่อ ρ คือมวล/ความยาว

ดังนั้น เมื่อ $I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \rho dx$

$$= \frac{\rho}{3} \cdot \frac{\ell^3}{4}$$

$$= \frac{M\ell^2}{12}$$

(3)



$dM = 2(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \sigma dx$

เมื่อ σ คือมวล/พื้นที่

ดังนั้น $$I = \int_{o}^{R} 2(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 \sigma dx$$

$$= 2\sigma \int_{o}^{R} x^2 (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

(จากตารางของอินทิกรัล)

$$= 2\sigma \left[\frac{R^4}{8} \sin^{-1}\frac{x}{R} - \frac{1}{8} x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(R^2 - 2x^2)\right]_0^R$$

$$= 2\sigma \left[\left(\frac{R^4}{8} \sin^{-1} 1 - 0\right) - \left(\frac{R^4}{8} \sin^{-1} 0 - 0\right)\right]$$

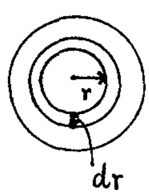
$$= 2\sigma \frac{R^4}{8} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi R^4 \sigma}{8}$$

$$= \frac{MR^2}{8}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.22 ตลับเทปมีรัศมีของแกนภายใน 2 ซม. รัศมีภายนอก 6 ซม. โดยที่ตลับเทปนี้มีเทปม้วนอยู่เต็มและเทปหนา 0.2 มม. จงหาว่าเทปม้วนนี้ยาวเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาวงแหวนรัศมี r และ $r + dr$ ซม. ในวงแหวนนี้มีเทปอยู่จำนวน $dr/0.02$ รอบ เทปแต่ละรอบยาว $2\pi r$ ซม. ดังนั้นในช่วงวงแหวนมีเทปยาว $2\pi r(dr/0.02)$ ซม.



นั่นคือ $$d\ell = 2\pi r \frac{dr}{0.02}$$

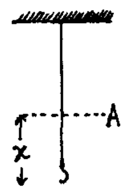
$$\ell = \int_{2}^{6} 2nr \frac{dr}{0.02}$$

$$\ell = 100\,\pi\,\frac{r}{2}^{2}\ {}^{6}{}_{I_{2}}$$

$$= 5026.55 \text{ ซม.}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.23 เชือกยาว ℓ มวล m ห้อยจากเพดานในแนวดิ่ง ถ้าเราแตะปลายเชือกทำให้เกิดคลื่นดลวิ่งขึ้นไปตามเชือก จงหาอัตราเร็วของคลื่นดลขณะที่อยู่ห่างจากปลายล่างของเชือกเป็นระยะทาง x คลื่นดลจะใช้เวลาเท่าใดในการวิ่งจากปลายล่างสุดของเชือกจนถึงจุดตรึงที่ผูกติดกับเพดาน

<u>วิธีทำ</u>



เชือกยาว ℓ มีมวล m

ถ้าเชือกยาว x จะมีมวล $m(x/\ell)$

ให้คลื่นดลใช้เวลา τ เคลื่อนที่จากปลายล่างสุดของเชือกจนถึงเพดาน

ความตึงเชือกที่จุด A = น้ำหนักของเชือกที่ยาว x

$$\text{ดังนั้น} \qquad T = \frac{mx}{\ell}g$$

จากความเร็วคลื่นในเส้นเชือก $\qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

เมื่อ μ เป็นมวล/ความยาว $\qquad v = \sqrt{\frac{mxg/\ell}{m/\ell}}$

$$= \sqrt{gx}$$

อัตราเร็วของคลื่นดลขณะที่อยู่ห่างจากปลายล่างของเชือกเป็นระยะทาง x คือ $\sqrt{gx}$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{gx}$$

$$\int_{o}^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \int_{o}^{\tau} dt$$

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2.10 อนุกรมและคุณสมบัติที่สำคัญ

อนุกรมเรขาคณิตคืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{k-1} + \ldots \qquad (a \neq 0)$$

อนุกรมนี้จะลู่เข้าถ้า $|r| < 1$ ซึ่งผลบวกของอนุกรมคือ $a/(1-r)$ และจะลู่ออกถ้า $|r| \geq 1$ ถ้าอนุกรม Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าจะได้ว่า $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ (แต่อนุกรม Σa_k ที่มี $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ สรุปไม่ได้ว่า Σa_k จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า)

