บทที่ 7
กลศาสตร์ท้องฟ้า

วิชาดาราศาสตร์เป็นวิชาเก่าแก่ได้เกิดขึ้นมาพร้อมกับอารยธรรมโบราณ เมื่อประมาณ 3,000 ปี ก่อนพุทธกาล เนื่องจากคนในสมัยโบราณเมื่อสังเกตการณ์บนท้องฟ้าในเวลากลางคืน สิ่งแรกที่มองเห็นก็คือ ดาวจำนวนมากมายปรากฏสว่างระยิบระยับเต็มท้องฟ้า และยังสังเกตเห็นการเรียงตัวของกลุ่มดาวในรูปแบบต่าง ๆ โดยที่กลุ่มดาวเหล่านั้นปรากฏเป็นรูปลักษณ์ที่แน่นอน ดังนั้นกลุ่มดาวเหล่านี้จึงมีชื่อเรียกตามลักษณะที่มองเห็นมาตั้งแต่สมัยโบราณ โดยเหตุที่ดาวฤกษ์แต่ละดวงจะปรากฏอยู่นิ่งประจำอยู่ในกลุ่มดาวของตน ซึ่งผิดกับดาวเคราะห์ทั้งหลายที่โคจรไปท่ามกลางดาวฤกษ์ ทำให้นักดาราศาสตร์หลายท่านตั้งแต่สมัยโบราณเป็นต้นมาพยายามหาวิธีที่จะอธิบายและทำนายการโคจรของดาวเคราะห์ล่วงหน้า เป็นต้นว่า เพลโต (Pelto) อริสโตเติล (Aristotle) ปโตเลมี (Ptoleme) กาลิเลโอ และเคเปลอร์ (Kepler) เป็นต้น แต่ผู้ที่อธิบายได้ถูกต้องที่สุดได้แก่ เซอร์ไฮแซก นิวตัน (Sir Isaac Newton) ซึ่งได้ค้นคิดวิชากลศาสตร์ท้องฟ้าขึ้นมา โดยอาศัยกฎของการเคลื่อนที่ กฎแห่งความโน้มถ่วง และวิชาคัลคูลัส (Calculus) ที่เขาสร้างขึ้นมาก่อนหน้านี้ วิชากลศาสตร์ท้องฟ้าของนิวตันสามารถอธิบายสังเกตการณ์ทางดาราศาสตร์ในอดีตก่อนหน้านี้ได้หมด และวิชานี้ได้กลายเป็นจุดเริ่มต้นของวิชาดาราศาสตร์ฟิสิกส์ในปัจจุบัน

7.1 การโคจรของดาวเคราะห์

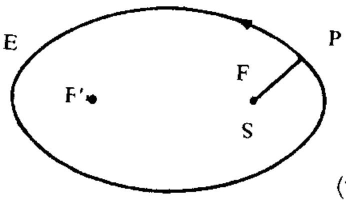
7.1.1 กฎสามข้อของเคเปลอร์

โยฮัน เคเปลอร์ (Johann Kepler) ได้ใช้ข้อมูลจากการสังเกตตำแหน่งของดาวเคราะห์ในเวลาต่าง ๆ ทำการคำนวณหาระยะห่างของดาวเคราะห์จากดวงอาทิตย์ ผลที่ได้ปรากฏว่าระยะห่างของดาวเคราะห์ไม่คงที่ ซึ่งแสดงว่าวงโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ไม่ได้เป็นวงกลมตามทฤษฎีของโคเปอร์นิคัส (Copernicus) และเขาได้พบว่าจุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์อยู่ในระนาบของวงโคจรที่ดาวเคราะห์เคลื่อนที่ไปรอบ ๆ เคเปลอร์ได้ค้นคว้าอยู่เป็นเวลาสิบปี จึงพบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี และยังได้ตรวจพบด้วยว่า ขณะเมื่อดาวเคราะห์โคจรเข้าใกล้ดวงอาทิตย์มันจะเคลื่อนที่เร็วกว่าเมื่อมันอยู่ห่าง

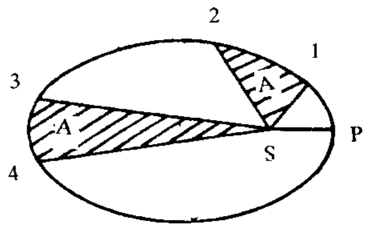
จากดวงอาทิตย์ ดังนั้นในปี ค.ศ.1609 เคเปลอร์จึงได้ประกาศกฎสองข้อแรกของเขา ซึ่งมีชื่อเรียกว่า (ก) กฎของวงรี (Law of Ellipse) และ (ข) กฎของพื้นที่ (Law of Area)

กฎของวงรี กล่าวว่า "วงโคจรของดาวเคราะห์เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่ง"

กฎของพื้นที่ กล่าวว่า "เส้นตรงที่ลากจากดวงอาทิตย์ไปยังดาวเคราะห์จะกวาดพื้นที่ได้เท่ากันในเวลาเท่ากัน"



(ก)



(ข)

รูป 7.1 กฎของเคเปลอร์ (ก) แสดงดาวเคราะห์โคจรเป็นวงรีรอบดวงอาทิตย์ซึ่งอยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่ง (ข) ในวงโคจรรอบดวงอาทิตย์ดาวเคราะห์จะใช้เวลาเคลื่อนที่ระหว่างจุด 1 ถึงจุด 2 เท่ากับเวลาที่ใช้เคลื่อนที่จากจุด 3 ไปจุด 4 โดยกวาดพื้นที่ไปเท่ากันทั้งสองช่วง

กฎทั้งสองข้อนี้ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลโดยตรง นับว่าเป็นกฎเอมพิริคัล (Empirical Law) ซึ่งทำให้เกิดความเข้าใจชัดเจนต่อปรากฏการณ์ของการโคจรของดาวเคราะห์ยิ่งขึ้นมาก แต่เคเปลอร์ยังไม่ค่อยพอใจผลที่ได้เขาจึงได้ทำการค้นคว้าในเรื่องนี้ต่อมาอีกเป็นเวลา 10 ปี จึงได้ประกาศกฎข้อที่ 3 ซึ่งมีชื่อเรียกว่า กฎฮาร์โมนิก (Harmonic Law) ในปี ค.ศ.1619

กฎฮาร์โมนิกกล่าวว่า "กำลังสองของคาบการโคจรของดาวเคราะห์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสามของกึ่งแกนหลัก (รัศมีเฉลี่ย) ของวงโคจร" กฎข้อที่ 3 นี้สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

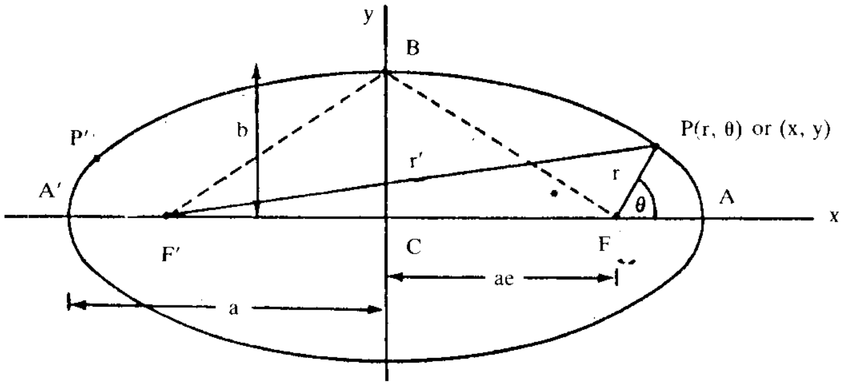
$$P^2 = ka^3$$

โดยที่ P คือคาบของการโคจร a คือระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์จากดวงอาทิตย์ และ k คือค่าคงที่ซึ่งมีค่าเดียวกันสำหรับดาวเคราะห์ทุกดวง

ต่อมาในปี ค.ศ.1621 เคเปลอร์ได้แสดงให้เห็นว่า ดวงจันทร์ซึ่งเป็นบริวารของดาวพฤหัสบดี 4 ดวงที่กาลิเลโอค้นพบนั้น โคจรรอบดาวพฤหัสตามกฎฮาร์โมนิกนี้ด้วย

7.1.2 สมบัติของวงรี

วิชาคณิตศาสตร์ได้นิยามวงรีไว้ว่า คือ "ทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไปโดยผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นถึงจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่"



รูป 7.2 แสดงวงรีซึ่งมีจุดโฟกัสสองจุด P คือจุดใด ๆ บนวงรี ห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองเป็นระยะ r และ r' และ r + r' = ค่าคงที่ = 2a

จากรูป 7.2 ให้จุดคงที่สองจุดเป็น F และ F' เส้นตรงที่ต่อระหว่างจุดทั้งสองจะตัดวงรีที่จุดสองจุด คือ A และ A' ระหว่างกลางของจุดโฟกัสทั้งสองเรากำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลางหรือจุดกำเนิด ระยะระหว่าง A หรือ A' กับจุดกำเนิด c คือ a เรียกว่ากึ่งแกนหลักของวงรี ส่วนระยะ CB เรียกว่ากึ่งแกนรอง รูปร่างของวงรีอาจบอกได้ด้วยค่าความเยื้องศูนย์กลาง e โดยกำหนดให้ระยะทางจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งถึงจุดศูนย์กลาง C ของวงรีมีค่าเท่ากับ ae เมื่อ e = 0 จุด F และ F' จะรวมกันเป็นจุดเดียวกันที่จุดศูนย์กลาง C และวงรีจะกลายเป็นวงกลม เราให้ P เป็นจุดซึ่งเคลื่อนที่บนวงรีมีระยะห่างจากจุดโฟกัสเป็น PF = r และ PF' = r' เราพิจารณา △BF'F ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เมื่อจุด P มาอยู่ที่ B เราจะได้ว่า

$$r = r' + a \tag{7.1}$$

ดังนั้นใน △BCF เราได้

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - (ae)^2 \\ &= a^2(1 - e^2) \end{aligned} \tag{7.2}$$

เรากำหนดให้ดวงอาทิตย์อยู่ที่จุด F จุด A จะเป็นจุดเพอริฮีเลียน (Perihelion) ของวงโคจร ซึ่งเป็นจุดที่ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด ระยะเพอริฮีเลียน AF เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} AF &= a - ae \\ &= a(1 - e) \end{aligned}$$

และจุด A' จะเป็นจุดแอปฮีเลียน (Aphelion) ของวงโคจร ซึ่งเป็นจุดที่ดาวเคราะห์อยู่ห่างไกลจากดวงอาทิตย์มากที่สุด ระยะแอปฮีเลียน A'F เขียนได้เป็น

$$A'F = a + ae$$
$$= a(1 + e)$$

ดังนั้น ระยะทางแเลี่ยจากดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์จะเป็น

$$\frac{1}{2}(AF + A'F) = \frac{1}{2}(a - ae + a + ae)$$
$$= a$$

ระยะเฉลี่ย a นี้ อาจหาได้อีกวิธีหนึ่ง โดยพิจารณาว่า สำหรับตำแหน่งใด ๆ ตำแหน่งหนึ่ง P ของดาวเคราะห์ในวงโคจรอยู่ห่างจากจุดโฟกัส F เป็นระยะทาง r จะมีอีกตำแหน่งหนึ่ง เป็น P′ ซึ่งอยู่ตรงกันข้ามเป็นสมมาตรตามรูป 7.2 และห่างจากจุดโฟกัส F เป็นระยะทาง r′ ดังนั้น ระยะทางเฉลี่ยจะเป็น

$$\frac{1}{2}(r + r') = \frac{2a}{2} = a$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถเลือกจุดการเป็นคู่เช่นนี้ได้ทุกแห่งบนวงรี เมื่อคิดระยะทางเฉลี่ยระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่สมมาตรกัน เราจะได้ผลลัพธ์เท่ากันเสมอ ดังนั้นเมื่อเราคิดเฉลี่ยหมดทุกจุดในวงรีจะได้ระยะทางเฉลี่ยเป็น a เท่ากันนั่นเอง

