บทที่ 1
เลขจำนวนเชิงซ้อน

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 1 นี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. เขียนเลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ในพิกัดฉากให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้
2. ใช้สูตรของเดอมัวฟ์หากำลังที่ n ของเลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกหรือลบ หรือเป็นเศษส่วน
3. หาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลของเลขจำนวนเชิงซ้อนกับฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์ได้
4. หาค่าฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันกำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผันและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกผกผัน ของเลขจำนวนเชิงซ้อนได้
5. นำไปประยุกต์กับปัญหาทางฟิสิกส์ได้เช่นการรวมคลื่นแสง

บทที่ 1
เลขจำนวนเชิงซ้อน

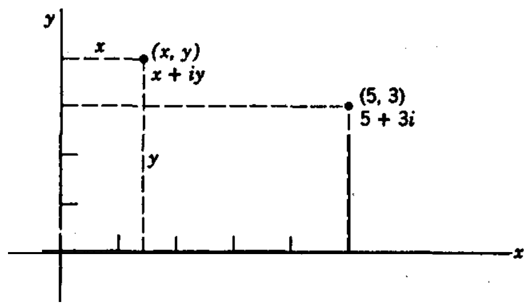
1.1 บทนำ

เมื่อเราพิจารณารากที่สองของเลขจำนวนที่เป็นลบ เราอาจคิดว่าเลขจำนวนนั้นไม่มีความหมายหรือไม่สามารถเชื่อมโยงกับเลขจำนวนจริงได้ แต่อย่างไรก็ตามเลขจำนวนเชิงซ้อนนี้มีความสำคัญและสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ มากมาย เช่น ในวงจรไฟฟ้า การแก้ปัญหาการสั่น (vibration problem) การหาคำตอบสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่าง ๆ ฯลฯ เราใช้สัญลักษณ์ $i = -1$ โดยที่ $i^2 = -1$ ดังนั้น $-16 = 4i$, $-3 = i\,3$, $i^3 = -i$ เหล่านี้เป็นต้นเป็นเลขจำนวนจินตภาพ (imaginary numbers) แต่ $i^2 = -1$, $-2, -8 = i\,2\;i\,8 = 4$, $i^{4n} = 1$ เป็นเลขจำนวนจริง (real numbers)

เราใช้เทอมเลขจำนวนเชิงซ้อน (complex number) กับเทอมใดเทอมหนึ่งของจำนวนส่วนที่เป็นจำนวนจริง ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ หรือผลรวมของส่วนที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ เช่น $0i + 4 = 4$, $17i$, $5+2i$ พิจารณาเลขจำนวนเชิงซ้อน เช่น $z = 5 + 3i$ เทอมที่เป็นจำนวนจริง (ไม่มี i) เรียกว่าส่วนจริง (real part) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน (ในที่นี้คือ 5) อีกเทอมที่มี i เรียกว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน (ในที่นี้คือ 3) ข้อสังเกต ส่วนจินตภาพของเลขจำนวนเชิงซ้อนเป็นเลขจำนวนจริง) เราอาจกล่าวว่าทุก ๆ เลขจำนวนเชิงซ้อนจะมีส่วนจริงและส่วนจินตภาพ (ส่วนใดส่วนหนึ่งอาจเป็นศูนย์ก็ได้) ด้วยเหตุนี้จึงสามารถเขียนในรูปคู่ของเลขจำนวนจริง โดยที่ตัวแรกเป็นส่วนจริงและตัวหลังเป็นส่วนจินตภาพ เช่น $5 + 3i$ เขียนได้เป็น $(5, 3)$ เลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สามารถเขียนได้ด้วยวิธีดังกล่าวนี้

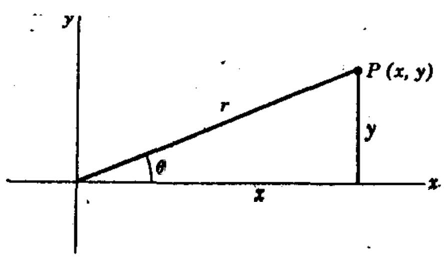
1.2 ระนาบเชิงซ้อน

เลขจำนวนเชิงซ้อนใด $x + iy$ อาจแทนได้ด้วยจุด (x, y) ในระนาบ (x, y) ระนาบที่ใช้ในการพลอต (plot) เลขจำนวนเชิงซ้อนเรียกว่า ระนาบเชิงซ้อนหรือแผนภาพอาร์กองด์ (Argand diagram) แกน x เรียกว่าแกนจริง (real axis) และแกน y เรียกว่าแกนจินตภาพ (imaginary axis) ดังรูป (1.1)



รูป 1.1

นอกจากแทนเลขจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ ด้วยจุด (x, y) ในพิกัดฉาก (rectangular coordinate) แล้วยังอาจแทนได้ด้วยจุด (r, θ) ในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)



รูป 1.2

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก (x, y) และพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) แสดงดังรูป 1.2 จะได้

$$x = r\cos\theta \qquad \text{หรือ} \quad r = x^2 + y^2$$

$$Y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ดังนั้น $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (1.1)

r เรียกว่า โมดูลัส (modulus) หรือค่าสัมบูรณ์ (absolute value)

θ เรียกว่ามุมของ z (หรือเฟสของ z หรืออัมปลิจูดของ z) สัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันคือ

$$x = \mathrm{Re}\, z$$

$$y = \mathrm{Im}\, z$$

$$r = |z| = \mathrm{mod}\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2)$$

ถ้า $z = x + iy$ สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) ของ z คือ z^* โดยที่ $z^* = x - iy$

หรือถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะได้ $z^* = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

หรือกรณี $z = re^{i\theta}$ จะได้ $z^* = re^{-i\theta}$

ข้อสังเกตถ้านำ z คูณกับ z^* จะได้ค่าจริงและไม่เป็นลบเสมอ เช่น

$z = x+iy$, $z^* = x - iy$ ดังนั้น $zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

และจากสมการ (1.4) ได้ $|z| = \mathrm{mod}\ z = [zz^*]^{\frac{1}{2}}$

$2\sqrt{2}$, θ $\tan^{-1}(\frac{2}{2})$ $\frac{\pi}{4}$ $2n\pi$

ดังนั้น $2\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}\quad 2n\pi)\quad \sin(\frac{\pi}{4}\quad 2n\pi)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

ตัวอย่าง 1.2 จงเขียน $z = -1 - i$ ในรูปของ $r\ e^{i\theta}$

วิธีทำ $x = -1,\quad y = -1$

$$r = \sqrt{2},\quad \theta = \tan^{-1}(\frac{-1}{-1}) = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

ดังนั้น $z = -1 - i = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi) + i\sin(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi)\right]$

$$= \sqrt{2}\ e^{i5\pi/4}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1\ ,\quad z_2 = x_2 + iy_2$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$