บทที่ 7
ระบบสุริยะ

7.1 การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์

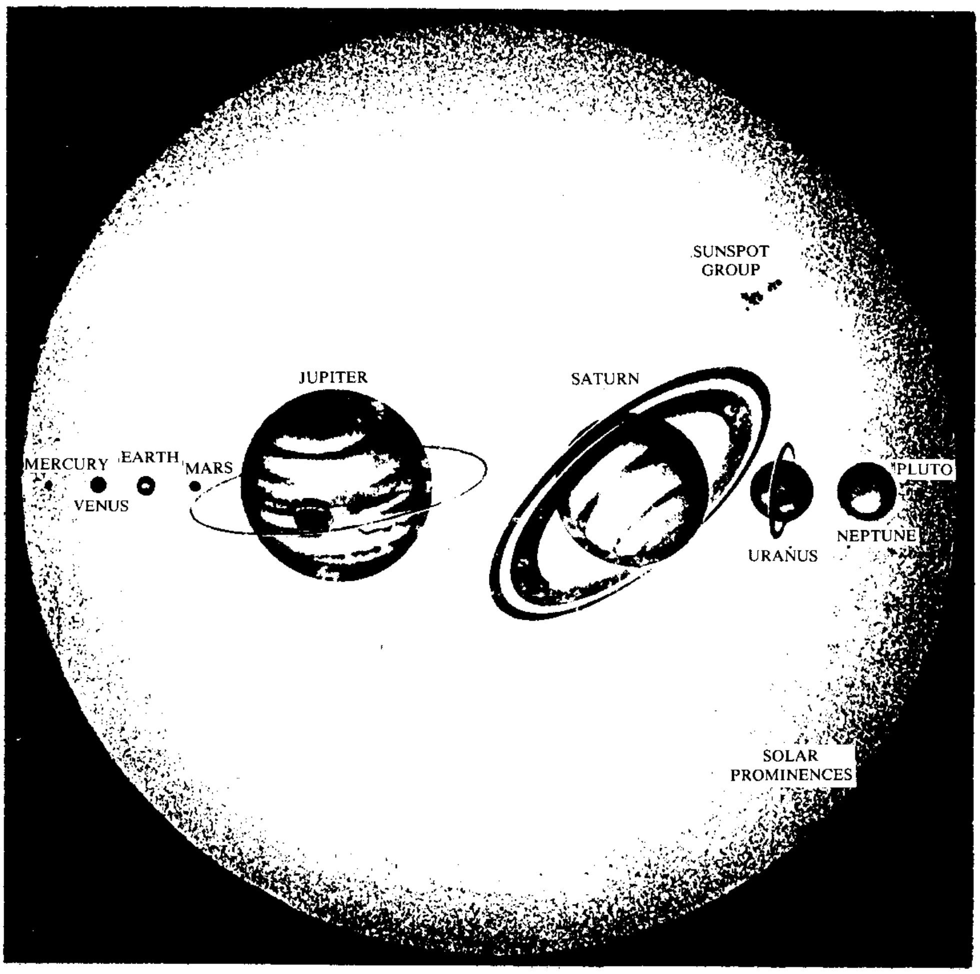
นักดาราศาสตร์ชาวกรีกโบราณ เช่น พลาโต (Plato), ยูดอกซัส (Eudoxus), อริสโตเติล (Aristotle) และพโทเลมี (Ptolemy) ได้ตั้งทฤษฎีว่าโลกเป็นจุดศูนย์กลางของเอกภพโดยมีดวงอาทิตย์, ดวงจันทร์, ดาวเคราะห์ และดาวฤกษ์ทุกดวงโคจรรอบโลก ลักษณะการโคจรที่มีโลกเป็นจุดศูนย์กลางของการโคจรเรียกว่าจีโอเซนทริก (geocentric) ทฤษฎีนี้เป็นที่เชื่อถือติดต่อกันมาเป็นเวลาประมาณเกือบสองพันปี ต่อมานิโคลัส โคเปอร์นิคัส (Nicolus Copernicus, ค.ศ. 1475-1543) ได้เขียนลงในหนังสือชื่อ "De Revolutionibus Orbium Celestium" ในปี ค.ศ. 1543 โดยเสนอความคิดเห็นว่า ดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางของเอกภพโดยมีโลก, ดาวเคราะห์, ดาวฤกษ์ต่าง ๆ หมุนรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงกลม ลักษณะของการโคจรที่มีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางของเอกภพเรียกว่าเฮลิโอเซนทริก (heliocentric)