<u>การทดสอบแบบอินทิกรัล</u> ให้ Σa_k เป็นอนุกรมที่มีทุก ๆ พจน์เป็นบวกและให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function)และมีความต่อเนื่องบน $[1, \infty]$ โดยที่ $f(x) \geq 0$ ทุก ๆ ค่า $x \geq 1$ และ $f(k) = a_k$ ทุก ๆ ค่า k แล้วจะได้ว่า

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ หาค่าได้และเป็นจำนวนจริง

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่ออกก็ต่อเมื่อ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ หาค่าไม่ได้ (ไม่เป็นจำนวนจริง)

<u>การทดสอบแบบเปรียบเทียบ</u> ให้ Σa_k และ Σb_k เป็นอนุกรมที่ $a_k > 0$ และ $b_k > 0$ ทุก ๆ ค่า k และถ้า $a_k \leq b_k$ ทุก ๆ ค่า k จะได้ว่า

(1) ถ้า Σb_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าจะได้ Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

(2) ถ้า Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่ออกจะได้ Σb_k เป็นอนุกรมที่ลู่ออกด้วย

<u>การทดสอบแบบลิมิต</u> ถ้า Σa_k เป็นอนุกรมที่ $a_k \geq 0$ ถ้ามี Σb_k เป็นอนุกรมที่ $b_k \geq 0$ และ $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$ แล้วจะได้ว่า

(1) ถ้า L เป็นจำนวนจริง (ที่ $\neq 0$) และถ้า Σb_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า จะได้ว่า Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

(2) ถ้า $L = 0$ และ Σb_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าจะได้ว่า Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

(3) ถ้า $L = \infty$ และ Σb_k เป็นอนุกรมที่ลู่ออกจะได้ว่า Σa_k เป็นอนุกรมที่ลู่ออกด้วย

<u>การทดสอบแบบอัตราส่วน</u> กำหนดให้ Σa_k เป็นอนุกรมที่มี $a_k > 0$ ทุกค่า k และถ้าให้

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = M$$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $M < 1$ อนุกรมนี้ลู่เข้า (2) ถ้า $M > 1$ อนุกรมนี้ลู่ออก

(3) ถ้า $M = 1$ สรุปไม่ได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าหรือไม่

<u>การทดสอบโดยอาศัยราก</u> ให้ Σa_k เป็นอนุกรมที่มี $a_k > 0$ ทุก ๆ ค่า k และถ้า

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = R$$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $R < 1$ อนุกรมจะลู่เข้า (2) ถ้า $R > 1$ อนุกรมจะลู่ออก

(3) ถ้า $R = 1$ สรุปไม่ได้ว่าอนุกรมนี้จะลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>อนุกรมเทย์เลอร์และแมคลอริน</u> (Taylor and Maclaurin series)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ณ ที่ $x = 0$ อนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

เรียกว่าอนุกรมแมคลอรินสำหรับฟังก์ชัน f

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ณ ที่ $x = a$ อนุกรมที่อยู่ในรูปของ

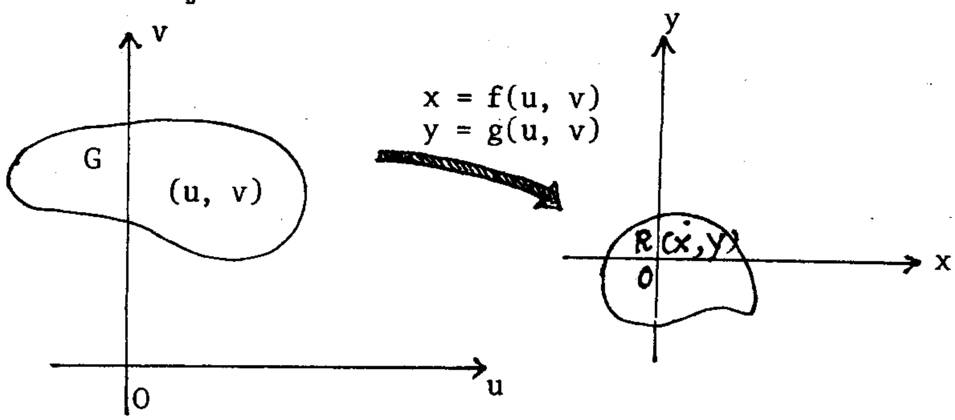
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

เรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน f ณ ที่ $x = a$

2.11 การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลและการหาจาโคเบียน

ปัญหาบางปัญหาในฟิสิกส์ถ้าใช้พิกัดฉากในการคำนวณแล้วอาจเกิดความยุ่งยากมาก หรืออาจไม่สามารถแก้ปัญหานั้นได้ จึงต้องใช้พิกัดอื่น ๆ เช่น ในระนาบใช้พิกัดเชิงขั้ว หรือกรณี 3 มิติ อาจใช้พิกัดทรงกลมหรือพิกัดทรงกระบอก

ถ้าบริเวณ Q ในระนาบ uv ถูกเปลง (transform) ไปยังบริเวณ R ในระนาบ xy ตามสมการที่สามารถมีอนุพันธ์ได้ในรูปของ $x = f(u, v)$ และ $y = g(u, v)$ ดังรูป 2.6



รูป 2.6

ดังนั้นฟังก์ชัน $\varphi(x, y)$ ที่นิยามบน R ก็คือฟังก์ชัน φ $(f(u, v), g(u, v))$ ที่นิยามบน Q จากทฤษฎีสำหรับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องด้วย จะได้ว่าอินทิกรัลของ $\varphi(x, y)$ บน R และอินทิกรัลของ φ $[f(u, v), g(u, v)]$ บน Q มีความสัมพันธ์กันตามสมการ

$$\iint_R \varphi(x, y)dx\, dy = \iint_Q \varphi\left[f(u, v), g(u, v)\right] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv \quad (2.20)$$

โดยที่
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

ดีเทอร์มิแนนท์ของอนุพันธ์ย่อยนี้เรียกว่าจาโคเบียน (Jacobian) ของการแปลงระบบพิกัด (coordinate transformation) $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$

ระบบพิกัดเชิงขั้ว ตัวแปรของพิกัดเชิงขั้วคือ r และ θ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับตัวแปรในพิกัดฉาก x และ y ดังนี้

$$x = r\cos\theta = f(r, \theta)$$

$$y = r\sin\theta = g(r, \theta)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $\varphi(x, y)$ ที่นิยามบน R ในระนาบ xy ก็คือฟังก์ชัน $\varphi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ ซึ่งนิยามบนบริเวณ Q ในระนาบ $r\theta$

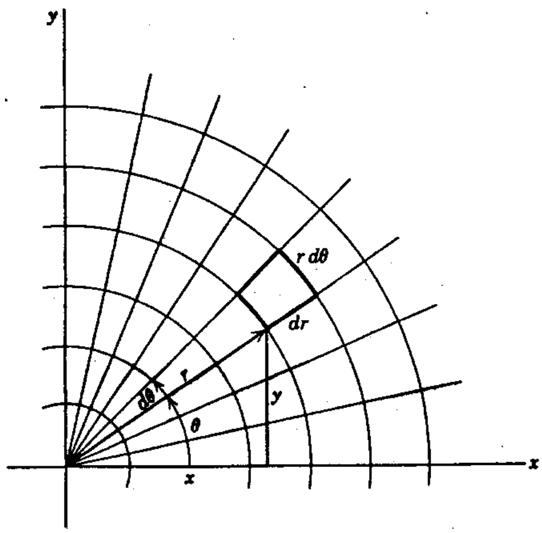
และ
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2\theta + r \sin^2\theta$$

$$= r$$

ดังนั้น $\iint_R \varphi(x, y)\,dx\,dy = \iint_Q \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$ (2.22)

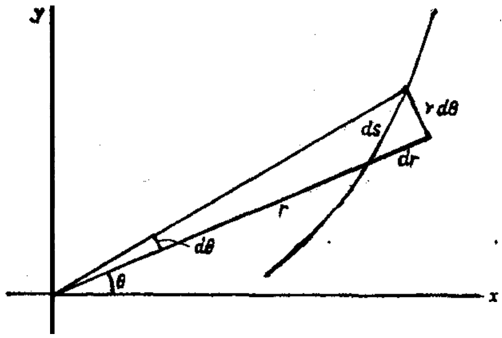


รูป 2.7

ในพิกัดฉากพื้นที่เล็ก ๆ dxdy ได้จากการลากเส้น x = ค่าคงที่ และ y = ค่าคงที่ ตัดระนาบเป็นพื้นที่เล็ก ๆ dxdy ในทำนองเดียวกันการหาพื้นที่เล็ก ๆ ในพิกัดเชิงขั้วจะได้จากการลากเส้น θ = ค่าคงที่ และ r = ค่าคงที่