ระยะทาง r จากดวงอาทิตย์ที่จุดโฟกัส F ไปยังจุดใด ๆ บนวงรี สามารถหาได้ดังนี้ คือ กำหนดให้เส้น FP ทำมุม θ กับแกน x เมื่อ $\theta = 0$ จะตรงกับเส้น FA เมื่อดาวเคราะห์อยู่บนจุด P เส้น FP = r และมุม $A\hat{F}P = \theta$ โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา เราพิจารณา $\triangle F'PF$ และใช้กฎของโคไซน์ เราจะได้

$$r'^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2r(2ae)\cos(\pi - \theta)$$
$$= r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae)\cos\theta$$

แทนค่า r′ ด้วย 2a − r ดังนั้น

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4are\cos\theta$$
$$4a^2 - 4ra + r^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$
$$4ra(1 + e\cos\theta) = 4a^2(1 - e^2)$$
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{7.3}$$

เมื่อเราต้องการหาพื้นที่ของวงรี เราอาจหาได้โดยเขียนสมการวงรีในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate), (x, y) ซึ่งกำหนดให้จุดศูนย์กลาง C เป็นจุดกำเนิด และให้พิกัด (x, y) เป็นตำแหน่งของจุด P จากรูป 7.2 จะเห็นได้ว่า

$$r'^2 = (x + ae)^2 + y^2 \tag{7.4}$$

และ

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 \tag{7.5}$$

เมื่อนำสมการทั้งสองมาลบกัน เราได้

$$r'^2 - r^2 = x^2 + a^2e^2 + 2aex + y^2 - x^2 - a^2e^2 + 2aex - y^2$$
$$= 4aex \qquad (7.6)$$

แทนค่า r' ด้วย $2a - r$ สมการ (7.6) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$(2a - r)^2 - r^2 = 4aex$$
$$4a^2 - 4ar = 4aex$$
$$r = a - ex \qquad (7.7)$$

แทนสมการ (7.7) ลงในสมการ (7.5) เราจะได้

$$(a - ex)^2 = (x - ae)^2 + y^2$$
$$a^2 - 2aex + e^2x^2 = x^2 - 2aex + (ae)^2 + y^2$$
$$(1 - e^2)x^2 = (1 - e^2)a^2 - y^2$$
$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = (1 - e^2)a^2 \qquad (7.8)$$

จากสมการ (7.2) เราอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$(1 - e^2) = \frac{b^2}{a^2}$$

แทนค่าลงในสมการ (7.8) ดังนั้นสมการ (7.8) กลายเป็น

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = \frac{b^2}{a^2}a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.9)$$

สมการ (7.9) อาจเขียนได้เป็น

$$x = a[1 - (y/b)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.10)$$

พื้นที่ของวงรีจากวิชาแคลคูลัสมีค่าเท่ากับ

$$A = 4\int_0^b x\, dy \qquad (7.11)$$

จากสมการ (7.10) แทนลงในสมการ (7.11) เราได้ว่า

$$A = 4a\int_0^b [1 - (y/b)^2]^{\frac{1}{2}}\, dy \qquad (7.12)$$

กำหนดให้ $y = b \sin z$ ดังนั้น $dy = b \cos z\, dz$

สมการ (7.12) กลายเป็น

$$A = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} b[1 - \sin^2 z]^{\frac{1}{2}} \cos z \, dz$$

$$= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \, dz$$

$$= \frac{4ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2z) \, dz$$

$$= 2ab \left[z + \frac{\sin 2z}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \pi ab \tag{7.13}$$

วงรีเป็นเส้นโค้งที่เรียกว่าภาคตัดกรวย (Conic Section) ชนิดหนึ่ง เส้นโค้งชนิดนี้เกิดจากการเฉือนกรวยซึ่งจะมีรอยตัดเป็น วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเปอร์โบลา ขึ้นอยู่กับค่าความเยื้องศูนย์กลาง e

พิจารณาจากสมการ (7.3) $r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$

เมื่อ $e = 0$ และ $r = a$ เราจะได้เส้นโค้งเป็นวงกลม ถ้าเพิ่มค่า e ขึ้นไป จุดโฟกัสจะเลื่อนออกจากกัน เส้นโค้งจะเป็นวงรียาวขึ้นและแคบลง จนเมื่อ $e = 1$ โฟกัสจุดหนึ่งจะเลื่อนไปสู่อนันต์ เราจะได้เส้นโค้งพาราโบลา ซึ่งเป็นเส้นทางโคจรของวัตถุที่เคลื่อนที่จากอนันต์เข้ามายังดวงอาทิตย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง โดยที่วัตถุนั้นมีความเร็วเดิมอยู่ก่อนแล้ว เช่น เส้นทางโคจรของดาวหางรอบดวงอาทิตย์ เป็นต้น

สมการของวงโคจรพาราโบลาสามารถเขียนได้เป็น

$$r = \frac{2P}{(1 + \cos \theta)} \tag{7.14}$$

เมื่อ P คือระยะทางที่ดาวหางโคจรเข้าใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด ซึ่งที่ตำแหน่งนี้ $\theta = 0$ เมื่อ $e > 1$ วงทางโคจรจะกลายเป็นรูปไฮเปอร์โบลา และมีสมการเขียนได้เป็น

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \tag{7.15}$$

วงโคจรไฮเปอร์โบลาเป็นวงเปิด เมื่อมีวัตถุโคจรรอบดวงอาทิตย์เช่นนี้ (เช่น มีดาวหางบางดวงซึ่งถูกแรงโน้มถ่วงอย่างมากจากดาวพฤหัสบดีกระทำให้วงโคจรเปลี่ยนไปเป็นเช่นนี้) มันจะเข้าใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุดเป็นระยะทาง $a(e^2 - 1)$

เมื่อวัตถุใด ๆ เคลื่อนที่โดยอยู่ภายใต้อิทธิพลแรงโน้มถ่วงจากวัตถุอีกก้อนหนึ่ง วงทางโคจรสัมพัทธ์ของมันจะปรากฏเป็นภาคตัดกรวยชนิดใดชนิดหนึ่ง คือ วงกลม วงรีพาราโบลา หรือไฮเปอร์โบลา ซึ่งนิวตันได้พิสูจน์หลักการดังกล่าวนี้แล้ว

7.2 ความหมายทางฟิสิกส์ของกฎของเคเปลอร์

7.2.1 กฎของพื้นที่และโมเมนตัมเชิงมุม

นิวตันสามารถพิสูจน์กฎทั้ง 3 ข้อของเคเปลอร์ได้โดยใช้ทฤษฎีทางกลศาสตร์และกฎแห่งความโน้มถ่วงสากลของเขา ในการพิสูจน์นั้นเราจะต้องยอมรับกฎข้อที่ 1 ของเคเปลอร์ก่อน และพิสูจน์กฎข้อที่ 2 และที่ 3 ต่อไป

การพิสูจน์กฎข้อที่ 2 ของเคเปลอร์ เราต้องเริ่มต้นใช้ความรู้เรื่องโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ ของวัตถุที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ อาศัยจาก

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{7.16}$$

เมื่อ m คือมวลของวัตถุ $\vec{r}$ คือระยะทางจากดวงอาทิตย์ถึงวัตถุ $\vec{P}$ คือโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุ และ $\vec{v}$ คือความเร็วของวัตถุ หาอนุพันธ์ของสมการ (7.16) เทียบกับเวลา เป็น

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \vec{v} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{F} \tag{7.17}$$

เมื่อ $\vec{F}$ คือแรงที่กระทำต่อวัตถุ เนื่องจากความเร็ว $\vec{v}$ จะขนานกับโมเมนตัม $\vec{P}$ และแรง $\vec{F}$ ขนานกับ $\vec{r}$ ด้วย เนื่องจากแรงดึงดูดจากดวงอาทิตย์มีทิศอยู่ในแนวรัศมี ดังนั้น

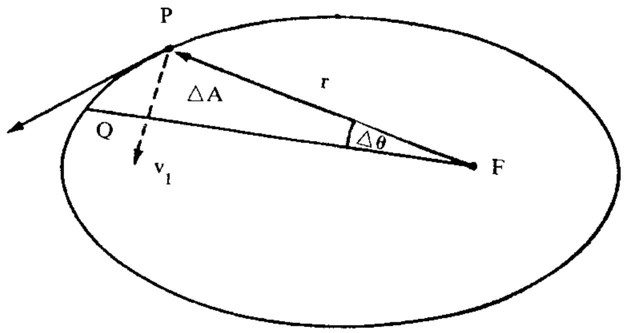
$$\vec{v} \times \vec{P} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

ทำให้สมการ (7.17) กลายเป็น

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

หรือ $\vec{L}$ = ค่าคงที่ (7.18)

ดังนั้นจะได้ว่า วัตถุที่ถูกแรงกระทำในแนวรัศมีจะมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นค่าคงที่



รูป 7.3 แสดงกฎของพื้นที่ วัตถุที่ตำแหน่ง P จะมีระยะห่างจากดวงอาทิตย์เป็น r กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ไปยังจุด Q เป็นเวลา $\triangle t$ ในขณะที่เส้นรัศมีกวาดพื้นที่ไป $\triangle A$ และมีองค์ประกอบความเร็วตั้งฉากกับ r เป็น v_t

จากรูป 7.3 วัตถุอยู่ที่จุด P โคจรรอบดวงอาทิตย์ที่จุดโฟกัส F ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ และห่างจากดวงอาทิตย์เป็นระยะทาง $\vec{r}$ ในช่วงเวลา $\triangle t$ วัตถุเคลื่อนที่จากจุด P ไปยังจุด Q และรัศมีกวาดไปเป็นมุม $\triangle Q$ ดังนั้น

$$\triangle\theta = \frac{v_t \triangle t}{r} \tag{7.19}$$

ขณะเดียวกัน เส้นรัศมีจะกวาดพื้นที่ไปได้ $\triangle A$ ซึ่งเป็นพื้นที่ของรูป $\triangle FPQ$ โดยที่

$$\triangle A \simeq \frac{1}{2} r v_t \triangle t$$

หรือ
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_t = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{7.20}$$

จากสมการ (7.16) (7.18) และรูป 7.3 เราเห็นได้ว่า

$$\frac{L}{m} = r v_t = \text{ค่าคงที่} \tag{7.21}$$

เปรียบเทียบสมการ (7.20) และ (7.21) เราจะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_t$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L}{m} = \text{ค่าคงที่} \tag{7.22}$$

สมการ (7.22) ก็คือกฎของพื้นที่ของเคเปลอร์นั่นเองดังนั้นกฎข้อ 2 ของเคเปลอร์จึงมาจากกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$

