บทที่ 1
เลขจำนวนเชิงซ้อน

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 1 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. เขียนเลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ในพิกัดฉากให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้
2. ใช้สูตรของเดอมัวฟ์หากำลังที่ n ของเลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือลบ หรือเป็นเศษส่วน
3. หาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลของเลขจำนวนเชิงซ้อนกับฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์ได้
4. หาค่าฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันกำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผันและฟังถ์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผัน ของเลขจำนวนเชิงซ้อนได้
5. นำไปประยุกต์กับปัญหาทางฟิสิกส์ได้เช่นการรวมคลื่นแสง

บทที่ 1
เลขจำนวนเชิงซ้อน

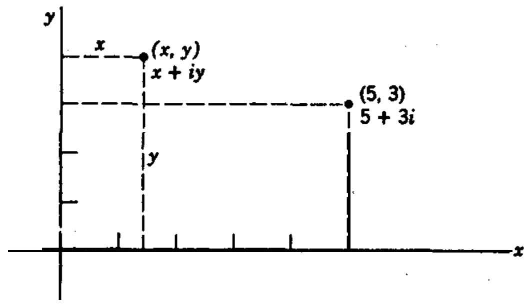
1.1 บทนำ

เมื่อเราพิจารณารากที่สองของเลขจำนวนที่เป็นลบ เราอาจคิดว่าเลขจำนวนนั้นไม่มีความหมายหรือไม่สามารถเชื่อมโยงกับเลขจำนวนจริงได้ แต่อย่างไรก็ตามเลขจำนวนเชิงซ้อนนี้มีความสำคัญและสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ มากมาย เช่น ในวงจรไฟฟ้า การแก้ปัญหาการสั่น (vibration problem) การหาคำตอบสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่าง ๆ ฯลฯ เราใช้สัญลักษณ์ $i = -1$ โดยที่ $i^2 = -1$ ดังนั้น $-16 = 4i$, $-3 = i\ 3$, $i^3 = -i$ เหล่านี้เป็นต้นเป็นเลขจำนวนจินตภาพ (imaginary numbers) แต่ $i^2 = -1$, $-2, -8 = i\ 2\ i\ 8 = 4$, $i^{4n} = 1$ เป็นเลขจำนวนจริง (real numbers)

เราใช้เทอมเลขจำนวนเชิงซ้อน (complex number) กับเทอมใดเทอมหนึ่งของจำนวนส่วนที่เป็นจำนวนจริง ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ หรือผลรวมของส่วนที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ เช่น $0i + 4 = 4$, $17i$, $5+2i$ พิจารณาเลขจำนวนเชิงซ้อน เช่น $z = 5 + 3i$ เทอมที่เป็นจำนวนจริง (ไม่มี i) เรียกว่าส่วนจริง (real part) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน (ในที่นี้คือ 5) อีกเทอมที่มี i เรียกว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน (ในที่นี้คือ 3) ข้อสังเกต ส่วนจินตภาพของเลขจำนวนเชิงซ้อนเป็นเลขจำนวนจริง) เราอาจกล่าวว่าทุก ๆ เลขจำนวนเชิงซ้อนจะมีส่วนจริงและส่วนจินตภาพ (ส่วนใดส่วนหนึ่งอาจเป็นศูนย์ก็ได้) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถเขียนในรูปคู่ของเลขจำนวนจริงโดยที่ตัวแรกเป็นส่วนจริงและตัวหลังเป็นส่วนจินตภาพ เช่น $5 + 3i$ เขียนได้เป็น $(5, 3)$ เลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สามารถเขียนได้ด้วยวิธีดังกล่าวนี้

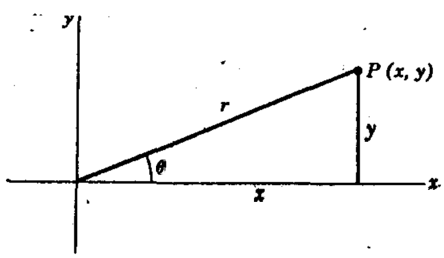
1.2 ระนาบเชิงซ้อน

เลขจำนวนเชิงซ้อนใด $x + iy$ อาจแทนได้ด้วยจุด (x, y) ในระนาบ (x, y) ระนาบที่ใช้ในการพลอต (plot) เลขจำนวนเชิงซ้อนเรียกว่า ระนาบเชิงซ้อนหรือแผนภาพอาร์กองด์ (Argand diagram) แกน x เรียกว่าแกนจริง (real axis) และแกน y เรียกว่าแกนจินตภาพ (imaginary axis) ดังรูป (1.1)



รูป 1.1

นอกจากแทนเลขจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ ด้วยจุด (x, y) ในพิกัดฉาก (rectangular coordinate) แล้วยังอาจแทนได้ด้วยจุด (r, θ) ในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)