ไทโค บราเฮ (Tycho Brahe, ค.ศ. 1546-1601) ตลอดชีวิตของไทโค บราเฮได้สังเกตตำแหน่งของดาวเคราะห์, ดาวฤกษ์, ดวงอาทิตย์, ดวงจันทร์อย่างละเอียด พบว่าทฤษฎีของพโทเลมีและโคเปอร์นิคัสเกี่ยวกับตำแหน่งของดาวเคราะห์ที่บอกไว้ยังขาดความแม่นยำอยู่มาก จากทฤษฎีของโคเปอร์นิคัสที่ว่าโลกโคจรรอบดวงอาทิตย์โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางนั้น ไทโค บราเฮได้พยายามหาค่าความคลาดตำแหน่งของดาวฤกษ์ต่าง ๆ (ดูรายละเอียดในบทที่ 4) แต่เขาไม่สามารถหาค่าความคลาดตำแหน่งของดาวฤกษ์ได้เนื่องจากเครื่องมือที่เขาใช้วัดมีความละเอียดไม่เพียงพอ เขาจึงสรุปว่าทฤษฎีของโคเปอร์นิคัสไม่ถูกต้อง ในที่สุดไทโคให้ความเห็นว่าดาวเคราะห์ทุกดวงเคลื่อนที่รอบดวงอาทิตย์ยกเว้นโลก เคปเลอร์ (Kepler) เป็นทั้งศิษย์และผู้ร่วมงานที่ใกล้ชิดของไทโค บราเฮ หลังจากที่ไทโค บราเฮได้เสียชีวิตแล้ว เคปเลอร์ได้รวบรวมและศึกษาผลงานของไทโค บราเฮอย่างละเอียดและในที่สุดเขาได้ตั้งกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ 3 ข้อ (ดูรายละเอียดในหัวข้อที่ 7.3) ซึ่งเป็นกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ที่สร้างชื่อเสียงให้แก่เคปเลอร์เป็นอย่างมาก

7.2 ดาวเคราะห์นอกและดาวเคราะห์ใน

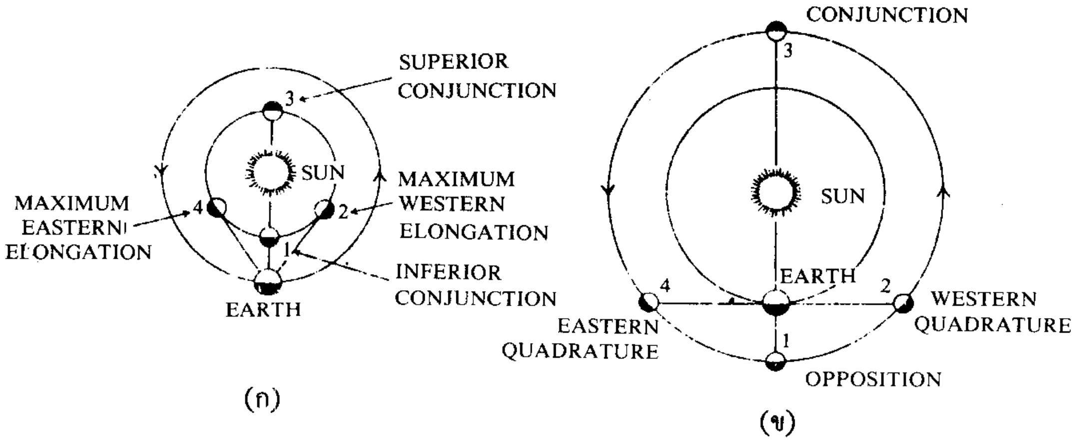
การจำแนกดาวเคราะห์นักดาราศาสตร์แบ่งเป็น 3 วิธี ได้แก่ การจำแนกดาวเคราะห์ตามวงโคจร, มวลและขนาดของดาวเคราะห์ ในที่นี้ขอกล่าวถึงการจำแนกดาวเคราะห์ตามวงโคจรของดาวเคราะห์เพียงอย่างเดียว การจำแนกดาวเคราะห์ตามวงโคจรของดาวเคราะห์ เราสามารถแบ่งดาวเคราะห์ออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. **ดาวเคราะห์ใน** (inferior planets) ได้แก่ดาวเคราะห์ที่มีรัศมีวงโคจรรอบดวงอาทิตย์น้อยกว่ารัศมีวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ได้แก่ ดาวพุธ (Mercury) และดาวศุกร์ (Venus)



รูปที่ 7.1 ขนาดของดาวเคราะห์ต่าง ๆ เมื่อเทียบกับดวงอาทิตย์

2. ดาวเคราะห์นอก (superior planets) **ได้แก่ดาวเคราะห์ที่มีรัศมีวงโคจรรอบดวงอาทิตย์มากกว่ารัศมีวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ได้แก่ ดาวอังคาร** (Mars), **ดาวพฤหัส** (Jupiter), **ดาวเสาร์** (Saturn), **ดาวยูเรนัส** (Uranus), **ดาวเนปจูน** (Neptune) **และดาวพลูโต** (Pluto)



รูปที่ 7.2 แสดงตำแหน่งของดาวเคราะห์ (ก) ดาวเคราะห์ใน (ข) ดาวเคราะห์นอก

เนื่องจากความเร็วของดาวเคราะห์ในวงโคจรรอบดวงอาทิตย์ไม่เท่ากัน ดาวเคราะห์ที่อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด (ได้แก่ดาวพุธ) จะมีความเร็วมากที่สุด และดาวเคราะห์ที่อยู่ไกลจากดวงอาทิตย์มากที่สุด (ได้แก่ดาวพลูโต) จะมีความเร็วน้อยที่สุด ดังนั้นเมื่อสังเกตดาวเคราะห์จากโลกเราจึงเห็นดาวเคราะห์มีตำแหน่งต่าง ๆ (รูปที่ 7.2) ดังนี้

ตำแหน่งร่วม (conjunction) คือตำแหน่งที่โลก, ดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ตำแหน่งร่วมแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