สมการ (7.22) อาจนำไปหาความเร็วของวัตถุที่จุดเพอริฮีเลียนและแฮปฮีเลียนได้ดังนี้

$$\int_0^A dA = \frac{1}{2}\frac{L}{m}\int_0^P dt$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{L}{m}P \qquad (7.23)$$

โดยที่ A คือพื้นที่ของวงรี และ P คือคาบของการโคจร จากสมการ (7.22) และ (7.23) เราได้

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

$$= \frac{A}{P} \qquad (7.24)$$

ที่จุดเพอริฮีเลียนและแอปฮีเลียนมีความเร็วเป็น $v_t = v$ ดังนั้นที่จุดเพอริฮีเลียน $\theta = 0$ และสมการ (7.3) ให้ค่า

$$r_P = \frac{a(1-e^2)}{1+e}$$

$$= a(1-e) \qquad (7.25)$$

แทนสมการ (7.25) ลงในสมการ (7.24) เราได้

$$\frac{1}{2}r_P v_P = \frac{1}{2}a(1-e)v_P = \frac{A}{P}$$

$$v_P = \frac{2A}{Pa(1-e)}$$

$$= \frac{2\pi ab}{Pa(-e)}$$

$$= \frac{2\pi a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{P(1-e)}$$

$$v_P = \frac{2\pi a}{P}\left[\frac{1+e}{1-e}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.26)$$

ที่จุดแอปฮีเลียน $\theta = 180°$ จากสมการ (7.3) ให้ค่า

$$r_a = \frac{a(1-e^2)}{1-e} \qquad (7.27)$$

แทนสมการ (7.27) ลงในสมการ (7.24)

$$\frac{1}{2}r_a v_a = \frac{1}{2}a(1+e)v_a = \frac{A}{P}$$

$$v_a = \frac{2A}{Pa(1+e)}$$

$$= \frac{2\pi ab}{Pa(1+e)}$$

$$= \frac{2\pi a\,(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{P(1 + e)}$$

$$v_a = \frac{2\pi a}{P}\left[\frac{1 - e}{1 + e}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.28}$$

ตัวอย่าง โลกของเรามีระยะทางเฉลี่ยห่างจากดวงอาทิตย์ $a = 1$ หน่วยดาราศาสตร์ซึ่งเท่ากับ 1.496×10^8 กิโลเมตร มีคาบ P เป็น 1 ปี ซึ่งเท่ากับ 3.156×10^7 วินาที และวงโคจรของโลกมีความเยื้องศูนย์กลาง $e = 0.0167$ ดังนั้น ความเร็วที่จุดเพอริฮีเลียนซึ่งอยู่ใกล้ดวงอาทิตย์ที่สุด เป็น

$$v_P = \frac{2\pi a}{P}\left[\frac{1 + e}{1 - e}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\pi\,(1.496 \times 10^8)}{3.156 \times 10^7}\left(\frac{1 + 0.0167}{1 - 0.0167}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$= 30.3$ กิโลเมตรต่อวินาที

และที่จุดแอปฮีเลียนมีความเร็วเป็น

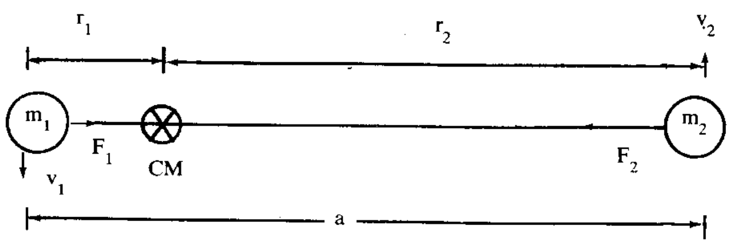
$$v_a = \frac{2\pi a}{P}\left[\frac{1 - e}{1 + e}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\pi\,(1.469 \times 10^8)}{3.156 \times 10^7}\left(\frac{1 - 0.0167}{1 + 0.0167}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$= 29.3$ กิโลเมตรต่อวินาที

7.2.2 การพิสูจน์กฎฮาร์โมนิกของเคเปลอร์

พิจารณาวัตถุสองสิ่งกำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวลร่วมกัน เนื่องจากแรงดึงดูดซึ่งกันและกันตามรูป 7.4



รูป 7.4 แสดงวัตถุสองสิ่งมีมวล m_1 และ m_2 กำลังโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล ด้วยความเร็ว v_1 และ v_2 ห่างจากศูนย์กลางมวลเป็นระยะ r_1 และ r_2 แรงสู่ศูนย์กลางมีค่าเท่ากับแรงดึงดูดกันระหว่างมวล

วัตถุทั้งสองมีแรงดึงดูดซึ่งกันและกันอยู่ในแนวเส้นตรงที่ต่อระหว่างวัตถุทั้งสอง ดังนั้นวัตถุทั้งสองจะต้องโคจรครบรอบในเวลา P เท่ากัน แรงสู่ศูนย์กลางของการโคจรสามารถเขียนได้เป็น

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1}$$

$$= \frac{m_1}{r_1}\left(\frac{2\pi r_1}{P}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2} \qquad (7.29\ ก)$$

และ

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2}$$

$$= \frac{m_2}{r_2}\left(\frac{2\pi r_2}{P}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2} \qquad (7.29\ ข)$$

จากกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน

$$F_1 = F_2$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (7.30)$$

สมการ (7.30) แสดงให้เห็นว่าวัตถุที่มีมวลมากจะอยู่ใกล้ศูนย์กลางมวลมากกว่าวัตถุที่มีมวลน้อย ระยะทางระหว่างวัตถุหรือรัศมีของวงโคจรสัมพัทธ์ ตามรูป 7.4 คือ

$$r_1 + r_2 = a$$

ดังนั้น สมการ (7.30) จะกลายเป็น

$$\frac{r_1}{a - r_1} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$r_1m_1 = m_2a - m_2r_1$$

$$(m_1 + m_2)r_1 = m_2a$$

$$r_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) a \qquad (7.31)$$

จากความสัมพันธ์ของแรงดึงดูดระหว่างมวล คือ

$$F_G = F_1 = F_2$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{a^2} \qquad (7.32)$$

อาศัยจากสมการ (7.29 ก) และ (7.31) ดังนั้นสมการ (7.32) กลายเป็น

$$F_1 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2}$$

$$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = \frac{4\pi^2 m_1 m_2 a}{P^2(m_1 + m_2)}$$

$$P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\right] a^3 \qquad (7.33)$$

สมการ (7.33) นี้ก็คือ กฎข้อที่ 3 ของเคเปลอร์นั่นเอง ถ้าหากว่า m_1 เป็นมวลของดวงอาทิตย์ และ m_2 เป็นมวลของดาวเคราะห์ เนื่องจากมวลของดวงอาทิตย์มากกว่ามวลของดาวเคราะห์มาก ๆ หรือ $m_1 >> m_2$ ดังนั้น สมการ (7.33) เขียนใหม่ได้เป็น

$$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_1}\right) a^3$$

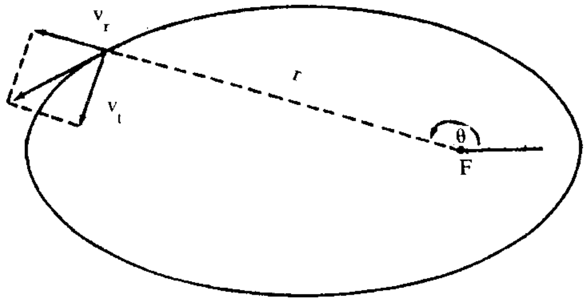
ดังนั้นค่าคงที่ในกฎข้อที่ 3 ของเคเปลอร์ก็คือ

$$k = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}$$

จะเห็นได้ว่า ค่าคงที่ k นี้ เป็นเพียงค่าโดยประมาณเท่านั้น เนื่องจากมวลของดาวเคราะห์มีค่าน้อยกว่ามวลของดวงอาทิตย์มาก แต่โดยทั่วไปแล้ว k จะต้องขึ้นกับผลบวกของ $(m_1 + m_2)$ ทำให้มีค่าไม่เท่ากันสำหรับดาวเคราะห์แต่ละดวง แต่ถ้าคิดอย่างประมาณจะเท่ากันได้ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น

7.2.3 ความเร็วของการโคจร

ในขณะที่เทห์วัตถุโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี จะมีทิศทางของความเร็วอยู่ในแนวเส้นสัมผัสของวงโคจร เราสามารถแยกความเร็ว $\vec{v}$ ในวงโคจรออกเป็นสององค์ประกอบที่ตั้งฉากกัน คือ ความเร็วในแนวรัศมี v_r และความเร็วในแนวตั้งฉากกับรัศมี v_t ตามรูป 7.5



รูป 7.5 แสดงองค์ประกอบของความเร็วในวงโคจร v_r คือองค์ประกอบความเร็วในแนวรัศมี และ v_t คือองค์ประกอบความเร็วในแนวตั้งฉากกับรัศมี

จากสมการ (7.20) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r^2}\frac{dA}{dt}$$

อาศัยจากสมการ (7.22) ช่วย

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r^2}\frac{A}{P}$$

$$= \frac{2}{r^2}\frac{\pi ab}{P}$$

$$= \frac{2}{r^2}\frac{\pi a^2 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{P}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{P}\left(\frac{a}{r}\right)^2 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7.34}$$

อาศัยจากสมการ (7.15) (7.33) และ (7.34) เราสามารถหาองค์ประกอบของความเร็วได้ดังต่อไปนี้

ความเร็วในแนวรัศมี

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{a(1-e^2)\, e \sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{a(1-e^2)\, e \sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \frac{2\pi}{P} \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a(1-e^2)\, e \sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \frac{2\pi}{P} \frac{(1+e\cos\theta)^2}{(1-e^2)^2} (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_r = \left(\frac{2\pi a}{P}\right)(e\sin\theta)(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.35}$$

ความเร็วในแนวตั้งฉากกับรัศมี

$$v_t = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)} \frac{2\pi}{P} \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos\theta)} \frac{2\pi}{P} \left(\frac{1+e\cos\theta}{1-e^2}\right)^2$$

$$v_t = \left(\frac{2\pi a}{P}\right)(1+e\cos\theta)(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{7.36}$$

ให้สังเกตว่าที่จุดเพอริฮีเลียน $\theta = 0$ ความเร็วในแนวตั้งฉากกับรัศมี v_t จะกลายเป็น v_P

$$v_t = \left(\frac{2\pi a}{P}\right)(1+e)(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2\pi a}{P}\right)(1+e)(1+e)^{-\frac{1}{2}}(1-e)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2\pi a}{P}\right)\left[\frac{1+e}{1-e}\right]^{\frac{1}{2}} = v_P$$

ซึ่งก็คือสมการ (7.26) ในทำนองเดียวกัน ที่จุดแอปฮีเลียน $\theta = 180°$ ความเร็วในแนวตั้งฉากกับรัศมีจะกลายเป็น v_a ตามสมการ (7.28) ดังนี้

$$v_t = \left(\frac{2\pi a}{P}\right)(1-e)(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2\pi a}{P}\right)\left[\frac{1-e}{1+e}\right]^{\frac{1}{2}} = v_a$$