รูป 1.2

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก (x, y) และพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) แสดงดังรูป 1.2 จะได้

$$x = r\cos\theta \qquad \text{หรือ} \quad r = x^2 + y^2$$

$$y = r\sin\theta \qquad\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ดังนั้น $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (1.1)

r เรียกว่า โมดูลัส (modulus) หรือค่าสัมบูรณ์ (absolute value)

θ เรียกว่ามุมของ z (หรือเฟสของ z หรืออัมปลิจูดของ z) สัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันคือ

$$x = \mathrm{Re}\, z$$

$$y = \mathrm{Im}\, z$$

$$r = |z| = \mathrm{mod}\, z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2)$$

ถ้า $z = x + iy$ สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) ของ z คือ z^* โดยที่ $z^* = x - iy$

หรือถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะได้ $z^* = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

หรือกรณี $z = re^{i\theta}$ จะได้ $z^* = re^{-i\theta}$

ข้อสังเกตถ้านำ z คูณกับ z^* จะได้ค่าจริงและไม่เป็นลบเสมอ เช่น

$z = x+iy$, $z^* = x - iy$ ดังนั้น $zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

และจากสมการ (1.4) ได้ $|z| = \mathrm{mod}\, z = [zz^*]^{\frac{1}{2}}$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.1 จงเขียน $z = 2 + 2i$ ในพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ $x = 2, \quad y = 2$

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

ดังนั้น
$$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.2 จงเขียน $z = -1 - i$ ในรูปของ $r\,e^{i\theta}$

วิธีทำ $x = -1, \quad y = -1$

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

ดังนั้น
$$z = -1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}$$

1.3 <u>พีชคณิตของตัวแปรเชิงซ้อน</u>

การบวก การลบ และการคูณของเลขจำนวนเชิงซ้อนใช้กฎพีชคณิตธรรมดา แต่ต้องไม่ลืมว่า $i^2 = -1$ สำหรับการหารต้องทำส่วนให้อยู่ในรูปของเลขจำนวนจริงโดยการคูณเศษและส่วนด้วยสังยุคเชิงซ้อนของส่วน เช่น

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

ดังนั้น
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

เลขจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนเท่ากัน ถ้าส่วนจริงของทั้งสองเท่ากัน และส่วนจินตภาพของทั้งสองเท่ากัน เช่น

$$x + iy = 2 + 3i$$

หมายความว่า $x = 2$

และ $y = 3$

ตัวอย่าง 1.3 จงหาค่าของ $\left|\frac{\sqrt{6} - 3i}{1 - 2i}\right|$

วิธีทำ $\left|\frac{\sqrt{6} - 3i}{1 - 2i}\right| = \left[\frac{(\sqrt{6} - 3i)}{(1 - 2i)} \frac{(\sqrt{6} + 3i)}{(1 + 2i)}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{6 + 9}{1 + 4}$$

$$= 3$$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาค่าของ x และ y จากสมการ $(x + iy) = (1 - i)^2$

วิธีทำ $x + iy = (1 - i)^2$

$$= 1 - 2i - 1$$

$$= -2i$$

ดังนั้น $X = 0$

และ $y = -2$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.5 จงหาอัตราเร็วและขนาดของความเร่ง ถ้า z เป็นการขจัดสำหรับอนุภาคที่กำหนดให้ และ $z = (1+i)e^{i2t}$

วิธีทำ ความเร็วเชิงซ้อน $v = \frac{dz}{dt} = (1+i)2ie^{i2t}$

$$= (-2+2i)e^{i2t}$$

ขนาดของความเร็ว $v = \left|\frac{dz}{dt}\right| = \left[(-2+2i)e^{i2t}(-2-2i)e^{-i2t}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= 2\sqrt{2}$$

ดังนั้นอัตราเร็วของอนุภาค= $2\sqrt{2}$

ความเร่งเชิงซ้อน a $= \frac{d^2z}{dt^2} = (-2+2i)2ie^{i2t}$

$$= (-4-4i)e^{i2t}$$

ขนาดของความเร่ง a $= \left|\frac{d^2z}{dt^2}\right| = \left[(-4-4i)e^{i2t}(-4+4i)e^{-i2t}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= 4\sqrt{2}$$

ดังได้กล่าวแล้วว่าในพิกัดเชิงขั้ว $r = |z| = [zz^*]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ และมุม θ นั้นเรียกว่าอาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z เขียนด้วย arg z โดยที่

$$\arg z = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \cos^{-1}\frac{x}{r}$$

สำหรับ $z \neq 0$ arg z จะสอดคล้องกับค่า θ เพียงค่าเดียวใน $0 \leq \theta < 2\pi$ สำหรับช่วงอื่น ๆ ที่มีความยาว 2π เช่น $-\pi < \theta \leq \pi$ ก็สามารถใช้ได้ ค่า θ ที่อยู่ในช่วง $-\pi < \theta \leq \pi$ นี้เรียกว่า ค่าหลัก

