ภาคผนวก

1. การหาค่าอินทิกรัลในรูป $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx$

ให้

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx \qquad \text{.........(1)}$$

สมการ(1)นี้อาจหาค่าออกมาได้โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชันยกกำลัง ดังนั้น เราอาจเขียนสมการ(1)ในพจน์ของตัวแปรที่แตกต่างไปได้เป็น

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)dy \qquad \text{.........(2)}$$

คูณสมการ(1)ด้วย(2)ได้

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx . \int \exp(-y^2)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\exp(-y^2)dxdy$$

หรือ

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2+y^2)]dxdy \qquad \text{........(3)}$$

ดังนั้นอินทิกรัลยกกำลังสองจึงขยายไปบนระนาบ xy

ทีนี้เราจะเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลนี้ให้อยู่ในพจน์ของพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) r และ θ จะได้ $x^2+y^2=r^2$ และพื้นที่เล็ก ๆ ในพิกัดนี้จะมีค่า $rdrd\theta$ เพื่อให้ครอบคลุมทั่วทั้งระนาบตัวแปร r และ θ จะต้องมีค่าในช่วงของ $0<r<\infty$ และ $0<\theta<2\pi$ ดังนั้นสมการ(3)จึงมีรูปเป็น

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2)\, rdrd\theta = 2\pi\int_0^{\infty} \exp(-r^2)\, rdr \qquad \text{.....(4)}$$

การอินทิเกรตตลอดค่า θ หาค่าออกมาได้เลย ส่วนตัวถูกอินทิเกรตที่มี r เป็น

ตัวประกอบต้องหาต่อโดย

$$I^2 = 2\pi\int_0^{\infty}(-1/2)d[\exp(-r^2)] = -\pi\Big|\exp(-r^2)\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\pi(0-1) = \pi$$

หรือ $I = (\pi)^{1/2}$

ดังนั้น

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = (\pi)^{1/2} \qquad ....(5)$$

เมื่อ $\exp(-x^2)$ มีค่าที่เหมือนกันทั้ง x และ -x จะได้

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = 2\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx = (\pi)^{1/2}/2 \qquad ....(6)$$

2. การหาค่าอินทิกรัลในรูป $\int_0^{\infty} x^n\exp(-ax^2)dx$

ให้

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n\exp(-ax^2)dx \qquad ....(7)$$

และให้ $u = a^{1/2}.x$ กรณี n=0 อาศัยสมการ(6)จะได้อินทิกรัลนี้เป็น

$$I_o = a^{-1/2}\int_0^{\infty}\exp(-u^2)du = a^{-1/2}(\pi)^{1/2}/2 \qquad .....(8)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$I_1 = a^{-1}\int_0^{\infty}\exp(-u^2)\ udu = a^{-1}\Big|(-1/2)\exp(-u^2)\Big|_0^{\infty}$$

$$I_1 = 1/2a \qquad \text{.........(9)}$$

ส่วนอินทิกรัลอื่น ๆที่มี n เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 2 ขึ้นไปสามารถหาค่าออกมาได้ในพจน์ของ I_o และ I_1โดยการอินทิเกรตแบบแยกส่วนต่อกันไปนั่นคือ

$$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^2)dx = (-1/2a)\int_0^\infty x^{n-1}d[\exp(-ax^2)]$$

$$= (-1/2a)\left|x^{n-1}\exp(-ax^2)\right|_0^\infty + [(n-1)/2a]\int_0^\infty x^{n-2}\exp(-ax^2)dx$$

เนื่องจากว่าพจน์ที่อินทิเกรตแล้วหายไปที่ลิมิตทั้งสองดังนั้นเราจะได้

$$I_n = (n-1)I_{n-2} /2a \qquad \text{.........(10)}$$

เช่น กรณี

$$I_2 = I_o /2a = (1/4a)(\pi/a)^{1/2}$$
$$I_3 = 2I_1/2a = 2(1/2a)/2a = 1/2a^2$$

3. การแปลงหน่วย

1 อังสตรอม	=	1 angstroem(A)	= 10^{-10} m
1 นิวตัน	=	1 newton(N)	= 10^5 dyn
1 จูล	=	1 joule(J)	= 10^7 erg
1 แคลอรี	=	1 cal	= 4.19 J
1 อิเล็กตรอนโวลต์	=	1 electron volt(eV)	= 1.60×10^{-19} J
1 บรรยากาศ	=	1 atmosphere(atm)	= 760 mmHg
	=	1.013×10^5 N/m^2	

4. ค่าคงที่ต่าง ๆ

เลขของอาโวกาโดร[Avogadro's number(N_o)] = 6.02×10^{23}/mol

ค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์[Boltzmann's number(k)]=1.381×10^{-23}J/K

ค่าคงที่ของแก๊ส[gas constant(R)] = 8.31J/(mol K)

ปริมาตรโมลาร์ที่อุณหภูมิและความดันมาตรฐาน[molar volume at STP] = 22.4×10^3 cm^3/mol

ค่าคงที่ของพลังค์[Planck's constant(h)] = 6.626×10^{-34} Js

ความเร็วแสง[light velocity(c)] = 3×10^{8} m/s

ประจุของโปรตอน[charge of the proton(e)] = 1.60×10^{-19} C

มวลเมื่ออยู่นิ่งของอิเล็กตรอน[electron rest mass(m_o)]
= 9.11×10^{-31} kg

มวลเมื่ออยู่นิ่งของโปรตอน[proton rest mass(m_p)]
= 1.67×10^{-27} kg

อุณหภูมิที่จุดเหยือกแข็งของน้ำ[temperature of the ice point]
= 273.15 K