ดังแสดงในรูป 2.7 ข้อสังเกตด้านข้างของพื้นที่ไม่ใช่เป็น dr และ dθ แต่เป็น dr และ rdθ ดังนั้น

$$dA = dr \quad rd\theta = r\, drd\theta$$



รูปที่ 2.8

จากรูป 2.8 ความยาวของเส้นโค้งเล็ก ๆ คือ

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\; d\theta$$

$$= \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\; dr$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.25 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน y ของบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งรูปหัวใจ $r = a(1 - \cos\theta)$ กำหนด $\sigma(x, y) = 1$

วิธีทำ $$I_Y = \iint_A x^2 \; \sigma(x, y)dA$$

$$= \iint_A x^2 \, dxdy$$

ในพิกัดเ ชิงขั้ว $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dxdy = r dr d\theta$

ดังนั้น $$I_Y = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1-\cos\theta)} r^2\cos^2\theta \, r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, \frac{a^4}{4} (1-\cos\theta)^4 d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - 4\cos^3\theta + 6\cos\theta^4 - 4\cos\theta^5 + \cos\theta^6) d\theta$$

ใช้วิธีการอินทิเกรตโคไซน์ยกกำลังกล่าวคือ $\int_0^{2\pi} \cos^n\theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2}\theta \, d\theta$

จะได้

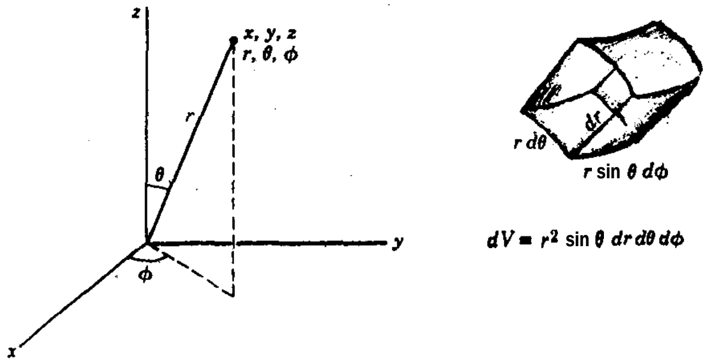
$$I_y = \frac{a^4}{4}\left[\pi - 4(0) + 6\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 4(0) + 1\frac{5\pi}{8}\right.$$

$$= \frac{49}{32}\pi a^4$$

ระบบพิกัดทรงกลม ตัวแปรของพิกัดทรงกลมคือ r, θ, และ φ ดังรูป 2.9 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับตัวแปรในพิกัดฉาก x, y, z ดังนี้

$$x = r\sin\theta\cos\varphi = f(r, \theta, \varphi)$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi = g(r, \theta, \varphi)$$



รูป 2.9

$$z = r\cos\theta = h(r, \theta, \varphi)$$

โดยที่ $r > 0,\ 0 \le \theta < \pi$ และ $0 \le \varphi < 2\pi$

และจาโคเบียนสำหรับพิกัดทรงกลมคือ

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \quad r^2\sin\theta\left[-\sin^2\varphi(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)-\cos^2\varphi(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)\right]$$

$$= \quad r^2\sin\theta \qquad (2.23)$$

ดังนั้น $\iiint\varphi(x,y,z)dxdydz = \iiint\varphi\left[f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right]|J|drd\theta d\varphi$

$$= \iiint\varphi(r,\ e,\ \varphi)\ r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi \qquad (2.24)$$

และปริมาตรย่อย (volume element) ในพิกัดทรงกลมคือ

$$dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta d\varphi \qquad (2.25)$$

ความยาวของเส้นโค้งในพิกัดทรงกลม

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\ d\theta)^2 + (r\ \sin e\ \ d\varphi)^2 \qquad (2.26)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.26 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ของทรงตันที่ตัดทรงกลม $r = a$ ด้วยกรวยกลม $\theta = \frac{\pi}{3}$ กำหนด $\delta(x, y, z) = 1$

วิธีทำ $I, = \iiint(x^2 + y^2)\ \delta(x, y, z)dV$

ในพิกัดทรงกลม $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ดังนั้น

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a} (r^2\sin^2\theta)r^2\sin\theta\ dr\ de\ d\varphi$$

$$R = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin^3\theta \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^a d\theta d\varphi$$