(principal value) ของ arg z (ตำราบางเล่มใช้ค่าหลักของ arg z เมื่อ $0 \le \theta < 2\pi$) ตัวอย่างเช่น $z = 1 + i$ ดังนั้น $r = |z| = \sqrt{2}$ และ $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

(เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$) ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $z = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4} + 2n\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)\right] = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ นั่นคือค่าหลักของ $\arg z = \pi/4$

ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

พิจารณาผลคูณของเลขจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \qquad (1.3)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \qquad (1.4)$$

และ $$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (1.5)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับการหารกัน จะได้

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (1.6)$$

และ $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad (1.7)$

จากสมการ (1.3) จะได้ผลคูณของเลขจำนวนเชิงซ้อน n ตัวที่มี $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ เป็น

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (1.8)$$

นั่นคือ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (1.9)$

สมการ (1.9) นี้เรียกว่า สูตรของเดอมัวฟ์ (De Moivre's formula) ซึ่งใช้ได้กับ n ทั้งที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือลบ และ n ที่เป็นเศษส่วน พิจารณากรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มลบ เริ่มจาก

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

และจากสมการ (1.10)

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = z^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n \left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]^n$$

$$= r^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right] \qquad (1.10)$$

พิจารณากรณีที่ n เป็นเศษสวน ถ้าให้ $z = w^n$ โดยที่

$$w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ และ } z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

จากสูตรของเดอมัวฟ์ จะได้ว่า

$$z = w^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

เนื่องจากค่าสัมบูรณ์และอาร์กิวเมนต์ของเลขจำนวนเชิงซ้อนของทั้งสองด้านในสมการข้างต้นต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$R^n = r \quad \text{หรือ} \quad R = \sqrt[n]{r}$$

และ $n\varphi = \theta + 2k\pi$ หรือ $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \ldots$ ดังนั้นค่า $\sqrt[n]{z}$ สำหรับ $z \neq 0$ จะมี n ค่าที่แตกต่างกัน ดังนี้

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad (1.11)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6 จงหาค่าของ $(1 + i)^5$

วิธีทำ ให้ $z = 1 + i$ ดังนั้น $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

สมการ (1.8) $(1 + i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= -4 - 4i$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.7 จงหาค่าของ $\sqrt[3]{8i}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z = 8i$ ดังนั้น $r = 8$ และค่าหลักของ $\arg z = \frac{\pi}{2}$

จากสมการ (1.11) จะได้

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{(\pi/2 + 2k\pi)}{3} + i\sin\frac{(\pi/2 + 2k\pi)}{3}\right],\ k = 0,\ 1,\ 2,$$

กรณี $k = 0$, $w_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = 2(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i) = 3 + i$

กรณี $k = 1$, $w_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = 2(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i) = -3 + i$

กรณี $k = 2$, $w_3 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 2(-i) = -2i$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.8 จงหารากทั้งหมดของ $\sqrt[3]{8}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z = 8$ ดังนั้น $r = 8$ และค่าหลักของ $\arg z = 0$

จากสมการ (1.16) จะได้

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{(0 + 2k\pi)}{3} + i\sin\frac{(0 + 2k\pi)}{3}\right] k = 0,\ 1,\ 2$$

กรณี $k = 0$, $w_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos 0 + i\sin 0\right] = 2$

กรณี $k = 1$, $w_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -1 + i\sqrt{3}$

กรณี $k = 2$, $w_3 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right] = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$= -1 - i\sqrt{3}$

1.4 ฟังก์ชันเบื้องต้นของเลขจำนวนเชิงซ้อน

ฟังก์ชันเบื้องต้นของเลขจำนวนเชิงซ้อน ได้แก่ฟังก์ชันกำลัง (power) ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันราก และฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฯลฯ เนื่องจากปริมาณที่วัดได้ในการทดลองต่าง ๆ เป็นค่าจริงไม่ใช่ค่าจินตภาพ แต่อย่างไรก็ตาม เราอาจแก้ปัญหาโดยใช้คณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนก่อน เพราะค่า Re z, Im z, $|z|$ และ arg z ต่างก็เป็นค่าจริงซึ่งสามารถนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองได้

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลสำหรับค่าจริง x เขียนได้ในรูปของ e^x หรือ exp x คุณสมบัติบางประการเช่น

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad , \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$$

และเขียนให้อยู่ในเทอมของอนุกรมจะได้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลสำหรับเลขจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ แทนด้วย e^z และกำหนดในเทอมของฟังก์ชันจริง e^x, cos y และ sin y ได้ดังนี้