ความเร็วในทิศเส้นสัมผัสกับวงโคจรสามารถหาได้เป็น

$$v^2 = v_r^2 + v_t^2$$

$$= \frac{(2\pi a/P)^2}{(1-e^2)}\,[e^2 \sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta]$$

$$= \frac{(2\pi a/P)^2}{(1-e^2)}\,[1 + 2e\cos\theta + e^2] \tag{7.37}$$

จากสมการ (7.3) เราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$e\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{r} - 1 \tag{7.38}$$

แทนสมการ (7.38) ลงในสมการ (7.37) เราได้

$$v^2 = \frac{(2\pi a/P^2)}{(1-e^2)}\left[1 + \frac{2a(1-e^2)}{r} - 2 + e^2\right]$$

$$= \frac{(2\pi a/P)^2}{(1-e^2)}\left[\frac{2a}{r}(1-e^2) - (1-e^2)\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi a}{P}\right)^2\left[\frac{2a}{r} - 1\right]$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2}\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right] \tag{7.39}$$

แทนสมการ (7.33) ลงในสมการ (7.39) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (7.39) ใหม่ได้เป็น

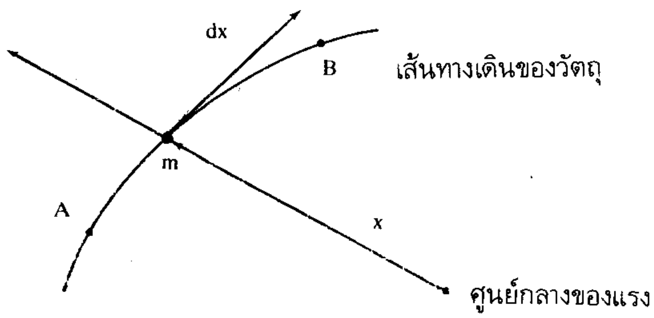
$$v^2 = G(m_1 + m_2)\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right] \tag{7.40}$$

ในสมการ (7.40) นี้ ถ้าเราสามารถทราบค่ามวลของวัตถุทั้งสองได้ ความเร็วในวงโคจรจะขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสองและระยะกึ่งแกนหลักของวงโคจรเท่านั้น

7.2.4 ความคงตัวของพลังงานรวม

ในขณะใด ๆ พลังงานรวมของวัตถุ (TE) จะมีค่าเป็นผลบวกของพลังงานศักย์ (PE) และพลังงานจลน์ (KE) ของวัตถุ โดยที่พลังงานศักย์เกิดขึ้นจากแรงดึงดูดระหว่างวัตถุทั้งสอง และสำหรับพลังงานจลน์เราหาได้จากความเร็วของวัตถุในวงโคจร

กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m และมีการขจัด $\vec{x}(t)$ ซึ่งวัดจากจุดศูนย์กลางของแรง (Center of Force) ตามรูป 7.6



รูป 7.6 แสดงงานกระทำต่อวัตถุ

ในช่วงเวลา dt วัตถุเคลื่อนที่ไปได้เป็นระยะ dx งานที่กระทำต่อวัตถุซึ่งเคลื่อนที่จากจุด A ถึงจุด B เป็น W โดยที่

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} \qquad (7.41)$$

แต่เนื่องจาก

$$\vec{F} \cdot d\vec{x} = \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= md\left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{x} = d\left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

ดังนั้นสมการ (7.41) จะกลายเป็น

$$W = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)_B - \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)_A$$

$$W = (KE)_B - (KE)_A \qquad (7.42)$$

จะเห็นได้ว่า งานที่กระทำต่อวัตถุนั้นก็คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของวัตถุนั้น สำหรับกรณีของระบบที่ประกอบด้วยวัตถุ 2 สิ่ง คือ วัตถุ 1 และวัตถุ 2 พลังงานจลน์ KE จะกลายเป็นพลังงานจลน์รวมของวัตถุทั้งสอง

$$KE = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

แต่ถ้าหากว่าแรง $\vec{F}$ คือแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุทั้งสองซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง r เราจะได้

$$\vec{F} \cdot \vec{dx} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\, dr$$
$$= Gm_1m_2\, d\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$= d\left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)$$

ดังนั้นสมการ (7.41) จะกลายเป็น

$$W = \int_A^B d\left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)$$
$$= \left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)_B - \left(\frac{Gm_1m_2}{r}\right)_A$$
$$= -(PE)_B - (-PE)_A$$
$$W = (PE)_A - (PE)_B \tag{7.43}$$

ดังนั้นสมการ (7.42) จะเท่ากับสมการ (7.43) เราได้

$$(KE)_B - (KE)_A = (PE)_A - (PE)_B$$
$$(KE + PE)_B = (KE + PE)_A$$
$$(TE)_B = (TE)_A = \text{ค่าคงที่}$$

นั่นคือ

$$TE = KE + PE$$
$$= \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{7.44}$$
$$= \text{ค่าคงที่}$$

แสดงว่าพลังงานรวมของระบบจะคงตัว เมื่อวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ไปพลังงานจลน์และพลังงานศักย์อาจจะเปลี่ยนรูปกันได้ แต่พลังงานรวมของทั้งระบบจะต้องคงที่เสมอ

ต่อไปเราต้องการหาค่าคงที่ TE ของวัตถุที่เคลื่อนที่ในวงโคจรรูปวงรี ถ้าเรากำหนดให้โมเมนตัมของทั้งระบบมีค่าคงที่ (ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ) และให้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

โมเมนตัม $= m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = 0$

หรือ $m_1\vec{v_1} = -m_2\vec{v_2}$

เมื่อคิดแต่ขนาด

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

กำหนดให้ v เป็นอัตราเร็วสัมพัทธ์ระหว่างวัตถุทั้งสอง เราได้

$$v = v_1 + v_2$$

$$m_1 v_1 = m_2(v - v_1)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_1 = m_2 v$$

หรือ
$$v_1 = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} \tag{7.45}$$

และ
$$m_1(v - v_2) = m_2 v_2$$

$$m_1 v = m_1 v_2 + m_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \tag{7.46}$$

แทนค่า v_1 และ v_2 ลงในสมการ **(7.44)** เราได้

$$TE = \frac{\frac{1}{2} m_1 m_2^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{\frac{1}{2} m_2 m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$= m_1 m_2 \left[\frac{\frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{G}{r} \right]$$

$$TE = m_1 m_2 \left[\frac{v^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{G}{r} \right] = \text{ค่าคงที่} \tag{7.47}$$

ที่จุดเพอริฮีเลียนเราได้ $r = r_P$ และ $v = v_P$

โดยที่ $r_P = a(1 - e)$

และ
$$v_P = \frac{2\pi a}{P} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้นสมการ (7.47) กลายเป็น

$$(TE)_P = m_1 m_2 \left[\frac{4\pi^2 a^2}{2P^2(m_1 + m_2)} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - \frac{G}{a(1 - e)} \right]$$

$$= \frac{G m_1 m_2}{2a} \left[\frac{4\pi^2 a^3}{P^2 G(m_1 + m_2)} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - \frac{2}{a(1 - e)} \right]$$

จากสมการ **(7.33)** สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{4\pi^2 a^3}{P^2 G(m_1 + m_2)} = 1$$

ดังนั้น
$$(TE)_P = \frac{Gm_1m_2}{2a}\left[\frac{1+e}{1-e} - \frac{2}{1-e}\right]$$
$$= \frac{-Gm_1m_2}{2a} = \text{ค่าคงที่} \quad (7.48)$$

จะเห็นได้ว่าพลังงานรวมมีค่าเป็นลบ หมายความว่าวัตถุอาจจะไม่หนีหลุดออกจากกัน

จากสมการ (7.44) $\quad TE = (TE)_P = \text{ค่าคงที่}$

ดังนั้นสมการ (7.47) กลายเป็น

$$m_1m_2\left[\frac{v^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{G}{r}\right] = \frac{-Gm_1m_2}{2a}$$
$$\frac{v^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{G}{r} - \frac{G}{2a}$$
$$v^2 = G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

ซึ่งก็คือสมการ (7.40) นั่นเอง ดังนั้นสมการของความเร็วจึงหาได้จากกฎการคงตัวของพลังงาน และมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า สมการวิสวิวา (Visviva Equation)

7.3 การประยุกต์วิชากสาศาสตร์ท้องฟ้า

7.3.1 การประยุกต์กฎข้อที่ 3 ของเคเปลอร์

จากสมการ (7.33) ถ้าเราเปรียบเทียบระบบของสองวัตถุที่มีมวล m_1 และ m_2 คาบเป็น P และมีกึ่งแกนหลักเป็น a กับระบบมาตรฐานของสองวัตถุที่มีมวล m_1' และ m_2' คาบเป็น P′ และมีกึ่งแกนหลักเป็น a′ เราจะได้ว่า

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{m_1'+m_2'}{m_1+m_2}\right)$$

หรือ
$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2\left[\frac{m_1+m_2}{m_1'+m_2'}\right] = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \quad (7.49)$$

ถ้าเราให้ $m_1 = m_1' = M_\odot$ $m_2' = M_\oplus$ และ m_2 = มวลของดาวเคราะห์ใด ๆ ที่มีมวล m_P เราได้

$P' = 1$ ปี

$a' = 1$ หน่วยดาราศาสตร์

ดังนั้น
$$\left(\frac{P}{1\text{ ปี}}\right)^2\left(\frac{M_\odot + m_P}{M_\odot + M_\oplus}\right) = \left(\frac{a}{1AU}\right)^3$$
$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{M_\odot + m_P}{M_\odot + M_\oplus}\left(\frac{AU^3}{\text{ปี}^2}\right)$$

แต่เนื่องจากมวลของดวงอาทิตย์มีค่ามากกว่ามวลของดาวเคราะห์และโลกมาก ๆ

$$M_\odot >> m_P$$

$$M_\odot >> M_\oplus$$

ทำให้
$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{(AU)^3}{(\text{ปี})^2}$$

ตัวอย่างเช่น ดาวหางดวงหนึ่งมีคาบ P ของการโคจรเท่ากับ 7 ปี จะมีระยะกึ่งแกนหลักเป็น

$$\begin{aligned} a &= P^{2/3}\ AU \\ &= 7^{2/3}\ AU \\ &= 3.66\ AU \end{aligned}$$

ดังนั้นดาวหางดวงนี้จะมีระยะห่างเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์มากกว่าโลก 3.66 เท่า
อีกตัวอย่างหนึ่ง ดวงจันทร์ของดาวเคราะห์ยูเรนัสที่ชื่อมิแรนดา มีมวลเป็น M_m และมีคาบ P_m โคจรรอบดาวเคราะห์ยูเรนัสเท่ากับ 1.4 วัน และมีระยะกึ่งแกนหลัก a_m เท่ากับ 1.28×10^5 กิโลเมตร ดังนั้นถ้าเราใช้ระบบโลก-ดวงจันทร์เป็นระบบมาตรฐาน เราจะได้

$$\left(\frac{P_m}{P_☽}\right)^2\left(\frac{M_u + M_m}{M_\oplus + M_☽}\right) = \left(\frac{a_m}{a_☽}\right)^3$$

เนื่องจากมวลของดาวเคราะห์ยูเรนัส M_u มีมากกว่ามวลของดวงจันทร์มิแรนดามาก ๆ และมวลของโลกก็มากกว่ามวลของดวงจันทร์มาก ๆ ด้วย นั่นคือ

$$M_u >> M_m \quad \text{และ} \quad M_\oplus >> M_☽$$

คาบของการโคจรรอบโลกของดวงจันทร์ $P_☽ = 27.3$ วัน
ระยะกึ่งแกนหลัก $a_☽ = 3.84 \times 10^5$ กิโลเมตร

