บทที่ 2

ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

(Basic Probability)

ในบทนี้จะกล่าวถึงเรื่องราวพื้นฐานทั่วไปเกี่ยวกับวิชาสถิติในเรื่องความน่าจะเป็นและการนำมาประยุกต์ใช้กับระบบแก๊สอุดมคติและระบบอนุภาคที่มีสปิน1/2

2.1 กลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันเชิงสถิติ(Statistical ensembles)

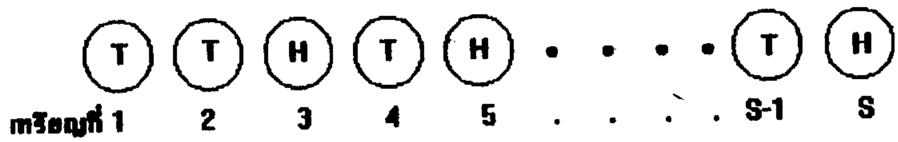
เราไม่พิจารณาเฉพาะระบบเดี่ยว(single atom) A ใด ๆ แต่เราจะพิจารณาเอาระบบที่คล้ายคลึงกันมาพิจารณาร่วมกันเชิงสถิติ สมมุติว่ามี S ระบบที่คล้ายคลึงกันเรานำมารวมกันเป็น*กลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกัน*(ensemble)ซึ่งตามหลักการสถิติเราจะให้ S มีค่ามาก ๆ ใกล้ค่าอนันต์ เราจะหาเศษส่วนของกรณีเฉพาะที่จะเกิดขึ้นจากการทดลอง เมื่อเทียบกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเกิดได้ สมมุติเหตุการณ์ที่จะเกิดกรณีเฉพาะ(หรือเหตุการณ์ที่เราสนใจ) r มีจำนวน S_r จากจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นได้ S วิธี นิยามว่า

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ r ที่เราสนใจ = S_r/S ....(2.1)

เมื่อ S ---->ค่าอนันต์

2.1.1 การโยนเหรียญและการทอดลูกเต๋า

การโยนเหรียญ พิจารณาการโยนเหรียญซึ่งมีลักษณะสมมาตรมี 2 หน้า คือหัว (head) และก้อย(tail)เราจะศึกษาว่าแต่ละหน้ามีโอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้าใดหน้าหนึ่งอย่างไรในการโยนแต่ละครั้ง วิธีการก็คือเราต้องทดลองโดยการโยนเหรียญแล้วจดบันทึกการเกิดหัวหรือก้อยไว้แล้วโยนใหม่และจดบันทึกไว้อีกทำแบบนี้ไปเรื่อย ๆ มากเท่าใดยิ่งดี อีกวิธีหนึ่งก็คือหาเหรียญที่เหมือนกันนี้จำนวนมากมายมาโยนทีละเหรียญหรือโยนพร้อมกันก็ได้แต่ต้องไม่ให้มีผลกระทบต่อกันหรือมีอิสระในการออกหัวหรือก้อยแล้วนับจำนวนหัวและก้อยที่เกิดขึ้นให้ดูรูปที่ 2.1 เปรียบเหรียญแต่ละเหรียญเป็นระบบหนึ่งดังนั้นเมื่อนำมาพิจารณาร่วมกันจึงกลายเป็นกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันที่ประกอบด้วย S เหรียญ โดยที่แต่ละเหรียญมีลักษณะเหมือนกัน รูปที่เห็นเป็นการเกิดหัว(H)หรือก้อย(T)หลังจากการโยนแต่ละเหรียญ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าเมื่อโยนเหรียญ 1 เหรียญจะได้ H หรือ T



รูปที่ 2.1 การหาความน่าจะเป็นจากการโยนเหรียญ
1 เหรียญซึ่งนำมารวมเป็นกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกัน

เมื่อโยนเหรียญ S(ค่ามาก ๆ)ครั้งด้วยวิธีที่เหมือนกัน แล้วนับจำนวน H และ T และหาเศษส่วนระหว่างจำนวน H หรือ T กับ S ถ้าให้

p = ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัว(H)

q = ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกก้อย(T)

เมื่อเหรียญสมมาตรจะพบว่า

$$p = q = 1/2$$

นั่นคือแต่ละเหรียญมี 2 วิธีที่จะเกิดขึ้นได้โดยแต่ละวิธีมีความน่าจะเป็นพอ ๆ กัน ทีนี้ถ้าเราพิจารณาให้ซับซ้อนขึ้นในการโยน S เหรียญพร้อมกันทั้งชุดแล้วพิจารณาหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นทั้งชุดจะได้ดังนี้