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{1.12}$$

จากอนุกรมกำลังของเทเลอร์ (Taylor)

$$\text{silly} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \text{---}$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y \qquad (1.13)$$

แทนค่าสมการ (1.13) ลงในสมการ (1.12) จะได้

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (1.14)$$

สมการ (1.13) เรียกว่า สูตรของออยเลอร์ (Euler formula) รูปแบบเชิงขั้วของเลขจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ อาจเขียนได้เป็น

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta} \quad (1.15)$$

หรือ

$$z = x + iy = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \; e^{i\tan^{-1}\frac{y}{x}} \qquad (1.16)$$

เนื่องจากเลขจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $re^{i\theta}$ ได้ ดังนั้น การคูณและการหารของเลขจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 อาจเขียนได้เป็น

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta}, \; r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.17)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \, e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (1.18)$$

กำลังที่ n และรากที่ n ของเลขจำนวนเชิงซ้อน z อาจเขียนได้เป็น

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n \; e^{in\theta} \qquad (1.19)$$

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} \, e^{i\theta/n} \qquad (1.20)$$

จากสมการ (1.13) จะได้ว่า

$$|e^{iy}| = (\cos^2 y + \sin^2 y)^{\frac{1}{2}} = 1$$

แสดงว่า $|e^z| = e^x$ และ $\arg e^z = y$ (1.21)

จากสูตรของออยเลอร์ $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

$$e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$$

$$e^{\pi i/2} = i$$

$$e^{-\pi i/2} = -i$$

และพบว่า $e^{z + 2\pi i} = e^{z} e^{2\pi i} = e^{z}$

ซึ่งแสดงว่า e^{z} เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ (periodic) ที่มีคาบจินตภาพ (imaginary period) $2\pi i$ ดังนั้น

$$e^{z \pm 2n\pi i} = e^{z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad 11.22)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.9 จงหาค่าของ $\dfrac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - \sqrt{3}i}$

<u>วิธีทำ</u> เราเขียน $z = 1 + \sqrt{3}i$ ในรูปแบบของ $re^{i\theta}$ โดย $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ จะได้ $r = 2$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

ดังนั้น
$$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^3}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(2e^{i\pi/3})^3}{2e^{-i\pi/3}}$$

$$= 4\, e^{i4\pi/3}$$

$$= 4\,(\cos \tfrac{4\pi}{3}) + i \sin \tfrac{4\pi}{3})$$

$$= 4 \left[(-\tfrac{1}{2}) - i \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= -2 - 2\sqrt{3}i$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 1.10 จงหาค่าของ $(1 - i)^8$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z = 1-i$ เมื่อเขียนในรูปแบบ $re^{i\theta}$ โดยที่ $x = 1, y = -1$ จะได้ $r = \sqrt{2}$ และ $\theta = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น
$$(1 - i)^8 = (\sqrt{2}\ e^{i3\pi/4})^8$$
$$= 16\ e^{i6\pi}$$
$$= 16$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากสูตรของออยเลอร์ สมการ (1.13) ถ้า $y = -y$ จะได้

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \qquad (1.23)$$

นอกจากนี้แล้ว

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad (1.24)$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad (1.25)$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้นนี้เป็นฟังก์ชันของมุมที่เป็นค่าจริง สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติของเลขจำนวนเชิงซ้อน $\sin z$, $\cos z$ เมื่อ $z = x + iy$ จะมีรูปแบบที่คล้ายสมการข้างต้น กล่าวคือ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (1.26)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (1.27)$$

นอกจากนี้แล้ว

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

สูตรของตรีโกณมิติทั้งหลายยังคงใช้ได้เมื่ออาร์กิวเมนต์ที่เป็นค่าจริงถูกแทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน เช่น

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \cos z_1$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

ฟังก์ชัน $\cos z$ และ $\sec z$ เป็นฟังก์ชันคู่ สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ เป็นฟังก์ชันคี่

$$\cos(-z) = \cos z \qquad \sin(-z) = -\sin z$$

$$\cot(-z) = -\cot z \qquad \tan(-z) = -\tan z$$

$$\sec(-z) = \sec z \qquad \csc(-z) = -\csc z$$

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ดังนั้นฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงเป็นฟังก์ชันเป็นคาบด้วย นั่นคือ

$$\cos(z \pm 2n\pi) = \cos z \qquad \sin(z \pm 2n\pi) = \sin z$$

$$\tan(z \pm n\pi) = \tan z \qquad \cot(z \pm n\pi) = \cot z$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$

