บทที่ 1
รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าและสสาร

ในยามกลางคืนเมื่อเรามองขึ้นไปบนท้องฟ้า เราจะมองเห็นดวงดาวต่าง ๆ มากมายปรากฏอยู่ และที่เรามองเห็นดวงดาวต่าง ๆ เหล่านั้นได้ก็ด้วยแสงสว่างจากดาววิ่งมาสัมผัสกับดวงตาของเรานั่นเอง ดวงตาของเรายังสามารถกะกำหนดความสว่าง หรี่ ของดาวรวมทั้งทิศทางซึ่งดาวเหล่านั้นปรากฏบนท้องฟ้า ดาวฤกษ์จะมีแหล่งกำเนิดพลังงานภายในใจกลางของตัวมันเองแล้วถ่ายทอดออกมาสู่พื้นผิวซึ่งจะแผ่กระจายออกไปสู่อวกาศโดยรอบในรูปของแสงสว่าง พร้อมทั้งรังสีอื่น ๆ รังสีพลังงานเหล่านี้เดินทางผ่านที่ว่างในอวกาศมาถึงโลกสู่สายตาของเราเป็นเพียงปริมาณส่วนน้อยเท่านั้น เมื่อรังสีเข้าสู่ดวงตาของเราจะไปรวมจุดกันบนผนังบุด้วยปลายประสาทของตาทำให้เกิดกระแสประสาทแล่นไปสู่สมอง เป็นผลทำให้เรารับรู้ว่ามีจุดสว่างปรากฏบนท้องฟ้าในทิศที่ดวงตาของเราหันไปมอง การเกิดกระแสประสาทขึ้นเป็นผลจากการกระตุ้นด้วยพลังงานที่เข้าไปในดวงตาในรูปของแสงสว่าง ดังนั้นการเรียนรู้รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าจึงเป็นรากฐานสำคัญที่ทำให้เราเข้าใจถึงธรรมชาติของดาว ทั้งนี้เพราะว่ามันเป็นสิ่งเดียวเท่านั้นที่เรามีอยู่ในการศึกษาถึงสมบัติทุกประการของดาวฤกษ์ เช่น ระยะทาง ความสว่าง มวล องค์ประกอบอื่น ๆ อีก เป็นต้น ในบทนี้เราจึงศึกษาถึงสมบัติของรังสีแม่เหล็กไฟฟ้า โครงสร้างอะตอมของสสาร การแผ่รังสีของวัตถุดำ และกฎของแก๊ส

1.1 รังสีแม่เหล็กไฟฟ้า

เจมส์ คลาร์ก แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) นักฟิสิกส์ชาวสก็อตได้เสนอทฤษฎีว่า การแผ่รังสีพลังงานเช่นแสงสว่างนั้น เกิดขึ้นจากการสั่นสะเทือน หรือการออสซิลเลตของประจุไฟฟ้าในอะตอม ทำให้เกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า แสงสว่างเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าชนิดหนึ่ง นอกจากนั้นเขายังได้ทำนายว่ามีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าชนิดอื่นอีกที่มีความยาวคลื่นแตกต่างกันไป ต่อมา**ไฮน์ริช แฮตซ์ (Heinrich Hertz)** นักทดลองชาวเยอรมันได้ใช้ขดลวดชักนำทำประกายไฟฟ้า ทำให้เกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (คลื่นวิทยุ) ซึ่งมีสมบัติตามที่แมกซ์เวลล์ได้ทำนายไว้ แฮตซ์ได้ทำการทดลองเรื่องนี้เมื่อปี ค.ศ. 1888 นับเป็นการเริ่มต้นของวิชาวิทยุและอิเล็กทรอนิกส์ แฮตซ์ได้ทำการทดลองให้เกิดสนามไฟฟ้าอย่าง

เข้มขึ้นระหว่างแผ่นตัวนำสองแผ่น โดยต่อสายจากขั้วของขดลวดเหนี่ยวนำมาที่แผ่นตัวนำทั้งสอง เมื่อเกิดการถ่ายเทประจุโดยมีประกายเกิดขึ้นระหว่างปุ่มจ่ายประกายที่ต่อมาจากแผ่นตัวนำทั้งสอง สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำจะเปลี่ยนแปลงคือลดลงโดยทันที มีผลชักนำให้เกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแผ่กระจายออกไป มีขนาดของความยาวคลื่นจำพวกคลื่นวิทยุความถี่สูงมาก (Very High Frequency Radio Waves) และคลื่นวิทยุความถี่สูงอัลตรา (Ultra High Frequency Radio Waves) โดยเหตุที่ความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลางมีค่าคงที่ และความเร็วของคลื่นเท่ากับผลคูณของความยาวคลื่นและความถี่ แหล่งกำเนิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะทำให้เกิดคลื่นชนิดที่มีความยาวคลื่นเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับการทำให้สนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงเป็นรอบด้วยความถี่เท่าใด

ตัวอย่างเช่นในกรณีของแสงสว่าง แหล่งกำเนิดของมันคืออะตอมและโมเลกุล ซึ่งทำให้เกิดสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงด้วยความถี่สูงมาก เช่น เมื่อนำเกลือแกงไปเผา อะตอมของโซเดียมในเกลือจะแผ่รังสีความถี่สูง 5.1786×10^{17} เฮิรตซ์ ทำให้เกิดคลื่นที่มีขนาดความยาวคลื่น $3 \times 10^{10}/5.1786 \times 10^{17} = 0.00005793$ ซม. หรือ 5793 อังสตรอม (A°) นับว่าเป็นคลื่นสั้นมาก

การแผ่รังสีและการดูดกลืนรังสีในอะตอมและโมเลกุลเป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงระดับพลังงานของอะตอมและโมเลกุล ซึ่งอิเล็กตรอนจะมีบทบาทในเรื่องนี้เช่นเดียวกับอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ในวงจรกระแสไฟฟ้าสลับระหว่างสายอากาศและพื้นดิน ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแผ่กระจายออกไปเป็นคลื่นวิทยุ ในระดับอะตอมแม้เราจะใช้แบบจำลองที่มีอิเล็กตรอนโคจรรอบ ๆ แกนกลางนิวเคลียสซึ่งนับว่ามันมีความเร่งรอบจุดใจกลางของอะตอม แต่ก็ไม่มีการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใด ๆ ในสภาพนี้ แต่เมื่ออิเล็กตรอนเปลี่ยนวงโคจรจากวงหนึ่งไปยังอีกวงหนึ่ง คือมีการเปลี่ยนแปลงระดับพลังงานในอะตอมนั้น ปริมาณพลังงานที่เปลี่ยนไปจะปรากฏเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือโฟตอน การเปลี่ยนแปลงอาจจะเป็นการแผ่รังสีหรือการดูดกลืน รายละเอียดในเรื่องนี้เราจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

พลังงานในรังสีแม่เหล็กไฟฟ้า E จะมีค่าแปรตามความถี่ด้วยสมการ

$$E = nh\nu \tag{1.1}$$

เมื่อ ν คือความถี่ของคลื่น h คือค่าคงตัวเรียกว่าค่าคงตัวของพลังค์ (Planck's Constant) มีค่าเท่ากับ 6.625×10^{-27} เอิร์กวินาที (erg · sec) n คือเลขจำนวนเต็มบวก สมการ (1.1) นี้เป็นไปตามข้อเสนอของมักซ์พลังค์ (**Max Planck**) นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมันที่กล่าวว่า อะตอมของสสารจะดูดกลืนหรือแผ่รังสีแต่ละครั้งเต็มเม็ดเต็มหน่วยอันหนึ่งเรียกว่า ควอนตัม แต่ละควอนตัมแปรโดยตรงกับความถี่ของคลื่นในรังสีนั้น นั่นหมายความว่าพลังงานมีธรรมชาติ

เป็นเม็ดหน่วย เช่นเดียวกับสสารที่เป็นเม็ดหน่วยคืออะตอม ควอนตัมก็คือเม็ดของพลังงานนั่นเอง พลังค์ได้เสนอทฤษฎีควอนตัมของการแผ่รังสีเพื่ออธิบายปรากฏการณ์การแผ่รังสีบางประการซึ่งทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอธิบายไม่ได้ ดังนั้นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจึงมีรูปลักษณ์มากมายหลายชนิดแล้วแต่ความถี่ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งอาจมีได้ตั้งแต่ไม่กี่เฮิรตซ์ขึ้นไปจนถึง 10^{20} เฮิรตซ์ และมีขนาดของความยาวคลื่น 10^{10} ซม. (คลื่นวิทยุที่ยาวมาก) จนถึง 10^{-10} ซม. ซึ่งเป็นรังสีแกมมามีพลังงานสูงมาก

1.2 ปรากฏการณ์ของแสง

รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าอาจจะแสดงตัวเป็นทั้งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรืออนุภาคโฟตอนได้ในโอกาสต่าง ๆ กันตามที่ได้กล่าวข้างต้น เมื่อรังสีแสดงตัวเป็นคลื่นมันจะมีสมบัติต่าง ๆ ของคลื่นครบถ้วน เช่นสามารถเกิดการโปลาไรซ์ การสะท้อน การหักเห การแทรกสอด การเลี้ยวเบน และปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (Doppler Effect) ได้ ปรากฏการณ์เหล่านี้สามารถนำมาใช้เป็นประโยชน์ในการสร้างอุปกรณ์ หรือใช้เป็นหลักในการศึกษาค้นคว้าทางดาราศาสตร์

1.2.1 การสะท้อนของแสง

เมื่อแสงตกกระทบบนผิวเรียบมัน เช่น กระจกเงาราบจะสะท้อนกลับ โดยมีมุมสะท้อนเท่ากับมุมตกกระทบ สำหรับภาพที่ปรากฏในกระจกเงาราบจะมีขนาดเท่ากับขนาดของวัตถุ แต่กลับตำแหน่งซ้ายขวากันและอยู่ห่างจากกระจกทางด้านหลังเท่ากับที่วัตถุอยู่ห่างจากกระจกทางด้านหน้า

จากทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่จุดใดจุดหนึ่งในรังสีจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นรอบ ๆ อิเล็กตรอนซึ่งเป็นประจุลบและเบาที่อยู่ในสสารซึ่งแสงมาตกกระทบ ย่อมมีปฏิกิริยาต่อสนามโดยมีการออสซิลเลตเป็นรอบ ๆ ตามจังหวะการเปลี่ยนแปลงของสนามนั้น การออสซิลเลตหรือการเคลื่อนที่เป็นวงไปมาของอิเล็กตรอนจะทำให้มันแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกจากตัว ผลรวมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากอิเล็กตรอนจำนวนมากนี้เองที่ทำให้ปรากฏเป็นแสงสะท้อนจากผิวของวัตถุ ดังนั้นอิเล็กตรอนในสสารจึงมีบทบาทสำคัญในการสะท้อนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ผิวของกระจกราบเป็นผิวเรียบและเป็นระนาบราบ จึงมีอนุภาคที่ผิวเรียงตัวกันเป็นแถวอย่างสม่ำเสมอ ลำแสงขนานที่ตกกระทบกระจกราบจะสะท้อนกลับโดยยังคงรักษาความเป็นลำแสงขนานไว้เช่นเดิม โดยเหตุที่กลไกในธรรมชาติของการสะท้านมีขนาดอยู่ในระดับของความยาวคลื่น (สำหรับแสงสว่าง คือ 4000 A° ถึง 7500 A°) ผิวกระจกราบที่ดีและสะท้อนแสงได้ถูกต้องจริง ๆ นั้นจำเป็นจะต้องมีความละเอียดถี่ถ้วน คืออนุภาคที่ผิวสะท้อนจะเหลื่อมล้ำ

จากระนาบราบตามทฤษฎีได้ไม่เกิน $\frac{1}{8}$ ของความยาวคลื่นนั้น มิฉะนั้นลำแสงสะท้อนจะไม่ขนานกันจริง และภาพที่เกิดขึ้นจะบิดเบี้ยวผิดไปจากวัตถุ (ในบางครั้งความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากจนเราสังเกตได้ว่าภาพที่มองเห็นในกระจกบิดเบี้ยวผิดความเป็นจริงมาก) ดังนั้นกระจกที่ใช้ในเครื่องมือทางดาราศาสตร์จึงจำเป็นต้องสร้างเป็นพิเศษให้พื้นผิวมีความราบเรียบถูกต้องสม่ำเสมอตั้งแต่ $\frac{1}{8}$ ของความยาวคลื่นแสงที่ใช้ตกกระทบ จึงจำเป็นต้องพัฒนาวิทยาการในการฝนและขัดผิวของกระจกให้เป็นไปตามเช่นนั้น

โลหะมีอิเล็กตรอนอิสระจำนวนมากอยู่ภายในจึงสามารถสะท้อนแสงได้ดีกว่าวัตถุอื่น ผิวซึ่งใช้สะท้อนแสงจึงเป็นผิวโลหะหรือเคลือบด้วยโลหะ โลหะที่ใช้เคลือบผิวสะท้อนแสงของกระจกที่ใช้ในทางดาราศาสตร์ส่วนใหญ่ในปัจจุบันนิยมใช้อะลูมิเนียม ซึ่งเคลือบหรือฉาบโดยเผาให้ระเหยกลายเป็นไอไปเกาะติดกับกระจกด้วยกระแสไฟฟ้าในสูญญากาศ โลหะอื่นเช่น ทอง เงิน เป็นต้น ก็มีใช้ในบางกรณี เนื่องจากผิวสะท้อนแสงของกระจกที่ใช้ในงานด้านดาราศาสตร์เป็นผิวที่ต้องสัมผัสกับอากาศและสภาพแวดล้อมโดยตรง ไม่มีแก้วหุ้มป้องกันเหมือนกับกระจกเงาส่องหน้า เพราะเป็นกระจกสะท้อนที่ผิวแรก (First Surface Mirror) ดังนั้นการใช้งานและการเก็บรักษากระจกชนิดต่าง ๆ ทางด้านดาราศาสตร์จึงต้องมีความระมัดระวังเป็นกรณีพิเศษเพราะว่าเกิดความเสียหายได้ง่าย ในปัจจุบันมีการเคลือบทับผิวสะท้อนแสงด้วยสารโปร่งใสบางมาก เช่น เคลือบด้วยซิลิคอนโมนอกไซด์

1.2.2 การหักเหและการกระจายของแสง

เมื่อแสงเดินทางผ่านผิวระหว่างตัวกลางสองชนิด โดยตกกระทบทำมุมกับเส้นตั้งฉากกับผิวนั้นและมันได้เปลี่ยนทิศของการเคลื่อนที่ ปรากฏการณ์นี้เราเรียกว่าการหักเห มุมที่แนวแสงตกกระทบทำกับเส้นตั้งฉากกับผิวหรือเส้นปกติ เรียกว่ามุมตกกระทบ และมุมที่แนวแสงเดินไปในตัวกลางที่สองกระทำกับเส้นปกติ เรียกว่ามุมหักเห อัตราส่วนของไซน์ของมุมตกกระทบต่อไซน์ของมุมหักเห จะเท่ากับอัตราส่วนของความเร็วของแสงในตัวกลางแรกต่อความเร็วของแสงในตัวกลางที่สอง และมีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง กล่าวคือ

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_i}{v_r} = n \tag{1.2}$$

ถ้าหากว่าตัวกลางแรกเป็นสูญญากาศ ค่า v_i ก็คือความเร็วของแสงในสูญญากาศ (3×10^{10} ซม./วินาที) ค่าคงตัว n เรียกว่าค่าดัชนีหักเหของตัวกลางที่สองนั้น

ความเร็วของแสงที่วิ่งในตัวกลางต่างชนิดกันจะมีค่าแตกต่างกันไป อนึ่งแสงที่มีขนาดความยาวคลื่นต่าง ๆ ก็มีความเร็วในตัวกลางสารไดอิเล็กทริกชนิดเดียวกันแตกต่างไปด้วย ดังนั้นเมื่อลำแสงตกกระทบผิววัตถุโปร่งแสงแนวลำแสงในวัสดุนั้นจะหักเหไปเป็นมุมเท่าใด

ก็ขึ้นอยู่กับทั้งชนิดของวัสดุและขนาดของความยาวคลื่นแสงนั้น หลักการหักเหของแสงในวัสดุโปร่งแสงต่าง ๆ เป็นรากฐานสำคัญของอุปกรณ์ทัศนศาสตร์จำพวก เลนซ์ และแท่งแก้วหรือปริซึ่ม (Prism) ซึ่งใช้กันมากมายในงานด้านดาราศาสตร์

การค้นพบโดยบังเอิญของคนสมัยก่อนที่ว่าวัสดุที่มีผิวโค้งมองผ่านได้สามารถขยายภาพวัตถุและทำให้เกิดการประดิษฐ์แว่นขยายขึ้นนั้น นับเป็นการเริ่มต้นของการประยุกต์และศึกษาหลักการหักเหของแสง ปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นจากการที่แสงขนานซึ่งวิ่งผ่านผิวโค้งทรงกลมระหว่างตัวกลางสองชนิดจะหักเหในลักษณะไปรวมตัวกันที่จุดโฟกัสด้านหลังของผิวนั้น การเกิดภาพเนื่องจากเลนซ์ก็เป็นไปตามหลักเกณฑ์นี้

จากที่ได้กล่าวแล้วว่าค่าดัชนีหักเหของตัวกลางขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นของแสง ดังนั้นถ้าลำแสงขนานซึ่งประกอบด้วยแสงที่มีขนาดความยาวคลื่นต่าง ๆ ผสมกลมกลืนกันอยู่ ตกเฉียงกระทบกับผิวราบระหว่างตัวกลางสองชนิด เช่น อากาศและแก้ว ลำแสงที่เดินทางต่อไปในตัวกลางที่สองจะมีทิศทางแตกต่างกันสำหรับขนาดคลื่นต่างกัน ซึ่งหมายความว่าผิวระหว่างตัวกลางจะกระจายแสงที่มีขนาดความยาวคลื่นต่าง ๆ ออกจากกันได้ หลักการ**นี้เซอร์ไอแซกนิวตัน (Sir Isaac Newton)** เป็นผู้ค้นพบ โดยทำการทดลองให้แสงสว่างสีขาวผ่านเข้าไปทางผิวราบด้านหนึ่งของแท่งแก้วสามเหลี่ยม ปรากฏว่าแสงที่ผ่านออกมาอีกด้านหนึ่งของผิวราบแยกออกเป็นแสงสีต่าง ๆ ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าแสงสว่างสีขาวจะประกอบด้วยคลื่นแสงขนาดความยาวคลื่นต่าง ๆ กัน ซึ่งมีผลต่อตาของเราให้มองเห็นเป็นสีต่าง ๆ แท่งแก้วมีดัชนีหักเหต่างกันสำหรับความยาวคลื่นต่าง ๆ นั้น ดังนั้นแสงแต่ละสีจึงแยกตัวออกจากกันเมื่อเดินผ่านผิวของแท่งแก้วสามเหลี่ยมทั้งสองผิวไป ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า **การกระจายแสง (Dispersion)** สำหรับแถบแสงสีต่าง ๆ ซึ่งไปปรากฏบนฉากข้างหลังแท่งแก้วสามเหลี่ยมในการทดลองนี้เรียกว่า สเปกตรัม

