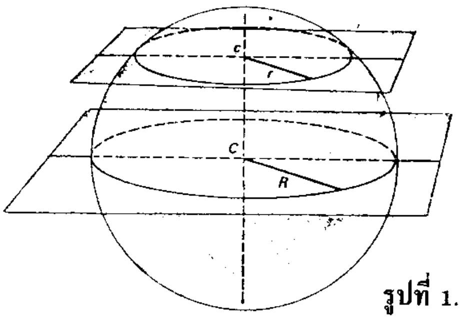
บทที่ 1
ตรีโกณมิติทรงกลม

1.1 บทนำ

ในคืนเดือนมืดสนิทท้องฟ้าปราศจากเมฆ, หมอก, ควัน, แสงไฟฟ้าจากแหล่งชุมชน ถ้าเรามองดูท้องฟ้าด้วยตาเปล่าเราจะเห็นเทห์ฟากฟ้าต่าง ๆ ส่องแสงระยิบระยับเต็มไปหมด โดยที่เราไม่สามารถแยกได้ว่าเทห์ฟากฟ้าดวงใดอยู่ใกล้หรือไกลจากเรา ลักษณะที่เห็นเสมือนว่าเทห์ฟากฟ้าเหล่านี้ติดอยู่บนพื้นผิวของภาชนะทรงกลมขนาดใหญ่มหึมาใบหนึ่ง โดยอยู่ห่างจากเรา (ซึ่งเป็นผู้สังเกต) เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน ภาชนะนี้มีชื่อเรียกว่า*ทรงกลมท้องฟ้า* (celestial sphere) รัศมีของทรงกลมท้องฟ้ามีค่าเท่ากับอนันต์หรือเท่ากับระยะทางที่แสงสามารถเดินทางมาถึงเรา เพื่อความสะดวกเรา*กำหนดให้รัศมีของทรงกลมท้องฟ้ายาวเท่ากับหนึ่งหน่วยความยาว* ก่อนที่นักวิทยาศาสตร์สามารถพัฒนาการใช้เรดาร์วัดระยะทางของดาวเคราะห์ได้โดยตรงนั้น เราไม่สามารถวัดระยะทางของเทห์ฟากฟ้าได้โดยตรง อย่างไรก็ตามการใช้คลื่นเรดาร์ยังมีขอบเขตจำกัด กล่าวคือนักวิทยาศาสตร์สามารถวัดระยะทางของดาวเคราะห์เท่านั้น เทห์ฟากฟ้าที่อยู่นอกระบบสุริยะจะไม่สามารถใช้วิธีนี้ได้ เพื่อความสะดวกในการหาตำแหน่งของเทห์ฟากฟ้าเราจะละเลยถึงระยะทางของเทห์ฟากฟ้าแต่ให้เทห์ฟากฟ้าเหล่านี้ติดอยู่บนพื้นผิวทรงกลมท้องฟ้าโดยมีตัวของเราเป็นผู้สังเกต เราสามารถวัดระยะทางเชิงมุมที่รองรับเทห์ฟากฟ้าเป็นคู่ ๆ ได้โดยใช้เครื่องมือที่เหมาะสม ระยะทางเชิงมุมเหล่านี้สามารถวัดได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นดาราศาสตร์ทรงกลม (spherical astronomy) จึงเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับทิศทางที่เทห์ฟากฟ้าปรากฏอยู่

1.2 สามเหลี่ยมทรงกลม



รูปที่ 1.1

ถ้ามีทรงกลมต้นหนึ่งใบเช่นลูกแตงโมนำมีดมาตัดผ่านทรงกลมนี้ เราจะได้ส่วนของทรงกลมสองส่วนโดยที่พื้นผิวของทรงกลมที่มีดตัดผ่านจะเกิดรูปวงกลม 2 รูป (ได้แก่ เส้นรอบวงบนพื้นผิวของทรงกลม) ดังรูปที่ 1.1 ถ้ามีดตัดผ่านทรงกลมโดยไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม วงกลมที่ได้เรียกว่า*วงกลมเล็ก* (small circle) ถ้ามีดตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม วงกลมที่ได้เรียกว่า*วงกลมใหญ่* (great circle) นั่นคือ ไม่ว่าเราจะตัดทรงกลมผ่านจุดศูนย์กลางของมันในทิศทางใดก็ตาม พื้นผิวของทรงกลมที่ถูกตัดจะเป็นวงกลมใหญ่เสมอ ดังนั้น ทรงกลมใบหนึ่งเราสามารถสร้างวงกลมใหญ่ได้เป็นจำนวนอนันต์

วงกลมใหญ่มีคุณสมบัติดังนี้

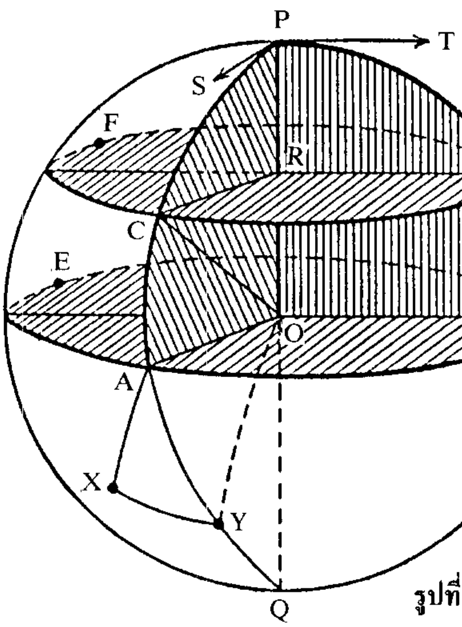
1. จุดศูนย์กลางของวงกลมใหญ่อยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม
2. วงกลมใหญ่จะแบ่งทรงกลมออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนเรียกว่า ครึ่งทรงกลม
3. แต่ละจุดบนวงกลมใหญ่ จะสอดคล้องกับจุดที่อยู่ด้านตรงข้ามของทรงกลม ซึ่งอยู่บนวงกลมใหญ่เหมือนกัน
4. วงกลมใหญ่ทุกวงจะมีขั้วสองขั้ว และอยู่ห่างจากวงกลมใหญ่นั้น 90° เท่า ๆ กันทุกวงและเส้นที่ลากระหว่างขั้วทั้งสองจะตั้งฉากกับระนาบของวงกลมใหญ่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น หรือจุดศูนย์กลางของทรงกลม
5. วงกลมใหญ่ทุก ๆ วงที่ลากผ่านขั้วทั้งสองของวงกลมใหญ่อีกวงหนึ่งจะตั้งฉากกับวงกลมใหญ่นั้น
6. มีเพียงวงกลมใหญ่เพียงวงกลมเดียวที่สามารถลากผ่านจุดสองจุดบนพื้นผิวทรงกลม ยกเว้นจุดทั้งสองอยู่ห่างกัน 180°
7. สามารถสร้างวงกลมใหญ่ จำนวนอนันต์บนพื้นผิวทรงกลมอันหนึ่ง
8. ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวทรงกลม สามารถวัดได้ตามความยาวบนส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่ลากผ่านจุดทั้งสอง