ตัวอย่าง 1.11 จงพิสูจน์ว่า $\cos(1 - i) = \cos 1 \cos i + \sin 1 \sin i$

วิธีทำ จาก $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ และ $z = 1-i$

$$\cos(1 - i) = \frac{1}{2}(e^{i+1} + e^{-i-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left[e(\cos 1 + i \sin 1) + e^{-1}(\cos(-1) + i \sin(-1))\right]$$

$$= \left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)\cos 1 + \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right) i \sin 1$$

$$= \cos(-i)\cos 1 - \left(\frac{e - e^{-1}}{2i}\right)\sin 1$$

$$= \cos i \cos 1 - \sin(-i)\sin 1$$

$$= \cos i \cos 1 + \sin i \sin 1$$

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่าของ $i \sin i$

วิธีทำ sin $\sin i = \dfrac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i}$

$$= \frac{e^{-1} - e}{2i}$$

ดังนั้น $i \sin i = \dfrac{e^{-1} - e}{2}$

$$= \frac{1}{2e} - \frac{e}{2}$$

ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก จากคำนิยามของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2} = i \sinh y \qquad (1.28)$$

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y \qquad (1.29)$$

ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกของตัวแปรเชิงซ้อน z อาจเขียนได้ดังนี้

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz) \qquad (1.30)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz) \qquad (1.31)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad (1.32)$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \qquad (1.33)$$

คุณสมบัติของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกบางประการ เช่น

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\tanh(-z) = -\tanh z$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.13 จงคำนวณหาค่า cosh i

วิธีทำ จาก $\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cos iz$ เมื่อ $z = i$

$$\cosh i = \frac{e^{i} + e^{-i}}{2} = \cos(-1)$$

$$= \cos 1$$

ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันกำลังเชิงซ้อน ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) ของ $z = x + iy$ แทนด้วย $\ln z$ และนิยามว่าเป็นฟังก์ชันผกผันของเอกซ์โปเนนเชียล กล่าวคือ นิยาม $w = \ln z$ สำหรับ $z \neq 0$ ด้วยความสัมพันธ์

$$e^{w} = z \tag{1.34}$$

ให้ $w = u + iv$ และ $z = |z|\, e^{i\theta} = re^{i\theta}$ แทนค่าลงในสมการ (1.34) จะได้

$$e^{w} = e^{u + iv} = e^{u} e^{iv} = re^{i\theta} \tag{1.35}$$

ค่าสัมบูรณ์ทั้งสองข้างของสมการข้างต้นต้องเท่ากัน เนื่องจาก $e^{u}\ e^{iv}$ มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ e^{u} เพราะ $|e^{iv}| = 1$ สำหรับ v ที่เป็นจำนวนจริง และค่าสัมบูรณ์ของ $re^{i\theta}$ คือ r ดังนั้นเราจะได้

$$e^{u} = |z| = r$$

หรือ $$u = \ln |z|$$

โดยที่ $\ln |z|$ คือลอการิทึมธรรมชาติที่เป็นจำนวนจริงของจำนวนบวก $|z|$ และในทำนองเดียวกัน อาร์กิวเมนต์ทั้งสองข้างของสมการ (1.35) ก็ต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$V = U = \arg z$$

ดังนั้น

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i \arg(x + iy) \qquad (1.36)$$

จะเห็นได้ว่า ln z เป็นฟังก์ชันที่มีหลายค่า (multivalued function) ค่าของ ln z ที่สอดคล้องกับค่าหลักของ arg z (คือ $-\pi < \arg z \leq \pi$) จะเรียกว่าค่าหลักของ ln z และมักแทนด้วย Ln z ดังนั้น

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta \pm 2n\pi) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \qquad (1.37)$$

หรือ

$$\ln z = \text{Ln } z \pm 2n\pi i \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า ถ้า z เป็นจำนวนจริงที่เป็นบวก ค่าหลักของ arg z เป็นศูนย์ และค่าหลัก Ln z จะเป็นค่าเดียวกับลอการิทึมธรรมชาติจำนวนจริงที่เราได้ศึกษาจากคณิตศาสตร์พื้นฐาน แต่ถ้า z เป็นจำนวนจริงที่เป็นลบ ค่าหลักของ arg z คือ π และดังนั้น

$$\text{Ln } z = \ln|z| + i\pi$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.14 จงหาค่าของ ln(-1)

วิธีทำ ให้ $z = -1 = 1\, e^{i(\pi \pm 2n\pi)}$ $n = 0,11, 2,\ldots$

$$\ln z = \ln(-1) = \ln 1 + i(\pi \pm 2n\pi)$$

$$= \pi i \pm 2n\pi i$$

ค่าหลักของ ln(-1) คือ $\text{Ln}(-1) = \pi i$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่าหลักของ $\ln(1-i)$

วิธีทำ ให้ $z = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)}$ $n = 0,1,,2,..$

$$\ln z = \ln(1-i) = \ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)$$

ค่าหลักของ $\ln(1-i)$ คือ $\mathrm{Ln}(1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} i$