หลักการนี้ได้ถูกนำไปใช้ในการวิจัยทางฟิสิกส์ โดยสร้างอุปกรณ์ตรวจสอบและวัดความยาวของคลื่นที่เรียกว่า **สเปกโทรสโคป (Spectroscope)** และถ้าหากอุปกรณ์นี้มีกล้องถ่ายภาพประกอบด้วย เรียกว่า **สเปกโทรกราฟ (Spectrograph)** ซึ่งเราสามารถนำอุปกรณ์เหล่านี้ไปใช้ศึกษาวิเคราะห์แสงจากวัตถุท้องฟ้าต่าง ๆ เช่น ดาวและดวงอาทิตย์เป็นต้น

แม้ว่าจะเริ่มต้นด้วยการแยกแสงสว่างสีขาวออกเป็นแสงสีต่าง ๆ ต่อมานักวิทยาศาสตร์ก็พบว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ เช่น รังสีเหนือม่วงก็อาจแยกออกจากกันตามความยาวคลื่นได้เช่นกัน เมื่อใช้อุปกรณ์ที่เหมาะสมกับพลังงานของคลื่นในช่วงความยาวคลื่นนั้น ดังนั้นคำว่าสเปกตรัมจึงใช้ในความหมายทั่วไป สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าชนิดต่าง ๆ จำแนกเรียง

ไปตามความยาวคลื่น การจำแนกอาจเป็นการเขียนเป็นแผนผังหรือแผนภาพ หรือภาพถ่ายจากสเปกโทรกราฟซึ่งปรากฏเป็นเส้นสว่างหรือเส้นมืดบนพื้นหลังสว่าง เรียงลำดับกันไปตามความยาวคลื่น

อนึ่งในสมัยต่อมามีการศึกษาพบว่า รังสีอีกจำนวนหนึ่งซึ่งไม่ใช่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแต่เป็นอนุภาคเล็ก ๆ ขนาดเท่าใจกลางของอะตอมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง และพลังงานของรังสีก็คือพลังงานจลน์ในความเร็วของอนุภาคนั้น แผนผังแบ่งแยกรังสีชนิดนี้ออกเป็นพวกเรียงกันไปตามพลังงานก็เรียกว่า สเปกตรัมพลังงานของรังสีด้วย ดังนั้นคำว่าสเปกตรัมในปัจจุบันจึงมีความหมายอย่างกว้างขวาง

1.2.3 การแทรกสอดของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นระนาบตามขวาง เมื่อเคลื่อนที่ไปในสูญญากาศเรียกว่าคลื่นเคลื่อนที่ตามขวาง เราสามารถเขียนการขจัดของมันเป็นฟังก์ชันของระยะทางและเวลาโดยที่คลื่นวิ่งไปในทิศทาง z

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \tag{1.3}$$

ในที่นี้ A คืออัมปลิจูดของคลื่น k เรียกว่าเลขคลื่นเชิงมุมซึ่งสัมพันธ์กับความยาวคลื่นดังนี้ $k = 2\pi/\lambda$ สำหรับ ω เราเรียกว่าความถี่เชิงมุม และ t คือเวลาที่คลื่นใช้ในการเคลื่อนที่จากเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ถึงในขณะใด ๆ

คลื่นที่มีความยาวคลื่นค่าเดียว (หรือมีความถี่เดียว) เราเรียกว่าคลื่นเอกรงค์ (Monochromatic Wave) คลื่นสองคลื่นซึ่งมีความแตกต่างของเฟสที่จุดเดียวกันมีค่าเท่ากันตลอดเวลา เราเรียกว่าคลื่นมีความพร้อมเพียง (Coherent) คลื่นเอกรงค์สีเดียวกันสองคลื่นซึ่งมีความถี่เท่ากัน (หรือมีความยาวคลื่นเท่ากัน) จะมีความพร้อมเพรียงกันได้ สำหรับคลื่นสองคลื่นใด ๆ ซึ่งมีความแตกต่างเฟสเปลี่ยนแปลงไปตลอดเวลาจะเป็นคลื่นไม่พร้อมเพรียงได้แก่คลื่นหลายคลื่นที่มีความถี่ต่าง ๆ กัน หรือคลื่นที่ประกอบด้วยอนุกรมของขบวนคลื่น (Wave Trains) ซึ่งต่างก็เริ่มต้นและหมดไปไม่พร้อมกัน และมีค่าเฟสต่าง ๆ ไม่สัมพันธ์กันในขณะที่ขบวนคลื่นเริ่มต้นและหยุดลง

คลื่นสองคลื่นซึ่งโปลาไรซ์เชิงเส้นในระนาบเดียวมาซ้อนกันที่จุดใดจุดหนึ่ง อัมปลิจูด A ของคลื่นรวมจากจุดนั้นเป็นผลมาจากอัมปลิจูด A_1 และ A_2 กับเฟส P_1 และ P_2 ของคลื่นทั้งสองเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(P_1 - P_2) \tag{1.4}$$

ถ้าคลื่นทั้งสองที่มาซ้อนกันเป็นคลื่นไม่พร้อมเพรียงมีความถี่เป็น ν_1 และ ν_2 แตกต่างกัน

อัมปลิจูดของคลื่นรวม A จะเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงไปเป็นรอบโดยมีคาบเท่ากับ $(1/\nu_1 - 1/\nu_2)$

ในการทดลองให้คลื่นสองคลื่นมาซ้อนกันและสังเกตการณ์ เช่นการทดลองในเรื่องของแสง เวลาสังเกตการณ์น้อยที่สุดที่เป็นไปได้จะมากกว่าคาบ $(1/\nu_1 - 1/\nu_2)$ นี้ ดังนั้นเราจะตรวจบันทึกได้แต่เพียงค่ากำลังสองเฉลี่ยของอัมปลิจูดของคลื่นรวมคือ $A^2 = A_1^2 + A_2^2$

ดังนั้นคลื่นซึ่งไม่พร้อมเพรียงกันมาซ้อนกัน ความเข้มรวมเป็น

$$I = I_1 + I_2 \tag{1.5}$$

เมื่อคลื่นทั้งสองพร้อมเพรียงกันและเป็นคลื่นโปลาไรซ์เชิงเส้นในระนาบเดียวกันมาซ้อนกัน ความต่างเฟส $P_1 - P_2 = \triangle P$ จะเท่ากับความต่างเฟสเริ่มต้น ดังนั้นอัมปลิจูด A ของคลื่นรวมจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาแต่จะเปลี่ยนขนาดไปตามตำแหน่ง ทั้งนี้เนื่องจาก $P_1 - P_2 = \triangle P$ เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง เราจะได้ผลว่า

$$A_{min} \leq A \leq A_{max} \tag{1.6}$$

เมื่อ $A_{max} = A_1 + A_2$ เมื่อ $\triangle P = 2n\pi$ (เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (1.7)

$A_{min} = | A_1 - A_2 |$ เมื่อ $\triangle P = (2n+1)\pi$

ทั้งนี้โดยพิจารณาได้จากพจน์ $2A_1A_2 \cos (P_1 - P_2)$ และ A_{min} คือค่าอัมปลิจูดน้อยที่สุด A_{max} คือค่าอัมปลิจูดมากที่สุด ความเข้มสูงสุดและความเข้มต่ำสุดของคลื่นรวมจะเป็น

$$I_{max} \sim (A_1 + A_2)^2$$
$$I_{min} \sim (A_1 - A_2)^2 \tag{1.8}$$

แต่ถ้าคลื่นทั้งสองมีอัมปลิจูดเท่ากัน $A_1 = A_2$ เราจะได้ว่า

$$I_{max} = 4I_1 = 4I_2$$
$$I_{min} = 0 \tag{1.9}$$

นั่นคือความเข้มสูงสุดจะเท่ากับสองเท่าของผลรวมของความเข้มของคลื่นที่มาซ้อนกัน และความเข้มต่ำสุดมีค่าเป็นศูนย์

สรุปผลการพิจารณาดังกล่าวข้างต้นได้ว่า

(1) ถ้าคลื่นสองคลื่นไม่พร้อมเพรียงกันมาซ้อนกัน ความเข้มของคลื่นรวมจะเท่ากับผลบวกของความเข้มของคลื่นทั้งสอง

(2) ถ้าคลื่นทั้งสองพร้อมเพรียงกันมีการโปลาไรซ์เชิงเส้นในระนาบเดียวมาซ้อนกันความเข้มของคลื่นรวมจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์เฟสเริ่มต้นของคลื่นทั้งสอง ถ้าเราทำการทดลองให้คลื่นแสงซึ่งพร้อมเพรียงกันมาซ้อนกันและสังเกตผลที่เกิดขึ้นบนฉากหรือบันทึกด้วย

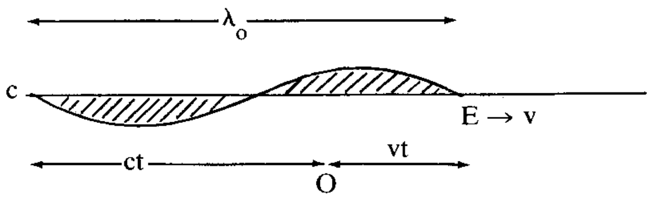
ฟิล์มถ่ายภาพ เราจะได้ลวดลายสว่างสลับมืด ซึ่งเรียกว่าลวดลายการแทรกสอด (Interference Pattern) และปรากฏการณ์นี้เราเรียกว่าการแทรกสอดของแสง

หลักการแทรกสอดของคลื่นได้มีผู้นำไปใช้ประดิษฐ์อุปกรณ์ดาราศาสตร์ คือเครื่องวัดการแทรกสอดของแสงดาว (Stellar Interferometer) ใช้สำหรับวัดระยะห่างระหว่างดาวคู่และวัดขนาดของดาวฤกษ์เดี่ยว และเครื่องวัดการแทรกสอดของคลื่นวิทยุ (Radio Interferometer) ใช้หาตำแหน่งที่ถูกต้องของต้นกำเนิดคลื่นวิทยุ (Radio Source) ในท้องฟ้า

1.2.4 ปรากฏการณ์ดอปเปลอร์

เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในแนวเส้นตรงที่ต่อระหว่างกัน ความถี่และความยาวคลื่นของคลื่นจะเปลี่ยนแปลงไป หลักการนี้นักวิทยาศาสตร์ชื่อ **คริสเตียน ดอปเปลอร์ (Christian Doppler)** เป็นผู้เสนอในปี 1842 เรียกว่าหลักการดอปเปลอร์หรือปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (The Doppler Principle or The Doppler Effect) คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและคลื่นเสียงในอากาศก็เป็นไปตามปรากฏการณ์ดอปเปลอร์นี้ ดูรูป 1.1 ซึ่งแสดงแหล่งกำเนิดคลื่น E กำลังเคลื่อนที่ออกจากผู้สังเกต O ด้วยความเร็ว V ในขณะเดียวกันก็ส่งคลื่นที่มีความยาวคลื่น λ_E และความถี่ ν_E ในช่วงเวลา $t = 1/\nu_E$

ในขณะนั้นแหล่งกำเนิดคลื่นได้เคลื่อนที่ไปทางขวามือเป็นระยะทางเท่ากับ vt ดังนั้นผู้สังเกตจะเห็นคลื่นมีความยาวคลื่นเป็น λ_o โดยที่



รูป 1.1 แสดงปรากฏการณ์ดอปเปลอร์

$$\lambda_o = (c + v)t$$

$$= \frac{c\,(1 + v/c)}{\nu_E}$$

$$\lambda_o = \lambda_E\,(1 + v/c) \qquad (1.10)$$

และผู้สังเกตจะเห็นความถี่กลายเป็น

$$\nu_o = c/\lambda_o$$

$$= \frac{c}{\lambda_E}\,(1 + v/c)^{-1}$$

$$\nu_o = \nu_E (1 + v/c)^{-1} \tag{1.11}$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อ $v > o$ หรือแหล่งกำเนิดเคลื่อนที่ออกจากผู้สังเกตจะได้ $\lambda_o > \lambda_E$ และ $\nu_o < \nu_E$ ดังนั้นคลื่นจะมีความยาวคลื่นเลื่อนไปทางสีแดง (Red Shift) หรือเลื่อนไปในทางที่มีความยาวคลื่นมากขึ้น และเมื่อ $v < o$ หรือแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกตจะได้ $\lambda_o < \lambda_E$ และ $\nu_o > \nu_E$ ดังนั้นคลื่นที่จะมีความยาวคลื่นเลื่อนไปทางสีน้ำเงิน (Blue Shift) หรือเลื่อนไปในทางที่มีความยาวคลื่นสั้นลง

จากสมการ (1.10) เราสามารถเขียนการเลื่อนของความยาวคลื่นได้เป็น

$$\begin{aligned}\triangle\lambda &= \lambda_o - \lambda_E \\ &= \frac{v}{c}\lambda_E\end{aligned}$$

หรือ

$$\frac{\triangle\lambda}{\lambda_E} = \frac{v}{c} \tag{1.12}$$

การเลื่อนของความยาวคลื่นจะมีเครื่องหมายบวก (+) เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ออกจากผู้สังเกตและมีเครื่องหมายลบ (–) เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกต

ตัวอย่างเช่น ถ้าเราสังเกตพบว่าแก๊สไฮโดรเจนในเนบิวลา (Nebula) สว่างแห่งหนึ่งแผ่รังสีวัดได้มีความยาวคลื่น 6565.2 A° แทนที่จะเป็น 6562.8 A° ซึ่งเป็นความยาวคลื่นของแสงไฮโดรเจนอัลฟา ($H\alpha$) ที่ได้จากการเปลี่ยนระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจนที่เราตรวจสอบได้ในห้องปฏิบัติการ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lambda_E &= 6562.8 \text{ A}^\circ \\ \triangle\lambda &= 6565.2 - 6562.8 \\ &= 2.4 \text{ A}^\circ\end{aligned}$$

จากสมการ (1.12)

$$\begin{aligned}v &= \left(\frac{\triangle\lambda}{\lambda_E}\right)c = \frac{2.4 \times 3 \times 10^{10}}{6562.8} \text{ ซม./วินาที} \\ &= 1.1 \times 10^7 \text{ ซม./วินาที} \\ &= 110 \text{ กม./วินาที}\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าการเลื่อนของความยาวคลื่น ($\triangle\lambda$) มีเครื่องหมายเป็นบวก และความเร็ว v ก็มีเครื่องหมายเป็นบวก นั่นหมายความว่า เนบิวลานั้นกำลังเคลื่อนที่ถอยห่างออกไปจากโลกของเราด้วยความเร็ว 110 กิโลเมตรต่อวินาที

เมื่อความเร็ว v มีค่ามากขึ้นจนเข้าใกล้ความเร็วแสง c เราจะต้องใช้**ทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ (Einstein's Theory of Relativity)** ความเร็ว v ในที่นี้ก็คือความเร็วสัมพัทธ์ระหว่าง

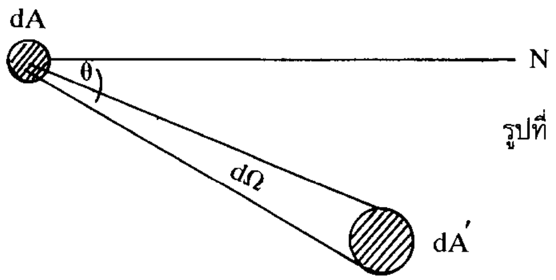
แหล่งกำเนิดคลื่นกับผู้สังเกต และสมการ (1.10) และ (1.11) กลายเป็น

$$\lambda_o = \lambda_E \left[\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

$$\nu_o = \nu_E \left[\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

1.3 การวัดพลังงานการแผ่รังสี

ความเป็นคลื่นและความเป็นอนุภาคของรังสีแม่เหล็กไฟฟ้ามักจะมีสมบัติที่ไม่ซ้ำกัน ยกเว้นความเข้มและฟลักซ์พลังงานซึ่งเป็นได้ทั้งสมบัติของคลื่นและสมบัติของอนุภาคโฟตอน ดังนั้นการวัดพลังงานการแผ่รังสีของแหล่งกำเนิดโดยทั่วไปจึงนิยมวัดเป็นความเข้มและฟลักซ์พลังงาน



รูปที่ 1.2 การกำหนดความเข้มจำเพาะของแสง

1.3.1 ความเข้มและฟลักซ์พลังงาน

จากรูป 1.2 dA คือหน่วยพื้นที่ซึ่งตั้งฉากกับ N และ dA′ คือหน่วยพื้นที่อีกอันหนึ่งซึ่งมีระยะมากกว่าเมื่อเทียบกับขนาดของ dA ต่อไปเราพิจารณาให้ dE เป็นปริมาณพลังงานการแผ่รังสีที่เคลื่อนที่ผ่านผิวของ dA ในหนึ่งวินาทีและมีทิศทางตรงไปยัง dA′ โดยที่ dA′ แปรโดยตรงกับ $dA\cos\theta$ ซึ่งเป็นเงาของพื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศทางของแสงเคลื่อนที่ไป และจะแปรโดยตรงกับมุมตันที่รองรับ dA ไว้ เมื่อเรามองจาก dA ตัวร่วมของการแปรตามก็คือความเข้มจำเพาะ (specific intensity) หรือเรียกเป็นความเข้มของสนามการแผ่รังสี กำหนดความเข้ม (I) คือพลังงานต่อหน่วยพื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของแสงต่อหน่วยเวลาและต่อหน่วยมุมตัน ดังนั้น

$$dE = I\,dA\cos\theta\,d\Omega \tag{1.15}$$

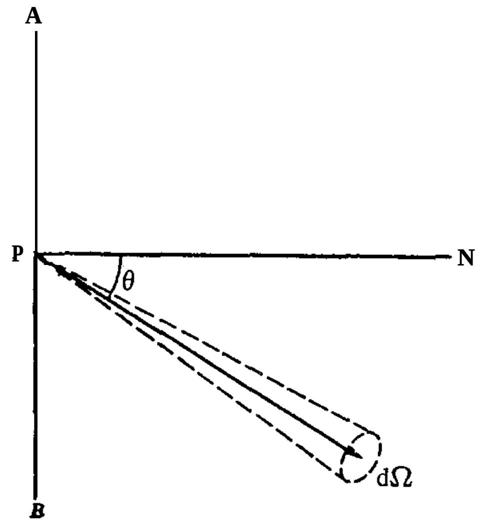
ความเข้ม I ในที่นี้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง ทิศทางและเวลา อีกปริมาณหนึ่งที่สัมพันธ์กันคือความเข้มเฉลี่ย J ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของ I กำหนดด้วย

$$J = \frac{\int I\,d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int I\,d\Omega \tag{1.16}$$