จากรูปที่ 1.2 EAB เป็นวงกลมใหญ่โดยมีจุด 0 เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมและของวงกลมใหญ่ EAB

ให้ POQ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมและตั้งฉากกับระนาบ EAB

ที่จุด R (เป็นจุดใด ๆ อยู่บนเส้น POQ) ลากระนาบ FCD ให้ผ่านจุด R และขนานกับระนาบ EAB ดังนั้น FCD จะเป็นวงกลมเล็กและมีเส้น OP ตั้งฉากกับระนาบ FCD

จุด P และ Q เป็นจุดที่อยู่บนผิวของทรงกลมและอยู่ห่างจากระนาบ EAB เท่ากัน (หรือ 90°) แต่อยู่คนละด้าน จุด P และ Q เรียกว่าขั้วของวงกลมใหญ่ EAB และของวงกลมเล็ก FCD ที่ขนานกับวงกลมใหญ่ EAB



รูปที่ 1.2

ลากวงกลมใหญ่ PCAQ ให้ผ่านขั้ว P, Q และตัดวงกลมเล็ก FCD และวงกลมใหญ่ EAB ที่จุด C และ A ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน ลากวงกลมใหญ่ PDBQ ผ่านจุด P และ Q ตัดวงกลมเล็ก FCD และวงกลมใหญ่ EAB ที่จุด D และ B ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า เมื่อวงกลมใหญ่ 2 วงตัดกัน จะทำให้เกิดมุมโค้งขึ้นมา มุมโค้งนี้เรียกว่า *มุมทรงกลม* (spherical angle)

ที่จุด P ลากเส้นสัมผัส PS และ PT ให้สัมผัสเส้นรอบวง PA และ PB ตามลำดับ เส้น PT จะตั้งฉากกับรัศมี OP ของวงกลมใหญ่ PB และตั้งฉากกับระนาบ PBO ดังนั้น PT จะขนานกับรัศมี OB เช่นเดียวกับ PS จะขนานกับรัศมี OA มุม SPT จะเป็นมุมทรงกลมที่จุด P ระหว่างวงกลมใหญ่ PA และ PB ตัดกัน มุม SPT เท่ากับมุม AOB *นั่นคือมุมทรงกลม เราสามารถนิยามได้ว่า เป็นมุมที่เกิดจากวงกลมใหญ่ 2 วงตัดกัน*

ถ้ามีจุดใด ๆ 3 จุด อยู่บนผิวทรงกลมใบหนึ่ง เราจะสามารถแบ่งทรงกลมออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันโดยให้จุดทั้งสามอยู่บนครึ่งทรงกลมอันใดอันหนึ่งได้ และเมื่อต่อจุดทั้งสามด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ (รูปที่ 1.3) เช่น มีจุด A, X, Y อยู่บนผิวทรงกลมอันหนึ่ง โดยมี*ส่วนโค้ง*

ของวงกลมใหญ่ AX, AY, XY ต่อระหว่างจุดทั้งสาม สามเหลี่ยม AXY เรียกว่า *สามเหลี่ยมฐานโค้ง* (spherical triangle) โดยมี a, x, y เป็นด้านของสามเหลี่ยมฐานโค้ง และมีมุม A, X, Y เป็นมุมของสามเหลี่ยมฐานโค้งที่รองรับด้าน a, x, y

ถ้า R เป็นรัศมีของทรงกลม, ความยาวของส่วนโค้ง AY (ด้าน x) จะมีค่า

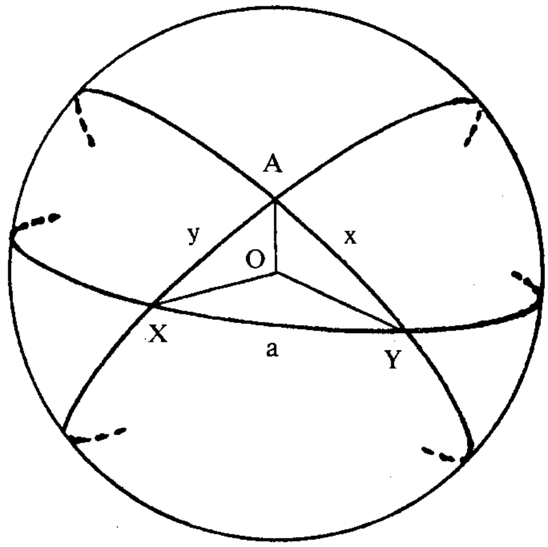
AY = R·มุม AOY

มุม AOY = มุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AY มีหน่วยเป็นเรเดียน

R = รัศมีของทรงกลมจากหัวข้อที่ 1.1 ให้ความยาวของ R = 1 หน่วยความยาว

จะได้ว่า

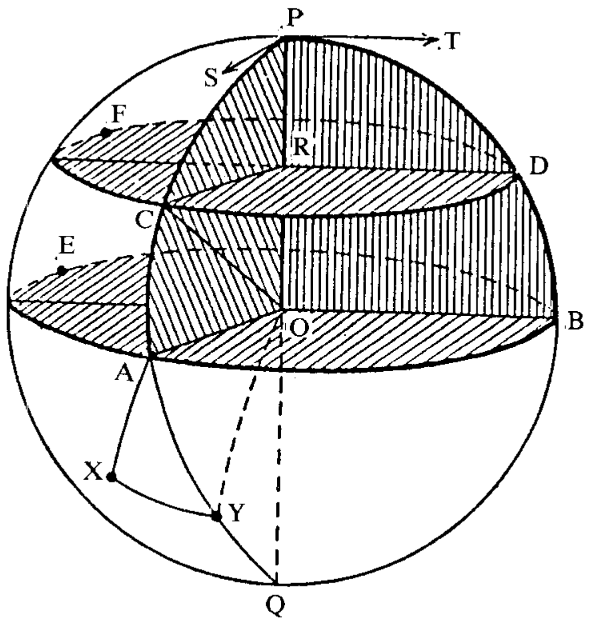
ส่วนโค้ง AY = มุม AOY



รูปที่ 1.3

นั่นคือส่วนโค้ง AY *(หรือด้าน* x*) จะเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง* AY ดังนั้นในบทต่อไป เมื่อพูดถึงความยาวของส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ ก็จะหมายถึงมุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้น จากรูปที่ 1.2 สามเหลี่ยม PCD *ไม่ใช่* สามเหลี่ยมฐานโค้ง เนื่องจากส่วนโค้ง CD ไม่ได้เป็นส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ สูตรต่าง ๆ ที่ได้มาจากการพิสูจน์จากสามเหลี่ยมฐานโค้งจึงใช้ไม่ได้ในกรณีของสามเหลี่ยม PCD