ก. ตำแหน่งร่วมนอก (superior conjunction) เกิดขึ้นเมื่อดวงอาทิตย์อยู่ระหว่างดาวเคราะห์กับโลก ดาวเคราะห์ทุกดวงจะมีตำแหน่งร่วมนอกได้เสมอ

ข. ตำแหน่งร่วมใน (inferior conjunction) เกิดขึ้นเมื่อดาวเคราะห์อยู่ระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ ดังนั้นดาวเคราะห์ที่จะมีตำแหน่งร่วมในได้จะต้องเป็นดาวเคราะห์ในเท่านั้น

ตำแหน่งตรงข้าม (opposition) หมายถึงดาวเคราะห์ปรากฏอยู่ที่ตำแหน่งตรงข้ามกับดวงอาทิตย์กล่าวคือโลก, ดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดยที่โลกอยู่ระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์ ดังนั้นดาวเคราะห์ที่จะเกิดตำแหน่งตรงข้ามได้เฉพาะดาวเคราะห์นอกเท่านั้น

มุมตำแหน่งดาวเคราะห์ (elongation) หมายถึงมุมระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์ (โดยทั่วไปได้แก่ดาวศุกร์และดาวพุธ) หรือระหว่างดาวเคราะห์กับดาวบริวารของมันที่เห็น

จากโลก เราสามารถอธิบายได้ง่าย ๆ ดังนี้ เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากโลกถึงดวงอาทิตย์กับเส้นตรงที่ลากจากดาวเคราะห์ถึงโลก ในกรณีที่ดาวเคราะห์ปรากฏที่ตำแหน่งร่วม ดาวเคราะห์จะมีค่ามุมตำแหน่งดาวเคราะห์เท่ากับ 0^o, ถ้าดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งตรงข้าม ดาวเคราะห์จะมีค่ามุมตำแหน่งดาวเคราะห์เท่ากับ $180°$ และสำหรับดาวเคราะห์ในจะมีค่ามุมตำแหน่งดาวเคราะห์ตั้งแต่ 0^o จนถึงค่ามุมตำแหน่งสูงสุด (ค่ามุมตำแหน่งสูงสุดขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของรัศมีวงโคจรของดาวเคราะห์ต่อรัศมีวงโคจรของโลก เช่น ค่ามุมตำแหน่งสูงสุดของดาวพุธ = $28°$ และของดาวศุกร์ = $48°$)

ตำแหน่งมุมฉาก (quadrature) หมายถึงค่ามุมตำแหน่งของดาวเคราะห์เท่ากับ $90°$ ดังนั้นดาวเคราะห์นอกเท่านั้นที่จะมีตำแหน่งมุมฉากได้ จากรูปที่ 7.2 (ข) ตำแหน่งมุมฉากมี 2 ชนิดคือ ตำแหน่งมุมฉากตะวันตก (western quadrature) กับตำแหน่งมุมฉากตะวันออก (eastern quadrature)

เมื่อดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งร่วม ตำแหน่งของดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์จะปรากฏที่เดียวกันเมื่อสังเกตบนโลก

ถ้าดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งตรงข้าม ตำแหน่งของดาวเคราะห์จะปรากฏตรงข้ามกับดวงอาทิตย์พอดี นั่นคือเราจะสังเกตเห็นดาวเคราะห์ปรากฏบนเส้นเมริเดียนส่วนบน หรือเส้นเมริเดียนของผู้สังเกตเมื่อเวลาเที่ยงคืนปรากฏ

คาบเวลาซินนอดิก (Synodic period) หมายถึงช่วงระยะเวลาของดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งเมื่อเทียบกับโลกและดวงอาทิตย์ (เช่น ดาวเคราะห์, โลกและดวงอาทิตย์ปรากฏอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน) แล้วโคจรกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับที่เริ่มต้นอีกครั้งหนึ่ง ตัวอย่างเช่น ดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งร่วมในหรือตำแหน่งตรงข้าม ช่วงระยะเวลาที่ดาวเคราะห์โคจรกลับมาที่ตำแหน่งเดิมอีกครั้งหนึ่งเรียกว่าคาบเวลาซินนอดิก การวัดคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์มีความยุ่งยากมากเพราะว่าโลกและดาวเคราะห์มีการเคลื่อนที่ตลอดเวลา ในกรณีที่รู้คาบเวลาซินนอดิกของดาวเคราะห์ เราสามารถคำนวณหาคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์ได้โดยใช้สมการง่าย ๆ ดังนี้