ความสัมพันธ์ต่าง ๆ สำหรับลอการิทึมธรรมชาติยังคงใช้ได้กับค่าเชิงซ้อน กล่าวคือ

$$\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่า z จากสมการ $\sin z - 2 = 0$

วิธีทำ ให้ $\sin z = 2$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

หรือ $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$

$$e^{iz} = \frac{-(-4i) \pm \sqrt{(-4i)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4i}{2}$$

$$= 2i$$

ดังนั้น $\quad iz = \ln 2i$

$$z = \frac{1}{i}\ln 2i = -i \ln 2i$$

$$= -i\left[\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)\right]$$

$$= -i \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)$$

สำหรับฟังก์ชันกำลังของเลขจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ที่นิยามโดย

$$z^c = e^{c \ln z} \tag{1.38}$$

เมื่อ c เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z \neq 0$

เนื่องจาก $\ln z$ มีค่าได้หลายค่า ดังนั้น z^c จะมีหลายค่าด้วยเช่นกัน ถ้า $c = n = 1, 2, \ldots$ จะได้ z^n เป็นค่าเชิงเดี่ยว (single-valued) ซึ่งเหมือนกับ z กำลังที่ n โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $c = -1, -2, \ldots$ ก็จะเป็นเช่นเดียวกัน และถ้า $c = 1/n$ โดยที่ $n = 2, 3, \ldots$ จะได้

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n)\ln z} \tag{1.39}$$

ซึ่งจะคล้องกับสมการ (1.11)

<u>ตัวอย่าง</u> **1.17** จงหาค่า i^{-2i}

วิธีทำ $\quad i^{-2i} = e^{-2i \ln i}$

$$= e^{-2i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{-2i\left[i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\pi \pm 4n\pi}$$

ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่า $i^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ $i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln i}$

$$= e^{(\frac{1}{2})\left[\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi)\right]}$$

$$= e^{i(\pi/4 \pm n\pi)}$$

$$= e^{i\pi/4} \quad e^{\pm in\pi}$$

$e^{\pm in\pi} = 1$ n เป็นเลขคู่

$= -1$ n เป็นเลขคี่

ดังนั้น $i^{\frac{1}{2}} = + e^{i\pi/4}$

$$= \pm \frac{1}{2}(1 + i)$$

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่าของ$(1 + i)^{1-i}$

วิธีทำ $(1 + i)^{1-i} = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 \pm 2n\pi)\right]}$

$$= e^{\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 \pm 2n\pi) - i\ln\sqrt{2} + (\pi/4 \pm 2n\pi)}$$

$$= e^{\ln\sqrt{2} + (\pi/4) \pm 2n\pi + i(\pi/4 \pm 2n\pi - \ln 2)}$$

$$= e^{\ln\sqrt{2}} e^{\pi/4 \pm 2n\pi}\left[\cos(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi - \ln\sqrt{2})\right.$$

$$\left. + i\sin(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi - \ln\sqrt{2})\right]$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\pi/4 \pm 2n\pi}\left[\cos(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2})\right]$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผัน จากนิยาม ถ้า $z = \sin w$ จะได้ $w = \sin^{-1} z$ เรียกว่า ไซน์ผกผัน (inverse sine) ของ z หรืออาร์กไซน์ (arc sine) ของ z สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอื่น ๆ ก็นิยามคล้ายกัน หรือถ้า $z = \sinh w$ จะได้ $w = \sinh^{-1} z$ เรียกว่าเป็นไฮเปอร์โบลิกผกผัน (inverse hyperbolic sine) ของ z

ในกรณีของเลขจำนวนจริง $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ มีค่าไม่เกิน 1 แต่สำหรับเลขจำนวนเชิงซ้อน z $\sin z$ และ $\cos z$ อาจมีค่ามากกว่า 1 ได้ เราสามารถเขียน $\sin^{-1} z$ ในเทอมของ z ได้ด้วยวิธีดังต่อไปนี้

$$\text{ให้} \quad z = \sin w$$

$$= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

$$i\,e^{iw} = \frac{(-)(-2iz) \pm \sqrt{(-2iz)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2izf\ 2\sqrt{1-z^2}}{2}$$

$$= iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

สำหรับ w ที่เป็นจำนวนจริง $e^{iw} > 0$ ดังนั้นเราต้องใช้เครื่องหมายบวก จะได้

$$iw = \ln\ (iz + K - 7\ ,$$

$$w = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

นั่นคือ $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

ด้วยวิธี &xiii อาจจะสรุปได้ว่า

$$\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln(\frac{i + z}{i - z})$$