1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างวงกลมเล็กและวงกลมใหญ่



รูปที่ 1.4

จากรูปที่ 1.4 ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมเล็ก CD มีค่า

$$CD = RC \times C\hat{R}D$$

ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AB มีค่า

$$AB = OA \times A\hat{O}B$$

ระนาบ FCD ขนานกับระนาบ EAB $\therefore$ $C\hat{R}D = A\hat{O}B$, RC, RD ขนานกับ OA, OB ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ว่า

$$CD = \frac{RC}{OA} \times AB$$

แต่ OA = OC (รัศมีของทรงกลมเดียวกัน) จะได้

$$CD = \frac{RC}{OC} \times AB$$

$\because$ RC ตั้งฉากกับ OR $\quad \therefore$ $RC = OC \times \cos(R\hat{C}O)$

RC // OA จะได้ว่า $R\hat{C}O = A\hat{O}C$ นั่นคือ

$$CD = AB \times \cos(A\hat{O}C)$$

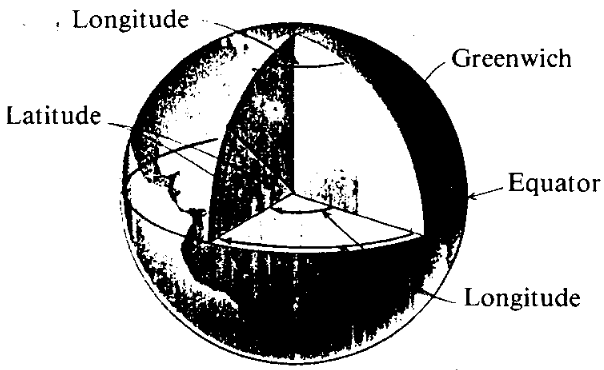
มุม AOC เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ AC จากสมการข้างบนสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} &CD = AB \times \cos AC \\ \text{เนื่องจาก } PA = 90^\circ, \quad &CD = AB \times \sin PC \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

1.4 เส้นละติจูดและเส้นลองจิจูด

ก่อนที่เราจะศึกษาระบบพิกัดจำแนกตำแหน่งของเทห์ฟากฟ้าต่าง ๆ บนท้องฟ้า เราควรทำความเข้าใจกับระบบพิกัดจำแนกตำแหน่งของตำบลต่าง ๆ บนพื้นผิวโลกก่อน เนื่องจากโลกเป็นทรงกลมตัน (โปรดดูรายละเอียดในหมายเหตุท้ายหัวข้อนี้) และทรงกลมท้องฟ้าเป็นทรงกลมกลวงเหมือนกัน ดังนั้น ระบบพิกัดจำแนกตำแหน่งของวัตถุต่าง ๆ จึงมีความคล้ายคลึงกันมาก ค่าพิกัดจำแนกตำแหน่งของตำบลบนพื้นผิวโลกมีสองชนิดคือ ลองจิจูด (longitude : สัญลักษณ์ ℓ หรือ λ) และละติจูด (latitude : สัญลักษณ์ ϕ)

เส้นศูนย์สูตรของโลกเป็นวงกลมใหญ่อยู่บนพื้นผิวของโลกโดยอยู่ห่างจากขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้เท่า ๆ กัน (เท่ากับ 90°) ขอให้เราจินตนาการว่ามีชุดของวงกลมใหญ่ลากจากขั้วโลกเหนือไปขั้วโลกใต้ วงกลมเหล่านี้มีชื่อเรียกว่า *เส้นเมริเดียน* (meridian) และตัดเส้นศูนย์สูตรเป็นมุมฉาก เส้นเมริเดียนที่ผ่านตำบลกรีนิช (Greenwich) ในประเทศอังกฤษ ซึ่งเป็นสถานที่ตั้งหอดูดาวหลวงเก่า (old royal observatory) เส้นเมริเดียนนี้มีชื่อเรียกพิเศษว่าเส้นเมริเดียนปฐม (prime meridian) หรือเส้นเมริเดียนหลัก (principal meridian) หรือเส้นเมริเดียนมาตรฐาน (standard meridian) หรือเส้นเมริเดียนของกรีนิช (meridian of Greenwich) เส้นเมริเดียนที่อยู่ตรงข้ามกับเส้นเมริเดียนของกรีนิชเรียกว่าเส้นวันที่ (International Date Line) เราสามารถนิยามค่าลองจิจูดและค่าละติจูดได้ง่าย ๆ ดังนี้



รูปที่ 1.5 แสดงค่าละติจูดและลองจิจูดบนพื้นผิวโลก

ค่าลองจิจูดของตำบลใด ๆ หมายถึง ระยะทางเชิงมุมวัดไปตามเส้นศูนย์สูตรจากเส้นเมริเดียนของกรีนิชจนถึงเส้นเมริเดียนที่ผ่านตำบลนั้น ๆ หน่วยเป็นองศา, ลิปดา และวิลิปดา เส้นเมริเดียนของกรีนิชมีค่าลองจิจูดเท่ากับศูนย์องศา สำหรับตำบลต่าง ๆ มีค่าลองจิจูดดังนี้

ลองจิจูดมีค่า $0°$ ถึง $180°E$ (หรือ $+180°$) ถ้าตำบลนั้นอยู่ทางทิศตะวันออกของเส้นเมริเดียนของกรีนิช

ลองจิจูดมีค่า $0°$ ถึง $180°W$ (หรือ $-180°$) ถ้าตำบลนั้นอยู่ทางทิศตะวันตกของเส้นเมริเดียนของกรีนิช