ดังนั้น
$$\left(\frac{P_m}{P_☽}\right)^2\left(\frac{M_u}{M_\oplus}\right) = \left(\frac{a_m}{a_☽}\right)^3$$

$$\begin{aligned} M_u &= \left(\frac{P_☽}{P_m}\right)^2\left(\frac{a_m}{a_☽}\right)^3 M_\oplus \\ &= \left(\frac{27.3}{1.4}\right)^2\left(\frac{1.28 \times 10^5}{3.84 \times 10^5}\right)^3 M_\oplus \\ &\approx 14\ M_\oplus \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า มวลของดาวเคราะห์ยูเรนัสมากกว่ามวลของโลกประมาณ 14 เท่า

7.3.2 การโคจรของดาวเทียมและยานอวกาศ

การส่งยานอวกาศขึ้นไปโคจรรอบโลกนั้น มนุษย์เราต้องใช้จรวดเป็นตัวนำยานอวกาศและดาวเทียมขึ้นไป โดยยิงจรวดขึ้นไปในแนวดิ่ง จรวดจะเคลื่อนที่ขึ้นไปในลักษณะที่เรียกว่า โปรเจกไตล์ (Projectile) เราจะใช้หลักการคงตัวของพลังงานเพื่อหาความเร็วต้นของจรวดที่ถูกยิงขึ้นไป สมมติว่าจรวดพร้อมทั้งยานอวกาศและดาวเทียมมีมวลรวมกันเป็น m ถูกยิงขึ้นไปด้วยความเร็วต้น V ขึ้นไปได้สูง h จากผิวโลกเราจะได้ว่า

$$TE = (KE + PE)_{\text{ผิวโลก}}$$

$$= (KE + PE)_h$$

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{-GM_\oplus m}{R_\oplus + h} \qquad (7.50)$$

คูณสมการ (7.50) ทั้งสองข้างด้วย $(-R_\oplus/m)$ สมการ (7.50) จะกลายเป็น

$$GM_\oplus - \frac{1}{2}V^2R_\oplus = \frac{GM_\oplus}{1 + h/R_\oplus}$$

$$1 - \frac{V^2R_\oplus}{2GM_\oplus} = \frac{1}{1 + h/R_\oplus}$$

$$1 + \frac{h}{R_\oplus} = \frac{1}{1 - V^2R_\oplus/2GM_\oplus}$$

$$h = R_\oplus\left[\frac{1}{1 - V^2R_\oplus/2GM_\oplus} - 1\right]$$

$$= R_\oplus\left[\frac{V^2R_\oplus/2GM_\oplus}{1 - V^2R_\oplus/2GM_\oplus}\right]$$

และเนื่องจาก $$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$$

ดังนั้น $$h = \frac{V^2/2g}{1 - V^2/2gR_\oplus}$$

$$h = \frac{V^2}{2g}\left[\frac{R_\oplus}{R_\oplus - V^2/2g}\right] \qquad (7.51)$$

ขณะเมื่อความเร็วต้น V ต่ำ ๆ ทำให้

$$\frac{V^2}{2g} << R_\oplus$$

เราจะได้ $h \approx \frac{V^2}{2g}$

หรือ $h << R_\oplus$

จรวดจะขึ้นไปได้ระยะต่ำมากเมื่อเทียบกับรัศมีของโลก $R_\oplus$

สำหรับกรณีที่จรวดจะหนีหลุดจากโลกได้ก็ต่อเมื่อ $h = \infty$ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\frac{V^2}{2g} = R_\oplus$$

หรือ

$$V = \sqrt{2gR_\oplus} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

เนื่องจาก $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2}

$R_\oplus = 6{,}378$ กิโลเมตร $= 6.37 \times 10^6$ เมตร

$$V = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6{,}378 \times 10^6}$$

$= 11.3$ กิโลเมตร/วินาที

ความเร็วค่านี้เรียกว่าความเร็วหลุดพ้น นั่นคือจรวดจะต้องขับเคลื่อนด้วยความเร็วอย่างน้อยที่สุด 11.3 กิโลเมตรต่อวินาที จึงจะหลุดพ้นจากแรงดึงดูดของโลกได้

ในขั้นแรกยานอวกาศหรือดาวเทียมส่วนใหญ่จะถูกส่งขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยจรวดขั้นต้นก่อน แล้วจึงใช้จรวดขั้นสุดท้ายยิงยานอวกาศไปในแนวราบ เพื่อให้มันโคจรรอบโลกเป็นรูปวงกลมด้วยความเร็วตามต้องการ โดยให้อยู่ที่ความสูงจากศูนย์กลางของโลกเป็นระยะ $r = R_\oplus + h$ (h คือความสูงของวงโคจรวัดจากพื้นโลก) เราสามารถหาความเร็วในวงโคจร V_c ได้ โดยให้แรงสู่ศูนย์กลางมีค่าเท่ากับแรงดึงดูดของโลก ดังนี้

$$\frac{mV_c^2}{r} = \frac{GM_\oplus m}{r^2}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}\sqrt{\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}} = V_0\sqrt{\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}}$$

ในที่นี้ V_0 คือความเร็วในวงโคจรรูปวงกลมที่ผิวพื้นโลก

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

เมื่อ $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N . m²/kg²

$M_\oplus = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม ดังนั้น

$$V_0 = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{6.378 \times 10^6}}$$

$$= 7.91 \text{ กิโลเมตร/วินาที}$$

ทำให้

$$V_c = 7.91 \sqrt{\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}} \tag{7.52}$$

เราอาจจะหาระยะความสูงของดาวเทียมที่โคจรรอบโลก โดยมีความเร็วของการโคจรเท่ากับความเร็วการหมุนรอบตัวเองของโลก นั่นคือดาวเทียมเสมือนลอยนิ่งเมื่อเทียบกับคนที่ยืนนิ่งบนโลก กำหนดให้ P เป็นคาบของการโคจร ดังนั้น

$$V_c = \frac{2\pi r}{P} \tag{7.53}$$

เนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเองในเวลา 24 ชั่วโมง เท่ากับคาบการโคจรของดาวเทียม คือ

$$P = 24 \text{ ชั่วโมง}$$

$$= 24 \times 3{,}600 = 86{,}400 \text{ วินาที}$$

ดังนั้น จากสมการ (7.53)

$$r = \frac{V_c P}{2\pi} = \left(\frac{GM_\oplus}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{2\pi}$$

$$= \left(\frac{GM_\oplus P^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(86{,}400)}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{3}} \text{ เมตร}$$

$$= 4.2 \times 10^7 \text{ เมตร}$$

รัศมีของโลก $R_\oplus = 6.4 \times 10^6$ เมตร ดาวเทียมจะต้องโคจรสูงจากผิวโลกเท่ากับ $4.2 \times 10^7 - 6.4 \times 10^6$ เมตร $= 3.56 \times 10^7$ เมตร หรือเท่ากับ 35,600 กิโลเมตร

รูปร่างวงโคจรของยานอวกาศหรือดาวเทียมจะขึ้นอยู่กับความเร็วที่ยิงจรวดในขั้นสุดท้ายในแนวราบที่ระยะสูงจากพื้นโลก h

จากสมการ (7.40) เราสามารถหาระยะกึ่งแกนหลักของดาวเทียมได้ดังนี้

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{7.54}$$

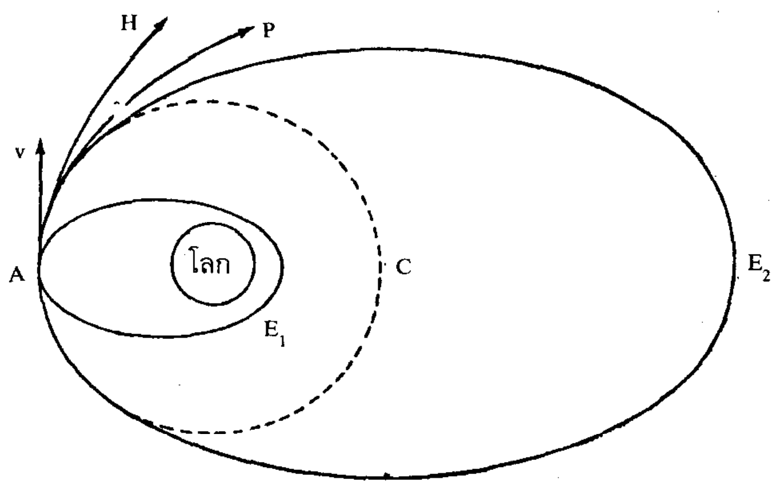
โดยที่ m_1 คือมวลของโลก m_2 คือมวลของยานอวกาศซึ่งน้อยกว่ามวลของโลกมาก ๆ ดังนั้น

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{GM_\oplus}$$

$$= \frac{2}{r} - \frac{V^2}{V_c^2 r}$$

$$a = \frac{r}{2 - (V/V_c)^2} \tag{7.55}$$

r คือระยะทางจากจุดศูนย์กลางของโลกถึงจุด A ตามรูป 7.7



รูป 7.7 แสดงวงโคจรของยานอวกาศหรือดาวเทียม ยานยิงจรวดที่จุด A ด้วยความเร็ว V ถ้า $V = V_c$ จะได้วงโคจรเป็นวงกลม C และเมื่อ $V_c < V < \sqrt{2}\,V_c$ จะได้วงโคจรเป็นวงรี E_2 โดยที่จุด A เป็นเพอริจี (Perigee) ของวงรี และเมื่อ $0 < V < V_c$ จะได้วงโคจรเป็นวงรี E_1 และจุด A เป็นอโพจี (Apogee) ของวงรี

เมื่อ $V = V_c$ จะได้ $a = r$ และวงโคจรเป็นวงกลม

$V = \sqrt{2}\,V_c$ จะได้ $a = \infty$ ทำให้ยานอวกาศโคจรหลุดพ้นไปจากโลกทางโคจรรูปพาราโบลา ดังนั้น $V = \sqrt{2}\,V_c$ ก็คือความเร็วหลุดพ้นที่ระยะ r และถ้าต้องการให้ยานอวกาศมีความเร็วหลุดพ้นจากผิวโลกที่ระยะ $r = R_\oplus$ จะต้องมีความเร็ว

$$
\begin{aligned}
V &= \sqrt{2}\,V_0 \\
&= \sqrt{2} \times 7.91 \text{ กิโลเมตร/วินาที} \\
&= 11.3 \text{ กิโลเมตร/วินาที}
\end{aligned}
$$

ซึ่งตรงกับค่าที่หาได้ก่อนหน้านี้

และถ้า $V > \sqrt{2}\,V_c$ จะได้ $a < 0$ ทำให้ยานอวกาศโคจรหลุดจากโลกไปตามเส้นทางโคจรรูปไฮเปอร์โบลา

และเมื่อ $V < \sqrt{2}\,V_c$ จะได้ a มีค่าจำกัด ทำให้วงโคจรของยานอวกาศเป็นรูปวงรี และจุด A จะต้องเป็นจุดเพอริจี (จุดที่อยู่ใกล้โลกที่สุด) หรือจุดอโพจี (จุดที่อยู่ไกลจากโลกที่สุด) เพราะว่าที่จุด A นี้ ความเร็วของยานอวกาศจะตั้งฉากกับรัศมี r