การอินทิเกรตเราต้องกระทำทุกทิศทาง โดยที่มุมตันมีค่าเป็น $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varnothing$ ดังนั้นความเข้มเฉลี่ยจึงกลายเป็น

$$J = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I \sin\theta d\theta d\varnothing \tag{1.17}$$

ให้สังเกตว่าถ้า I ไม่ขึ้นกับทิศทางเราสามารถนำออกนอกอินทิกราล ก็จะได้ผลลัพธ์ว่า J = I ซึ่งเป็นสนามการแผ่รังสีที่มีความเข้มไม่ขึ้นกับทิศทางใด ๆ เราเรียกว่า สมลักษณ์ (isotropic) สำหรับฟลักซ์พลังงาน F ที่จุดหนึ่งจุดใดในทิศทางที่กำหนดก็คือปริมาณสุทธิของพลังงานการแผ่รังสีที่เดินทางผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่ (วัดปริมาณพลังงานในทิศที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่) ในหนึ่งหน่วยเวลา



รูป 1.3 แสดงการหาฟลักซ์พลังงาน

จากรูป 1.3 P เป็นจุดอยู่บนผิว AB เมื่อมองตามขอบ PN เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวที่จุดนั้น ถ้า I คือความเข้มของการแผ่รังสีที่จุด P ในทิศทางของ $d\Omega$ ตามรูป ดังนั้นสมการ (1.15) ใช้บ่งบอกถึงการแผ่รังสีภายในมุมตันนี้ ทำให้ปริมาณ $I\cos\theta d\Omega$ คือพลังงานที่ไหลผ่านผิว AB ต่อหน่วยพื้นที่ต่อหน่วยเวลา ฟลักซ์พลังงานในทิศทางของ PN หาได้โดยอินทิเกรตค่านี้ตลอดทิศทางทั้งหมด เราได้

$$F = \int I \cos\theta d\Omega \tag{1.18}$$

ถ้าเราให้ทิศทาง PN สอดคล้องกับแกน z ดังนั้นมุม θ ของสมการ (1.18) จะเป็นมุมเดียวกับมุมในสมการ (1.15) ดังนั้น

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I \cos\theta \sin\theta d\theta d\varnothing \quad (1.19)$$

กำหนดให้ $\mu = \cos\theta$ ดังนั้นสมการ (1.19) เขียนใหม่เป็น

$$F = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} I \mu d\mu d\varnothing \quad (1.20)$$

ให้สังเกตว่าฟลักซ์พลังงานก็คืออัตราสุทธิของการถ่ายเทพลังงานในทิศทางที่กำหนด สำหรับในสนามการแผ่รังสีสมลักษณ์ซึ่งความเข้ม I ไม่ขึ้นกับทิศทาง ฟลักซ์พลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์

พิจารณาผิวธรรมดาใด ๆ dA ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางของ $d\Omega$ พลังงานที่ผ่านผิวนี้ไปในช่วงเวลา dt และจำกัดเขตอยู่ภายในมุมตัน $d\Omega$ คือ $IdAd\Omega dt$ พลังงานปริมาณนี้บรรจุอยู่ในทรงกระบอกของพื้นที่ภาคตัดขวาง dA และยาวเป็น cdt เมื่อ c คือความเร็วของแสง ดังนั้น $Id\Omega/c$ ก็คือพลังงานต่อหน่วยปริมาตร และความหนาแน่นพลังงานทั้งหมด ρ หาได้โดยอินทิเกรตค่านี้ตลอดทุกทิศทาง

$$\rho = \frac{1}{c}\int I\, d\Omega = \frac{4\pi}{c} J \quad (1.21)$$

ปริมาณทั้งหมดที่เราได้พิจารณาข้างต้นนี้จนถึงพลังงานทั้งหมด เราพิจารณาจากคลื่นต่าง ๆ ของทุกความยาวคลื่นหรือทุกความถี่ แต่เราสนใจว่าจะเกิดอะไรขึ้นสำหรับความยาวคลื่นเดี่ยวเฉพาะและปริมาณที่ขึ้นกับความยาวคลื่น อย่างไรก็ตามเราไม่สามารถพิจารณาความเข้มแสงที่ความยาวคลื่นเดียวเฉพาะโดยตรง เพราะว่าไม่สามารถแยกความยาวคลื่นเดียวออกจากความยาวคลื่นทั้งหมดได้อย่างสมบูรณ์ ในทางปฏิบัติยังคงต้องเกี่ยวข้องกับจำนวนของคลื่น ซึ่งครอบคลุมช่วงของความยาวคลื่นข้างเคียงกับความยาวคลื่นที่เราสนใจเสมอ ดังนั้นความเข้มเอกรงค์ I_λ จึงกำหนดเป็นความเข้มต่อหน่วยช่วงความยาวคลื่น นั่นคือ $I_\lambda d\lambda$ คือ ความเข้มเนื่องจากคลื่นทั้งหมดที่มีความยาวคลื่นในช่วงระหว่าง λ และ $\lambda + d\lambda$ ซึ่งเป็นปริมาณที่มีความสำคัญในทางฟิสิกส์ ในทำนองเดียวกันเราสามารถกำหนดความเข้มเอกรงค์ต่อหน่วยช่วงความถี่ I_ν ในลักษณะเดียวกัน

ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มเอกรงค์ทั้งสองได้จากความสัมพันธ์ที่แตกต่างกันระหว่างความยาวคลื่นและความถี่ เมื่อ $\lambda = c/\nu$ ช่วงกว้างความยาวคลื่น $d\lambda$ สอดคล้องกับช่วงกว้างความถี่ $d\nu$ ด้วย $d\lambda = -c\nu^{-2}d\nu$ เครื่องหมายลบหมายถึง ความยาวคลื่นเพิ่มขึ้นในขณะที่ความถี่ลดลงเท่านั้น ดังนั้นเราได้ว่า

$$I_\nu = I_\lambda \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{c}{\nu^2} I_\lambda = \frac{\lambda^2}{c} I_\lambda \quad (1.22)$$

ความเข้มเนื่องจากความยาวคลื่นทั้งหมดหรือความถี่ทั้งหมด ได้จากการอินทิเกรตความเข้มเอกรงค์ ซึ่งกำหนดด้วย

$$I = \int_0^{\infty} I_\lambda d\lambda = \int_0^{\infty} I_\nu d\nu \tag{1.23}$$

ปริมาณเอกรงค์อื่น ๆ เช่น ความเข้มเฉลี่ย ฟลักซ์พลังงานและความหนาแน่นพลังงาน จะมีความสัมพันธ์เช่นเดียวกับค่าความเข้มเอกรงค์ข้างต้น

หน่วยของความเข้มเอกรงค์จะเป็น เอิร์ก/ซม ^{2}/วินาที/เฮิรตซ์/สเตอร์ กำหนดให้ความสว่างหรือสภาพส่องสว่าง L เป็นกำลังทั้งหมดที่ถูกส่งออกจากดาวทรงกลมที่มีพื้นที่ผิวเป็น A ดังนั้น

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{A} I_\nu \, dA d\nu d\Omega \\ &= 4\pi A \int_0^{\infty} I_\nu \, d\nu \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.3.2 ความสัมพันธ์กับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

พิจารณาคลื่นแสงขบวนหนึ่งเคลื่อนที่ในทิศทางตามแกน z เนื่องจากธรรมชาติของคลื่นตามขวางของคลื่นแสง สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง x และ y ที่สัมพันธ์กับคลื่นแสงนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \sin(kz-\omega t-\delta_1) \quad ; \quad & E_y &= E_{y0} \sin(kz-\omega t-\delta_2) \\ B_y &= B_{y0} \sin(kz-\omega t-\delta_1) \quad ; \quad & B_x &= B_{x0} \sin(kz-\omega t-\delta_2) \end{aligned} \tag{1.25}$$

ในที่นี้ E_x และ B_x เป็นองค์ประกอบตาม x ในสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ และมี E_{x0} และ B_{x0} เป็นอัมปลิจูดของสนามเหล่านี้ สำหรับองค์ประกอบตาม y จะมีลักษณะเช่นเดียวกัน k และ ω มีความสัมพันธ์กับความยาวคลื่นและความถี่ของคลื่น ดังนี้ $k = 2\pi/\lambda$ และ $\omega = 2\pi\nu$ δ เรียกว่าค่าคงที่เฟสและสามารถพิจารณาจากขนาดของสนามที่เคลื่อนที่ไปตามค่าของ z และ t ที่กำหนด ให้สังเกตว่าองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าเป็นเช่นเดียวกับองค์ประกอบตั้งฉากของสนามแม่เหล็กที่มีค่าคงที่เฟสเท่ากัน จากทฤษฎีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้บ่งบอกว่าอัมปลิจูดขององค์ประกอบตั้งฉากเหล่านี้จะมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ถ้าคิดในหน่วยเกาส์เชียนและสสารมีความหนาแน่นไม่มากนัก ดังนั้น

$$B_{y0} = E_{x0} \qquad \text{และ} \qquad B_{x0} = -E_{y0} \tag{1.26}$$

สมการ (1.25) เรียกเป็นคลื่นระนาบถ้าสนามเป็นค่าคงที่บนระนาบซึ่งตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่ แต่ถ้าอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของคลื่นมีค่าคงที่หรือมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยในลักษณะว่า

$$\frac{E_{x0}}{E_{y0}} = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{และ} \qquad \delta_1 - \delta_2 = \text{ค่าคงที่} \tag{1.27}$$

ดังนั้นคลื่นนี้เราเรียกว่าเป็นโปลาไรซ์ และถ้ามันเปลี่ยนแปลงในทางที่ E_{x0} ไม่ขึ้นกับ E_{y0} และเป็นเช่นเดียวกันสำหรับ δ_1 และ δ_2 ดังนั้นคลื่นจะไม่เป็นโปลาไรซ์

พลังงานการแผ่รังสีต่อหน่วยปริมาตรของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะเท่ากับสนามยกกำลังสองหารด้วย 8π ดังนั้นความหนาแน่นพลังงานของสนามในสมการ (1.25) คือ

$$\rho_E = \rho_B = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + E_y^2) \tag{1.28}$$

ค่าเฉลี่ยของความหนาแน่นพลังงานทั้งหมดเราสามารถหาได้โดย กำหนดให้ค่าเฉลี่ยตามเวลาของพจน์ $\sin^2$ ตลอดหนึ่งรอบมีค่าเป็น 1/2 ดังนั้น

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_E + \bar{\rho}_B = \frac{E_o^2}{8\pi} \tag{1.29}$$

เมื่อ

$$E_0^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 \tag{1.30}$$

ถ้าอัมปลิจูด E_{x0} และ E_{y0} มีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยตามเวลา ค่าเฉลี่ยของกำลังสองจะปรากฏในสมการ (1.30)

พลังงานที่บรรจุอยู่ในปริมาตรสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่ภาคตัดขวาง A และยาว S ของคลื่นดังกล่าวข้างต้นเป็น $(ASE_0^2/8\pi)$ ถ้า S ชี้ไปตามทิศทางของคลื่นเคลื่อนที่ไป (แกน z) ปริมาณพลังงานนี้ไหลผ่านพื้นที่ A ในช่วงเวลา S/C ดังนั้น ฟลักซ์พลังงานของคลื่นนี้ในทิศทางของการเคลื่อนที่คือ

$$F = \frac{c}{8\pi}E_0^2 \tag{1.31}$$

ถ้าเราพิจารณาคลื่นที่มีความยาวคลื่นเดียว อัมปลิจูดของคลื่นเราต้องกำหนดเป็นอัมปลิจูดต่อหน่วยช่วงความยาวคลื่น คือ $E_0(\lambda)\,d\lambda$ ใช้แทน E_0 ในสมการ (1.29) และ (1.31)

1.4 การแผ่รังสีวัตถุดำ

เป็นที่รู้จักกันดีว่าวัตถุใด ๆ จะแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าบางอย่างก็ต่อเมื่อวัตถุนั้นร้อนและจะปล่อยรังสีมากขึ้นเมื่อมันร้อนยิ่งขึ้น เมื่อมีแสงส่องกระทบกับวัตถุนั้นหมายถึงช่วยให้วัตถุร้อนขึ้นทำให้มันแผ่รังสีขึ้นมาด้วยตัวของมันเอง รังสีที่วัตถุปล่อยออกมาเราไม่ได้รวมถึงรังสีที่มาจากการกระเจิงหรือการสะท้อนจากทิศทางอื่น ตัวอย่างเช่น อาคารซึ่งเรามองเห็นได้ก็เพราะเนื่องจากการสะท้อนของแสงอาทิตย์มิใช่เกิดจากการแผ่รังสีของตัวมันเอง

ถ้าเราฉายรังสีบนวัตถุจากทุกทิศทางและถ้ารังสีนี้มีธรรมชาติเช่นเดียวกับรังสีที่วัตถุปล่อยออกมา (คือ I_λ เดียวกันสำหรับ λ ทั้งหมด) และเมื่อวัตถุมีเวลาเพียงพอเคยชินกับสิ่งแวดล้อมนี้แล้ว เราเรียกวัตถุซึ่งบรรลุสถานะพิเศษนี้ว่า อยู่ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัต (thermodynamic equilibrium) ในธรรมชาติจะไม่มีวัตถุใด ๆ อยู่ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตอย่างสมบูรณ์ที่แท้จริง อย่างมากก็เพียงแค่ใกล้เคียงเท่านั้น วัตถุที่

รักษาให้อยู่ภายในรั้วแอเดียแบติก (adiabatic enclosure) กล่าวคือวัตถุที่ไม่ยอมให้พลังงานใด ๆ ผ่านกำแพงของมันจะกลายเป็นสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตได้ และรั้วเกือบจะแอเดีย-แบติกนั้นทำได้จริง สมบัติของสสารและการแผ่รังสีสามารถพิจารณาได้ง่ายเมื่อเงื่อนไขความสมดุลทางอุณหพลวัตเป็นจริง ดังนั้นขั้นตอนแรกที่จะเข้าใจสมบัติเหล่านี้ได้ดีก็คือการศึกษาเงื่อนไขความสมดุลทางอุณหพลวัตนั่นเอง

ความเข้มของรังสีซึ่งวัตถุในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตปล่อยออกมาขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของวัตถุและความยาวคลื่นของรังสีเท่ากัน มันไม่ขึ้นกับขนาด รูปร่างหรือส่วน-ประกอบของวัตถุแต่อย่างไร นี่เป็น**กฎของเคิร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's law)** อย่างหนึ่ง ซึ่งตามปกติอธิบายในพจน์ของสมบัติการดูดกลืนและการปลดปล่อยรังสีของสสาร เคิร์ชฮอฟฟ์พบว่าวัตถุดูดกลืน (มากกว่าการสะท้อนและการส่งผ่าน) รังสีเกือบทั้งหมดที่ตกกระทบมันและปล่อยออกมาเท่ากันด้วย ถ้ามันอยู่ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัต เมื่อวัตถุนั้นปรากฏเป็น "ดำ" ถ้าอุณหภูมิของมันต่ำเพียงพอที่จะปล่อยแสงที่มองเห็นได้ออกมาเพียงเล็กน้อย โดยทั่วไปการแผ่รังสีของวัตถุในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตเราเรียกว่า การแผ่รังสีวัตถุดำ

กฎการแผ่รังสีของพลังค์

มักซ์พลังค์ได้แสดงความเข้มของการแผ่รังสีวัตถุดำซึ่งหาได้จากทฤษฎีในรูปของการแผ่รังสีความสมดุลทางอุณหพลวัต โดยกำหนดด้วย B(T) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ T สำหรับความเข้มเอกรงค์ที่ปล่อยออกมาจากวัตถุดำ มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$B\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/KT}-1} \quad \text{หรือ} \quad B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda KT}-1} \tag{1.32}$$

ในที่นี้ h คือค่าคงที่ของพลังค์ (6.63×10^{-27} เอิร์กวินาที) c คือความเร็วแสงในสุญญากาศ (3×10^{10} ซม/วินาที และ K คือค่าคงที่โบลต์ซมันน์ (1.38×10^{-16} เอิร์กต่อเคลวิน) เมื่อเราแทนค่าคงที่เหล่านี้ลงในสมการ (1.32) เราจะได้ว่า

$$B_\nu(T) = \frac{1.47 \times 10^{-47}\,\nu^3}{e^{(4.799 \times 10^{-11}\nu)/T}-1} \quad \text{และ} \quad B_\lambda(T) = \frac{1.191 \times 10^{-5}\lambda^{-5}}{e^{(1.439/\lambda T)}-1} \tag{1.33}$$

ในสมการ (1.33) ν วัดเป็นวินาที$^{-1}$ λ เป็นเซนติเมตร และ T เป็น องศาเคลวิน ($^\circ$K) หน่วยของ $B_\lambda(T)$ เป็นเอิร์ก (ซม.)$^{-2}$ (วินาที)$^{-1}$ (สเตอร์)$^{-1}$ ต่อช่วงยาวคลื่นของหนึ่งเซนติเมตร ซึ่งเป็นเช่นเดียวกับ $B_\nu(T)$ มีหน่วยเป็น เอิร์ก (ซม)$^{-3}$ (วินาที)$^{-1}$ (สเตอร์)$^{-1}$ ต่อช่วงความถี่ของหนึ่ง (วินาที)$^{-1}$ นั่นคือ เอิร์ก (ซม)$^{-2}$ (สเตอร์)$^{-1}$ สตีเรเดียน (steradian) ไม่มีมิติทางกายภาพ แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้มในที่นี้เราหมายถึงความเข้มและฟลักซ์พลังงานต่างมี

มิติทางกายภาพ ดังนั้นจึงเป็นการดีที่เราจะนึกในใจว่าเป็นความเข้มต่อหน่วยสตีเรเดียนไปพร้อมกัน

สมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของความสมดุลทางอุณหพลวัตก็คือ สนามการแผ่รังสีมีค่าเท่ากันทุก ๆ จุดและทุกทิศทาง หมายความว่าความเข้มเฉลี่ยมีค่าเท่ากับฟังก์ชันของพลังค์ด้วย และฟลักซ์พลังงานในทิศทางใด ๆ เป็นศูนย์เนื่องจากไม่มีการถ่ายเทพลังงานใด ๆ จึงเป็นการดีกว่าเมื่อเราจะพิจารณาเพียงฟลักซ์พลังงานบางส่วนเข้าไปในครึ่งทางกลม โดยละทิ้งปริมาณที่เท่ากันชี้ไปในทิศทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนด F^+ ให้เป็นฟลักซ์บางส่วน และ θ วัดจากทิศทางภายนอก ดังนั้นสมการ (1.19) กลายเป็น

$$F_\lambda^+ = \int_0^{2\pi} d\varnothing \int_0^{\pi/2} d\theta I_\lambda \cos\theta \sin\theta \qquad (1.34)$$

ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตความเข้มมีค่าเท่ากับฟังก์ชันของพลังค์ซึ่งไม่ขึ้นกับทิศทางใด ๆ ดังนั้น

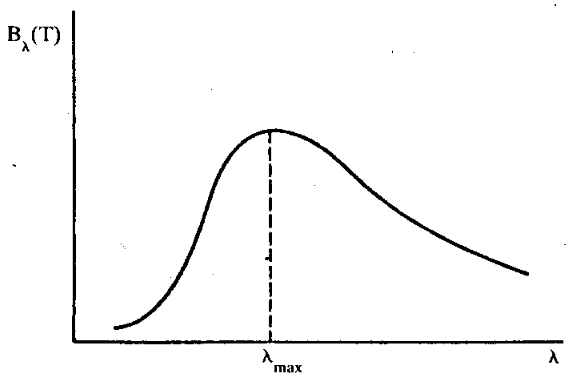
$$F_\lambda^+ \text{ (วัตถุดำ)} = \pi B_\lambda(T) \qquad (1.35)$$

ซึ่งเป็นอัตราพลังงานต่อหนึ่งความยาวคลื่นหนีออกมาจากวัตถุดำในหนึ่งหน่วยพื้นที่ จากสมการ (1.21) และ (1.32) เราจะได้ว่าความหนาแน่นพลังงานเอกรงค์ของการแผ่รังสีวัตถุดำกำหนดด้วย

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/KT}-1} \qquad \text{และ} \qquad \rho_\lambda = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda KT}-1} \qquad (1.36)$$

หน่วยของ ρ_ν คือ เอิร์ก (ซม)$^{-3}$ วินาที และหน่วยของ ρ_λ คือ เอิร์ก (ซม)$^{-4}$ ในบางครั้งนักฟิสิกส์นิยมใช้หน่วยของความหนาแน่นพลังงานในสมการ (1.36) มากกว่านักดาราศาสตร์ใช้ปริมาณในสมการ (1.32)

ถ้าเราเขียนเส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $B_\lambda(T)$ และ λ จะได้ดังแสดงในรูป 1.4



รูป 1.4 แสดงการแผ่รังสีของวัตถุดำตามกฎของพลังค์ด้วยเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่าง $B_\lambda(T)$ และ λ

จากรูป 1.4 จะเห็นได้ว่าเส้นโค้งสูงขึ้นถึงค่ามากที่สุดหลังจากนั้นตกลงเมื่อ λ เป็นค่าใหญ่มาก เส้นโค้งมีค่าลดลงสู่ศูนย์สำหรับทั้งค่า λ ใหญ่มากและค่าน้อย ๆ และสำหรับการเขียนเส้นโค้งของ $B_\nu(T)$ เปรียบเทียบกับ ν ก็จะมีลักษณะเดียวกัน

ความสูงของเส้นโค้งและความยาวคลื่นหรือความถี่ของค่ามากที่สุดนั้นเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ ค่ามากที่สุดของฟังก์ชันพลังค์สามารถหาได้โดยกำหนดให้อนุพันธ์ของมันเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าเราคำนวณ $dB_\lambda/d\lambda$ จากสมการ (1.32) และกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ เราจะพบว่า

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 5$$

เมื่อ $x = hc/\lambda KT$ เราได้คำตอบคือ $x = 4.965$ และค่านี้สอดคล้องกับความยาวคลื่นค่ามากที่สุด λ_{max} สำหรับ B_λ เป็นค่ามากที่สุดเราจะได้ว่า

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4.965K} = 0.290 \text{ ซม.องศาเคลวิน} \tag{1.37}$$

ที่อุณหภูมิห้อง T ประมาณ 300 K เราได้ λ_{max} มีค่าประมาณ 10^{-3} ซม. = 10^5 A° ซึ่งอยู่ในช่วงอินฟราเรด ถ้าสายตาของคนเรามีความไวต่อความยาวคลื่นช่วงนี้เวลากลางคืนในฤดูร้อนจะปรากฏไม่มืดนัก ที่อุณหภูมิสูงกว่า λ_{max} จะมีค่าสั้นลงจนในที่สุดเข้าใกล้ช่วงความยาวคลื่นแสงที่มองเห็นได้ในขณะที่ T เพิ่มสูงขึ้น สีที่ปรากฏจะค่อยเปลี่ยนจากดำไปเป็นแดงเข้ม สีส้ม ไปเป็นสีเหลืองแล้วเปลี่ยนไปเป็นสีขาว และในที่สุดกลายเป็นสีขาวแกมน้ำเงินอ่อน สมการ (1.37) เป็นสมการที่รู้จักกันดีว่าคือ**กฎการขจัดของวีน (Wien)** และเป็นสมการที่ช่วยให้เราเข้าใจการปรากฏเป็นสีของวัตถุดำ

ถ้าเราพิจารณาใช้กับความถี่แทนที่จะเป็นความยาวคลื่น เราจะพบว่าเงื่อนไขสำหรับ B_ν ที่มีค่ามากที่สุด คือ

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 3$$

เมื่อ $x = h\nu/KT$ และคำตอบก็คือ $x = 2.821$ ดังนั้นความถี่สำหรับ B_ν มีค่ามากที่สุดจะสอดคล้องกับสมการ

$$h\nu_{max} = 2.821 \, KT \tag{1.38}$$

ให้สังเกตว่าความยาวคลื่น สำหรับ B_ν มีค่ามากที่สุดแตกต่างกันอย่างมากจากค่าความยาวคลื่นสำหรับ B_λ มากที่สุด มันไม่ใช่ว่า B_ν หรือ B_λ สำคัญกว่ากันแต่เป็นทั้ง $B_\nu d\nu$ หรือ $B_\lambda d\lambda$ หรือพร้อมทั้งอินทิกราลของค่าเหล่านั้นตลอดช่วงจำกัดช่วงหนึ่งสำคัญพอกัน

มีการประมาณสองอย่างซึ่งมีประโยชน์ใช้กับฟังก์ชั่นของพลังค์ ก็คือ ถ้า $x = h\nu/KT = hc/\lambda KT$ เป็นค่ามาก ดังนั้น e^x จะมีค่ามากกว่า 1 มาก ๆ และค่าลบหนึ่งในสมการ (1.32) เราสามารถละทิ้งได้ ดังนั้นเราจะได้

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/KT}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda KT} \qquad \frac{h\nu}{KT} = \frac{hc}{\lambda KT} >> 1 \qquad (1.39)$$

ซึ่งเป็นสมการที่เรียกว่าการแจกแจง วีน (Wien distribution) และมันเป็นจริงสำหรับความยาวคลื่นสั้น ๆ (ความถี่สูง) ถ้าอุณหภูมิไม่สูงมากนัก

การประมาณอีกอย่างหนึ่งก็คือ ถ้า x มีค่าน้อย ๆ ดังนั้น $e^x = 1 + x$ แทนค่านี้ลงในสมการ (1.32) เราจะได้ว่า

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2 KT}{c^2}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2cKT}{\lambda^4} \qquad \frac{h\nu}{KT} = \frac{hc}{\lambda KT} << 1 \qquad (1.40)$$

สมการนี้เรียกว่า **การแจกแจงเรย์ลี-จีนส์ (Rayleigh-Jeans distribution)** และสมการนี้ยังคงใช้ได้กับความยาวคลื่นยาวมาก ๆ (ความถี่ต่ำ) สำหรับอุณหภูมิไม่ต่ำมากนัก

การแผ่รังสีความเข้มในทุกความยาวคลื่นหรือทุกความถี่ของวัตถุดำ เราสามารถหาได้โดยอินทิเกรต B_λ ตลอดทุกค่าของ λ (หรือตลอดทุกค่าของ ν) และแทนค่า $x = h\nu/KT$ จะให้เป็น

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = \frac{2K^4T^4}{h^3c^2}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} \qquad (1.41)$$

พจน์ในอินทิกราลหลังจากอินทิเกรตออกมาแล้วจะมีค่าเป็น $\pi^4/15$ ดังนั้น

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \qquad (1.42)$$

เมื่อ $\sigma = \dfrac{2\pi^5K^4}{15h^3c^2} = 5.67 \times 10^{-5}$ เอิร์ก ซม $^{-2}$ วินาที $^{-1}$ เคลวิล $^{-4}$

σ เราเรียกว่าค่าคงที่การแผ่รังสีซเตฟาน-โบลต์ซมันน์ **(stefan-Boltzmann constant)** ค่าคงที่การแผ่รังสีอีกค่าหนึ่งคือ $a = 4\sigma/c$ ซึ่งใช้กันบ่อยแทน σ การอินทิเกรตฟังก์ชันของพลังค์ $B(T)$ ซึ่งดูเหมือนมีความไวต่ออุณหภูมิก็คือพื้นที่ใต้เส้นโค้งอย่างง่ายของรูป 1.4

1.5 สเปกตรัมของสสาร

1.5.1 กฎของเคิร์ชฮอฟฟ์

หลังจากที่นิวตันได้แยกแสงสีขาวออกเป็นองค์ประกอบซึ่งเป็นคลื่นแสงของสีต่าง ๆ ด้วยแท่งแก้วปริซึมเรียกว่า สเปกตรัมแล้ว ต่อมาในปี ค.ศ. 1859 กุสตาฟเคิร์ชฮอฟฟ์ (Gustav Kirchhoff) ได้เสนอกฎสามข้อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกับวัตถุต้นกำเนิดแสงดังนี้

(1) ของแข็ง ของเหลว และแก๊สภายใต้ความดันสูง เมื่อเผาให้ร้อนจัดจนเปล่งแสงออกมาจะให้สเปกตรัมต่อเนื่อง (continuous spectrum) ซึ่งมีคลื่นแสงทุกขนาดความยาวคลื่น

(2) แก๊สภายใต้ความดันต่ำเมื่อทำให้ร้อนเพียงพอจะให้สเปกตรัมเส้นสว่าง ซึ่งประกอบด้วยรังสีที่มีความยาวคลื่นเฉพาะบางช่วง ความยาวคลื่นเหล่านี้จะบ่งบอกถึงคุณลักษณะของสารในแก๊ส

(3) ถ้าแสงจากแหล่งกำเนิดสเปกตรัมต่อเนื่องได้ผ่านแก๊สไป เส้นสเปกตรัมที่เกิดจากแก๊สจะรวมเข้ากับพื้นหลังของสเปกตรัมต่อเนื่องถ้าแก๊สร้อนกว่าแหล่งกำเนิด ผู้สังเกตจะเห็นสเปกตรัมเส้นสว่าง (ความเข้มมากกว่าพื้นหลังต่อเนื่องข้างเคียง) แต่ถ้าแก๊สเย็นกว่าแหล่งกำเนิด ผู้สังเกตจะเห็นสเปกตรัมดูดกลืนหรือเรียกเป็นสเปกตรัมเส้นมืด (ความเข้มน้อยกว่าพื้นหลังข้างเคียง) หรือสเปกตรัมเฟรานโฮเฟอร์ (Fraunhofer spectrum)

สเปกตรัมต่อเนื่องในข้อแรกจะเป็นการแผ่รังสีของวัตถุดำถ้าแหล่งกำเนิดอยู่ในความสมดุลทางอุณหพลวัต สำหรับสเปกตรัมที่กล่าวถึงในข้อสองและข้อสามนั้นเกิดขึ้นที่ความยาวคลื่นต่าง ๆ ซึ่งเราสามารถใช้บ่งบอกถึงคุณลักษณะของสสารในแก๊สและเป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์โครงสร้างทางเคมีของวัตถุทางดาราศาสตร์ ตามความเป็นจริงแล้วสเปกตรัมมีประโยชน์ต่อการศึกษาดาราศาสตร์ฟิสิกส์เป็นอย่างมาก เช่น ธาตุต่าง ๆ แต่ละธาตุจะมีชุดของสเปกตรัมไม่ซ้ำกัน โดยการเปรียบเทียบเส้นสเปกตรัมที่ทำได้ในห้องปฏิบัติการกับเส้นสเปกตรัมของดาว เราจะสามารถหาธาตุซึ่งเป็นองค์ประกอบของดาวได้ ดังนั้นเราจึงสนใจศึกษาสเปกตรัมโดยละเอียดต่อไป

ลักษณะส่วนใหญ่ของสเปกตรัมต่อเนื่องเราสามารถอธิบายได้โดยการวิเคราะห์การแผ่รังสีวัตถุดำของพลังค์ แต่เส้นสเปกตรัมสว่างและมืดการพิสูจน์ยังคงเป็นปริศนาอยู่ ยังไม่สามารถเข้าใจว่าทำไมการแผ่รังสีของอะตอมจึงต้องมีขีดจำกัดของความยาวคลื่นเป็นช่วง ๆ ค่าแน่นอน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1913 **นีลส์ โบร์ (Niels bohr)** ก็สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของสเปกตรัมอย่างง่ายของไฮโดรเจน โดยใช้ข้อสมมุติฐานของพลังค์ในสมการ (1.1) บวกด้วยข้อสมมุติของตัวเขาเองเพิ่มเข้าไป ซึ่งยังคงขัดกับฟิสิกส์แผนเดิมอยู่

1.5.2 ทฤษฎีอะตอมไฮโดรเจนของโบร์

ในปี ค.ศ. 1911 **รัทเทอร์ฟอร์ด (Rutherford)** ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับการกระเจิงบางอย่าง และได้เสนอว่าอะตอมประกอบด้วยศูนย์กลางเรียกว่านิวเคลียสเป็นส่วนที่หนักและมีประจุเป็นบวก ถูกล้อมรอบด้วยอิเล็กตรอนมีประจุเป็นลบและเบากว่ากันมาก ตามปกติอะตอมจะมีอิเล็กตรอนจำนวนเท่ากับจำนวนประจุไฟฟ้าบวกของนิวเคลียส ดังนั้นโดยปกติอะตอมจะอยู่ในฐานะเป็นกลางทางไฟฟ้า แต่ประจุไฟฟ้ามีแรงกระทำซึ่งกันและกัน ถ้า e_1 และ e_2 เป็นประจุไฟฟ้าทั้งสองวัดในหน่วยไฟฟ้าสถิต (esu) แรงที่กระทำต่อประจุทั้งสองในสุญญากาศกำหนดด้วย**กฎของคูลอมบ์ (Coulomb's law)** คือ

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2} \tag{1.43}$$

แรง F วัดเป็นไดน์ (dynes) และ r คือระยะห่างระหว่างประจุทั้งสองเป็นเซนติเมตร ถ้าประจุทั้งสองต่างกันแรงเป็นแรงดึงดูด และถ้าประจุทั้งสองเหมือนกันคือ เป็นชนิดเดียวกันแรงเป็นแรงผลัก

แรงคูลอมบ์จะทำให้อิเล็กตรอนทั้งหลายตกเข้าไปในนิวเคลียสถ้ามันไม่เคลื่อนที่ ดังนั้นอิเล็กตรอนต้องเคลื่อนที่รอบ ๆ นิวเคลียส สมการ (1.43) แสดงว่าขึ้นกับระยะทางเหมือนกับแรงโน้มถ่วง ดังนั้นถ้าฟิสิกส์แผนเดิมถูกต้องอิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ในวงโคจรเหมือนกับของมวลแห่งการโน้มถ่วง ถ้าแรงระหว่างอิเล็กตรอนที่ต่างกันสามารถละทิ้งได้ ดังนั้นวงโคจรของอิเล็กตรอนจะเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของเคเปลอร์ (Kepler's laws) เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของแรงระหว่างอิเล็กตรอนด้วยกัน อะตอมจะต้องสมมติให้มีอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียว นี่ก็คือสถานะปกติของอะตอมไฮโดรเจน แต่รูปแบบอื่นของอะตอมต่าง ๆ บางครั้งก็สามารถมีอิเล็กตรอนเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

ขณะที่อิเล็กตรอนกำลังเคลื่อนที่ในวงโคจรของมันจะมีความเร่งสู่นิวเคลียสของมันอย่างสม่ำเสมอ แต่ทางด้านฟิสิกส์แผนเดิมกล่าวว่าประจุไฟฟ้าที่มีความเร่งจะแผ่พลังงานรังสีออกมา ดังนั้นอิเล็กตรอนในวงโคจรจะสูญเสียพลังงานไปอย่างสม่ำเสมอและในที่สุดมันจะหมุนเป็นลักษณะบันไดวนเข้าสู่นิวเคลียส การยุบตัวเข้าไปในนิวเคลียสของอิเล็กตรอนนี้จะเกิดขึ้นเพียงเวลาสั้น ๆ เศษส่วนค่าน้อย ๆ ของวินาทีเท่านั้น ดังนั้นจึงเป็นปัญหาว่าอะตอมสามารถมีอิเล็กตรอนอยู่ในวงโคจรเดิมทั้งหมดได้อย่างไร? ทำไมอะตอมจึงไม่แผ่พลังงานรังสีออกมาตลอดเวลา?