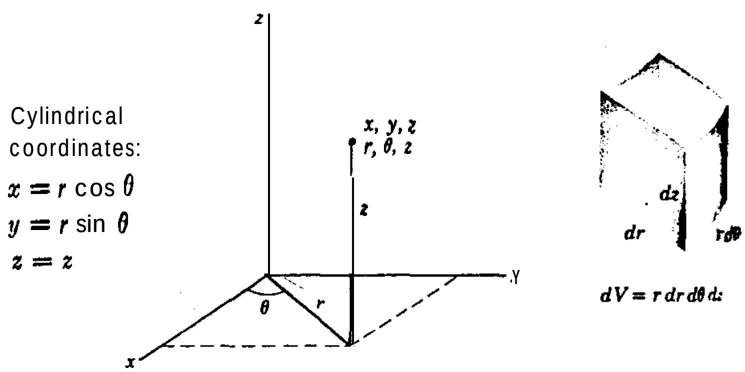
$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} -(1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} \left. -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right|_0^{\pi/3} d\varphi$$

$$= \frac{a^5}{5}\,\frac{5}{24}\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi a^5}{12}$$

พิกัดทรงกระบอก ตัวแปรในพิกัดนี้คือ r , θ และ z ดังรูป



รูป 2.10

โดยที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรในพิกัดฉาก x, y, z ดังนี้

$$x = r\cos\theta$$

$$Y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

นั่นคือเราแทนค่า x และ y ด้วยระบบพิกัดเชิงขั้วในระนาบ xy และค่า z ยังคงเดิม จาโคเบียนสำหรับพิกัดทรงกระบอกคือ

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r \qquad (2.27)$$

จะได้ว่า $\iiint f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,|J|\,dr\,d\theta\,dz$

$$= \iiint f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\, r\, dr\, d\theta\, dz \qquad (2.28)$$

ปริมาตรย่อยในพิกัดทรงกระบอกคือ

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz \qquad (2.29)$$

สำหรับความยาวของเส้นโค้งในพิกัดทรงกระบอกคือ

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\, d\theta)^2 + (dz)^2 \qquad (2.30)$$

ความยาวของเส้นโค้งไม่จำเป็นต้องใช้จาโคเบียน เพราะความยาว ds เป็นความยาวอันเดียวกันไม่ว่าจะคิดพิกัดไหน แต่พื้นที่ dA หรือปริมาตร dV ต้องใช้จาโคเบียน เพราะปริมาณนี้มีค่าเปลี่ยนไปเมื่อใช้พิกัดแตกต่างกัน

<u>ตัวอย่าง</u> 2.27 จงใช้ระบบพิกัดทรงกระบอกหาค่า $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากลิมิตของ z พื้นผิวล่างคือ $z = 0$ และพื้นผิวบนคือ $z = 9 - x^2 - y^2$ และลิมิตของ y และ x เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 9$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$, $z = z$ ดังนั้น

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-r^2} (r\cos\theta)^2\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} r^3\cos^2\theta\,(9-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \frac{\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$= 243\frac{\pi}{4}$$

<u>บทสรุป</u>

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว (x) และสามารถหาอนุพันธ์ได้ อนุพันธ์ของ f ที่จุด x_o คือ

$$f'(x_o) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

ซึ่งก็คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x_o, y_o)$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตั้งแต่สองตัวแปรขึ้นไปและสามารถหาอนุพันธ์ได้ อนุพันธ์ย่อยของ f (กรณี 2 ตัวแปร) เทียบกับ x ที่จุด (x_o, y_o) คือ

$$f_x(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x_o+\Delta x, y_o) - f(x_o,y_o)}{\Delta x}$$

และอนุพันธ์ย่อยของ f (กรณี 2 ตัวแปร) เทียบกับ y ที่จุด (x_o, y_o) คือ

$$f_y(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y\to o}\frac{f(x_o, y_o+\Delta y) - f(x_o,y_o)}{\Delta y}$$

สำหรับฟังก์ชันที่มี 2 ตัวแปร $z = f(x, y)$ อนุพันธ์รวมของ z คือ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ถ้า $u = u(x_1, x_2, \ldots)$ โดยที่ $x_n = x_n(s_1, s_2, \ldots) = x_n(s)$
ดังนั้น

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds}$$

สมการข้างต้นเรียกว่า กฎลูกโซ่

ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองมีความต่อเนื่องบนบริเวณวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดวิกฤต (a, b) และ $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ให้

$$\Delta = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

ถ้า $\Delta > 0$ และ $f_{xx}(a, b) > 0$ จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b)
ถ้า $\Delta > 0$ และ $f_{xx}(a, b) < 0$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (a, b)
ถ้า $\Delta < 0$ จะได้ว่ามีจุดอานม้าที่ (a, b)
ถ้า $\Delta = 0$ สรุปผลไม่ได้