ถ้า $V_c < V < \sqrt{2}\,V_c$ จะได้ $r < a < \infty$ จุด A จะเป็นจุดเพอริจี

และถ้า $0 < V < V_c$ จะได้ $a < r$ ทำให้จุด A เช่นจุดอโพจีและยานอวกาศ หรือดาวเทียมอาจชนกับผิวโลกได้ ถ้าหากว่าระยะเพอริจีของมันสั้นกว่ารัศมีของโลก $R_\oplus$

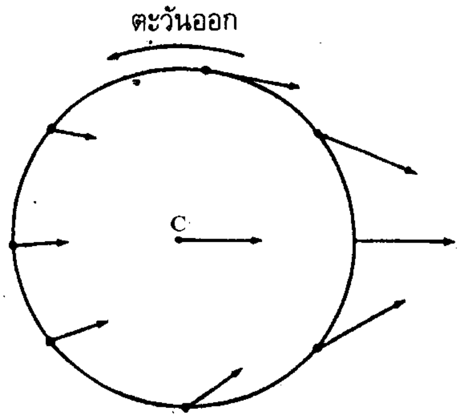
ในกรณีของวงโคจรรูปวงรี เมื่อเราหาค่าความเร็ว V ที่จุด A ได้ จะทำให้ได้ค่าระยะกึ่งแกนหลัก a ที่ต้องการได้จากสมการ (7.55) ดังนี้

$$2 - \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 = \frac{r}{a}$$

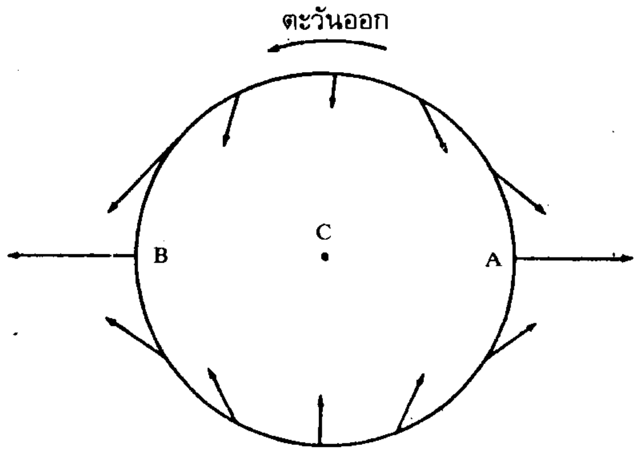
$$V = V_c\sqrt{2 - r/a} \tag{7.56}$$

7.4 ปรากฏการณ์ไทด์

เป็นที่ทราบกันดีว่าดวงจันทร์เป็นต้นเหตุใหญ่ของการเกิดน้ำขึ้นน้ำลงบนผิวโลก เราสามารถอธิบายปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลงได้โดยอาศัยกฎของนิวตัน เราสมมติว่าโลกเป็นทรงกลมแข็งเกร็งไม่ยืดหยุ่นประกอบด้วยน้ำเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้นผิวของโลกจึงถูกปกคลุมด้วยชั้นน้ำที่มีความลึกสม่ำเสมอ เราจะแสดงปรากฏการณ์ไทด์ (Tidal Effect) ด้วยรูป 7.8 ซึ่งที่จุดต่าง ๆ บนบริเวณผิวโลกจะมีความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของดวงจันทร์ (รูป 7.8 ก)



(ก)

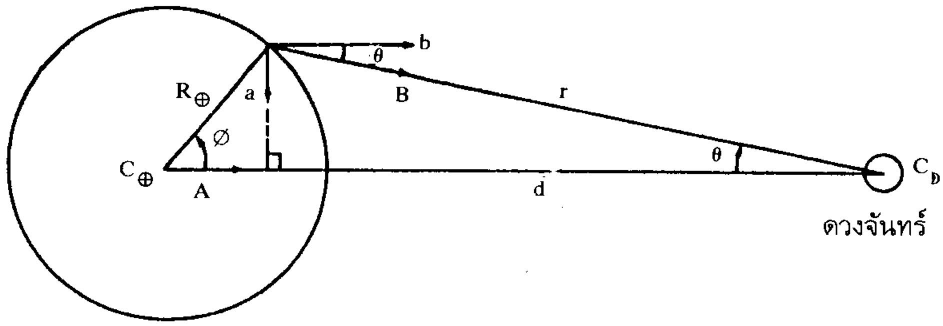


(ข)

รูป 7.8 แสดงปรากฏการณ์ไทด์ (ก) แสดงความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของดวงจันทร์ (ข) แสดงความเร่งไทด์เมื่อคิดเทียบกับจุดศูนย์กลางของโลกจะเกิดน้ำขึ้นสูงสุดที่ตำแหน่ง A และ B

ถ้าเรานำเวกเตอร์ความเร่งที่จุดศูนย์กลางของโลกลบออกจากเวกเตอร์ความเร่งที่ผิวโลกจุดต่าง ๆ เราจะได้ความเร่งไทด์ (Tidal Acceleration) ดังแสดงในรูป 7.8 (ข) ความเร่งไทด์เหล่านี้จะทำให้น้ำขึ้นสูงสุดที่ตำแหน่ง A และ B ซึ่งอยู่บนแนวต่อระหว่างจุดศูนย์กลางของโลกกับดวงจันทร์ และบริเวณที่น้ำลงต่ำสุดอยู่ในบริเวณที่ห่างจากตำแหน่ง A และ B 90 องศา

ให้เราพิจารณารูป 7.9 ซึ่งแสดงความเร่งไทด์ที่จุด P ใด ๆ จุดศูนย์กลางของโลก $C_\oplus$ และจุดศูนย์กลางของดวงจันทร์ $C_{\rightmoon}$ อยู่ห่างกันเป็นระยะ d กำหนดให้อนุภาคหนึ่งอยู่ที่จุด P บนผิวโลกทำมุม $\varnothing$ กับเส้นตรง $C_\oplus C_{\rightmoon}$ และทำมุมรองรับเป็น θ ระหว่างเส้นตรง $C_\oplus C_{\rightmoon}$ และ $PC_{\rightmoon}$



รูป 7.9 แสดงความเร่งไทด์กระทำต่ออนุภาคที่จุดหนึ่งจุดใดบนผิวโลก

ความเร่งที่จุดศูนย์กลางของโลก เนื่องจากแรงดึงดูดของดวงจันทร์มีขนาดเท่ากับ

$$A = \frac{GM_☽}{d^2} \tag{7.57}$$

ความเร่งของอนุภาคที่จุด P เนื่องจากแรงดึงดูดของดวงจันทร์มีขนาดเป็น

$$B = \frac{GM_☽}{r^2} \tag{7.58}$$

ผลต่างของความเร่งทั้งสอง B – A จะเท่ากับความเร่งไทด์ (ความเร่งของอนุภาคเทียบกับความเร่งที่จุดศูนย์กลางของโลก) กำหนดให้ความเร่งองค์ประกอบของ B ที่ตั้งฉากกับแนว $C_\oplus C_☽$ คือ

$$a = B \sin \theta$$

$$= \frac{GM_☽}{r^2} \frac{R_\oplus \sin \varnothing}{r}$$

$$a = \frac{GM_☽ R_\oplus \sin \varnothing}{r^3} \tag{7.59}$$

องค์ประกอบของ B ที่ขนานกับแนว $C_\oplus C_☽$ คือ

$$b = B \cos \theta$$

$$b = \frac{GM_☽}{r^2} \frac{d - R_\oplus \cos \varnothing}{r}$$

$$b = \frac{GM_☽ (d - R_\oplus \cos \varnothing)}{r^3} \tag{7.60}$$

องค์ประกอบของความเร่งในแนว $C_\oplus C_☽$ เมื่อเทียบกับ A คือ

$$b' = b - A$$
$$= \frac{GM_{☽}(d - R_{\oplus}\cos 0)}{r^3} - \frac{GM_{☽}}{d^2}$$
$$b' = \frac{GM_{☽}}{r^3}\left(d - R_{\oplus}\cos\varnothing - \frac{r^3}{d^2}\right) \qquad (7.61)$$

อาศัยจากกฎของโคไซน์

$$r^2 = d^2 + R_{\oplus}^2 - 2dR_{\oplus}\cos\varnothing$$
$$= d^2\left[1 - \frac{2R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing + \left(\frac{R_{\oplus}}{d}\right)^2\right]$$
$$r^3 = d^3\left[1 - \frac{2R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing + \left(\frac{R_{\oplus}}{d}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \qquad (7.62)$$

แต่เนื่องจากระยะห่างระหว่างโลกและดวงจันทร์มากกว่าขนาดรัศมีของโลกมากมาย ดังนั้น

$R_{\oplus}/d << 1$ ทำให้ $r^3 \approx d^3$

และสมการ (7.59) กลายเป็น

$$a \approx \frac{GM_{☽} R_{\oplus}\sin\varnothing}{d^3} \qquad (7.63)$$

และสมการ (7.61) กลายเป็น

$$b' \approx \frac{GM_{☽}}{d^2}\left[1 - \frac{R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing - \left(\frac{r}{d}\right)^3\right] \qquad (7.64)$$

แต่จากสมการ (7.62) โดยการกระจายอนุกรมยกกำลัง เราจะได้

$$r^3 \approx d^3\left(1 - \frac{3R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing\right) \qquad (7.65)$$

ดังนั้นสมการ (7.64) เขียนใหม่ได้เป็น

$$b' \approx \frac{GM_{☽}}{d^2}\left[1 - \frac{R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing - 1 + \frac{3R_{\oplus}}{d}\cos\varnothing\right]$$
$$b' \approx \frac{2GM_{☽}R_{\oplus}}{d^3}\cos\varnothing \qquad (7.66)$$

สมการ (7.66) นี้ก็คือสมการของเวกเตอร์ต่าง ๆ ที่ได้แสดงในรูป 7.8 (ข) จะเห็นได้ว่า แรงไทด์จะแปรตาม MR/d^3 ซึ่ง

M คือมวลของแหล่งกำเนิดหรือต้นเหตุของไทด์

R คือรัศมีของวัตถุที่ถูกแรงไทด์กระทำ

d คือระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสอง

ดวงอาทิตย์ก็เป็นต้นเหตุหนึ่งของการเกิดแรงไทด์บนโลกเช่นเดียวกับดวงจันทร์ แต่น้อยกว่า ทั้งนี้เนื่องจากดวงอาทิตย์อยู่ห่างไกลจากโลกมากกว่าดวงจันทร์มากตามความสัมพันธ์ของสมการ (7.66) อัตราส่วนระหว่างแรงไทด์ของดวงอาทิตย์และดวงจันทร์มีค่าเป็น

$$\left(\frac{M_\odot}{M_{☽}}\right)\left(\frac{r_{☽}}{r_\odot}\right)^3 = \left(\frac{1.99 \times 10^{30}}{7.36 \times 10^{22}}\right)\left(\frac{3.84 \times 10^5}{1.50 \times 10^8}\right)^3$$

$$\simeq \frac{5}{11}$$

เนื่องจากแรงไทด์เป็นเวกเตอร์ ดังนั้นแรงไทด์จากดวงอาทิตย์และดวงจันทร์จะรวมกันแบบเวกเตอร์ ทำให้ผลลัพธ์ของแรงไทด์ขึ้นกับมุมระหว่างดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ที่กระทำต่อโลก ขณะเมื่อดวงจันทร์อยู่ด้านเดียวกับ (วันขึ้น 1 ค่ำ) หรืออยู่ตรงกันข้ามกับ (วันขึ้น 15 ค่ำ) ดวงอาทิตย์ แรงไทด์ของดวงอาทิตย์และดวงจันทร์จะเสริมกันทำให้เกิดน้ำขึ้นมากที่สุด แต่ถ้าดวงจันทร์ทำมุม 90 องศากับดวงอาทิตย์ (วันขึ้นหรือแรม 8 ค่ำ) แรงไทด์ของดวงอาทิตย์และดวงจันทร์จะหักล้างกันไปบางส่วน ทำให้เกิดน้ำขึ้นสูงน้อยที่สุด