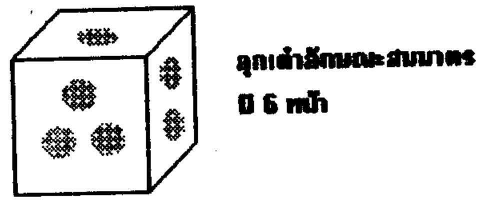
เมื่อโยนชุดของ S เหรียญที่มีลักษณะเหมือนกัน จะมีเหตุการณ์ที่จะเกิดได้

$= 2x2x2x2x2x2x..........x2 = 2^S$ วิธีที่จะเป็นไปได้

ถ้ามี n เหรียญที่จะออกหัวก็จะเหลือ (N-n) เหรียญที่จะออกก้อย เมื่อนำเอาจำนวนวิธีที่เราสนใจไปเทียบกับจำนวนวิธีที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดก็จะได้ ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่เราสนใจ

การทอดลูกเต๋า

รูปที่ 2.2 แสดงลูกเต๋าซึ่งมีลักษณะสมมาตร มีหน้าอยู่ 6 หน้า มีหน้า 1-6 เมื่อทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งลูกเต๋าจะหงายหรือออกหน้าใดหน้าหนึ่งเพียงหน้าเดียว เราสามารถหาค่าความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าแต่ละลูกซึ่งมีลักษณะเหมือนกันนี้จะหงายหน้าใดหน้าหนึ่งได้โดยการทดลองแบบการโยนเหรียญ เราจะพบว่าในการทอด 1 ครั้งลูกเต๋าแต่ละลูกมีความน่าจะเป็นที่จะออกหน้าใดหน้าหนึ่งเท่ากับ 1/6 ซึ่งเลข 6 ก็คือจำนวนวิธีที่จะเป็นไปได้(possible outcomes)ทั้งหมด

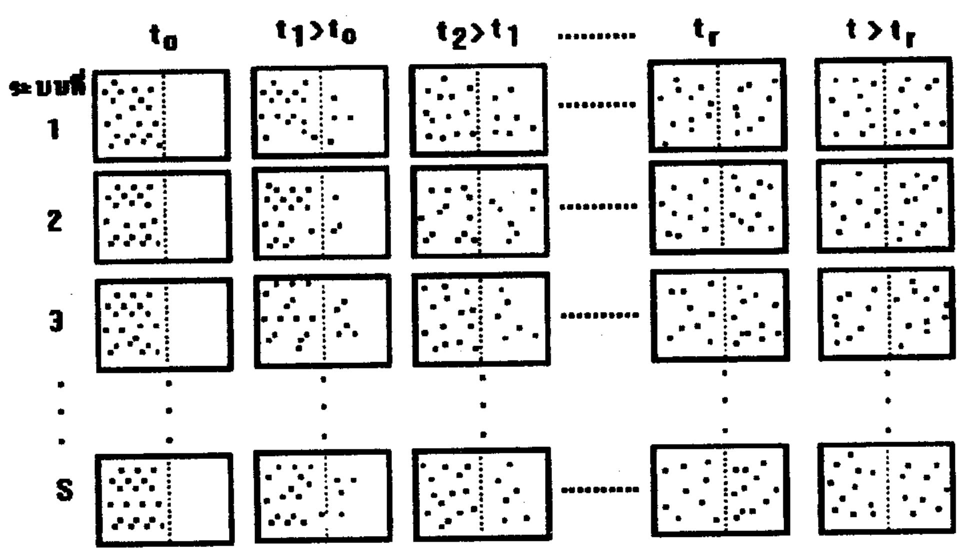


รูปที่ 2.2 ลูกเต๋าลักษณะสมมาตร มีหน้า 1-6

2.1.2 การประยุกต์ใช้กับระบบที่มีหลายอนุภาค

พิจารณาระบบแมโครสโคปิกที่ประกอบด้วยอนุภาคอยู่มากมาย เช่น ระบบของแก๊สอุดมคติซึ่งมี N โมเลกุล หรือระบบของ N สปิน(spins)หรือระบบของของเหลว