ค่าละติจูดของตำบลใด ๆ หมายถึงค่าระยะทางเชิงมุมทางเหนือหรือใต้จากเส้นศูนย์สูตรโดยวัดไปตามเส้นเมริเดียนขึ้นหรือลงจากเส้นศูนย์สูตรจนถึงตำบลนั้น ๆ หน่วยเป็นองศา, ลิปดา และวิลิปดา เส้นศูนย์สูตรมีค่าละติจูดเท่ากับศูนย์องศา ที่ขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้มีค่าละติจูดเท่ากับ $90°N$ (หรือ $+90°$) และ $90°S$ (หรือ $-90°$) ตามลำดับ สำหรับตำบลต่าง ๆ มีค่าละติจูดดังนี้

ละติจูดมีค่า $0°$ ถึง $90°N$ (หรือ $+90°$) ถ้าตำบลนั้นอยู่ทางซีกโลกภาคเหนือ

ละติจูดมีค่า $0°$ ถึง $90°S$ (หรือ $-90°$) ถ้าตำบลนั้นอยู่ทางซีกโลกภาคใต้

ตัวอย่างเช่น กรุงเทพฯ มีค่าลองจิจูด $100° 32'$ ตะวันออก, ละติจูด $13° 45'$ เหนือ หมายความว่า กรุงเทพฯอยู่บนเส้นเมริเดียนที่ $100° 32'$ ตะวันออกจากเส้นเมริเดียนของกรีนิช และอยู่เหนือเส้นศูนย์สูตรไปตามเส้นเมริเดียนที่ $100° 32'$ ตะวันออกเท่ากับ $13° 45'$ จะเห็นได้ว่าระบบพิกัดจำแนกตำแหน่งของตำบลต่าง ๆ บนพื้นผิวโลกเกี่ยวข้องกับวงกลมใหญ่หลักสองวง คือ เส้นเมริเดียนของกรีนิช และเส้นศูนย์สูตร

ละติจูดร่วม (colatitude) เป็นระยะทางเชิงมุมจากขั้วโลกเหนือหรือใต้จนถึงตำบลที่เราต้องการ จะเห็นได้ว่า

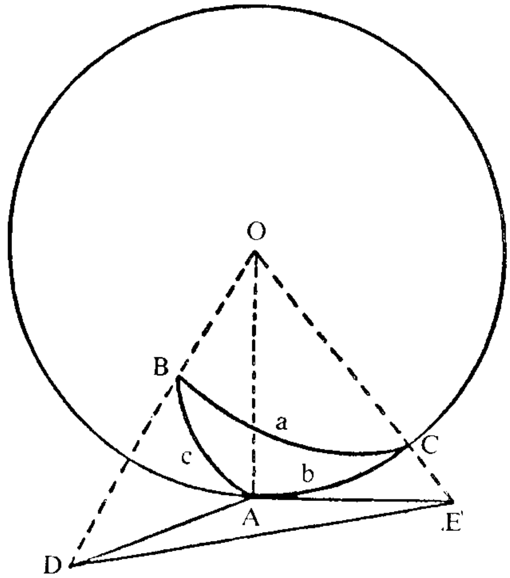
$$\text{ละติจูดร่วม} = 90° - \text{ค่าละติจูด} \tag{1.2}$$

หมายเหตุ ลักษณะสัณฐานของโลกเป็นแบบทรงกลมแป้น (oblate spheroid) กล่าวคือ ตรงกลางจะโป่ง (นูน) ออกมามากกว่าที่บริเวณขั้วโลกเล็กน้อย รัศมีที่เส้นศูนย์สูตร = 6,378.2 กิโลเมตร รัศมีที่ขั้วของโลก = 6,356.8 กิโลเมตร รัศมีที่เส้นศูนย์สูตรมากกว่ารัศมีที่ขั้วโลก = 21.4 กิโลเมตร หน่วยระยะทางบนพื้นผิวโลกสามารถกำหนดได้โดยส่วนโค้งความยาวของวงกลมใหญ่ที่ผ่านระหว่างจุด 2 จุด ซึ่งรองรับด้วยมุมที่จุดศูนย์กลางเศษหนึ่งส่วนหกสิบองศา ความยาวของส่วนโค้งนี้เรียกว่าหนึ่งไมล์ทะเล, 1 ไมล์ทะเลยาวเท่ากับ 6,080 ฟุต

1.5 สูตรหลัก

ในการคำนวณหาค่าด้านและมุมของสามเหลี่ยมทรงกลมนั้น สูตรที่ใช้มีอยู่หลายสูตรด้วยกัน แต่มีเพียง 3 สูตร ที่ใช้เป็นสูตรหลักในการคำนวณ สูตรทั้งสามคือ สูตรโคซาย (Cosine formula), สูตรซาย (Sine formula) และสูตรผสม ในการพิสูจน์หาสูตรหลักดังกล่าว มีหลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวเพียงวิธีเดียว

1.5.1 สูตรโคซาย



รูปที่ 1.6

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมทรงกลม (รูปที่ 1.6) โดยมีมุม A, B และ C แทนมุม BAC, ABC และ ACB ตามลำดับ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลม

ด้าน a, b และ c แทนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ จากหัวข้อที่ 1.2 จะได้ว่า

$$a = B\hat{O}C$$

$$b = A\hat{O}C$$

$$c = A\hat{O}B$$

ให้ AD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมใหญ่ AB ที่จุด A

AE เป็นเส้นสัมผัสวงกลมใหญ่ AC ที่จุด A

จะได้ว่ารัศมี OA ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส AD และ AE

สร้าง AD ให้อยู่ในระนาบของวงกลมใหญ่ AB, ลากรัศมี OB และต่อ OB ออกไปตัดเส้นสัมผัส AD ที่จุด D ในทำนองเดียวกัน ลากรัศมี OC และต่อ OC ออกไปตัดเส้นสัมผัส AE ที่จุด E ลากเส้น DE ดังนั้น

AD อยู่ในระนาบเดียวกับส่วนโค้ง AB หรือระนาบ AOB

AE อยู่ในระนาบเดียวกับส่วนโค้ง AC หรือระนาบ AOC

DE อยู่ในระนาบเดียวกับส่วนโค้ง BC หรือระนาบ BOC

เนื่องจากมุมทรงกลม BAC เป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัส AB และ AC ที่จุด A