สำหรับดาวเคราะห์ใน

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$$

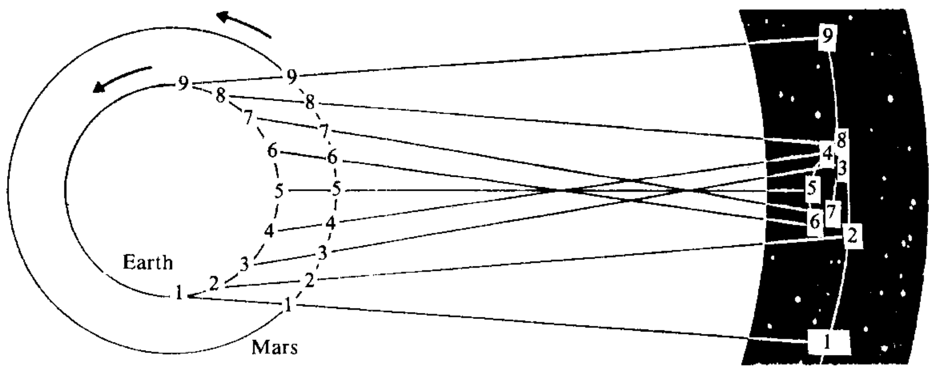
สำหรับดาวเคราะห์นอก

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \qquad (7.1)$$

เมื่อ S = คาบเวลาซินนอดิกของดาวเคราะห์

E = คาบเวลาดาราคติของโลก

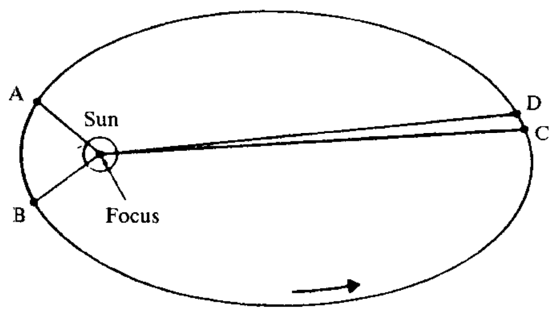
P = คาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์



รูปที่ 7.3 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ถอยหลังของดาวอังคารเมื่อสังเกตจากโลก

การเคลื่อนที่ถอยหลัง (retrograde motion) ดาวเคราะห์ทุกดวงโคจรรอบดวงอาทิตย์ไปในทิศทางเดียวกัน ถ้ามองที่ขั้วเหนือของระนาบของเส้นสุริยวิถีดาวเคราะห์โคจรไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา แต่ถ้าเรามองดูดาวเคราะห์บนท้องฟ้าทุก ๆ คืนเราจะสังเกตเห็นว่าตำแหน่งของดาวเคราะห์มีการเปลี่ยนแปลงทุกคืนเมื่อเทียบกับดาวฤกษ์ที่อยู่เบื้องหลัง บางขณะจะสังเกตเห็นเสมือนว่าดาวเคราะห์หยุดนิ่งเสร็จแล้วจะเคลื่อนที่ย้อนกลับไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะเวลาหนึ่งแล้วดาวเคราะห์ก็จะเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันออกตามเดิม (ดูรูปที่ 7.3) การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ไปทางทิศตะวันออกเรียกว่าการเคลื่อนที่ปกติ (prograde motion) ส่วนการเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันตกหรือเคลื่อนที่ย้อนกลับเรียกว่าการเคลื่อนที่ถอยหลัง เช่น กรณีทางเดินปรากฏของดาวอังคารตามรูปที่ 7.3

7.3 กฎของเคปเลอร์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์



รูปที่ 7.4

โจฮันเนส เคปเลอร์ (Johannes Kepler, ค.ศ. 1571-1630) ทำหน้าที่เป็นผู้ช่วยของไทโค บราเฮ เมื่อไทโค บราเฮเสียชีวิตในปี ค.ศ. 1601 ผลงานทั้งหมดที่ไทโค บราเฮบันทึกเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์บนท้องฟ้าได้มอบให้กับเคปเลอร์ เคปเลอร์ได้ทำการศึกษาอย่างละเอียด พบว่าทฤษฎีของโคเปอร์นิคัสไม่สามารถทำนายตำแหน่งของดาวเคราะห์ได้ถูกต้องแม่นยำเมื่อเทียบกับตำแหน่งต่าง ๆ ของดาวเคราะห์ที่วัดโดยไทโค บราเฮ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1609 ถึง 1619 เคปเลอร์ได้ตั้งกฎเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ขึ้นมา 3 ข้อ คือ

กฎข้อที่ 1 "ดาวเคราะห์ทุกดวงโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรีโดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่งของรูปวงรี"

กฎข้อที่ 2 "เส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างดาวเคราะห์และดวงอาทิตย์จะกวาดพื้นที่ในอวกาศเท่ากันในช่วงระยะเวลาเท่ากัน"

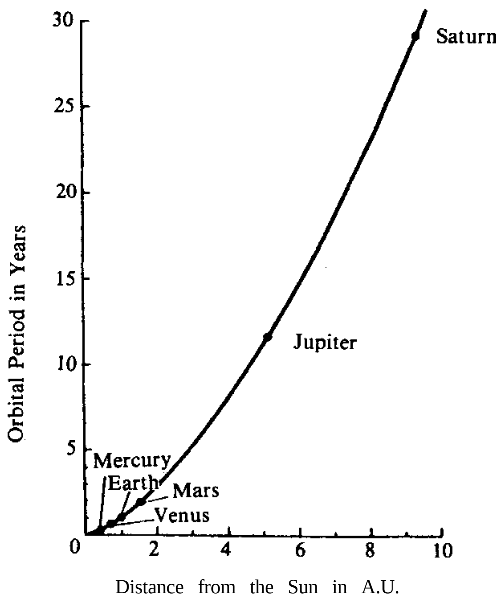
กฎข้อที่ 3 "คาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์ยกกำลังสองจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะครึ่งแกนยาวของวงโคจรของดาวเคราะห์ (หรือระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์จากดวงอาทิตย์) ยกกำลังสาม"