จึงปรากฏว่าเป็นการล้มเหลวที่ใช้กับฟิสิกส์แผนเดิมเพื่ออธิบายเส้นสเปกตรัมเหล่านี้สัมพันธ์กับปรากฏการณ์ของอะตอม โบร์ได้ใช้ฟิสิกส์แผนเดิมมากเท่าที่สามารถทำได้ ดังนั้น

เขาจึงเพิ่มเติมข้อสมมุติบางอย่างเข้าไปตามความจำเป็นโดยไม่คำนึงถึงเหตุผล ในลักษณะเช่นนี้เขาได้แบบจำลองเอมพิริคัล (empirical model) ของอะตอมไฮโดรเจน และมันได้กลายเป็นพื้นฐานในการวิวัฒนาการวิชากลศาสตร์ควอนตัมในภายหลัง

โบร์สมมติว่าอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ในวงโคจรแน่นอนวงหนึ่ง โดยให้อิเล็กตรอนมีประจุ $(-e)$ เคลื่อนที่ในวงโคจรวงกลมรัศมี r รอบนิวเคลียสที่มีประจุ $(+ze)$ z คือเลขเชิงอะตอม (atomic number) ของนิวเคลียส เช่น $z = 1$ สำหรับอะตอมไฮโดรเจน $z = 2$ สำหรับอะตอมฮีเลียม เป็นต้น มวลใด ๆ ที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมวงหนึ่งจะมีความเร่งสู่ศูนย์กลางด้วยปริมาณ v^2/r ในที่นี้ v คืออัตราเร็วในวงโคจร ดังนั้นจากสมการ (1.43) เราได้ว่า

$$F = -\frac{ze^2}{r^2} = -\frac{mv^2}{r} \tag{1.44}$$

นั่นคือ $$mv^2r = ze^2 \tag{1.45}$$

เป็นความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของวงโคจรและอัตราเร็วในวงโคจร และ m คือมวลของอิเล็กตรอน

พลังงานของอะตอมประกอบด้วยสองส่วนคือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนและนิวเคลียสและพลังงานศักย์เนื่องจากแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนและนิวเคลียส เนื่องจากอิเล็กตรอนเบากว่ามีการเคลื่อนที่ในวงโคจรมากกว่านิวเคลียสซึ่งหนัก ดังนั้นพลังงานจลน์ทั้งหมดที่แท้จริงของอะตอมจึงเกิดจากอิเล็กตรอน และพลังงานจลน์ (KE) $= mv^2/2$ (ในทางปฏิบัติค่าที่ถูกต้องเราต้องคิดการเคลื่อนที่ของนิวเคลียสด้วยถึงแม้จะมีค่าน้อยแต่ไม่อาจละทิ้งได้)

พลังงานศักย์ (PE) ของอะตอมคือพลังงานที่ต้องการใช้ทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่จากจุดห่างไกลมาก ๆ มายังตำแหน่งปัจจุบันของมัน นั่นคือ

$$PE = -\int_{\infty}^{r} F\,dr \tag{1.46}$$

เครื่องหมายลบบ่งบอกว่างานที่กระทำตรงกันข้ามกับแรง F ของระบบเนื่องจากแรงคูลอมบ์ ดังนั้น

$$PE = -\frac{ze^2}{r} \tag{1.47}$$

พลังงานทั้งหมดของอะตอมเป็นผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ และด้วยความช่วยเหลือของสมการ (1.45) ดังนั้น

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ze^2}{r} = -\frac{ze^2}{2r} \tag{1.48}$$

เมื่อประจุทั้งสองอยู่ห่างกันมากจึงไม่มีอิทธิพลต่อกัน พลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์นี้ก็คือขีดจำกัดล่างของอินทิกรัลในสมการ (1.46) ซึ่งก็คือค่าอนันต์ นี่เป็นการนิยามอย่างสะดวกง่ายดายแต่มันไม่มีความหมายใดเลย สมบัติที่สำคัญของพลังงานศักย์ คือความ

แตกต่างของมันที่จุดสองจุดไม่ใช่ค่าที่แท้จริงที่จุดใด ๆ มันไม่มีนัยสำคัญว่า PE ในกรณีนี้เป็นค่าลบ แต่มันเป็นนัยสำคัญว่า PE เพิ่มขึ้นขณะที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ห่างออกไปจากนิวเคลียสแรงดึงดูดคูลอมบ์มักทำให้อิเล็กตรอนตกเข้าไปในนิวเคลียส และทำให้ PE มีค่าน้อยลง ถ้าอนุภาคทั้งสองมีประจุเหมือนกันคือเป็นบวกทั้งคู่หรือเป็นลบทั้งคู่ PE จะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับกรณีแรก แรงผลักจะทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ห่างจากกัน ค่าของ PE ก็จะลดลงเช่นเดียวกัน

สมการ (1.44) (1.45) และ (1.46) ใช้อธิบายการเคลื่อนที่เป็นวงกลมสมมุติของอิเล็กตรอนรอบนิวเคลียส ซึ่งเพียงแต่ใช้ฟิสิกส์แผนเดิมเท่านั้นมาตลอด แต่ความคิดนี้ต้องเปลี่ยนไปทันทีดังได้ที่อธิบายข้างต้น เราต้องสมมุติว่าอิเล็กตรอนไม่มีความจำเป็นต้องแผ่รังสีแม้ว่ามันมีความเร่งอย่างสม่ำเสมอก็ตาม ที่จุดนี้โบร์ได้ตั้งข้อสมมติอื่นอีกว่าอิเล็กตรอนไม่สามารถมีวงโคจรในขนาดใด ๆ หมายความว่ามันไม่สามารถมีพลังงานได้ทุกค่า แต่สามารถมีอยู่ได้เฉพาะในวงโคจรเหล่านั้นซึ่งโมเมนตัมเชิงมุมกำหนดด้วยเลขจำนวนเต็มบวกคูณกับ $h/2\pi$ ในที่นี้ h คือค่าคงที่ของพลังค์ ดูเหมือนว่ามันเป็นการสมมุติเทียมขึ้นมา กล่าวคือโบร์พบว่าจำเป็นต้องสมมุติเช่นนั้นเพื่อทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง เมื่อโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจรเชิงกลมเป็น mvr ดังนั้น

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (1.49)$$

เมื่อภายหลังวิชากลศาสตร์ควอนตัมได้กลายเป็นส่วนหนึ่งของวิชาฟิสิกส์ สมการ (1.49) ได้ทำให้การสมมุติใด ๆ หยุดลงไปและได้กลายเป็นส่วนหนึ่งเชิงตรรกวิทยาของทฤษฎีพื้นฐานมากมาย ตัวเลขจำนวนเต็ม n เรียกว่า เลขควอนตัม และสถานะของอะตอมที่สมบูรณ์สามารถพิจารณาได้จากค่าของมัน ตัวอย่างเช่นจากสมการ (1.45) และ (1.49) เราจะได้ว่า

$$mv^2r = \frac{1}{mr}(mvr)^2 = \frac{1}{mr}\left(\frac{nh}{2\pi}\right)^2 = ze^2 \qquad (1.50)$$

หรือ
$$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mze^2} = 0.529 \times 10^{-8}\, n^2 \text{ ซม.} \qquad (1.51)$$

รัศมีของวงโคจรโบร์ที่ n แปรโดยตรงกับ n^2 วงโคจรแรกของโบร์มีรัศมีประมาณ 0.5 A° และเป็นค่าหนึ่งหน่วยพื้นฐานของความยาวในวิชาฟิสิกส์อะตอม (atomic physics) ความเร็วในวงโคจรที่ n หาได้จากสมการ (1.49) และ (1.51) คือ

$$v_n = \frac{2\pi ze^2}{nh} \qquad (1.52)$$

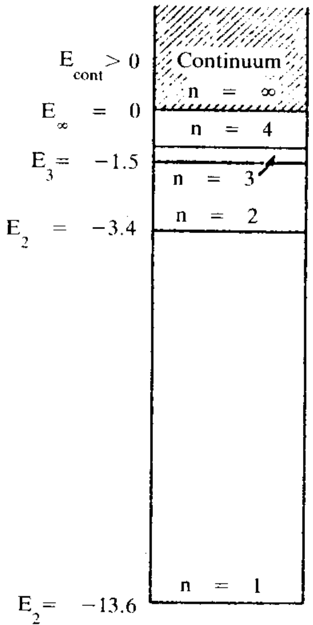
และพลังงาน E_n หาได้จากสมการ (1.48) และ (1.51) คือ

$$E_n = \frac{-2\pi^2mz^2e^4}{n^2h^2} = -13.6\frac{z^2}{n^2} \text{ อิเล็กตรอนโวลต์ (eV)} \qquad (1.53)$$

อิเล็กตรอนโวลต์เป็นหน่วยของพลังงานทั่วไปที่ใช้ในวิชาฟิสิกส์อะตอม หรือ eV เท่ากับ 1.6×10^{-12} เอิร์ก

สมการข้างบนได้บ่งบอกคุณลักษณะของวงโคจรที่เป็นไปได้ในพจน์ของเลขควอนตัม n กฎของโบร์ในสมการ (1.49) กล่าวว่ามีเพียงเซต (set) ไม่ต่อเนื่องแน่นอนชุดหนึ่งของพารา-มิเตอร์เหล่านี้เท่านั้นที่เป็นไปได้ ปริมาณเหล่านี้ได้กลายเป็นควอนตัมจึงมีความสำคัญที่จะสังเกตว่ากฎพิเศษเหล่านี้ใช้ได้กับกรณีเมื่ออิเล็กตรอนล้อมรอบนิวเคลียสไว้ ซึ่งก็คือกรณีเมื่อพลังงานทั้งหมดเป็นค่าลบ เมื่ออิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์เพียงพอที่จะทำให้เป็นอิสระและเคลื่อนที่ในวงโคจรแบบไฮเปอร์โบลา มันจะไม่มีการเป็นควอนตัมและยอมให้มีเซตต่อเนื่องของค่าพลังงานบวกใด ๆ ทุกค่า

สำหรับวงโคจร $n = 1$ จะมีพลังงานต่ำสุดที่เป็นไปได้ และเราเรียกค่านี้ว่าสถานะพื้น (ground state) สำหรับไฮโดรเจน $(z = 1)$ สถานะพื้นมีพลังงานเป็น -13.6 eV ในสเกลซึ่งมีพลังงานเป็นศูนย์สอดคล้องกับความเร็วหลุดพ้นของอิเล็กตรอน ดังนั้นอะตอมไฮโดรเจนในสถานะพื้นจะต้องได้รับพลังงานอย่างต่ำ 13.6 eV เพื่อทำให้มันกลายเป็นอิสระขั้นตอนที่ทำให้อิเล็กตรอนกลายเป็นอิสระเรียกว่าการแตกตัวเป็นไอออน (ionization) และพลังงานที่ต้องการใช้ทำให้อะตอมแตกตัวเป็นไอออนเรียกว่าพลังงานแห่งการแตกตัวเป็นไอออน (ionization potential) ของอะตอม



รูป 1.5 แสดงแผนภาพระดับพลังงานสำหรับไฮโดรเจน จะเห็นได้ว่าระดับพลังงานเป็นลบ อยู่ใกล้ชิดกันมากขึ้นขณะที่ n มีค่าโตขึ้นจนถึงขีดจำกัด $E = 0$ เมื่อ n กลายเป็นค่าอนันต์ หลังจากนั้นพลังงานมากขึ้นจะไม่กลายเป็นควอนตัม และเซตของค่าต่อเนื่องจะเป็นตัวบ่งชี้ค่าพลังงานที่ยอมให้มีได้

จากการที่โบร์ได้สมมุติว่าอะตอมจะไม่แผ่พลังงานรังสีเมื่อมันอยู่ในวงโคจรที่ยอมให้มีอยู่ได้วงหนึ่ง เขาได้ตั้งข้อสมมุติฐานต่อไปว่า ภายใต้สถานการณ์แน่นอนอันหนึ่งอิเล็กตรอนสามารถเปลี่ยนจากวงโคจรหนึ่งไปยังวงอื่น ๆ ที่เป็นไปได้ ซึ่งวงโคจรเหล่านี้สามารถเป็นได้ทั้งวงที่ถูกล้อม หรือเป็นอิสระ เมื่ออิเล็กตรอนกระโดดจากวงโคจรหนึ่งไปยังวงโคจรที่ต่ำกว่าอะตอมจะสูญเสียพลังงาน แต่เมื่อมันเปลี่ยนไปยังวงโคจรที่สูงกว่าอะตอมจะได้พลังงานเพิ่มขึ้น พลังงานที่เพิ่มขึ้นหรือสูญเสียไปอาจจะได้จากอะตอมข้างเคียงแต่ต้องอยู่ในรูปการแผ่รังสี หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเป็นไปได้สำหรับอิเล็กตรอนที่หล่นลงไปในวงโคจรที่ต่ำกว่าขณะที่ปลดปล่อยแสงออกมาจากอะตอม และมันเป็นไปได้สำหรับแสงผ่านเข้าไปใกล้อะตอมและถูกดูดกลืนไว้ในขณะที่อิเล็กตรอนกระโดดขึ้นไปยังวงโคจรที่สูงกว่า ในทั้งสองกรณีนี้พลังงานของแสงที่ถูกดูดกลืนหรือปล่อยออกมามีค่าเท่ากันอย่างแท้จริง และเท่ากับผลต่างของระดับพลังงานของอิเล็กตรอนที่กระโดดหรือมีการเปลี่ยนแปลง โบร์เห็นด้วยกับพลังค์ที่ว่าแสงประกอบด้วยยอนุภาคหรือโฟตอน และสมการ (1.1) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานของโฟตอนและความถี่ของมัน เมื่อไรก็ตามที่มีการเปลี่ยนแปลงจากระดับพลังงาน E ไปยังระดับพลังงาน E′ โดยการดูดกลืนหรือการปลดปล่อยของหนึ่งโฟตอน ดังนั้นโฟตอนนี้จะมีความถี่กำหนดด้วย

$$h\nu = |E - E'| \tag{1.54}$$

การเปลี่ยนแปลงมีได้สามแบบขึ้นอยู่กับทั้งระดับเริ่มต้นและระดับสุดท้ายเป็นระดับล้อมรอบหรือระดับอิสระ ในการเปลี่ยนแปลงแบบระดับล้อม-ระดับล้อม พลังงานของทั้งสองระดับสมนัยกับสมการ (1.53) ถ้า n และ n' เป็นเลขควอนตัมสองตัว ดังนั้น

$$\nu = \frac{2\pi^2 m z^2 e^4}{h^3} \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right| = 3.290 \times 10^{15} z^2 \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right| \tag{1.55}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (1.55) สมนัยกับเซตไม่ต่อเนื่องของความถี่คือเมื่อ n และ n' เป็นค่าจำนวนเต็มบวกที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงระดับล้อม-ระดับล้อมสมนัยกับเส้นการปล่อยและการดูดกลืนของกฎข้อสองและข้อสามของเคิร์ชฮอฟฟ์ การเปลี่ยนแปลงอีกสองแบบคือระดับล้อม-ระดับอิสระ-และระดับอิสระ-ระดับอิสระ ในกรณีแบบหลังระดับพลังงานของมันอย่างน้อยที่สุดอยู่ในระดับต่อเนื่อง และการเปลี่ยนแปลงของทั้งสองระดับจะให้เซตต่อเนื่องของความถี่ที่เป็นไปได้ทุกความถี่ จะเห็นได้ว่ากฎของเคิร์ชฮอฟฟ์ไม่ค่อยเหมาะสมกับกรณีทั่วไป ซึ่งมันไม่ได้เน้นถึงแก๊สความดันต่ำที่สามารถดูดกลืนและปลดปล่อยพลังงานต่อเนื่องเหล่านี้

แบบจำลองโบร์เดิมของอะตอมไฮโดรเจนให้การสอดคล้องกับสเปกตรัมไฮโดรเจนที่เราสังเกตได้ในห้องปฏิบัติการอย่างถูกต้อง มันไม่เพียงแต่ทำนายรูปแบบทั่วไปของสเปกตรัมเท่านั้น มันยังทำนายความยาวคลื่นหรือความถี่ได้ถูกต้องแน่นอน

พิจารณาสมการ (1.55) ขณะที่ n เราให้เป็นค่าคงที่แน่นอนค่าหนึ่ง และ n' เป็นค่าใด ๆ ที่เป็นไปได้โตกว่า n สำหรับ $n' = n + 1$ ความถี่ที่สมนัยกับผลต่างพลังงานระหว่างสองระดับข้างเคียง เมื่อ n' โตขึ้นผลต่างพลังงานมีค่าเพิ่มขึ้นแต่เพิ่มขึ้นด้วยปริมาณน้อยลง ที่ขอบเขตเมื่อ $n' \to \infty$ พลังงานถึงค่าที่ต้องการใช้ทำให้อะตอมแตกตัวเป็นไอออนจากระดับที่ n และความถี่ถึงค่าขีดจำกัดของมัน อนุกรมของการเปลี่ยนแปลงนี้จากค่า n ที่กำหนดถึงค่า n' ทั้งหมดที่โตกว่าใช้แทนเลขจำนวนอนันต์ของเส้นซึ่งอยู่ชิดกัน และชิดกันมากขึ้นเมื่อเข้าสู่ขีดจำกัดอนุกรม อนุกรมที่เริ่มด้วย n = 1 เรียกว่าอนุกรมไลแมน (Lyman series) และเส้นต่อเนื่องกันเหล่านั้นกำหนดด้วยอักษรของกรีก ดังนั้นเส้นที่ได้จากการเปลี่ยนแปลงเริ่มจาก n = 1 ถึง $n' = 2, 3, 4,$.......... จึงกำหนดด้วย L_α, L_β, L_r,..........เส้น L_α เป็นเส้นที่เข้มที่สุดในสเปกตรัมไฮโดรเจน แต่มันวางอยู่ในที่ห่างไกลจากอัลตราไวโอเลตคือที่ประมาณ 1215 A° เส้นไลแมนสูงขึ้นไปอยู่เบียดกันจนถึงขีดจำกัดไลแมนที่ 912 A°

อนุกรมไฮโดรเจนของเส้นที่มี n = 2 และ $n' \geq 3$ เรียกว่าอนุกรมบัลเมอร์ (Balmer serics) เนื่องจากมันเกิดในช่วงที่สังเกตเห็นได้ง่ายของสเปกตรัม และยังเป็นอนุกรมของเส้นที่เข้มมากภายใต้เงื่อนไขทางดาราศาสตร์มากมาย เส้นบัลเมอร์จึงมีความสำคัญมากที่สุดกับนักดาราศาสตร์ เส้นบัลเมอร์แต่ละเส้นกำหนดด้วยอักษร H และกำกับด้วยอักษรกรีก เช่น H_α ที่ 6563 A° เป็นเส้นที่เข้มที่สุด เส้นบัลเมอร์อื่น ๆ จะลู่เข้าจนถึงขีดจำกัดบัลเมอร์ที่ 3647 A° อนุกรมปาสเชน (Paschen serics) ประกอบด้วยเส้นการเปลี่ยนแปลงซึ่งระดับต่ำคือ n = 3 และขีดจำกัดอนุกรมของมันคือที่ 8206 A° เราจะเห็นได้ว่ามีเลขจำนวนของอนุกรมเหล่านี้เป็นอนันต์ แต่ละเส้นที่สูงกว่าต่างเลื่อนไปทางที่มีความยาวคลื่นยาวกว่าและความถี่น้อยกว่า

อะตอมโบร์มีที่ไม่สอดคล้องกันในหลายจุดตามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น มันได้จากการสมมุติอนุมูลบางอย่างซึ่งไม่เหมาะสมกับฟิสิกส์แผนเดิม และมีเพียงบางส่วนที่ให้เหตุผลได้ดีก็คือ มันดูเหมือนว่าทำได้และทำนายได้ถูกต้องเฉพาะสำหรับระบบหนึ่งอิเล็กตรอนเท่านั้น สำหรับอะตอมฮีเลียมปกติหรืออะตอมที่ยุ่งยากมากขึ้นการทำนายประสบความล้มเหลวจนกระทั่งมีการพัฒนาวิชากลศาสตร์ควอนตัมอย่างจริงจังในอีกสิบปีต่อมาโดยใช้อะตอมโบร์เป็นแนวความคิดหลักในการพัฒนา