$\therefore$ มุมทรงกลม $BAC = D\hat{A}E$

แต่มุมทรงกลม $BAC = A$

$\therefore \quad A = D\hat{A}E$

ในระนาบสามเหลี่ยม OAD, $O\hat{A}D = 90^\circ, A\hat{O}D = A\hat{O}B = c$ จะได้ว่า

$$AD = OA \tan c,\ OD = OA \sec c \tag{1.3}$$

ในระนาบสามเหลี่ยม O A E , $O\hat{A}E = 90^\circ, A\hat{O}E = A\hat{O}C = b$ จะได้ว่า

$$AE = OA \tan b,\ OE = OA \sec b \tag{1.4}$$

จากระนาบสามเหลี่ยม D A E จะได้

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2\,AD \cdot AE \cos D\hat{A}E$$

จากสมการที่ (1.3), (1.4) แทนค่าลงในสมการบนจะได้ว่า

$$DE^2 = OA^2(\tan^2 c + \tan^2 b \quad 2 \tan b \tan c \cos A) \tag{1.5}$$

จากระนาบสามเหลี่ยม D O E

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos D\hat{O}E$$

แต่ $\quad D\hat{O}E = B\hat{O}C = a$

$$DE^2 = OA^2(\sec^2 c + \sec^2 b \quad 2 \sec b \sec c \cos a) \tag{1.6}$$

จากสมการที่ (1.5), **(1.6)** จะได้ว่า

$$\sec^2 c + \sec^2 b \quad 2\sec b \sec c \cos a = \tan^2 c \tan^2 b - 2 \tan b \tan c \cos A$$

เนื่องจาก $\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$ และ $\sec^2 b = 1 + \tan^2 b$ แทนค่าลงในสมการบนแล้วจัดสมการใหม่จะได้ว่า

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{A}$$

ในทำนองเดียวกัน ในสามเหลี่ยมทรงกลม ABC ก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \tag{1.7}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \tag{1.8}$$

หมายเหตุ

1. ในสามเหลี่ยมทรงกลม สูตรโคซายจะใช้ได้ เมื่อโจทย์กำหนด ด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมทรงกลม และมุมระหว่างด้านทั้งสองเช่นด้าน b, c, A จากสมการ (A) สามารถคำนวณหาด้าน a ได้

2. ถ้าโจทย์กำหนดด้าน 3 ด้านของสามเหลี่ยมทรงกลม จากสมการ (A), (1.7), (1.8) สามารถคำนวณหาค่ามุมทั้งสามของสามเหลี่ยมทรงกลมได้

3. ด้าน a, b, c เป็นความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมทรงกลม มีหน่วยเป็นองศา, ลิปดา, วิลิปดา เพราะเป็นด้านที่รองรับด้วยมุมที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม

4. มุม A, B, C เป็นมุมภายในทรงกลมมีหน่วยเป็น องศา, ลิปดา, วิลิปดา

1.5.2 สูตรซาย

จากสมการ (A) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

สมการบนยกกำลังสอง, จะได้

$$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ แทนค่าลงสมการบน จะได้

$$\sin^2 b \sin^2 c\,(1 - \sin^2 A) = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c \tag{1.9}$$

ให้ X เป็นเลขบวกใด ๆ และให้

$$x^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

จากสมการที่ (1.9) และสมการข้างบน จะได้ว่า

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = X^2$$

จะได้

$$X = \pm \frac{\sin A}{\sin a}$$

ในสามเหลี่ยมทรงกลม, ด้านและมุมของสามเหลี่ยมทรงกลมจะมีค่าน้อยกว่า 180° เสมอ ดังนั้น ค่า $\sin\theta$ มีค่าเป็นบวกเสมอ สำหรับมุม θ ที่อยู่ระหว่าง 0° ถึง 180° ดังนั้นสมการบนจะได้ว่า

$$X = \frac{\sin A}{\sin a}$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$X = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{B}$$

1. สูตรซาย เป็นสูตรที่อาศัยความสัมพันธ์ระหว่างด้านสองด้านของสามเหลี่ยมทรงกลมและมุมสองมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสอง

2. ในการหาค่ามุม A เมื่อกำหนดด้าน a, b และมุม B ของสามเหลี่ยมทรงกลมโดย

$$\sin A = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin b}$$

ค่าของ $\sin A$ ที่ได้จากการคำนวณมีที่น่าสังเกตอย่างหนึ่งก็คือ $\sin(180° - A) = \sin A$ นั่นคือจากสูตร $\sin A$ จะหาค่ามุมออกมาได้ 2 มุม คือมุม A หรือ 180° – A ดังนั้น เราจึงต้องพิจารณาจากรูปของสามเหลี่ยมทรงกลมประกอบว่า ค่ามุมที่ถูกต้องคือมุม A หรือ 180° – A

1.5.3 สูตรผสม

จากสมการที่ (1.7) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c \cos a$$

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A)$$

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos b \cos^2 c - \cos c \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos b(1 - \sin^2 c) - \cos c \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin c \sin a \cos B = \sin^2 c \cos b - \sin b \sin c \cos c \cos A$$

เอา $\sin c$ หารสมการบนตลอดได้

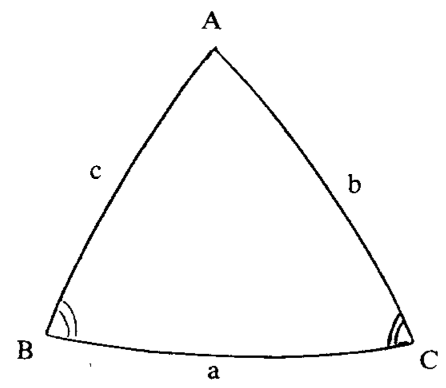
$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \tag{C}$$

สมการบนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างด้านสามด้านของสามเหลี่ยมทรงกลมและมุมภายในสามเหลี่ยมทรงกลมสองมุม

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \qquad (1.10)$$

1.5.4 สูตรสี่-ส่วน (The four-parts formula)



รูปที่ 1.7

สามเหลี่ยมทรงกลม ABC กำหนดมุมและด้านดังนี้ B, a, C, b โดยที่มุม C เป็นมุมที่อยู่ระหว่างด้านสองด้านที่กำหนดให้ คือ ด้าน a และ b ดังรูปที่ 1.7 มุม C มีชื่อเรียกว่า "มุมภายใน (inner angle)" ด้าน a อยู่ระหว่างมุมสองมุม คือ มุม B และ C ตามที่โจทย์กำหนดให้ ด้าน a มีชื่อเรียกว่า "ด้านภายใน (inner side)" จากสูตรโคซายจะได้ว่า

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \qquad (1.11)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad (1.12)$$

นำค่า cos c จากสมการที่ (1.12) แทนลงในสมการที่ (1.11) จะได้

$$\cos b = \cos a\,(\cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C) + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b \sin^2 a = \cos a \sin b \sin a \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