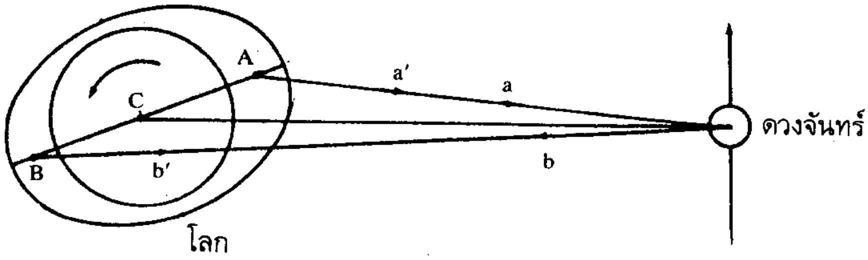
การเกิดน้ำขึ้นน้ำลงเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้โลกสูญเสียพลังงานในรูปของความร้อนไป ซึ่งเกิดจากการเสียดสีระหว่างน้ำในมหาสมุทรกับผิวโลกในส่วนที่เป็นของแข็ง การสูญเสียพลังงานของโลกส่วนใหญ่จะเกิดในทะเลตามบริเวณที่ตื้นและชายฝั่ง เมื่อน้ำวิ่งเข้าซัดกับชายฝั่งของขอบทวีป พลังงานการหมุนของโลกจะลดลง ทำให้โลกหมุนช้าลงไปและเวลาของหนึ่งวันจะเพิ่มมากขึ้นในอัตราประมาณ 0.002 วินาทีต่อศตวรรษ ความเสียดทานไทด์ (Tidal Friction) นี้เป็นสาเหตุของปรากฏการณ์ที่สำคัญสองอย่างของโลกและดวงจันทร์ คือ (1) การหมุนคล้องจองกัน (Synchronus) ของดวงจันทร์ และ (2) วิวัฒนาการไทด์ (Tidal Evolution)

การหมุนที่คล้องจองกันของดวงจันทร์กับโลกเกิดจากแรงไทด์จากโลกไปกระทำต่อดวงจันทร์ ทำให้ดวงจันทร์สูญเสียพลังงานการหมุนไป และหมุนช้าลงจนกระทั่งดวงจันทร์ถูกโลกจับให้หันหน้าด้านเดียวมาสู่โลกตลอดเวลา โดยที่ดวงจันทร์จะหมุนรอบตัวเองใช้เวลาเท่ากับการโคจรรอบโลก แรงไทด์ที่โลกกระทำต่อดวงจันทร์มีค่าประมาณเท่ากับ $M_\oplus R_{☽}/M_{☽}R_\oplus \approx 22$ เท่าของแรงไทด์ที่ดวงจันทร์กระทำต่อโลก

วิวัฒนาการไทด์ คือการเปลี่ยนแปลงอัตราการหมุนและการโคจรในระบบโลก-ดวงจันทร์ สมมติว่าถ้าทอร์ก (Torgue) หรือโมเมนต์ของแรงที่กระทำต่อระบบโลก-ดวงจันทร์ มีค่า

น้อยมาก และโมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะคงที่ ดังนั้นเมื่อความเสียดทานไทด์ทำให้โลกหมุนช้าลง โมเมนตัมของการหมุนจะลดลง ทำให้ดวงจันทร์ต้องเพิ่มโมเมนตัมเชิงมุมให้สูงขึ้น เพื่อให้โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่เหมือนเดิม โดยโคจรห่างออกไปจากโลกมากขึ้น ซึ่งมีผลทำให้คาบของการโคจรเพิ่มขึ้นตามกฎข้อที่ 3 ของเคเปลอร์ นั่นหมายความว่า เวลาในหนึ่งเดือนจะต้องยาวนานขึ้น

สาเหตุของวิวัฒนาการไทด์เกิดจากพื้นดินและมหาสมุทรบนโลกเมื่อได้รับแรงไทด์จากดวงจันทร์จะไม่นูนขึ้นทันที แต่ส่วนที่นูนขึ้นจะเกิดไปทางทิศตะวันออกของเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุดศูนย์กลางของโลกกับดวงจันทร์ ตามรูป 7.10 ส่วนนูน A จะอยู่ใกล้กว่าส่วนนูน B ทำให้ส่วนนูน A มีแรงดึงดูดดวงจันทร์มากกว่าส่วนนูน B เป็นผลทำให้มีแรงลัพธ์ไปเร่งดวงจันทร์ให้ถอยห่างออกไปจากโลกมากขึ้น ในขณะเดียวกันดวงจันทร์กระทำต่อส่วนนูน A และ B (ตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน) จะทำให้โลกหมุนช้าลง ดังนั้นในอดีตโลกจะมีการหมุนเร็วกว่าในปัจจุบันนี้มาก และดวงจันทร์โคจรครบรอบเร็วกว่าปัจจุบันเช่นกัน โดยมีวันและเดือนสั้นกว่าในปัจจุบันมาก เช่น จากการศึกษาทางโบราณชีววิทยา (Paleontalogy) ของซากหินปะการัง ซึ่งมีชีวิตอยู่เมื่อประมาณร้อยล้านปีมาแล้ว ได้แสดงว่าวันในอดีตสั้นกว่าในปัจจุบันจริง โดยในเวลาหนึ่งปีมี 400 วัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ในอดีตโลกหมุนเร็วกว่าและดวงจันทร์อยู่ใกล้โลกมากกว่าในปัจจุบันนี้



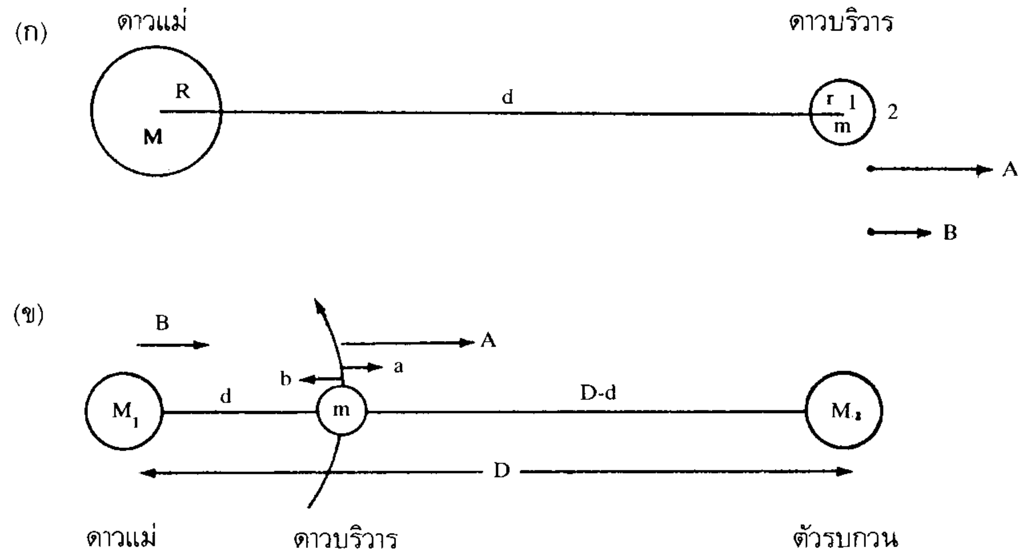
รูป 7.10 แสดงวิวัฒนาการไทด์ของระบบโลก–ดวงจันทร์

7.5 ขีดจำกัดโรชและขีดจำกัดเสถียร

ต่อไปเราจะพิจารณาถึงอิทธิพลของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อวัตถุไม่แข็งเกร็ง (ยืดหยุ่นได้) และต่อระบบที่ประกอบด้วยวัตถุมากกว่า 2 วัตถุ ซึ่งจะแสดงปรากฏการณ์สองอย่าง คือ (1) ดาวบริวารจะไม่สามารถเข้าใกล้ดาวแม่มากเกินไป เราเรียกว่าเป็นขีดจำกัดโรช (Roche Limit) และ (2) ดาวบริวารจะไม่สามารถอยู่ห่างจากดาวแม่มากเกินไป เรียกว่าเป็นขีดจำกัดเสถียร (Stability Limit)

กำหนดให้ดาวบริวารมีมวล m และรัศมีเป็น r โคจรรอบ ๆ ดาวแม่ที่มีมวลเป็น M และมีรัศมี R โดยดาวบริวารอยู่ห่างจากดาวแม่เป็นระยะทาง d ตามรูป 7.11 ถ้าหากว่าดาวบริวารเข้าใกล้ดาวแม่มากเกินกว่าระยะทาง d ค่าหนึ่งที่เรียกว่าขีดจำกัดโรช มันจะถูกแรงไทด์จากดาวแม่ฉีกให้แตกกระจายเป็นชิ้นย่อย ๆ ออกจากกัน

เรากำหนดให้ดาวแม่มีความหนาแน่นเฉลี่ยเป็น ρ_M และดาวบริวารมีความหนาแน่นเฉลี่ยเป็น ρ_m และสมมติด้วยว่าดาวบริวารเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นเราสามารถหาค่าขีดจำกัดโรชได้จากรูป 7.11 ดังต่อไปนี้



รูป 7.11 แสดงขีดจำกัดโรชในรูป (ก) และขีดจำกัดเสถียรในรูป (ข)

แรงสู่ศูนย์กลางของดาวบริวาร = แรงโน้มถ่วงที่ดาวแม่กระทำต่อดาวบริวาร

$$m\omega^2 d = \frac{GMm}{d^2}$$

ซึ่งเราจะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$$

แต่ผลต่างของความเร่ง A ระหว่างจุดศูนย์กลางของดาวบริวาร (ที่จุด 1) กับที่ผิวของดาวบริวาร (ที่จุด 2) ซึ่งเกิดจากแรงดึงดูดของดาวแม่มีค่าเป็น

$$A = \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{(d+r)^2}$$

$$A \approx \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{d^2}\left(1 - \frac{2r}{d}\right); \text{ เมื่อ } r << d$$

$$A \approx \frac{2GMr}{d^3} \tag{7.67}$$

ในขณะเดียวกัน ผลต่าง B ของความเร่งสู่ศูนย์กลางระหว่างสองจุดนี้มีค่าเป็น

$$B = \omega^2 (d + r) - \omega^2 d$$

$$= \omega^2 r$$

$$B = \frac{GMr}{d^3} \tag{7.68}$$

ผลบวกของ $\quad A + B = \frac{3GMr}{d^3}$

จะต้องเท่ากับหรือน้อยกว่าความเร่งของดาวบริวารที่กระทำต่อตัวเองที่ผิวดาว ซึ่งมีค่าเป็น Gm/r^2 ดาวบริวารจึงจะสมดุลอยู่ได้และไม่ถูกแรงไทด์ดึงให้แตกกระจายออก ดังนั้น

$$\frac{3GMr}{d^3} \leq \frac{Gm}{r^2}$$

$$d^3 \geq \frac{3Mr^3}{m}$$

หรือ $\quad d \geq \left(\frac{3M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} r$