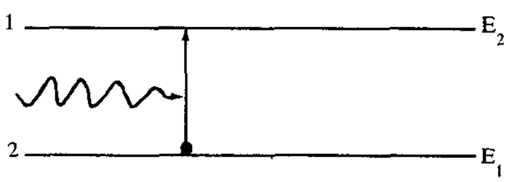
ในวิชากลศาสตร์ควอนตัมความคิดทั้งหมดของรูปแบบแผนเดิมของอะตอมถูกละทิ้งไป และข้อสมมุติฐานของโบร์ปรากฏเป็นส่วนเชิงตรรกศาสตร์ของทฤษฎีคงเส้นคงวา (self-consistent theory) ทฤษฎีของโบร์ยังคงเป็นแนวความคิดที่มีประโยชน์ช่วยให้เข้าใจปรากฏการณ์ของอะตอมต่าง ๆ มากมาย ถึงแม้ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนไปบ้าง ถ้าเราใช้รูปแบบนี้อย่างตรงไปตรงมามากเกินไป ความจริงที่เหลืออยู่ก็คือว่าเส้นสเปกตรัมที่เกิดขึ้นเนื่องจากสถานะพลังงานที่ล้อมรอบอยู่เป็นควอนตัม

1.6 การตื่นตัวและการแตกตัวเป็นไอออน

เราอาจจะมองรูปร่างของอะตอมประกอบด้วยนิวเคลียสที่มีประจุบวกถูกล้อมรอบด้วยอิเล็กตรอนทั้งหลายที่มีประจุลบ โดยที่อิเล็กตรอนจำนวนเหล่านี้ทำให้อะตอมเป็นกลางทางไฟฟ้า อย่างไรก็ตามมันอาจจะเกิดเหตุการณ์ขึ้นว่าอิเล็กตรอนหนึ่งตัวหรือมากกว่าบางครั้งได้รับพลังงานมากพอที่จะหนีออกจากนิวเคลียส กลายเป็นอิเล็กตรอนอิสระส่วนอะตอมกลายเป็นไอออนประจุบวก ขั้นตอนนี้เราเรียกว่าการแตกตัวเป็นไอออน (ionisation) และจำนวนครั้งที่อะตอมสามารถแตกตัวเป็นไอออนได้เท่ากับจำนวนอิเล็กตรอนในสภาวะปกติ อิเล็กตรอนซึ่งยังเหลือล้อมรอบอยู่กับนิวเคลียสจะต้องอยู่ในสถานะพลังงานที่เป็นไปได้ตามทฤษฎีของโบร์ สถานะพลังงาน ล้อมรอบต่ำสุดของอะตอมหรือไอออนเรียกว่าสถานะพื้น (ground state) และสถานะอื่น ๆ ทั้งหมดเรียกว่าสถานะตื่นตัว (excited state) สถานการณ์พลังงานของอะตอมจะต้องประกอบด้วยทั้งการแตกตัวเป็นไอออนและการตื่นตัวของอะตอม

1.6.1 การตื่นตัวและการคลายสภาพการตื่นตัว

อะตอมอาจถูกทำให้ตื่นตัวขึ้นไปสู่ระดับพลังงานสูงกว่าได้ 2 วิธี คือ โดยใช้รังสีและการชนกับอนุภาคอื่น การตื่นตัวโดยใช้รังสี (radiative excitation) เกิดขึ้นเมื่อมีรังสีแม่เหล็กไฟฟ้าเข้าไปในอะตอม และอะตอมดูดกลืนโฟตอนนั้นไว้ทำให้อะตอมมีระดับพลังงานสูงขึ้น ดูรูป 1.6 โดยอะตอมในระดับ 1 หลังจากดูดกลืนโฟตอนแล้วจะขึ้นไปยังระดับ 2 พลังงานของโฟตอนที่เข้าไปจะต้องมีค่าเท่ากับผลต่างของระดับพลังงานทั้งสองของอะตอม $(E_2 - E_1)$ วิธีการตื่นตัวนี้ทำให้เกิดเส้นมืดในสเปกตรัมของเทห์วัตถุต่าง ๆ



รูป 1.6 แสดงการดูดคลื่นโฟตอนของอะตอม

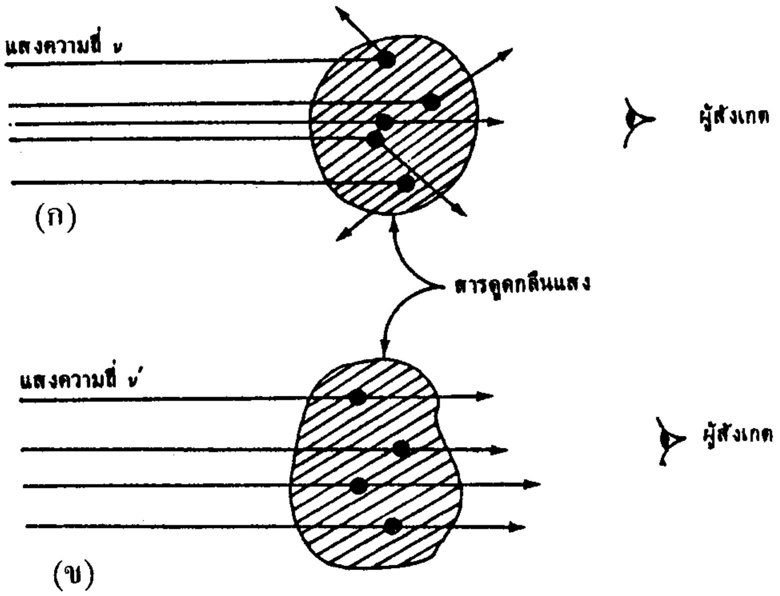
โดยปกติอะตอมที่ดูดกลืนโฟตอนไว้จะอยู่ในสภาพตื่นตัวเป็นเวลาสั้นมาก (ประมาณ 10^{-8} วินาที) หลังจากนั้นจะคายโฟตอนกลับคืนออกมาโดยลดระดับลงมายังระดับต่ำกว่า เมื่อเป็นเช่นนี้เส้นมืดในสเปกตรัมจะเกิดขึ้นได้อย่างไร? คำตอบก็คือ อะตอมเมื่อคายพลังงาน อิเล็กตรอนอาจตกกลับมาสู่ระดับพลังงานต่ำกว่าเป็นขั้น ๆ ก่อนที่จะมาถึงระดับพื้น ซึ่งเป็นระดับต่ำสุด ดังนั้นอะตอมจะคายโฟตอนที่มีพลังงานต่ำหลายตัวแทนที่จะเป็นตัวเดียว ซึ่งมีพลังงานเท่ากับโฟตอนที่ถูกดูดกลืนไป ดังนั้นโฟตอนที่คายออกมาจะมีความยาวคลื่นยาวกว่าโฟตอนที่ถูกดูดกลืน ทำให้แสงของสเปกตรัมที่ได้มีการขาดหายไปที่ความยาวคลื่นที่ถูกดูดกลืนนั้น นอกจากนั้นโฟตอนที่มีพลังงานเท่าเดิมถูกคายกลับออกมาจะเคลื่อนที่ไปได้ทุกทิศทาง ทำให้ผู้สังเกตเห็นโฟตอนน้อยลงกว่าที่เดินทางออกมาจากแหล่งกำเนิดโดยตรง ขณะเดียวกันจะเห็นโฟตอนที่มีความยาวคลื่นอื่น ๆ อยู่ครบ เป็นผลให้เกิดเส้นมืดในสเปกตรัม แต่เส้นมืดนี้ไม่ได้มีสีดำสนิททีเดียว เนื่องจากยังคงมีโฟตอนบางตัวเดินทางมาถึงผู้สังเกตได้บ้าง

การตื่นตัวโดยการชนเกิดขึ้นเมื่ออะตอมชนกับอนุภาคอื่น (เช่น อิเล็กตรอนหรืออะตอมตัวอื่น) แล้วดูดกลืนพลังงานจลน์บางส่วนของอนุภาคนั้นไว้ ถ้าอนุภาคมีอัตราเร็ว V_i ก่อนชนและอัตราเร็ว V_f หลังชน มันจะสูญเสียพลังงานไปเป็น

$$E = \frac{1}{2} m \left(V_i^2 - V_f^2\right) \qquad (1.56)$$

ถ้า E มีค่าเท่ากับพลังงานแห่งการตื่นตัวของอะตอมซึ่งทำให้อะตอมขึ้นไปสู่ระดับพลังงานสูงขึ้น เรากล่าวว่าอะตอมนั้นตื่นตัวโดยการชน ต่อมาเมื่ออะตอมที่ตื่นตัวกลับคืนสู่สถานะพื้นโดยคายโฟตอนออกมาทำให้เกิดเส้นสว่างในสเปกตรัม

ตามปกติอะตอมจะมีอันตรกิริยากับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสภาพแวดล้อมอยู่เสมอ อันตรกิริยานี้เป็นสาเหตุทำให้อะตอมที่ตื่นตัวตกกลับสู่ระดับพลังงานต่ำกว่าโดยใช้เวลาประมาณ 10^{-8} วินาที ในขณะเดียวกันอะตอมก็จะคายโฟตอนออกมา เราจึงเรียกกรรมวิธีนี้ว่า การคลายสภาพตื่นตัวโดยการแผ่รังสี นอกจากนี้การคลายสภาพตื่นตัวอาจเกิดขึ้นได้จากการชนของอะตอมกับอนุภาคอื่นแล้วทำให้อะตอมมีระดับพลังงานต่ำลง พลังงานที่หายไปจะกลายเป็นพลังงานจลน์เพิ่มขึ้นให้กับอะตอมและอนุภาคที่มาชนกัน เราเรียกกรรมวิธีนี้ว่า การคลายสภาพตื่นตัวโดยการชน



รูป 1.7 (ก) ถ้า $E\,(h\nu)$ เป็นพลังงานที่ใช้ทำให้อะตอมตื่นตัว อะตอมจะดูดกลืนโฟตอนที่มีความถี่ ν และโฟตอนที่คายกลับออกมาจะกระจัดกระจายไปทุกทิศทาง มีเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่เดินทางมาถึงผู้สังเกต (ข) โฟตอนที่มี $E' = h\nu'$ จะไม่ถูกดูดกลืนและเดินทางถึงผู้สังเกตได้ครบทุกโฟตอน

1.6.2 การแตกตัวเป็นไอออน

ในขั้นตอนการแตกตัวเป็นไอออนนั้นเมื่ออะตอมได้รับพลังงานสูงมากพอ อิเล็กตรอนสามารถหนีรอดออกจากนิวเคลียสกลายเป็นอิเล็กตรอนอิสระ เพื่อเป็นการบ่งบอกอะตอมที่แตกตัวเป็นไอออน โดยทั่วไปนิยมใช้เลขโรมันกำกับสัญลักษณ์ของอะตอม ตัวอย่าง เช่น อะตอมฮีเลียมที่เป็นกลางมักเขียนเป็น He I โดยมีอิเล็กตรอนล้อมรอบอยู่ 2 ตัว เมื่อมีอิเล็กตรอนสูญเสียไปหนึ่งตัวคืออะตอมฮีเลียมได้แตกตัวเป็นไอออนหนึ่งครั้ง จะเขียนเป็น He II และถ้าอะตอมฮีเลียมสูญเสียอิเล็กตรอนไปทั้งสองตัวเป็นการแตกตัวเป็นไอออนสองครั้งเขียนได้เป็น He III เป็นต้น

พลังงานที่ทำให้อะตอมแตกตัวเป็นไอออนจะขึ้นอยู่กับ (1) สภาพไอออนของอะตอม (2) อิเล็กตรอนตัวไหนที่จะถูกชนให้หลุดออกจากอะตอม และ (3) ระดับตื่นตัวของอิเล็กตรอนตัวนั้น อย่างเช่นอิเล็กตรอนที่อยู่ในสถานพื้น $(n = 1)$ ของอะตอมไฮโดรเจนจะหลุดออกจากอะตอมถ้าได้รับพลังงาน $E \geq 13.6$ eV แต่ถ้าอิเล็กตรอนอยู่ในสถานะตื่นตัวที่ 1 $(n = 2)$ มันจะต้องได้รับพลังงานเป็น

$$E \geq E(\infty) - E(2) \quad eV \tag{1.57}$$

$$\geq 13.6 - 13.6\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \quad eV$$

$$\geq 13.6 - 10.2 \quad eV$$

$$\geq 3.4 \quad eV$$

จึงจะหลุดออกจากอะตอม โดยทั่วไปพลังงานแห่งการแตกตัวเป็นไอออน (ionization potential) IP ของอิเล็กตรอนในระดับพลังงาน n ใด ๆ ของอะตอมไฮโดรเจนสามารถเขียนได้เป็น

$$IP = E(\infty) - E(n)$$

$$= \frac{13.6}{n^2} \quad eV \tag{1.58}$$

ผลต่างระหว่างพลังงานที่อะตอมได้รับ (E) กับพลังงานแห่งการแตกตัวเป็นไอออน (IP) หรือ (E−IP) จะกลายเป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

การแตกตัวเป็นไอออนของอะตอมโดยดูดกลืนโฟตอนทำให้เกิดส่วนมืดต่อเนื่อง (absorption continuum) ในสเปกตรัม เช่น อะตอมของไฮโดรเจนในสถานะพื้นจะดูดกลืนโฟตอนที่มีความยาวคลื่นแน่นอนอันหนึ่งทำให้เกิดเป็นเส้นมืดอนุกรมไลแมน แต่เส้นมืดอนุกรมไลแมนจะสิ้นสุดลงที่ 912 A° ที่ความยาวคลื่นสั้นกว่านี้เราจะได้ส่วนมืดต่อเนื่อง ซึ่งเกิดจากการดูดกลืนโฟตอนที่มีความยาวคลื่นสั้นกว่าหรือเท่ากับ 912 A° เพื่อทำให้อะตอมแตกตัวเป็นไอออนนั่นเอง ปรากฏการณ์ที่ตรงกันข้ามกับการแตกตัวเป็นไอออนก็คือการรวมตัวของไอออนกับอิเล็กตรอนอิสระ ซึ่งจะคายโฟตอนออกมา ในกรณีนี้เราจะได้สเปกตรัมส่วนสว่างต่อเนื่อง (emission continuum) ซึ่งจะอยู่ถัดจากชุดของเส้นสเปกตรัมต่าง ๆ ออกไปในทางที่มีความยาวคลื่นสั้นลง

1.7 กฎของแก๊ส

1.7.1 การแจกแจงแบบแมกซ์เวลล์–โบลต์ซมันน์

เนื่องจากสสารทั้งหมดที่มองเห็นได้ในจักรวาลส่วนมากอยู่ในสถานะของแก๊ส นักดาราศาสตร์จึงให้ความสนใจกับสมบัติของแก๊สมาก สมบัติของแก๊สมากมายที่น่าสนใจสามารถพิจารณาได้โดยใช้สถานะความสมดุลทางอุณหพลวัต ดังเช่นในหัวข้อ 1.4 สำหรับการแผ่รังสีวัตถุดำ

เราพิจารณาแก๊สที่บรรจุในภาชนะและอยู่ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตที่อุณหภูมิ T ในขั้นแรกเราสมมุติว่าอนุภาคของแก๊สเหมือนกันหมดและมีมวลเป็น m และสมมุติอีกว่าอนุภาคไม่ได้ออกแรงกระทำซึ่งกันและกันนอกจากมีการชนกันในระยะสั้น ๆ

และเป็นการชนกันแบบยืดหยุ่น ดังนั้นความน่าจะเป็นที่อนุภาคมีความเร็วในช่วงกำหนดจะแปรโดยตรงกับระยะทางช่วงนั้นคูณกับตัวประกอบโบลต์ซมันน์ทั่วไป $e^{-E/KT} = e^{-mv^2/2KT}$ ถ้า v_x, v_y และ v_z คือองค์ประกอบความเร็วตามแกนพิกัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นช่วงความเร็วกำหนดด้วย

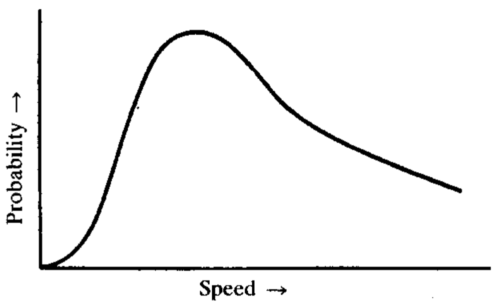
$$dv_x\, dv_y\, dv_z = v^2 dv d\Omega$$

ในที่นี้ v คือความเร็ว และ $d\Omega$ คือส่วนย่อยของมุมตันของช่วงความเร็ว สำหรับมุมตันจะสัมพันธ์กับมุมเชิงทรงกลม $(\theta, \varnothing)$ ด้วยสมการ $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varnothing$ ดังนั้นความน่าจะเป็นที่อนุภาคมีอัตราเร็วระหว่าง v และ v + dv และชี้ไปภายในมุม $d\Omega$ กำหนดด้วย

$$p(v, \theta, \varnothing)\, dvd\Omega = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2KT}\, v^2\, dvd\Omega \qquad (1.59)$$

ค่าคงที่ $(m/2\pi KT)^{3/2}$ คือตัวประกอบที่ต้องการเพื่อทำให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเท่ากับหนึ่ง เมื่อเราอินทิเกรตทุกอัตราเร็วและทิศทางทั้งหมด

สมการ (1.59) เรียกว่าการแจกแจงความเร็วแมกซ์เจลล์-โบลต์มันน์



รูป 1.8 แสดงการแจกแจงความเร็วแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์

จากรูป 1.6 ซึ่งแสดงแผนภาพของความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นเทียบกับอัตราเร็วสำหรับทิศทางที่แน่นอนทิศทางหนึ่ง เราจะเห็นได้ว่าสำหรับอัตราเร็วต่ำ ๆ เนื่องจากตัวประกอบ v^2 ความน่าจะเป็นเพิ่มขึ้นมาก ไม่เหมือนกับกรณีของอัตราเร็วสูง ๆ เนื่องจากพจน์เอกซ์โปเนนเชียลความน่าจะเป็นมีค่าลดต่ำลง ผลลัพธ์ดูเหมือนกับฟังก์ชันของพลังค์มากทีเดียว (รูป 1.4)

อัตราเร็วน่าจะเป็นมากที่สุด v_p สามารถหาได้จากความจริงที่ว่าฟังก์ชันของสมการ (1.59) มีความชันเป็นศูนย์ที่ $v = v_p$ ดังนั้น

$$v_p = \left(\frac{2KT}{m}\right)^{1/2} \qquad (1.60)$$

เราจะเห็นได้ว่าอนุภาคหนักจะเคลื่อนที่ช้ากว่าอนุภาคเบาที่อุณหภูมิกำหนดค่าหนึ่ง และ