การหาอนุพันธ์ของอินทิกราลโดยกฎของไลบ์นิซ นิยามได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt = f(x,v)\frac{dv}{dx} - f(x,u)\frac{du}{dx} + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}\,dt$$

ถ้า $\varphi(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องด้วย จะได้ว่าอินทิกรัลของ $\varphi(x,y)$ บนระนาบ xy และอินทิกรัลของ $\varphi\left[f(u, v), g(u,v)\right]$ บนระนาบ uv มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\iint \varphi(x,y)\,dx\,dy = \iint \varphi\left[f(u,v), g(u,v)\right] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

เมื่อ $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ คือจาโคเบียนของการแปลงระบบพิกัด

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงหาความเร็วที่เวลา $t = 2$ วินาที ของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เมื่อระยะทาง s ที่เวลา t คือ $s = \sqrt{t+2}$ เมตร

2. จงหา $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ เมื่อ

   ก. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ ข. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$

   ค. $f(x,y) = 4e^{x^2y^3}$

3. ถ้า $u = 3x^2y - xy^3 + 2$ จงหา ∂u ที่จุด (1, 2)

4. ในการทาสีแท้งค์รูปทรงกระบอกกลมรัศมี 25 ฟุต สูง 50 ฟุต โดยจะทาด้านบนและด้านข้างด้วยสีหนา 0.02 นิ้ว จงหาว่าต้องใช้สีกี่แกลลอน ($231 \text{ in}^3 = 1 \text{ gal}$)

5. กำหนด $z = xe^{-y}$, $x = \cosh t$, $y = \cos t$ จงหา dz/dt

6. ให้ $c = \sin(a-b)$, $b = ae^{2a}$ จงหา dc/da

7. วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามเส้นตรงในแนวระดับ ตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา t จากจุดเริ่มต้นคือ $s(t) = t^4 - 6t^3 + 2t^2 - 10t+3$ จงหา
   ก. ช่วงเวลาที่วัตถุมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้นและช่วงเวลาที่วัตถุมีอัตราเร็วลดลง
   ข. เวลาซึ่งวัตถุเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วต่ำสุดและอัตราเร็วสูงสุด

8. จงหาขนาดของทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุดซึ่งจะบรรจุลงไปในรูปทรงกลมรัศมี 1 2 นิ้ว

9. ถ้า $z = 3 \cos x - \sin xy$, $x = 1/t$, $y = 3t$ จงหา dz/dt

10. ถ้า $z = xye^{x/y}$, $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ จงหา $\partial z/\partial r$ ที่ $r = 2$, $\theta = \pi/6$ และ $\partial z/\partial\theta$ ที่ $r = 2$, $\theta = \pi/6$

11. จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์และจุดอานม้า เมื่อ

    ก. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

    ข. $f(x, y) = 2y^2x - yx2 + 4xy$

12. จงใช้วิธีของลากรางจ์หาขนาดกล่องทรงสี่เหลี่ยมไม่มีฝาปิดที่มีปริมาตร 32 ฟุต^3 โดยต้องการใช้วัสดุในการทำกล่องน้อยที่สุด

13. จงหา dy/dx ถ้า $y = \int_0^1 \frac{e^{xu} - 1}{u} du$

14. รถยนต์คันหนึ่งวิ่งด้วยอัตราเร็ว 60 ไมล์/ชม. เมื่อเบรครถอัตราเร่งของรถจะเป็น -11 ฟุต/วินาที^{2} จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่รถจะวิ่งไปได้ภายหลังจากใช้เบรค

15. แผ่นสามเหลี่ยมล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = 0$, $y = 2x$ และ $x = 1$ มีความหนาแน่นคงที่ 3 กรัม/ซม.^{2} จงหา ก) โมเมนต์รอบแกน y ของแผ่นสามเหลี่ยมนี้ ข) มวลของแผ่นสามเหลี่ยมนี้ ค) ศูนย์กลางของมวลของแผ่นสามเหลี่ยมนี้

16. จงหาจาโคเบียน $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ ของการแปลงที่กำหนดให้จากตัวแปร x, y ไปเป็นตัวแปร u, v เมื่อ $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ และ $y = uv$