เอา sin a sin b หารตลอดได้

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

จากสูตรซาย, $\dfrac{\sin c}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$

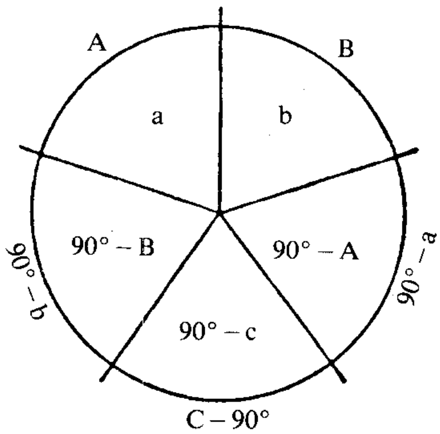
$$\therefore \quad \cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \qquad (D)$$

สูตรนี้มีหลักในการจำง่าย ๆ ดังนี้

cos (ด้านภายใน) $-$ cos (มุมภายใน) = sin (ด้านภายใน)$\cdot$cot (ด้านที่เหลือ) $-$ sin (มุมภายใน)$\cdot$cot (มุมที่เหลือ)

1.5.5 สามเหลี่ยมมุมฉากและสามเหลี่ยมด้านฉาก

ในกรณีที่สามเหลี่ยมทรงกลมมีมุมเป็นมุมฉากหรือมีด้านยาว 90° สามเหลี่ยมทรงกลมที่มีมุมใดมุมหนึ่งเป็นมุมฉากเรียกสามเหลี่ยมทรงกลมชนิดนี้ว่า สามเหลี่ยมมุมฉาก สามเหลี่ยมทรงกลมที่มีด้านใดด้านหนึ่งยาว 90° เรียกสามเหลี่ยมทรงกลมชนิดนี้ว่าสามเหลี่ยมด้านฉาก ในการคำนวณหาด้านและมุมที่เหลือในบางครั้งเราไม่สามารถใช้สูตรต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วหรือไม่สะดวกในการคำนวณ เนเพียร์ (Napier) ได้ตั้งกฎขึ้นมาอย่างง่าย ๆ เพื่อใช้กับสามเหลี่ยมทรงกลมเหล่านี้โดยเฉพาะ



รูปที่ 1.8

1. *สามเหลี่ยมมุมฉาก* ให้มุม C = 90° สร้างวงกลมขึ้นมาวงหนึ่ง แบ่งภายในวงกลมออกเป็น 5 ส่วน แต่ละส่วนจะบรรจุด้วยด้านและมุมต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมทรงกลม ดังนี้ a, b, 90° – A, 90° – c, 90° – B (ดูรูปที่ 1.8) ถ้าเลือกส่วนของวงกลมอันใดอันหนึ่งเป็นหลัก ส่วนนี้จะเรียกว่า "ส่วนกึ่งกลาง (middle)" อีกสองส่วนที่อยู่ติดกับส่วนกึ่งกลาง เรียกว่า "ส่วนประชิด (adjacents)" และอีกสองส่วนที่อยู่ตรงข้ามเรียกว่า "ส่วนตรงข้าม (opposites)" เนเพียร์ตั้งกฎไว้ว่า

sin (ส่วนกึ่งกลาง) = ผลคูณของ tan (ส่วนประชิด)

sin (ส่วนกึ่งกลาง) = ผลคูณของ cos (ส่วนตรงข้าม)

ตัวอย่างเช่นถ้าเลือก 90° – c เป็นส่วนกึ่งกลาง จะได้ว่า

$$\sin(90^\circ - c) = \tan(90^\circ - B)\cdot\tan(90^\circ - A)$$

$$\sin(90^\circ - c) = \cos(a)\cdot\cos(b)$$

หรือถ้าเลือก a เป็นส่วนกึ่งกลางจะได้ว่า

$\sin a \quad = \quad \tan(90° - B) \cdot \tan(b)$

$\sin a \quad = \quad \cos(90° - c) . \cos(90° - A)$

2. *สามเหลี่ยมด้านฉาก* ให้ด้าน $c = 90°$ เสร็จแล้วแบ่งด้านนอกของวงกลมออกเป็น 5 ส่วน แต่ละส่วนบรรจุด้วยด้านและมุมต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมทรงกลม ดังนี้ A, B, $90° - a$, $C - 90°$, $90° - b$ (ดูรูปที่ 1.8) กฎที่ใช้เช่นเดียวกับสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่นเลือก $(C - 90°)$ เป็นส่วนกึ่งกลางจะได้ว่า

$\sin(C - 90°) \quad = \quad \tan(90° - b) \cdot \tan(90° - a)$

$\sin(C - 90°) \quad = \quad \cos(A) \cdot \cos(B)$

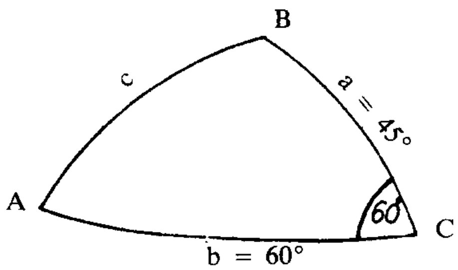
หรือถ้าเลือก A เป็นส่วนกึ่งกลางจะได้ว่า

$\sin(A) \quad = \quad \tan(90° - b) \cdot \tan(B)$

$\sin(A) \quad = \quad \cos(C - 90°) \cdot \cos(90° - a)$

1.6 ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.1 ในสามเหลี่ยมทรงกลม ABC, $a = 45°$, $b = 60°$ และ $C = 60°$ จงคำนวณหาค่า c, A และ B



รูปที่ 1.9

จากสูตรหลัก A

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C$$

แทนค่า

$$\cos c = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45° \cos 60°$$

$$= 0.5 \times 0.707 + 0.866 \times 0.707 \times 0.5$$

$$= 0.3535 + 0.306$$

$$c = 48.^\circ 7$$ **ตอบ**

จากสูตรหลัก B

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

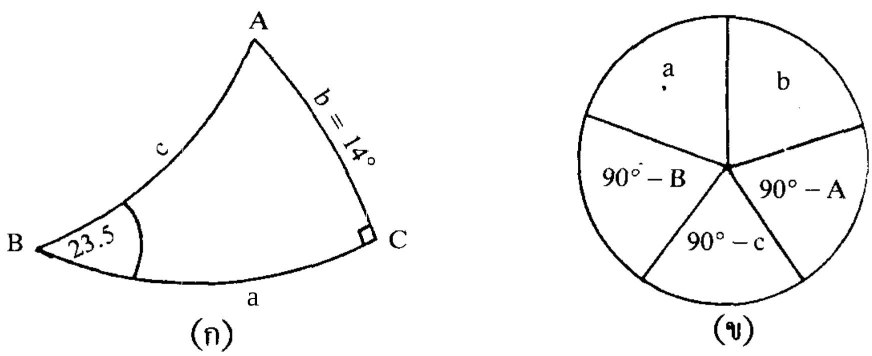
แทนค่า

$$\frac{\sin 45”}{\sin A} = \frac{\sin 60”}{\sin B} = \frac{\sin 48°7}{\sin 60”}$$