ค่าน้อยที่สุดของ d ก็คือขีดจำกัดโรชนั่นเอง เราเขียนเป็น d_R นั่นคือ

$$d_R = \left(\frac{3M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} r \tag{7.69}$$

ความหนาแน่นเฉลี่ยของดาวแม่เขียนได้เป็น

$$\rho_M = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

ดังนั้นสมการ (7.68) เขียนใหม่จะได้ว่า

$$d_R = \left(\frac{3\rho_M R^3}{\rho_m r^3}\right)^{\frac{1}{3}} r$$

$$= \left(\frac{3\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}} R$$

$$d_R = 1.44 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}} R \tag{7.70}$$

สมการ (7.70) ใช้ได้กับดาวบริวารที่เป็นวัตถุแข็งเกร็ง แต่การสมมติให้ดาวบริวารเป็นของไหลจะใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่า คือ ถ้าดาวบริวารเป็นของไหลที่มีรูปร่างเป็นทรงกลมยืดออกแบบลูกรักบี้ (Prolate Spheroid) สมการ (7.70) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$d_R = 2.4554 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} R \tag{7.71}$$

ค่า d_R ที่หาได้จากสมการ (7.71) ก็คือขีดจำกัดโรชที่แท้จริง

ตัวอย่างเช่น ในระบบโลก-ดวงจันทร์ มีขีดจำกัดโรชที่ดวงจันทร์จะสามารถเข้าใกล้โลกมากที่สุดคือ

$$\begin{aligned} d_R &= 2.4554 \left(\frac{M_\oplus R_☽^3}{M_☽ R_\oplus^3} \right)^{\frac{1}{3}} R_\oplus \\ &= 2.4554 \left(\frac{M_\oplus}{M_☽} \right)^{\frac{1}{3}} R_☽ \\ &= 2.4554 \left(\frac{5.98 \times 10^{27}}{7.3 \times 10^{25}} \right)^{\frac{1}{3}} (1738) \text{ กิโลเมตร} \\ d_R &= 18{,}500 \text{ กิโลเมตร} \end{aligned}$$

ถ้าหากว่าดวงจันทร์โคจรเข้าใกล้โลกมากกว่า 18,500 กิโลเมตร ดวงจันทร์จะถูกแรงไทด์จากโลกทำให้มันแตกออกเป็นเสี่ยง ๆ ได้ ปัจจุบันดวงจันทร์อยู่ห่างจากโลกใกล้ที่สุด 356,400 กิโลเมตร และอยู่ไกลที่สุด 406,700 กิโลเมตร

ดาวบริวารทุกดวงในระบบสุริยะจะมีวงโคจรอยู่ภายนอกขีดจำกัดโรชของดาวแม่ของมัน สำหรับวงแหวนของดาวเสาร์พบว่าอยู่ห่างจากศูนย์กลางของดาวเสาร์ประมาณ 80,000 ถึง 136,000 กิโลเมตร ซึ่งอยู่ภายในขีดจำกัดโรชของดาวเสาร์ (ประมาณ 150,000 กิโลเมตร) ซึ่งถือว่าไม่มีดาวบริวารดวงใดที่จะถือกำเนิดและอยู่ภายในขีดจำกัดนี้ได้โดยไม่ถูกดึงให้แตกกระจายออกเป็นเสี่ยง ๆ แต่การที่อนุภาคภายในวงแหวนยังคงอยู่ได้ แสดงว่าอนุภาคเหล่านั้นจะมีแรงยึดเหนี่ยวภายในมากกว่าแรงไทด์จากดาวเสาร์

เมื่อดาวบริวารโคจรห่างไกลจากดาวแม่มาก จะเกิดการรบกวนจากเทห์วัตถุอื่น ๆ ขึ้นได้ตามรูป 7.11 (ข) เราจะเห็นได้ว่าถ้าดาวบริวารโคจรห่างออกจากดาวแม่มากเกินกว่าขีดจำกัดค่าหนึ่งที่เรียกว่าขีดจำกัดเสถียร มันจะหนีหลุดออกไปจากดาวแม่ได้ ถ้าหากว่าเทห์วัตถุอื่น

ทำให้เกิดความเร่งมากกว่าดาวแม่ ผลต่างระหว่างความเร่งของดาวบริวารที่เกิดจากเทห์วัตถุอื่นและดาวแม่เขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
a &= A - B \\
&= \frac{GM_2}{(D-d)^2} - \frac{GM_2}{D^2} \\
&\approx \frac{GM_2}{D^2}\left(1 + \frac{2d}{D}\right) - \frac{GM_2}{D^2} \quad \text{เมื่อ } d << D
\end{aligned}
$$

$$a \approx \frac{2GM_2 d}{D^3} \tag{7.72}$$

เมื่อความเร่ง a มีค่าเท่ากับหรือน้อยกว่าความเร่ง b ที่เกิดจากดาวแม่ ดาวบริวารก็สามารถโคจรอยู่ได้โดยไม่ถูกดึงให้หลุดออกไป

$$
\begin{aligned}
a &\leq b \\
\frac{2GM_2 d}{D^3} &\leq \frac{GM_1}{d^2} \\
d^3 &\leq \frac{M_1}{2M_2} D^3 \\
d &\leq \left(\frac{M}{2M_2}\right)^{\frac{1}{3}} D
\end{aligned}
$$

ค่ามากที่สุดของ d ก็คือ ขีดจำกัดเสถียร เขียนเป็น d_s

$$d_s = \left(\frac{M_1}{2M_2}\right)^{\frac{1}{3}} D \tag{7.73}$$

สมการ (7.73) นี้ใช้กับกรณีเมื่อ $d << D$ เท่านั้น สำหรับกรณีอื่น ๆ เราจะต้องหาค่า d_s ด้วยสมการของ

$$
\begin{aligned}
a &= b \\
\frac{GM_2}{(D-d_s)^2} - \frac{GM_2}{D^2} &= \frac{GM_1}{d_s^2} \\
\frac{D^2 - D^2 + 2d_s D - d_s^2}{D^2(D-d_s)^2} &= \frac{M_1}{M_2 d_s^2}
\end{aligned}
$$

$$d_s^3(2D - d_s) = \left(\frac{M_1}{M_2}\right) D^2 (D - d_s)^2 \tag{7.74}$$

จากสมการ (7.73) เราหาขีดจำกัดเสถียรสำหรับดวงจันทร์ที่มีดวงอาทิตย์เป็นวัตถุรบกวนได้เป็น 1,700,000 กิโลเมตร ซึ่งมากกว่าระยะทางจากโลกถึงดวงจันทร์ถึงสี่เท่ากว่า ดังนั้นดวงจันทร์ซึ่งเป็นบริวารของโลกจึงเสถียรโดยไม่หนีหลุดออกไปสำหรับดาวหางที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ M_1 และสมมติว่ามีดาวดวงอื่นเป็นตัวรบกวน M_2 โดยประมาณว่า $M \approx M_2$ เราหาขีดจำกัดเสถียรของดาวหางได้ว่า $d_s = D/2$ แต่ระยะทางระหว่างดาวกับดวงอาทิตย์ D ประมาณว่าเท่ากับ 2×10^5 AU ดังนั้น $d_s \simeq 10^5$ AU ดังนั้นดาวหางที่มีจุดแอปฮีเลียนไกลกว่า 10^5 AU สามารถหนีหลุดจากระบบสุริยะได้

แบบฝึกหัดที่ 7

7.1 จงหาความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงบนผิวของวัตถุต่อไปนี้ว่าเป็นกี่เท่าของความเร่งที่ผิวโลก (g)

(1) ดวงจันทร์ ($M_{☽} = 0.0123\ M_{\oplus}$, $R_{☽} = 1738$ กม.)

(2) ดวงอาทิตย์ ($M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ กก.. $R_{\odot} = 7 \times 10^{10}$ ซม.)

(3) ดาวพฤหัสบดี ($M_{♃} = 318\ M_{\oplus}$, $R_{♃} = 10.8\ R_{\oplus}$)

7.2 จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของ (1) ระบบโลก-ดวงจันทร์ (2) ระบบดวงอาทิตย์-โลก (3) ระบบดวงอาทิตย์-ดาวพฤหัสบดี

7.3 จงหาอัตราเร็วของโลก ที่เพอริฮีเลียนและที่แอปฮีเลียน พร้อมทั้งหาระยะเพอริฮีเลียนและระยะแอปฮีเลียน และคำนวณค่าผลคูณ Vr (อัตราเร็วและระยะทาง) ที่สองจุดนี้

7.4 ดาวเทียมดวงหนึ่งโคจรรอบโลกเป็นวงกลมด้วยคาบดาราคติ (Sidereal Period) เท่ากับ 24 ชั่วโมงพอดี จงหาความสูงของดาวเทียมซึ่งวัดจากผิวโลก ถ้าดาวเทียมปรากฏอยู่นิ่งเมื่อมองจากผิวโลก จงหามุมที่ระนาบวงโคจรทำกับระนาบศูนย์สูตรของโลก

7.5 ก้อนหินก้อนหนึ่งถูกปล่อยจากสภาพหยุดนิ่งที่ความสูงเท่ากับวงโคจรของดวงจันทร์ให้ตกลงมาสู่โลก จงหาความเร็วของก้อนหินนี้ที่ระยะทาง 190,000 กิโลเมตร จากศูนย์กลางของโลก

7.6 จงหาขีดจำกัดโรช ขีดจำกัดเสถียร และวงโคจรของดาวเคราะห์ต่อไปนี้

(1) ดาวพุธ

(2) ดาวศุกร์

(3) โลก

(4) ดาวอังคาร

(5) ดาวพฤหัสบดี

(6) ดาวเสาร์

(7) ดาวยูเรนัส

โดยใช้ข้อมูลจากภาคผนวก

7.7 (ก) ยานอวกาศลำหนึ่งกำลังมุ่งหน้าไปยังดวงจันทร์ จงหาว่าที่จุดไหนระหว่างโลกและดวงจันทร์ที่ยานอวกาศจะไม่รู้สึกว่ามีแรงโน้มถ่วงมากระทำ

(ข) ยานอวกาศลำนี้จะต้องมีความเร็วเท่าไรบนผิวดวงจันทร์ จึงจะหนีหลุดพ้นจากดวงจันทร์มาโลกได้

7.8 สมมติว่าวงโคจรของดวงจันทร์เป็นวงกลม และอยู่ในระนาบสุริยะวิถี จงหาผลต่างของแรงดึงดูดของดวงอาทิตย์ที่กระทำต่อดวงจันทร์ที่จุดตรงข้ามกับดวงอาทิตย์และที่จุดด้านหน้าดวงอาทิตย์ และเปรียบเทียบค่าที่ได้กับแรงดึงดูดของโลก