$$\sinh^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 + z}{1 - z})$$

1.5 <u>การประยุกต์</u>

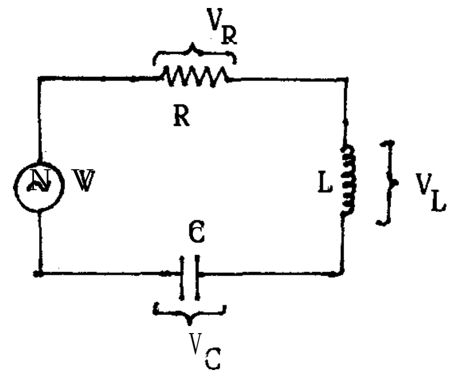
สำหรับการประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในฟิสิกส์ เช่น ในกลศาสตร์ ทางเดินของอนุภาคในระนาบ (x, y) ซึ่งกำหนดโดยสมการ $z = 1 + 3e^{2it}$ สามารถจะหาทางเดินและความเร็วของอนุภาคนี้ได้ กล่าวคือ

$$|z - 1| = |3e^{2it}| = 3$$

ดังนั้น อนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 0) รัศมีเท่ากับ 3 ขนาดของความเร็วของอนุภาคคือ $|dz/dt| = |6ie^{2it}| = 6$

ในทฤษฎีวงจรไฟฟ้า ถ้า V_R เป็นโวลต์เตจที่คร่อมความต้านทาน R และ I เป็นกระแสที่ไหลผ่านตัวความต้านทาน จากกฎของโอห์มจะได้

$$V_R = IR \tag{1.40}$$



รูปที่ 1.3

สำหรับกระแสและโวลท์เตจที่คร่อมขดลวดเหนี่ยวนำ (inductor) L มีความสัมพันธ์กันเป็น

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \tag{1.41}$$

กระแสและโวลท์เตจที่คร่อมตัวเก็บประจุ (capacitor)C มีความสัมพันธ์กันเป็น

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{I}{C} \tag{1.42}$$

เมื่อ C คือความจุ วิธีการที่ง่ายสำรับการศึกษาวงจร a-c คือการใช้ปริมาณเชิงซ้อนดังนี้ สมมติกระแส I และโวลท์เตจ V ในวงจรรูป 1.3 เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยที่ให้กระแส I เป็น

$$I = I_o\, e^{i\omega t} \tag{1.43}$$

เมื่อกระแสจริง ๆ กำหนดโดยค่าจินตภาพของ I ในสมการ (1.43) คือ $I = I_o \sin \omega t$ ค่าสูงสุดของ I คือ I, ซึ่งก็คือ $|I|$ ในสมการ (1.43) ดังนั้น โวลท์เตจที่คร่อม R, L และ C ตามสมการ (1.40), (1.41), และ (1.42) จะเป็น

$$V_R = RI, e^{i\omega t} = RI$$

$$V_L = i\omega L I_o e^{i\omega t} = i\omega L I \qquad (1.44)$$

$$V_C = \frac{1}{i\omega C} I, e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I$$

$$V = V_R + V_L + V_C$$

$$= \left[R + i(L - \frac{1}{\omega C})\right] I \qquad (1.45)$$

ให้ปริมาณเชิงซ้อน $Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ (1.46)

เรียกว่า อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (complex impedance) และสมการ (1.45) เขียนได้เป็น

$$v = ZI \qquad (1.47)$$

ซึ่งคล้ายกับกฎของโอห์ม ความจริงแล้ว Z สำหรับวงจร a-c สอดคล้องกับ R สำหรับวงจร d-c ด้วยเหตุนี้สมการที่ซับซ้อนกว่าของวงจร a-c สามารถเขียนได้ในรูปง่าย ๆ เช่นเดียวกับสมการของวงจร d-c เว้นแต่ปริมาณทั้งหมดเป็นเชิงซ้อน เช่นกฎสำหรับการรวมความต้านทานที่ต่อแบบอนุกรมและแบบขนานใช้ได้กับการรวมอิมพีแดนซ์เชิงซ้อนด้วย

ในทัศนศาสตร์เรามักจำเป็นต้องรวมคลื่นแสง (ซึ่งสามารถแทนด้วยฟังก์ชันไซน์) อยู่บ่อย ๆ ถ้าแต่ละคลื่นมีเฟสต่างกันด้วยปริมาณที่คงที่แน่นอน กล่าวคือ สามารถเขียนคลื่นได้เป็น $\sin t$, $\sin(t+\delta)$, $\sin(t+2\delta)$เป็นต้น เมื่อต้องการรวมฟังก์ชันไซน์เหล่านี้เข้าด้วยกันก็อาจทำได้ง่ายขึ้น โดยการเขียนฟังก์ชันไซน์เป็นจำนวนเชิงซ้อน (กล่าวคือแต่ละไซน์เป็นส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน) แล้วบวกกันดังนี้