. A = 5406

.B = 86°7 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.2 ABC เป็นสามเหลี่ยมทรงกลม มี C = 90°, B = 23°5, b = 14” จงหาค่า a, c และ A



รูปที่ 1.10

สามเหลี่ยมทรงกลม ABC, มีมุม C = 90° จากกฎของเนเพียร์ แบ่งวงกลมออกเป็น 5 ส่วน แต่ละส่วนบรรจุด้วยส่วนของวงกลมตามรูป (ข) จาก

sin (ส่วนกึ่งกลาง) = ผลคูณของ tan (ส่วนประชิด)

$$\sin (a) = \tan (90” - B) . \tan (b)$$

แทนค่า B = 23°5, b = 14” จะได้

$$\sin a = \tan (90° \quad 23°5) \tan 14°$$

$$\sin a = \tan 66°5 \tan 14”$$

$$\sin a = 2.30 \times 0.25 = 0.56$$

$$a = 35°1$$ **ตอบ**

$$\sin (90” - c) = \cos (a) \cdot \cos (b)$$

แทนค่าจะได้

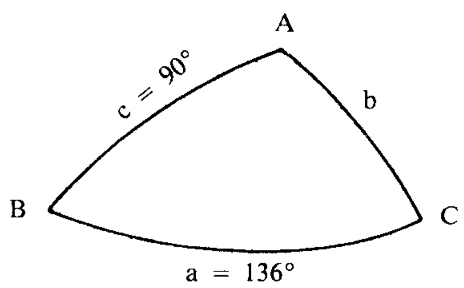
$$\cos c = \cos 35.^\circ 1 \cos 14^\circ$$
$$\cos c = 0.823 \times 0.97$$
$$\cos c = 0.79$$
$$c = 37.^\circ 3$$ **ตอบ**

$$\sin (90^\circ - A) = \cos (a) \cos (90^\circ - B)$$

แทนค่าจะได้

$$\cos A = \cos 35.^\circ 1 \cos 66.^\circ 5$$
$$= 0.82 \times 0.40 = 0.33$$
$$A = 70.^\circ 9$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.3 ในสามเหลี่ยมทรงกลม ABC, $c = 90^\circ$, $B = 62^\circ$ และ $a = 136^\circ$ **จงคำนวณหาค่า** A, C และ b



รูปที่ 1.11

จากสูตรหลัก A

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

แทนค่า $c = 90^\circ$, $a = 13.6^\circ$ และ $B = 62^\circ$

$$\cos b = \cos 136^\circ \cos 90^\circ + \sin 136^\circ \sin 90^\circ \cos 62^\circ$$
$$= 0 + \sin 44^\circ \cos 62^\circ$$
$$= 0.6947 \times 0.4695$$
$$= 0.3261$$
$$b = 70^\circ 58'$$ **ตอบ**

จากสูตรหลัก B

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

จากสูตรหลัก A

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

แทนค่าได้

$$\cos 136^\circ = \cos 70^\circ 58' \cos 90^\circ + \sin 70^\circ 58' \sin 90^\circ \cos A$$

$$-0.7193 = 0 + 0.9453 \cos A$$

$$\cos A = -0.7609$$

$$\cos(180^\circ - A) = 0.7609$$

$$180^\circ - A = 40^\circ 27'$$

$$A = 139^\circ 33'$$

ตอบ

$$\sin C = \frac{\sin B \sin c}{\sin b}$$

แทนค่าได้

$$\sin C = \frac{\sin 62^\circ \sin 90^\circ}{\sin 70^\circ 58'}$$

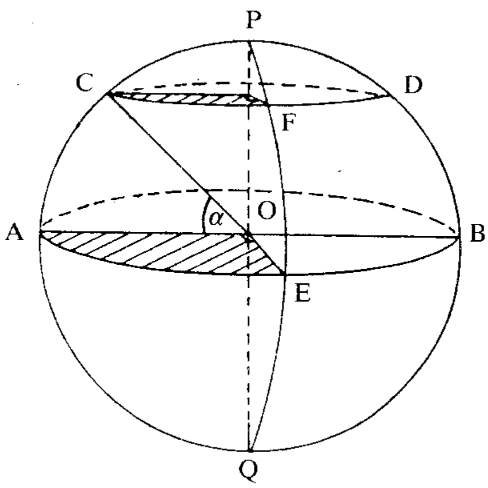
$$= \frac{0.8829}{0.9453}$$

$$= 0.9340$$

$$C = 69^\circ 4'$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.4 สมมติโลกมีลักษณะเป็นทรงกลมจริง และมีเส้นผ่าศูนย์กลาง ณ เส้นศูนย์สูตรเท่ากับ 12,800 กิโลเมตร จงคำนวณหาความยาวของส่วนโค้งบนเส้นศูนย์สูตรและบนเส้นละติจูดขนานที่ 45° เหนือ ซึ่งรองรับมุม ณ จุดศูนย์กลางของระนาบเท่ากับ 90°



รูปที่ 1.12

จากโจทย์โลกมีเส้นผ่าศูนย์กลางที่เส้นศูนย์สูตร = 12,800 กิโลเมตร

$\therefore$ รัศมีของโลก = $\frac{12,800}{2}$ = 6,400 กิโลเมตร

ความยาวของส่วนโค้งบนเส้นศูนย์สูตร = $2\pi R$

เมื่อ R = รัศมีของโลก

$\therefore$ ความยาวของส่วนโค้งบนเส้นศูนย์สูตร = $2 \times \pi \times 6,400$ กิโลเมตร

= $12,800\pi$ กิโลเมตร

$\therefore$ ความยาวของส่วนโค้งบนเส้นศูนย์สูตรที่รองรับด้วยมุม ณ จุดศูนย์กลางของระนาบเท่ากับ 90°