ให้ P เป็นคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์

a เป็นระยะทางเฉลี่ย (หรือระยะครึ่งแกนยาว) ของดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์

จากกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์จะได้ว่า

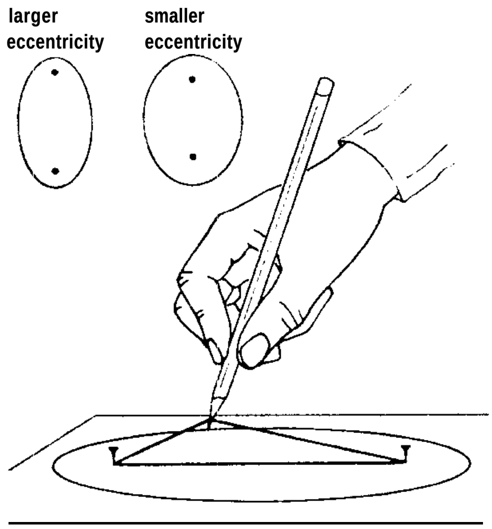
$$P^2 \propto a^3$$



รูปที่ 7.5

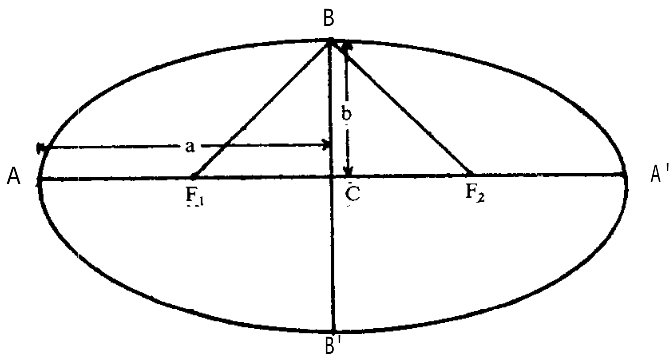
รูปที่ 7.5 เป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์กับขนาดของวงจรโคจรของดาวเคราะห์ เส้นกราฟที่ได้เป็นเส้นราบเรียบแสดงว่าค่าทั้งสองจะต้องมีความสัมพันธ์กัน จากความสัมพันธ์นี้ เคปเลอร์ได้นำลงตีพิมพ์ในหนังสือ "The Harmony of the World" ในปี ค.ศ. 1619 ซึ่งเป็นกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์นั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจถึงคุณสมบัติของรูปวงรี เราสามารถเขียนรูปวงรีได้ง่าย ๆ ดังนี้ (ดูรูปที่ 7.6)



รูปที่ 7.6

ใช้เข็มหมุด 2 เล่มปักบนกระดาษที่จุด F_1 และ F_2 นำด้ายเส้นเล็ก ๆ ยาวพอสมควร (ขึ้นอยู่กับว่าต้องการรูปวงรีมีค่าความรีมากน้อยเท่าใด) ผูกปลายด้ายทั้งสอง แล้วนำไปคล้องลงบนเข็มหมุดทั้งสอง ใช้ดินสอดำรั้งเส้นด้ายให้ตึงแล้วลากดินสอไปบนกระดาษโดยให้เส้นด้ายตึงอยู่เสมอ จะได้รูปวงรีโดยมีจุดที่ปักเข็มหมุดเป็นจุดโฟกัส 2 จุด ได้แก่ จุด F_1 และ F_2



รูปที่ 7.7

จากรูปที่ 7.7 กำหนดให้ AB A′ B′ เป็นรูปวงรีวงหนึ่งโดยมีจุด F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของรูปวงรีรูปนี้

AA′ = แกนยาวของรูปวงรี

BB′ = แกนสั้นของรูปวงรี

a = AC = CA′ = ความยาวครึ่งแกนยาว

หรือ = ระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์

b = BC = CB′ = ความยาวครึ่งแกนสั้น

$$e = \frac{F_1C}{a} = \frac{F_2C}{a} \tag{7.2}$$

e เรียกว่าค่าความรี (Eccentricity)

ถ้า $e = 0$, F_1C มีค่า = 0 นั่นคือวงรีรูปนั้นจะเป็นวงกลม

$0 < e < 1$ รูปที่ได้เป็นรูปวงรี

$e = 1$ รูปที่ได้เป็นรูปพาราโบลา

$e > 1$ รูปที่ได้เป็นไฮเปอร์โบลา

... $F_1B + BF_2 = AA' = 2a$ (ความยาวจากการสร้างรูปวงรี) จากสามเหลี่ยม F_1CB ได้ว่า

$$BC^2 = BF_1^2 = F_1C^2$$

แทนค่า $BC = b$, $BF_1 = a$, $F_1C = ae$ ลงในสมการบนได้

$$b^2 = a^2 - a^2e^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - a^2e^2}$$