อนุภาคทั้งหมดมีการเคลื่อนที่เร็วขึ้นเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น

สมการ (1.59) ให้ความน่าจะเป็นว่าอนุภาคมีความเร็วที่แน่นอน และมันสามารถให้จำนวนของอนุภาคที่มีความเร็วนี้ด้วย เรากำหนดให้ N คือจำนวนอนุภาคทั้งหมดของแก๊สต่อหน่วยปริมาตรและให้ $N(v, \theta, \varnothing)\, dv d\Omega$ เป็นจำนวนต่อหน่วยปริมาตรด้วยอัตราเร็วในช่วง dv และมีทิศทางอยู่ภายใน $d\Omega$ ดังนั้น

$$N(v, \theta, \varnothing)\, dv d\Omega = Np(v, \theta, \varnothing)\, dv d\Omega \tag{1.61}$$

รูป 1.8 สามารถใช้แทนทั้งสิ่งที่อนุภาคจะกระทำในเวลาต่างกันและสิ่งที่แก๊สทั้งหมดกำลังกระทำที่เวลาหนึ่งเวลาใด ทุกครั้งที่อนุภาคมีการชนกันอัตราเร็วและทิศทางของมันจะเปลี่ยนไป ความเร็วของมันส่วนมากมีค่าใกล้เคียง v_p และมีเพียงส่วนน้อยเท่านั้นหรือน้อยมากที่มีความเร็วมากกว่าหรือน้อยกว่าความเร็วนี้มาก ในทำนองเดียวกันที่เวลาใด ๆ อนุภาคส่วนใหญ่มีอัตราเร็วใกล้เคียง v_p และมีเพียงส่วนน้อยที่มีอัตราเร็วมากกว่าหรือน้อยกว่าความเร็วนี้มาก ๆ การชนกันจะทำให้อัตราเร็วของอนุภาคทั้งหมดเปลี่ยนไปเสมอ แต่จำนวนสัมพัทธ์ที่มีอัตราเร็วตามกำหนดไม่เปลี่ยนไปตามเวลา

การแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบ้ลต์ซมันน์สามารถเขียนในพจน์ของปริมาณอื่นนอกเหนือจากความเร็ว เช่นพลังงานของอนุภาค คือ $E = mv^2/2$ และเราสามารถพิจารณาความน่าจะเป็นของพลังงานจลน์ที่มีอยู่ในช่วง dE ได้จากสมการ (1.59) เนื่องจากพลังงานจลน์ไม่ขึ้นกับทิศทาง ดังนั้น เราอินทิเกรตสมการ (1.59) ตลอดมุมตันทั้งหมด และใช้ความสัมพันธ์

$$v^2 dv = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}\, dE$$

เราพบว่า

$$p(E)dE = 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-E/KT}\, E^{-\frac{1}{2}}\, dE \tag{1.62}$$

เราสามารถหาจากสมการ (1.60) โดยตรงหรือหาอนุพันธ์จากสมการ (1.62) ว่า พลังงานน่าจะเป็นมากที่สุดกำหนดด้วย

$$E_p = KT \tag{1.63}$$

สมการ (1.63) มีความคล้ายคลึงกับกฎการขจัดของวีนมาก หรือเหมือนกับสมการ (1.38) สำหรับโฟตอนมาก ความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันของพลังค์และการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ที่สำคัญก็คือ ความหนาแน่นของโฟตอนในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตที่ขึ้นกับอุณหภูมิ แต่ความหนาแน่นของอนุภาคไม่เป็นเช่นนั้น กล่าวคือ ความสมดุลทางอุณหพลวัตที่อุณหภูมิหนึ่งสามารถเกิดขึ้นได้สำหรับความหนาแน่นของสสารค่าใด ๆ

ปริมาณที่สำคัญมากก็คือพลังงานเฉลี่ยต่ออนุภาค เนื่องจากค่าเฉลี่ยของปริมาณกลุ่มใด ๆ เป็นผลรวมของมันทั้งหมดหารด้วยความน่าจะเป็นของมัน ดังนั้นเราได้ว่า

$$\bar{E} = \int_0^\infty E\, p(E)\, dE$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-E/KT} E^{\frac{3}{2}}\, dE$$

ผลลัพธ์ของการอินทิเกรต คือ

$$\bar{E} = \frac{3}{2} KT \tag{1.64}$$

พลังงานเฉลี่ยมีค่ามากกว่าพลังงานน่าจะเป็นมากที่สุด 50 เปอร์เซ็นต์ สมการ (1.64) สามารถเปรียบเทียบกับพลังงานเฉลี่ยของโฟตอนซึ่งแสดงด้วยฟังก์ชันของพลังค์มีค่าประมาณ 2.701 KT

1.7.2 สมการแก๊สสมบูรณ์ของสถานะ

สมบัติที่สำคัญมากของแก๊สก็คือความดัน ความดันที่จุดใดจุดหนึ่งก็คือแรงที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่ผิวของสสารที่บริเวณจุดนั้น ซึ่งก็คืออัตราที่โมเมนตัมผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวทางเรขาคณิตไปที่จุดนั้น หรือสมมูลย์กัน เมื่อใช้การแจกแจงความเร็วแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์คำนวณความดันจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$P = NKT \tag{1.65}$$

ความสัมพันธ์ที่สำคัญนี้ซึ่งแสดงความดันในพจน์ของอุณหภูมิและจำนวนของอนุภาคแก๊สต่อหน่วยปริมาตร ก็คือสมการสถานะของแก๊สสมบูรณ์หรือแก๊สในอุดมคติ และสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมมูลย์อื่น ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า ρ คือมวลเฉลี่ยต่อหน่วยปริมาตร ดังนั้น $\rho = Nm$ และเราจะได้

$$P = \frac{K}{m} \rho T \tag{1.66}$$

น้ำหนักโมเลกุล μ ของแก๊สคืออัตราส่วนไร้มิติของ m/m_o เมื่อ m_o คือมวลของน้ำหนักอะตอมหนึ่งหน่วย (Atomic Weight) แต่ก่อน m_o กำหนดเป็น 1/16 ของมวลของนิวเคลียสออกซิเจนปกติ แต่นักฟิสิกส์ได้ตัดสินใจใหม่ว่ามันควรจะเป็น 1/12 ของมวลของนิวเคลียสคาร์บอนปกติ ในกรณีทั้งสองมันมีค่าใกล้เคียงกับมวลของอะตอมไฮโดรเจนมาก กำหนดค่าคงที่แก๊ส R เป็นอัตราส่วน K/m_o ($R = 8.31 \times 10^7$ เอิร์ก กรัม$^{-1}$องศาเคลวิน$^{-1}$) ดังนั้น

$$P = \frac{K}{\mu m_o} \rho T = \frac{R}{\mu} \rho T \tag{1.67}$$

ถ้ามี n กรัมโมเลกุลหรือโมลของแก๊ส $n = M/\mu = \varrho V/\mu$ เมื่อ μ และ V คือ มวลทั้งหมด และปริมาตรของแก๊ส ดังนั้น

$$PV = nRT \tag{1.68}$$

จากสมการ (1.65) ถึงสมการ (1.68) ต่างสมมูลย์กันทั้งหมด และการใช้ก็แล้วแต่สะดวกจะใช้รูปแบบไหน โดยทั่วไปนักฟิสิกส์กำหนดให้น้ำหนักโมเลกุลมีมิติเป็นกรัมต่อโมล ดังนั้นค่าคงที่แก๊สกลายเป็น เอิร์กต่อโมล-องศา

ที่กล่าวมาข้างต้นนี้เราได้สมมติให้แก๊สมีอนุภาคเพียงชนิดเดียวเท่านั้น ถ้าหากแก๊สเป็นส่วนผสมของอนุภาคชนิดต่าง ๆ สมการ (1.59) สามารถใช้แยกแต่ละชนิดออกจากกันได้ตราบเท่าที่การสมมุติเกี่ยวกับไม่มีแรงกระทำต่อกัน การชนแบบยืดหยุ่นและอื่น ๆ ยังคงมีอยู่ เนื่องจากความสัมพันธ์นี้ขึ้นอยู่กับมวลของอนุภาค อนุภาคแต่ละชนิดจะมีการแจกแจงความเร็วของตัวมันเอง อย่างไรก็ตามสมการ (1.62) ไม่ได้ขึ้นกับมวล ดังนั้นอนุภาคทั้งหมดจะมีการแจกแจงพลังงานเท่ากัน เนื่องจากแก๊สที่อยู่ในสถานะความสมดุลทางอุณหพลวัตจะมีความสมดุลทางพลังงานกับสนามการแผ่รังสีของมัน และได้กล่าวในหัวข้อ 1.4 ว่าสนามการแผ่รังสีไม่ขึ้นกับชนิดของสสารที่มันมีความสมดุลด้วย ดังสมการ (1.64) แสดงอนุภาคทุกตัวเคลื่อนที่ด้วยพลังงานจลน์เฉลี่ยเท่ากัน ดังนั้นอนุภาคเบาจะมีอัตราเร็วมากกว่าอนุภาคหนัก ถ้า N_i คือจำนวนของอนุภาคแบบ i ต่อหน่วยปริมาตร ดังนั้นมันจะสร้างความดันส่วนย่อยกำหนดด้วย

$$P_i = N_i KT \tag{1.69}$$

และความดันทั้งหมดเป็นผลรวมของความดันส่วนย่อยทั้งหมด นั่นคือ

$$P = \sum_i P_i = \sum_i N_i KT = NKT \tag{1.70}$$

สมการอื่น ๆ ยังคงเป็นจริง ถ้า m กำหนดให้เป็นมวลเฉลี่ยต่ออนุภาคและถ้า μ คือน้ำหนักโมเลกุลเฉลี่ยต่ออนุภาคอิสระ

พิจารณาตัวอย่างของแก๊สฮีเลียมบริสุทธิ์ ที่อุณหภูมิต่ำแก๊สเป็นกลางและมีน้ำหนักโมเลกุลประมาณ 4 เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น อะตอมฮีเลียมบางตัวจะแตกตัวเป็นไอออนทันทีและอะตอมแต่ละตัวจะมีอิเล็กตรอนอิสระหนึ่งตัว ทำให้มีส่วนประกอบผสมของอะตอม He ไอออน He^+ และอิเล็กตรอนอิสระ ในขณะนี้จะมีอนุภาคมากกว่าอะตอมในตอนแรก แต่ไม่มีมวลมากกว่าแต่ก่อน ดังนั้นน้ำหนักโมเลกุลเฉลี่ยค่อนข้างจะน้อยกว่า 4 ที่อุณหภูมิสูงมาก ๆ ฮีเลียมเกือบทั้งหมดแตกตัวเป็นไอออนสองครั้งและจะมีอิเล็กตรอนอิสระมากเป็นสองเท่าของนิวเคลียสฮีเลียมน้ำหนักโมเลกุลลดลงไปประมาณ $\frac{4}{3}$ และ $\frac{2}{3}$ ของความดัน

ทั้งหมดที่อิเล็กตรอนใช้ไป และนิวเคลียสใช้ไปเพียง $\frac{1}{3}$ เท่านั้น การชนกันระหว่างอนุภาคต่างชนิดกันทำให้อนุภาคแต่ละชนิดมีพลังงานจลน์เฉลี่ยเท่ากัน ดังนั้นอิเล็กตรอนจะมีอัตราเร็วเฉลี่ยมากกว่านิวเคลียสฮีเลียมมากโดยทั่วไปจึงเห็นได้ว่าน้ำหนักโมเลกุลเฉลี่ยของแก๊สไม่ได้พิจารณาเป็นค่าคงที่

สมบัติที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งของแก๊สคือ ความร้อนและพลังงานภายใน ค่านี้ประกอบด้วยพลังงานจลน์ของอนุภาคทั้งหมดบวกด้วยพลังงานศักย์ใด ๆ ที่รวมอยู่กับการยึดเหนี่ยวหรือการยึดแน่นเข้าด้วยกันของแต่ละอนุภาค และถ้าอนุภาคทั้งหลายคือโมเลกุล พลังงานอย่างหลังนี้จะมีพลังงานการตื่นตัวและพลังงานการแตกตัวเป็นไอออนรวมอยู่ด้วย จากหัวข้อ 1.5 ที่ว่าความแตกต่างพลังงานศักย์ต่างหากที่เป็นปริมาณสำคัญ ไม่ใช่ค่าพลังงานของตัวมันเอง หมายความว่าในบริเวณใด ๆ ซึ่งพลังงานศักย์ค่าต่าง ๆ จำเป็นต้องเป็นค่าคงที่สามารถทำให้เป็นศูนย์หรือละทิ้งได้อย่างง่ายดาย ส่วนพลังงานความร้อนก็คือพลังงานจลน์ของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ ถ้ากำหนดให้ U เป็นพลังงานความร้อนต่อกรัมของสสาร ดังนั้นสมการ (1.64) และ (1.67) จะได้ว่า

$$U = \frac{3}{2}\frac{KT}{m} = \frac{3}{2}\frac{RT}{\mu} = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho} \tag{1.71}$$

อย่างไรก็ดีถ้าพลังงานศักย์ทั้งหมดไม่เป็นค่าคงที่ดังนั้นจะมีผลของมันรวมอยู่ด้วย ตัวอย่างเช่น ถ้าสสารจำนวนมากเช่นไฮโดรเจนหรือฮีเลียมแตกตัวเป็นไอออนบางส่วน ดังนั้นจะมีพลังงานการแตกตัวเป็นไอออนรวมอยู่ด้วย การเปลี่ยนแปลงตามปกติในพลังงานความร้อนจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิอย่างแน่นอนเหมือนในสมการ (1.71) แต่ถ้าการแตกตัวเป็นไอออนมีการเปลี่ยนแปลงด้วย จะมีการดูดกลืนพลังงานที่เปลี่ยนแปลงบางส่วนนี้ได้ดี ผลก็คืออุณหภูมิจะมีความไวต่อพลังงานความร้อนน้อยกว่าสมการ (1.71) มาก และมีความร้อนจำเพาะมากกว่าตอนปกติมาก บริเวณการแตกตัวเป็นไอออนเช่นนี้มีความสำคัญในโครงสร้างของดาวมากทีเดียว เราสังเกตเห็นได้ว่าผลนี้ได้รวมอยู่ในปรากฏการณ์ของการแตกตัวเป็นไอออนจะทำให้น้ำหนักโมเลกุล μ เปลี่ยนแปลงค่าไป

1.7.3 แรงระหว่างอนุภาค

สมบัติของแก๊สแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์เราได้พิจารณาภายใต้ข้อสมมุติฐานว่าอนุภาคไม่ได้ออกแรงกระทำต่อกันยกเว้นสำหรับการชนกันในช่วงระยะสั้นมาก ๆ และแก๊สอยู่ในสถานะสมดุลทางอุณหพลวัต เนื่องจากข้อสมมุติเหล่านี้ไม่เคยปฏิบัติอย่างเข้มงวดถูกต้อง แต่มันมีความสำคัญในการใช้ประมาณผลของการเบี่ยงเบนของมัน ซึ่งพบในสถานการณ์ทางด้านดาราศาสตร์ที่แตกต่างกัน ผลของแรงระหว่างอนุภาคจึงถูกตรวจสอบเป็นครั้งแรก

ถ้าอนุภาคสองอนุภาคเข้ามาใกล้ชิดกัน แรงที่มันกระทำต่อกันจะทำให้ความเร็วของอนุภาคทั้งสองลดลง ถ้าปรากฏการณ์นี้รุนแรงเพียงพอมันจะสร้างการเบี่ยงเบนจากการแจกแจงแมกซ์เวลล์โบลต์ซมันน์ ความสำคัญของอันตรกิริยาเหล่านี้สามารถประมาณได้โดยเปรียบเทียบกับค่าของพลังงานอันตรกิริยาและพลังงานจลน์ที่นิยมใช้กัน ถ้าค่าพลังงานศักย์สมบูรณ์ของอันตรกิริยามีค่าน้อยกว่าพลังงานจลน์ของอนุภาคมากมาย ดังนั้นการเคลื่อนที่จะไม่ได้รับผลที่น่าประทับใจพลังงานศักย์เราแทนด้วย PE ซึ่งขึ้นอยู่กับระยะห่าง r ของอนุภาค ถ้า $\bar{r}$ คือระยะทางเฉลี่ย ดังนั้น PE ($\bar{r}$) เป็นค่าที่นิยมใช้กันเทียบได้เท่ากับ $\frac{3}{2}$ KT ปรากฏว่าค่าเบี่ยงเบนจากการแจกแจงแมกซเวลล์-โบลต์มันน์เป็นค่ามาก ซึ่งจะไม่เกิดขึ้นถ้า

$$\frac{3}{2}KT >> |PE(\bar{r})| \tag{1.72}$$

สำหรับสถานการณ์ใด ๆ พลังงานเหล่านี้สามารถคำนวณได้และเราสามารถเห็นได้ว่าสมการ (1.72) เหมาะสมหรือไม่ เนื่องจากพลังงานศักย์มีขนาดเพิ่มขึ้น เมื่ออนุภาคเข้าใกล้กันมากขึ้น ดังนั้นสำหรับแก๊สความหนาแน่นสูงจะมีแนวโน้มไม่เป็นไปตามสมการ (1.72) ในทางตรงกันข้ามอุณหภูมิสูงกลับชอบที่จะเป็นไปตามสมการ (1.72) เนื่องจากมันสอดคล้องกับพลังงานจลน์ค่ามาก ๆ

สำหรับแก๊สไฮโดรเจนบริสุทธิ์พลังงานศักย์สามารถคำนวณได้ง่ายกว่า สถานการณ์สำหรับไฮโดรเจนเป็นกลางแตกต่างไปจากไฮโดรเจนที่แตกตัวเป็นไอออนมาก สำหรับไฮโดรเจนไอออนอนุภาคก็คือโปรตอนและอิเล็กตรอน แต่ละประจุมีขนาด $e = 4.80 \times 10^{-10}$ หน่วยไฟฟ้าสถิต อันตรกิริยาคูลอมบ์ให้ $|PE| = e^2/r$ เหมือนกับสมการ (1.47) อะตอมไฮโดรเจนเป็นกลางหนึ่งอะตอมมีโปรตอนหนึ่งตัวและอิเล็กตรอนหนึ่งตัว อยู่ห่างกันเป็นระยะ d และอะตอมไฮโดรเจนเดียวกันนี้สองอะตอมจะมีผลต่อกันอย่างมีชั้นเชิง เพราะว่าประจุต่างชนิดกันมีระยะทางห่างกันต่างกัน ในกรณีนี้พลังงานศักย์มีค่าประมาณ d^2c^2/r^2 สำหรับค่าที่แท้จริงขึ้นอยู่กับการวางตัวเข้ากันอย่างสัมพัทธ์ด้วยระยะห่างเฉลี่ย $\bar{r}$ ซึ่งสัมพันธ์กับความหนาแน่นเฉลี่ยของอนุภาค N ด้วย