= $\frac{1}{4} \times 12,800\pi$ กิโลเมตร

= $3,200\pi$ กิโลเมตร **ตอบ**

จากความสัมพันธ์ของวงกลมใหญ่และวงกลมเล็ก

$$CF = AE\cos\alpha$$

เมื่อ $AE = 3,200\pi$

$\alpha = 45°$

$$CF = 3,200\pi \cos 45° \text{ กิโลเมตร}$$

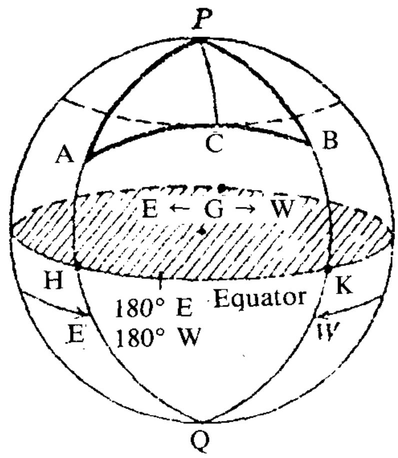
$$= 3,200\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ กิโลเมตร}$$

$$= 1,600 \times \sqrt{2}\pi \text{ กิโลเมตร}$$

$\therefore$ ความยาวของส่วนโค้งบนเส้นละติจูดขนาน 45° เหนือซึ่งรองรับด้วยมุม ณ จุดศูนย์กลางของระนาบเส้นศูนย์สูตร เท่ากับ 90° ยาว = $1,600 \times \sqrt{2}\pi$ กิโลเมตร **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.5 จากรูปให้ A และ B เป็นสถานที่ 2 แห่งบนผิวโลกโดยมีค่าละติจูด 24° 18′ เหนือ และ 36° 47′ เหนือ ตามลำดับ และมีค่าลองจิจูด 133° 39′ ตะวันออก และ 125° 24′ ตะวันตก ตามลำดับ ต้องการหา

1) ความยาวของส่วนโค้งวงกลมใหญ่ AB
2) $P\hat{A}B$ เมื่อ P เป็นขั้วเหนือของโลก
3) จุดที่อยู่เหนือสุดบนโค้งวงกลมใหญ่ AB



รูปที่ 1.13

PAHQ เป็นเส้นเมริเดียนที่ผ่าน A ตัดเส้นศูนย์สูตรที่จุด H

HA คือค่าละติจูดที่ตำบล A = $24° 18'$

PA เป็นค่าละติจูดร่วมของตำบล A = $90° - 24° 18'$

$= 65° 42'$

ในทำนองเดียวกัน PB เป็นค่าละติจูดร่วมของตำบล B = $90° - 36° 47'$

$= 53° 13'$

ให้เส้นเมริเดียนที่ผ่านกรีนิชตัดเส้นศูนย์สูตรที่จุด G จะได้

GH (ทิศทางตามลูกศร) = long. (E) ของตำบล A = $133° 39'$

GK (ทิศทางตามลูกศร) = long. (W) ของตำบล B = $125° 24'$

$\therefore$ ส่วนโค้ง HGK = HG + GK = $259° 3'$

และ HK (ส่วนโค้งที่สั้น) = $360° - 259° 3'$

$= 100° 57'$

นั่นคือ $H\hat{P}K$ หรือ $A\hat{P}B$ รองรับด้วยโค้ง HK จะมีค่า = $100° 57'$ ด้วย

1) หาความยาวของส่วนโค้งวงกลมใหญ่ AB

จากสามเหลี่ยมทรงกลม APB, PA = $65° 42'$, PB = $53° 13'$ และ $A\hat{P}B = 100° 57'$ ใช้สูตรหลัก A จะได้

$$\cos AB = \cos PA \cos PB + \sin PA \sin PB \cos A\hat{P}B$$

แทนค่า PA, PB และ $A\hat{P}B$ ลงในสมการบนจะได้

$$\cos AB = \cos 65” 42’ \cos 53” 13’ + \sin 65” 42’ \sin 53” 13’ \cos 100” 57’$$

$$= \cos 65° 42' \cos 53° 13' - \sin 65° 42' \sin 53° 13' \cos 79° 3'$$

$$= 0.4115x0.5988-0.9114x0.8009x0.1900$$

$$= 0.1077$$

$$AB = 83° 48'.8 = 5028'.8$$

$\therefore$ ระยะทางโค้ง AB = 83° 48'.8 = 5028.8 ไมล์ทะเล **ตอบ**

(1 ไมล์ทะเลคือระยะทางส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่รองรับด้วยมุมที่จุดศูนย์กลาง 1′)

2) หาค่า $P\hat{A}B$

จากสูตรหลัก B

$$\frac{\sin P\hat{A}B}{\sin PB} = \frac{\sin A\hat{P}B}{\sin AB}$$

$$\sin P\hat{A}B = \frac{\sin A\hat{P}B \cdot \sin PB}{\sin AB}$$

แทนค่าจะได้

$$\sin P\hat{A}B = \frac{\sin 100°57' \sin 53°13'}{\sin 83” 48'.8}$$

$$= \frac{0.9818 \times 0.8009}{0.9942}$$

$$= 0.7909$$

$$P\hat{A}B = 52° 16'.3$$

3) หาจุดที่อยู่เหนือสุดบนโค้งวงกลมใหญ่ AB

หมายถึงเส้นละติจูดที่สัมผัสกับส่วนโค้งวงกลมใหญ่ AB นั่นเอง

ให้ C เป็นจุดที่อยู่เหนือสุดบนโค้ง AB (ตามรูป) ลากเส้นละติจูดให้สัมผัสโค้ง AB ที่จุด C เส้นเมริเดียน PC จะตั้งฉากกับโค้ง AB ที่จุด C ดังนั้น $P\hat{C}A = P\hat{C}B = 90°$ สามเหลี่ยมทรงกลม PAC, PA = 65° 42′, $P\hat{A}C$ = 52° 16'.3, $P\hat{C}A$ = 90° จากสูตรหลัก B
จะได้

$$\frac{\sin PC}{\sin P\hat{A}C} = \frac{\sin PA}{\sin PCA}$$

แทนค่าได้

$$\sin PC = \frac{\sin 65^\circ 42' \cdot \sin 52^\circ 16.'3}{\sin 90^\circ}$$

$$= 0.9114 \times 0.7909$$

$$= 0.7208$$

$$PC = 46^\circ 7'$$

PC เป็นค่าละติจูดร่วมที่ตำบล C ดังนั้นตำบล C จะมีค่าละติจูด $= 90^\circ - 46^\circ 7'$

$$= 43^\circ 53'$$

ตอบ