$$e^{it} + e^{i(t+\delta)} + e^{i(t+2\delta)} + \ldots \qquad (1.48)$$

อนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีเทอมแรก e^{it} และอัตราส่วนร่วม $e^{i\delta}$ ที่มี n คลื่นรวมกันก็เป็นการรวม n เทอมของอนุกรมนี้ ซึ่งจะได้ค่าเป็น $e^{it}(1-e^{in\delta})/(1-e^{i\delta})$ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นดังนี้

$$1 - e^{i\delta} = e^{i\delta/2}\,(e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2})$$

$$= -e^{i\delta/2}\, 2i \sin(\delta/2) \qquad (1.49)$$

นั่นคือ $$\frac{e^{it}}{1-e^{i\delta}}(1-e^{in\delta}) = \frac{e^{it}(-e^{in\delta/2}\, 2i \sin(n\delta/2))}{-e^{i\delta/2}\, 2i \sin(\delta/2)}$$

$$= e^{i(t + (n-1)\delta/2)} \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

(1.50)

ส่วนจินตภาพของอนุกรมสมการ (1.48) ก็คือส่วนจินตภาพของสมการ (1.50) จะได้เป็น

$$\sin\left(t + \frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}\Big/\sin\frac{\delta}{2} \qquad (1.51)$$

สมการข้างต้นเป็นผลรวมของคลื่นไซน์ n คลื่น เมื่อแต่ละคลื่นมีเฟสต่างกันด้วยปริมาณคงที่

บทสรุป

เลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ อาจเขียนเป็น $z = x + iy$ เมื่อ x เรียกว่าส่วนจริง และ y เรียกว่าส่วนจินตภาพ ในรูปพิกัดเชิงขั้วคือ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ หรือ $z = re^{i\theta}$ เมื่อ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ สังยุคเชิงซ้อนของ z คือ $z^* = x-iy$ มุม θ เรียกว่าอาร์กิวเมนต์ของ z แทนด้วย $\arg z$ ค่า θ ที่อยู่ในช่วง $-\pi < \theta \leq \pi$ เรียกว่าค่าหลักของ $\arg z$

การบวก การลบและการคูณของเลขจำนวนเชิงซ้อนใช้กฎพีชคณิตธรรมดา เลขจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนเท่ากัน ถ้าส่วนจริงของทั้งสองเท่ากันและส่วนจินตภาพของทั้งสองเท่ากัน

สูตรของเดอมัวฟ์ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ใช้หาฟังก์ชันกำลังของเลขจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ n อาจเป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือลบหรือเป็นเศษส่วน

จากสูตรของออยเลอร์ $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ อาจเขียนเลขจำนวนเชิงซ้อนได้เป็น

$$Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของเลขจำนวนเชิงซ้อนมีรูปแบบคล้ายกับฟังก์ชันของมุมที่เป็นค่าจริง

ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกของเลขจำนวนเชิงซ้อน z อาจเขียนได้ดังนี้

$$\sinh z = -i\sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

ลอการิทึมธรรมชาติของ $z = x + iy$ แทนด้วย $\ln z$ และนิยามว่าเป็นฟังก์ชันผกผันของเอกซ์โปเนนเชียล กล่าวคือให้ $w = \ln z$ เมื่อ $z = e^w$

<u>แบบฝึกหัดบทที่ 1</u>

1. ให้ $z_1 = 2 + 3i$ และ $z_2 = 4 - 5i$ จงหาค่า

   ก. $(z_1 + z_2)^2$ ข. z_1/z_2

2. จงหาค่า $\mathrm{Re}\,\frac{(2-3i)^2}{2+3i}$ และ $I_m \frac{z}{z^*}$

3. จงหาค่า ก. $\frac{z+1}{|z-1|}$ ข. $\frac{1}{|4+3i|^2}$

4. จงเขียนให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว

   ก. $1 + i$ ข. -8

5. จงหาค่าหลักของอาร์กิวเมนต์ของ

   ก. -7 ข. $1 + i\sqrt{3}$

6. จงหาค่าของรากต่อไปนี้

ก. $\sqrt{i}$ ข. $\sqrt[3]{i}$ ค. $\sqrt{-25}$

ง. $\sqrt{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}$ จ. $\sqrt[4]{-1}$ ฉ. $\sqrt[6]{-1}$

7. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก. $z^3 = 64$

ข. $z^4 + 5z^2 = 36$

8. จงหาค่าของ e^z เมื่อ z เท่ากับ

ก. $-xi/4$ ข. $2 + 5\pi i$

9. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก. $e^z = 3$ ข. $e^z = -2$

10. จงหาค่าของ

ก. $\ln(-e^2)$ ข. $\ln(ie)$ ค. $\ln(e^i)$

11. จงหาค่า z จากสมการต่อไปนี้

ก. $\ln z = \frac{1}{2}\pi i$ ข. $\ln z = \frac{1}{2} + xi$

12. จงหาขนาดของความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ตามทางเดิน

$$z = (1 - it)/(2t + i)$$