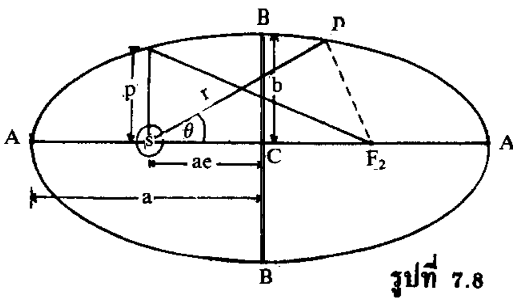
$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{7.3}$$

พื้นที่ของรูปวงรี $= \pi ab$

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2} \tag{7.4}$$

ให้ p เป็นระยะทางตั้งฉากจากจุดโฟกัสจนถึงเส้นรอบวงของรูปวงรี

$$p = a - ae^2 \tag{7.5}$$



รูปที่ 7.8

สมมติดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดวงอาทิตย์ โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดโฟกัสจุดหนึ่งของรูปวงรี (ดังรูปที่ 7.8, ดวงอาทิตย์อยู่ที่ตำแหน่ง F_1)

เมื่อดาวเคราะห์โคจรมาที่ตำแหน่ง A ที่ตำแหน่งนี้ระยะทางจากดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์จะมีระยะทางสั้นที่สุด นั่นคือเมื่อดาวเคราะห์โคจรมาที่ตำแหน่ง A ดาวเคราะห์จะอยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุดที่ตำแหน่งนี้มีชื่อเรียกว่า เพริฮีเลียน (perihelion) (หรือเรียกว่า เพริจี (perigee) เมื่อใช้โลกเป็นจุดศูนย์กลางและดวงอาทิตย์อยู่ใกล้โลกมากที่สุด) และเมื่อดาวเคราะห์โคจรถึงตำแหน่ง A′ ดาวเคราะห์อยู่ไกลจากดวงอาทิตย์มากที่สุด เรียกตำแหน่งนี้ว่า แอฟีเลียน (aphelion) (หรือเรียกว่า อะโพจี (apogee) เมื่อใช้โลกเป็นจุดศูนย์กลางและดวงอาทิตย์อยู่ไกลจากโลกมากที่สุด) จากรูปที่ 7.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\text{ระยะทางเพริฮีเลียน} &= AF_1 \\
&= a - ae \\
&= a(1-e) \\
&= \frac{p}{1+e} && (7.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ระยะทางแอฟีเลียน} &= F_1A' \\
&= a + ae \\
&= a(1+e) \\
&= \frac{p}{1-e} && (7.7)
\end{aligned}$$

ให้ P เป็นตำแหน่งของดาวเคราะห์ในวงโคจรในขณะใด ๆ (ดูรูปที่ 7.7)

SP เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี ใช้สัญลักษณ์ r

θ = มุมที่รัศมีวงโคจรของดาวเคราะห์ทำกับแกนยาว

ถ้าดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งแอฟีเลียน, $\theta = 0°$

ถ้าดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งเพริฮีเลียน, $\theta = 180°$

จากสามเหลี่ยม S P F_2

$$(PF_2)^2 = (PS)^2 + (SF_2)^2 - 2(PS)(SF_2)\cos\theta$$

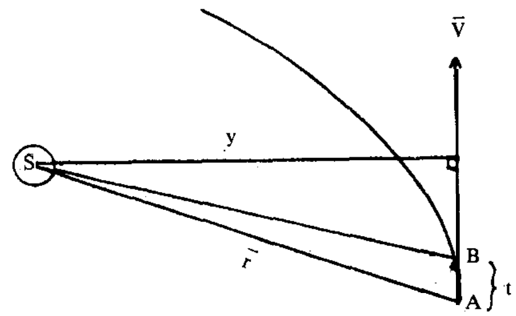
แต่ $PF_2 = 2a - r$, $PS = r$, $SF_2 = 2ae$ และ $p = a - ae^2$ แทนค่าทั้งหมดลงในสมการบนได้

$$(2a-r)^2 = (r)^2 + (2ae)^2 - 2(r)(2ae)\cos\theta$$

$$\therefore\ r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \qquad (7.8)$$

สมการที่ 7.8 เรียกว่าสมการของรูปวงรี (Equation of the ellipse)

7.4 โมเมนตัมเชิงมุมของดาวเคราะห์ในเทอมของความเร็วพื้นที่



รูปที่ 7.9

จากรูปที่ 7.9 ให้ A เป็นตำแหน่งของดาวเคราะห์ในขณะเวลาใด ๆ

V เป็นความเร็วของดาวเคราะห์ที่จุด A

B เป็นตำแหน่งที่ดาวเคราะห์เคลื่อนที่จากจุด A มายังจุด B ในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ t

m เป็นมวลของดาวเคราะห์

y เป็นระยะทางตั้งฉาก (จากดวงอาทิตย์ถึงตำแหน่งของดาวเคราะห์)

$$J = mV \cdot y \qquad (7.9)$$

เมื่อ J คือโมเมนตัมเชิงมุมของดาวเคราะห์

ถ้าให้ระยะเวลาที่ดาวเคราะห์เคลื่อนที่จากจุด A ไป B = 1 หน่วยเวลาจะได้ว่าระยะทาง AB = V

พื้นที่ของสามเหลี่ยม SAB $= \frac{1}{2}VY$

ให้ $\mathscr{A} = \frac{1}{2}VY$

$\mathscr{A}$ เรียกว่า ความเร็วพื้นที่ (Areal velocity) ของดาวเคราะห์ หมายความว่าพื้นที่ที่ดาวเคราะห์กวาดได้ ในเวลา 1 หน่วยเวลา