การวางตัวเข้ากันอย่างสัมพัทธ์ด้วยระยะห่างเฉลี่ย $\bar{r}$ ซึ่งสัมพันธ์กับความหนาแน่นเฉลี่ยของอนุภาค N ด้วย

$$\frac{4}{3}\pi \bar{r}^{-3} N = 1 \tag{1.73}$$

ดังนั้น ถ้ากำจัด $\bar{r}$ ออกไป สมการ (1.72) กลายเป็น

$$\frac{3}{2}KT >> \begin{cases} c^2\left(\frac{4}{3}\pi N\right)^{\frac{1}{3}} & \text{(ทำให้แตกตัวเป็นไอออน)} \\ d^2e^2\left(\frac{4}{3}\pi N\right) & \text{(เป็นกลาง)} \end{cases} \tag{1.74}$$

ถ้า d เหมือนกับวงโคจรแรกของโบร์ ($d = 5.29 \times 10^{-9}$ ซม.) ดังนั้นสมการ (1.74) ให้

$$T >> \begin{cases} 2 \times 10^{-3} N^{\frac{1}{3}} & \text{(ทำให้แตกตัวเป็นไอออน)} \\ 10^{-19} N & \text{(เป็นกลาง)} \end{cases} \qquad (1.75)$$

ตราบใดที่สมการ (1.74) ถูกต้องเราสามารถแน่ใจได้ว่า แรงระหว่างอนุภาคไม่ทำให้เกิดการเบี่ยงเบนอย่างมากจากการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ในปริภูมิระหว่างดาวที่มีความหนาแน่นต่ำมาก ๆ N นาน ๆ ครั้งหนึ่งจึงจะใหญ่เท่ากับ 10^6 อนุภาคต่อลูกบาศก์เซ็นติเมตร ในบริเวณที่มีไฮโดรเจนแตกตัวเป็นไอออนโดยทั่วไปมีอุณหภูมิประมาณ 10^4 องศาเคลวิน ส่วนที่บริเวณอื่น ๆ มีอุณหภูมิสองสามองศาเป็นอย่างน้อย ดังนั้นสมการ (1.75) จึงใช้ได้ดีมากในปริภูมิระหว่างดาว นอกจากนี้สมการ (1.75) ยังใช้ได้ดีในบรรยากาศของดวงอาทิตย์ ซึ่งมีค่า T = 6,000 องศาเคลวิน $N = 10^{17}$ ซม.$^{-3}$ ด้วยไฮโดรเจนเป็นกลาง สำหรับที่ศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ N มีค่าประมาณ 9.5×10^{25} และ $T = 1.6 \times 10^7$ และไฮโดรเจนแตกตัวเป็นไอออน ค่าเหล่านี้แสดงว่าข้างซ้ายมือของสมการ (1.75) มีค่ามากกว่าข้างขวามือ 20 เท่า

17.4 การแจกแจงเฟร์มิ-ดิแรก (Fermi-Dirac distribution)

มีอีกรูปแบบหนึ่งของอันตรกิริยาของอนุภาค ซึ่งสามารถทำให้เกิดการเบี่ยงเบนจากการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ นั่นคือปรากฏการณ์เชิงกลควอนตัมที่รู้จักกันว่าสภาพซ้อนสถานะจากวิชากลศาสตร์ควอนตัมอนุภาควัตถุเป็นชนิดหนึ่งของคลื่นเฉพาะที่ กล่าวคือมันประกอบด้วยคลื่นซึ่งไม่เป็นศูนย์ตลอดบริเวณจำกัดบางแห่ง ถ้าบริเวณนี้คลื่นมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับระยะทางอื่นที่น่าสนใจ ดังนั้นธรรมชาติคลื่นสามารถละทิ้งได้ นอกเหนือจากบริเวณนี้ธรรมชาติคลื่นมีความสำคัญมากในการพิจารณาสมบัติต่าง ๆ ของอนุภาค ดังนั้นเราจึงต้องใช้วิชากลศาสตร์ควอนตัมสำหรับคำนวณสมบัติเหล่านี้ ถัดออกไปจากบริเวณนี้คลื่นจะแสดงความไม่แน่นอนขั้นพื้นฐานอย่างหนึ่งในตำแหน่งของอนุภาค

หลักความไม่แน่นอนของ**ไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg's uncertainty principle)** กล่าวว่าความไม่แน่นอนในตำแหน่งของอนุภาคสัมพันธ์กับโมเมนตัมของมัน ถ้าองค์ประกอบ x ของโมเมนตัมของอนุภาคมีค่าไม่แน่นอนประมาณ $\triangle p_x$ ดังนั้นพิกัด x เองต้องมีค่าไม่แน่นอนประมาณ $\triangle x$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\triangle x \gtrsim \frac{h}{2\pi \triangle p_x} \qquad (1.76)$$

ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์นี้เป็นจริงสำหรับองค์ประกอบ y และ z สำหรับอนุภาคแผนเดิมมันปรากฏว่า

$$\overline{p_x^2} = \frac{1}{3}\,\overline{p^2} = \frac{2}{3}\,m\bar{E} = mKT \tag{1.77}$$

โดยปกติภายในตัวประกอบสองหรือสามอนุภาคใด ๆ จะมีโมเมนตัมที่เวลาใด ๆ ประมาณได้เท่ากับค่าเฉลี่ยของมัน ดังนั้นความไม่แน่นอนในโมเมนตัมจึงมีขนาดเป็นค่าเฉลี่ยของมัน นั่นคือ

$\Delta p_x \approx (mKT)^{\frac{1}{2}}$ และสมการ (1.76) ได้กลายเป็น

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{2\pi\,(mkT)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.78}$$

สำหรับปรากฏการณ์เชิงกลควอนตัมในขนาดที่สามารถละทิ้งได้ Δx ต้องมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับระยะทางอื่นที่น่าสนใจ โดยเฉพาะระยะทางเฉลี่ยระหว่างอนุภาค $\bar{r}$ จากสมการ (1.70) และ (1.78) บ่งบอกว่าปรากฏการณ์เชิงกลควอนตัมสามารถละทิ้งได้ถ้า

$$T >> \frac{h^2}{K\,(36\pi^4)^{\frac{1}{3}}}\,\frac{N^{\frac{2}{3}}}{m} \tag{1.79}$$

ตัวเลขประกอบทางขวามือของสมการ (1.79) คือ 2.1×10^{-38} หน่วยไฟฟ้าสถิต แต่การคำนวณที่ละเอียดมากขึ้นได้แสดงว่าปรากฏการณ์ทางควอนตัมเหล่านี้จะละทิ้งได้ถ้าเครื่องหมายมากกว่ามากแทนด้วยมากกว่าประมาณ และถ้าตัวเลขประกอบคูณด้วยประมาณ 10 นั่นคือ

$$T \gtrsim 2.5 \times 10^{-37}\,\frac{N^{\frac{2}{3}}}{m} \tag{1.80}$$

เป็นที่น่าสนใจว่าความสัมพันธ์ข้างต้นขึ้นกับมวลของอนุภาค มันเป็นไปได้สำหรับเงื่อนไขที่ว่าสมการ (1.80) สอดคล้องกับโปรตอนหนัก ในขณะที่อิเล็กตรอนซึ่งเบากว่ามากไม่สอดคล้อง ความจริงแล้วเงื่อนไขสำหรับศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ กำหนดว่าสมการ (1.80) ขัดต่ออิเล็กตรอนเพียงเล็กน้อย ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้รูปแบบของอิเล็กตรอนเป็นสิ่งที่เรียกว่า แก๊สเสื่อมสลายบางส่วน (partially degenerate gas) ในแบบที่แน่นอนของดาว เช่น ดาวแคระขาว (white dwarf) สมการ (1.80) ขัดกันอย่างรุนแรง และรูปแบบอิเล็กตรอนเป็นแก๊สเสื่อมสลายสูงมาก

เมื่อสมการ (1.80) ล้มเหลว อนุภาคแก๊สไม่เป็นไปตามการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ของสมการ (1.59) แต่กลับเป็นไปตามการแจกแจงเฟร์มิ-ดิแรกแทนคือ

$$p(v, \theta, \varnothing)dvd\Omega = \frac{2m^3}{Nh^3} \frac{v^2 dvd\Omega}{\exp\left(\propto + \frac{mv^2}{2KT}\right) + 1} \tag{1.81}$$

ในสมการนี้ $\propto$ เป็นปริมาณที่ขึ้นกับ N และ T และอินทิกราลของสมการ (1.81) ตลอด อัตราเร็วและทิศทางทั้งหมดมีค่าเป็นหนึ่ง เราสามารถเห็นได้ว่าสมการนี้ลดรูปไปเป็นสมการ (1.59) ได้ถ้า $\propto >> 1$

แก๊สที่เป็นไปตามสมการ (1.81) มีสมบัติแตกต่างไปจากแก๊สแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ และโดยเฉพาะมันไม่สอดคล้องกับสมการแก๊สสมบูรณ์ของสถานะ ความจริงแล้วสมการ (1.81) สามารถนำไปสู่สมการสถานะได้ คือ

$$P = NKT \times \frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(\propto)}{F_{1/2}(\propto)} \tag{1.82}$$

ซึ่ง

$$F_n(\propto) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{\propto + x} + 1} \tag{1.83}$$

สมบัติของแก๊สเสื่อมสลายหรือแก๊สเฟร์มิ-ดิแรกสามารถเข้าใจได้ดีที่สุดในพจน์ของระดับพลังงานที่วิชากลศาสตร์ควอนตัมยอมรับ จากหัวข้อ 1.5 เราสังเกตได้ว่าอิเล็กตรอนซึ่งล้อมรอบอะตอมไว้ไม่สามารถมีพลังงานค่าใด ๆ ได้ แต่ต้องอยู่ในสถานะที่กลศาสตร์ควอนตัมยอมรับสถานะหนึ่ง สำหรับอนุภาคอิสระก็เป็นจริงในลักษณะเดียวกัน ในอะตอมเดียวกันจะไม่มีอิเล็กตรอนสองตัวสามารถอยู่ในสถานะกลศาสตร์ควอนตัมเดียวกันได้ ข้อความนี้เป็นที่รู้จักกันดีว่าคือหลักการกีดกันเพาลี (Pauli exclusion principle)

สำหรับแก๊สความหนาแน่นต่ำที่อุณหภูมิกำหนดค่าหนึ่งจำนวนอนุภาคต่อหน่วยปริมาตรมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับจำนวนของสถานะพลังงานต่ำที่เป็นไปได้ของมัน ซึ่งเป็นข้อจำกัดเชิงกลศาสตร์ควอนตัมที่เป็นผลไม่มีคุณค่าต่อแก๊ส และมันเป็นไปตามการแจกแจงแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์แผนเดิม อย่างไรก็ตามสำหรับแก๊สความหนาแน่นสูงที่อุณหภูมิเดียวกันระดับพลังงานต่ำกว่ากลายเป็นระดับเกือบเต็มแล้ว เมื่ออนุภาคมีจำนวณมากขึ้นเบียดเสียดเข้าไปในปริมาตรเดียวกัน มันจะต้องใช้พลังงานมากขึ้นกว่าค่าเฉลี่ยมาก เนื่องจากหลักการกีดกันเพาลีจะไม่อนุญาตให้มันมีส่วนร่วมกับอนุภาคที่มีอยู่แล้วในระดับต่ำกว่า แก๊สเสื่อมสลายมีพลังงานต่ออนุภาคมากกว่าที่ได้บ่งบอกไว้ในสมการ (1.64) เมื่อความหนาแน่นแก๊สสูงขึ้นมากจนระดับพลังงานทั้งหมดอยู่ต่ำกว่าระดับพลังงานสูง แน่นอนระดับหนึ่งได้ถูกเติมเต็มหมดแล้ว

ดังนั้นสมบัติต่าง ๆ ของแก๊สจะกลับมาขึ้นกับความหนาแน่นและตำแหน่งของระดับพลังงานเท่านั้น สสารก็จะเสื่อมสลายอย่างสมบูรณ์และคุณลักษณะของมันไม่ขึ้นกับอุณหภูมิอีกต่อไป อย่างไรก็ดีโดยการเพิ่มอุณหภูมิให้สูงพอเหมาะ สภาพซ้อนสถานะสามารถทำให้หมดหายไปได้ เนื่องจากแก๊สเสื่อมสลายมีพลังงานมากบ่อยครั้งทำให้มีความเร็วสูงมากด้วย และต้องทำให้ถูกต้องด้วยทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ดังนั้นสมการ (1.81) และ (1.82) จึงใช้ได้สำหรับช่วงความหนาแน่นจำกัดช่วงหนึ่ง และถ้าความหนาแน่นมากเกินไปเราต้องใช้สมการใหม่ที่เป็นจริงสำหรับสภาพซ้อนสถานะเชิงสัมพัทธภาพ

มีการแจกแจงเชิงกลศาสตร์ควอนตัมที่แตกต่างกันอย่างแท้จริงอยู่สองแบบซึ่งแก๊สสามารถประพฤติตามได้ ได้แก่ การแจกแจงเฟร์มิ–ดิแรก ซึ่งได้อธิบายข้างต้น และการแจกแจงโบส–ไอน์สไตน์ (Bose-Einstein distribution) การแผ่รังสีวัตถุดำที่ได้อธิบายในหัวข้อ 1.4 จะประพฤติตามรูปแบบพิเศษแบบหนึ่งของการแจกแจงโบส–ไอน์สไตน์ทั้งการแจกแจงเฟร์มิ–ดิแรก และการแจกแจงโบสไอน์สไตน์ นำไปสู่การแจกแจงแมกซ์เวลล์–โบสต์ซมันน์แผนเดิมได้ในขอบเขตจำกัดเหมือนกับปรากฏการณ์ทางควอนตัมที่สามารถละทิ้งได้

แบบฝึกหัดที่ 1

1.1 ดาวทรงกลมดวงหนึ่งมีรัศมี R แผ่พลังงานรังสีของความเข้ม I ในทุกทิศทาง จงหาความเข้มเฉลี่ยและฟลักซ์ของการแผ่รังสีที่ระยะทาง r ห่างจากดาว

1.2 จงหาพลังงานเฉลี่ยของโฟตอนในความสมดุลทางอุณหพลวัตที่อุณหภูมิ T

1.3 ให้หาอัตราส่วนของพลังงานทั้งหมดของวัตถุดำซึ่งแผ่รังสีที่ความยาวคลื่นยาวกว่าความยาวคลื่นที่กำหนดให้ สมมติว่าอุณหภูมิต่ำเพียงพอตามที่การประมาณเรย์เลก์ จีนใช้ได้ดีที่ความยาวคลื่นกำหนดให้

1.4 อนุกรมพิกเกอริง (Pickering) ของฮีเลียมที่แตกตัวเป็นไอออน เป็นอนุกรมของเส้นสเปกตรัมสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงระหว่างระดับ $n = 4$ และระดับที่สูงกว่า จงแสดงว่าเส้นอื่น ๆ ทุกเส้นของอนุกรมนี้มีความยาวคลื่นเท่ากับเส้นของอนุกรมบัลเมอร์เส้นหนึ่งของไฮโดรเจน

1.5 จงพิจารณาเส้นของอนุกรมบัลเมอร์ที่อยู่กันอย่างเบียดเสียดมากขึ้นเมื่อจำนวนอนุกรมสูงขึ้น ถ้าแต่ละเส้นอยู่ห่างกันด้วยความกว้าง 1 A° พอดี จะมีเส้นบัลเมอร์จำนวนเท่าใดที่ทำให้แต่ละเส้นมองเห็นได้โดยไม่เหลื่อมล้ำกับเส้นอื่น ๆ

1.6 เมื่ออุณหภูมิของแก๊สเปลี่ยนไปเล็กน้อย จงหาสมการสำหรับปริมาณที่เปลี่ยนไปนี้โดยที่ความดันของอิเล็กตรอนต้องเปลี่ยนแปลงไปในขนาดที่สถานะการแตกตัวเป็นไอออนของสองสถานะแรกของธาตุด้วยปริมาณมหาศาลสัมพัทธ์ไม่เปลี่ยนแปลง

1.7 กลุ่มแก๊สประกอบด้วยไฮโดรเจนร้อยละ 50 และฮีเลียมร้อยละ 50 โดยมวล ถ้ามันอยู่ในความสมดุลทางอุณหพลวัตที่ 10^4 K และถ้าความหนาแน่นมีค่าเป็น 10^{-7} กรัมซม.$^{-3}$ จงหาความดัน ความดันอิเล็กตรอน และน้ำหนักโมเลกุลเฉลี่ยของแก๊สผสม

1.8 ไดโพลไฟฟ้าหนึ่งประกอบด้วยประจุไฟฟ้าตรงกันข้ามสองประจุคือ $+e$ และ $-e$ อยู่ห่างกันเป็นระยะ d จงหาพลังงานศักย์ที่ต้องการใช้เพื่อนำสองไดโพลชนิดดังกล่าวอยู่ห่างกันเป็นระยะ r สมมติว่าประจุทั้งสี่อยู่ภายในแนวเส้นตรงเดียวกัน และสมมติว่า $r >> d$

1.9 ชายคนหนึ่งหนัก 200 ปอนด์ ปีนขึ้นไปบนภูเขาสูง 10^4 ฟุต ถามว่าในที่สุดชายคนนี้จะมีพลังงานศักย์เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าไร?

1.10 เส้นสเปกตรัมต่อไปนี้ จะแสดงค่าความยาวคลื่นเท่าไร

(ก) เส้น 5,000 A° ของดาวที่กำลังเคลื่อนที่เข้าหาเราด้วยความเร็ว 200 กิโลเมตร/วินาที

(ข) เส้น CaII 3,970 A° จากดาราจักรที่กำลังเคลื่อนที่หนีออกจากเราด้วยความเร็ว 30,000 กม./วินาที

1.11 แก๊สไฮโดรเจน **H,I** กลุ่มหนึ่งส่งคลื่นวิทยุที่มีความยาวคลื่น 21 ซม. (ความถี่ 140.2 MH_z) ขณะที่กำลังเคลื่อนที่หนีออกจากเราด้วยความเร็ว 250 กม./วินาที เราจะสังเกตสเปกตรัมนี้ได้ที่ความถี่เท่าไร?

1.12 จงหาอัตราเร็วของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานพอดีที่จะชนให้อะตอมของโซเดียมในสถานะพื้นแตกตัวเป็นไอออน และหาอุณหภูมิของอิเล็กตรอนด้วย