จากกฎข้อที่ 2 ของเคปเลอร์ *ค่า $\mathscr{A}$ จะมีค่าคงที่เสมอ สำหรับดาวเคราะห์ดวงหนึ่ง ๆ*

แทนค่า $\mathscr{A}$ ลงในสมการที่ (7.9) จะได้ว่า

$$J = 2m\mathscr{A} \tag{7.10}$$

สมการที่ (7.10) จะเห็นได้ว่าค่ามวลของดาวเคราะห์มีค่าคงที่ และ $\mathscr{A}$ มีค่าคงที่ ดังนั้น ค่าโมเมนตัมเชิงมุมของดาวเคราะห์มีค่าคงที่เสมอ

7.5 โมเมนตัมเชิงมุมของดาวเคราะห์ในเทอมของคาบเวลาดาราคติ

ให้ P = ค่าคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์เมื่อเทียบกับจุดคงที่บนทรงกลมท้องฟ้า

จากพื้นที่ของรูปวงรี $= \pi ab$

แทนค่า a, b ลงในสมการบนจะได้ว่า

$$\text{พื้นที่ของรูปวงรี} = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

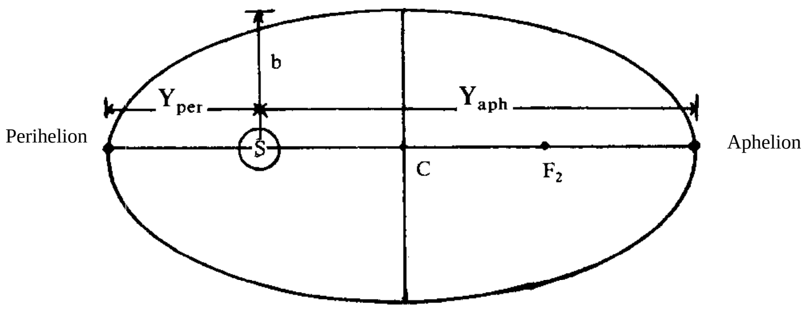
จาก $\mathscr{A}$ = ความเร็วพื้นที่ = พื้นที่ที่ดาวเคราะห์กวาดได้ต่อ 1 หน่วยเวลา

$$\therefore \mathscr{A} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P} \tag{7.11}$$

จะได้ว่า

$$J = \frac{2\pi m a^2\sqrt{1-e^2}}{P} \tag{7.12}$$

7.6 ความเร็วของดาวเคราะห์ในวงโคจรรอบดวงอาทิตย์



รูปที่ 7.10

ให้ V = ความเร็วของดาวเคราะห์ที่ตำแหน่งในวงโคจรใด ๆ

y = ระยะทางที่ตั้งฉากจากดวงอาทิตย์ถึงตำแหน่งของดาวเคราะห์

จาก $\mathscr{A} = \frac{1}{2}Vy$

$$V = \frac{2\mathscr{A}}{y}$$

จากสมการที่ (7.11) แทนค่าลงในสมการบนจะได้

$$V = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{Py} \tag{7.13}$$

ความเร็วของดาวเคราะห์ที่ตำแหน่งเพริฮีเลียน

y_{per} = ระยะทางเพริฮีเลียน

$$y_{per} = a(1-e)$$

แทนค่า y_{per} ลงในสมการที่ (7.13) ได้

$$V_{per} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{Pa(1-e)}$$

$$V_{per} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{7.14}$$

ความเร็วของดาวเคราะห์ที่ตำแหน่งแอฟีเลียน

Y_{aph} = ระยะทางแอฟีเลียน

$$= a(1+e)$$

แทนค่า Y_{aph} ลงในสมการที่ (7.13) ได้

$$V_{aph} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{Pa(1+e)}$$

$$V_{aph} = \frac{2na}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tag{7.15}$$

ความเร็วของดาวเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดปลายครึ่งแกนสั้น

y_{sem} = ระยะทางครึ่งแกนสั้น

$$= b$$

$$= a\sqrt{1-e^2}$$

แทนค่า y_{sem} ลงในสมการที่ (7.13) ได้

$$V_{sem} = \text{ความเร็วที่จุดระยะทางครึ่งแกนสั้น}$$

$$= \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{Pa\sqrt{1-e^2}}$$

$$= \frac{2\pi a}{P} \qquad (7.16)$$

การหาค่าความเร็วของดาวเคราะห์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ โดยใช้สมการที่ (7.13) นั้นจะเห็นได้ว่า การหาค่า y จะมีความยุ่งยากมาก เพื่อความสะดวกจึงนิยมหาความเร็วของดาวเคราะห์ในรูปของสมการทั่ว ๆ ไปดังนี้

$$V^* = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-2e\cos\theta+e^2}{1-e^2}} \qquad (7.17)$$

เมื่อ θ = มุมที่รัศมีวงโคจรของดาวเคราะห์ทำกับแกนยาว ในกรณีที่ดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งเพริฮีเลียน ; $\theta = 180°$, $\therefore \cos 180° = -1$

แทนค่า cos 180° ลงในสมการที่ (7.17) ได้

$$V_{per} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-2e(-1)+e^2}{1-e^2}}$$

$$= \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

ในกรณีที่ดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งแอฟีเลียน ; $\theta = 0°$, $\cos 0° = 1$ แทนค่าลงในสมการที่ (7.17) ได้

$$V_{aph} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-2e+e^2}{1-e^2}}$$

$$= \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

*Smith, Elske V.P, Jacobs, Kenneth C. "Introductory Astronomy and Astrophysics", P. 48, WB Saunders Company Philadelphia London Toronto. 1973.

ในกรณีที่ดาวเคราะห์อยู่ที่ตำแหน่งระยะทางครึ่งแกนสั้น,

จากรูป
$$\cos\theta = \frac{ae}{a} = e$$

แทนค่าลงในสมการที่ (7.17) ได้

$$v_{sem} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-2e(e)+e^2}{1-e^2}}$$

$$= \frac{2\pi a}{P}$$

ในบางครั้งการหาความเร็วของดาวเคราะห์ในรูปของพิกัดโพลา (Polar Co-ordinate) มีความสะดวกมากกว่า จากสมการที่ (7.8) และแทนค่า P ลงในสมการที่ (7.8) ได้

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$$

$$1-e\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{r}$$

$$2\ e\cos\theta = 2-\frac{2a(1-e^2)}{r}$$

แทนค่า $2\ e\cos\theta$ ลงในสมการที่ (7.17) ได้

$$V = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-2+\frac{2a(1-e^2)}{r}+e^2}{1-e^2}}$$

$$V = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{\frac{2a(1-e^2)}{r}-(1-e^2)}{1-e^2}}$$

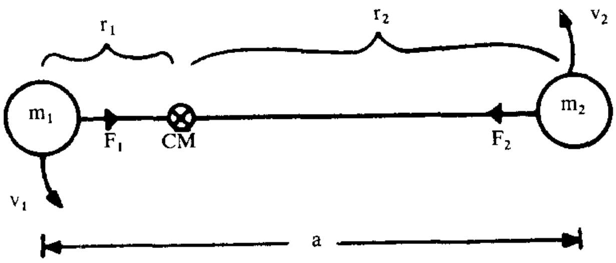
$$V = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{2a}{r}-1}$$

$$V = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}} \qquad (7.18)$$

7.7 การพิสูจน์กฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์โดยใช้กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

กฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์กล่าวว่า "กำลังสองของคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับกำลังสามของระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์" จะได้ว่า $P^2 \propto a^3$

นิวตัน (Newton) ได้พิสูจน์กฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์โดยใช้กฎความโน้มถ่วงดังนี้



รูปที่ 7.11

รูปที่ 7.11

ให้ m_1 เป็นมวลของดวงอาทิตย์

m_2 เป็นมวลของดาวเคราะห์ที่โคจรรอบดวงอาทิตย์

CM เป็นจุดศูนย์กลางของมวลที่ดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์หมุนรอบจุด CM โดยมีรัศมี r_1 และ r_2 ตามลำดับ

F_1 และ F_2 เป็นแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์ และดาวเคราะห์โดยมีทิศทางตามเส้นกึ่งกลางของวัตถุทั้งสอง

P เป็นค่าคาบเวลาดาราคติของดาวเคราะห์และดวงอาทิตย์ที่โคจรรอบ CM โดยที่ดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V_1 และ V_2 ตามลำดับ

จากแรงสู่ศูนย์กลางของวัตถุทั้งสองเข้าสู่ CM และ $V = \frac{2\pi r}{P}$ จะได้

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2} \tag{7.19}$$

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2} \tag{7.20}$$

กฎข้อที่ 3 ของนิวตันได้ $F_1 = F_2$ ดังนั้นสมการที่ (7.19) และ (7.20) ได้ว่า

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{7.21}$$

เนื่องจากมวลของดาวเคราะห์เมื่อเทียบกับมวลของดวงอาทิตย์จะเห็นได้ว่า มวลของดาวเคราะห์มีค่าน้อยมาก ๆ จนถือว่า $m_1 = m_1 + m_2$ และรัศมี r_1 ของดวงอาทิตย์กับรัศมีของดาวเคราะห์ $(a = r_1 + r_2)$ จะเห็นได้ว่า

เมื่อมวลของดวงอาทิตย์มีค่า >>> มวลของดาวเคราะห์ $\therefore r_2 = a$ แทนค่า m_1 และ r_2 ลงในสมการที่ (7.21) จะได้

$$r_1 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \tag{7.22}$$

จากกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน $F_{grav} = F_1 = F_2$ จะได้

$$F_{grav} = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \qquad (7.23)$$

เมื่อ G = ค่าความโน้มถ่วงจักรวาล

จากสมการที่ (7.19), (7.22) และ (7.23) เขียนใหม่ได้ว่า

$$P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\right]a^3 \qquad (7.24)$$

นั่นคือ $P^2 \propto a^3$ เมื่อ $\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$ เป็นค่าคงที่

หมายเหตุ ถ้า a มีหน่วยเป็น เอ.ยู., P มีหน่วยเป็นปี, ค่า $\frac{4\pi^2}{G}$ จะมีค่าเป็น 1