แทนที่เราจะพิจารณาระบบเดี่ยว A เราจะพิจารณาระบบใหญ่ที่ประกอบด้วย S ระบบที่คล้ายคลึงกันกับระบบ A ซึ่งเรานำมารวมกันเพื่อนำมาพิจารณาร่วมกันเชิงสถิติเป็นระบบที่เราจะเรียกว่าระบบของกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันเชิงสถิติ หรือ เรียกให้สั้นกว่านี้ว่ากลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันเชิงสถิติ ให้ดูรูปที่ 2.3 กล่องบรรจุแก๊สจำนวน N โมเลกุล จำนวน S (ค่ามาก)ระบบ เริ่มต้น



รูปที่ 2.3 แสดงกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกัน

ถูกกักไว้ด้านซ้ายด้านเดียวด้วยที่กั้น เมื่อดึงที่กั้นออกระบบที่คล้ายคลึงกันเหล่านี้จะแปลี่ยนแปลงไปกับเวลา(time independent)t กลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันนี้จึงไม่อยู่ในภาวะสมดุล ตามรูปที่ 2.3 นั้น เริ่มต้นเวลา $t=t_o$ เมื่อเอาที่กั้นออกอนุภาคยังอยู่ด้านซ้ายของกล่อง เมื่อเวลาผ่านไป $t>t_o$ โมเลกุลแก๊สก็จะเริ่มกระจายไปอยู่ด้านขวาของกล่อง เราอธิบายทางสถิติได้ว่าเมื่อให้

$p(t)$ = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเลกุลแก๊ส จะอยู่ด้านซ้ายของกล่องเมื่อเวลา t

$q(t)$ = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเลกุลแก๊ส จะอยู่ด้านขวาของกล่องเมื่อเวลา t

$P(N,t)$ = ความน่าจะเป็นที่ n โมเลกุลจาก N โมเลกุล อยู่ทางด้านซ้ายของกล่องเมื่อเวลาผ่านไป t

เรารู้ว่าที่เวลาเริ่มต้น t_o

$$p(t_o) = 1 \quad \text{ขณะที่} \quad q(t_o) = 0$$

หรือ

$P(N,t_o) = 1$ ขณะที่ $P(n,t_o) = 0$ เมื่อ n ไม่เท่ากับ N อย่างไรก็ตามเมื่อเวลาผ่านไป t โดย $t>t_o$ ความน่าจะเป็นเหล่านี้จะเปลี่ยนแปลงไปจนกว่าโมเลกุลแก๊สจะมีลักษณะกระจายไปทั่วทั้งกล่อง หรืออาจกล่าวว่ากลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันนี้จะอยู่ในภาวะสมดุลก็ต่อเมื่อในแต่ละระบบย่อยไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปกับเวลา(time independent) หรือเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อยจากจุดสมดุลนั่นคือเมื่อถึงเวลาเริ่มเกิดสมดุล t_r หรือมากกว่า ดังนั้นเราจะได้

$$p = q = 1/2$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา เปรียบเทียบได้กับการโยนเหรียญ N เหรียญ หรือแก๊สจำนวน N โมเลกุลก็จะมีโอกาสอยู่ด้านซ้ายหรือด้านขวาของกล่อง นั่นคือมีความน่าจะเป็น p เพื่ออยู่ด้านซ้าย และมีความน่าจะเป็น q เพื่ออยู่ด้านขวาของกล่อง เทียบได้กับการเกิดหัวหรือก้อยจากการโยนเหรียญ ซึ่งกรณีการโยนเหรียญนั้นความน่าจะเป็นไม่ขึ้นกับเวลาและมี $p = q = 1/2$

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็น

จากสมการพื้นฐานในการทดลองหาค่าความน่าจะเป็นในหัวข้อ 2.1 คือหา

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ r ที่เราสนใจ = S_r/S หรือ

$$P_r = S_r/S \quad \text{เมื่อ } S \longrightarrow \text{ค่าอนันต์} \qquad ....(2.1)$$

เราจะหารายละเอียดอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

สมมุติว่าเมื่อทำการทดลองกับระบบ A บางระบบพบว่ามี*เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน* หรือ เหตุการณ์ใด ๆ ที่ไม่มีสมาชิกเกิดร่วมกันอยู่จำนวน α เหตุการณ์ (mutaully exclusive outcomes) เราจะใช้สัญลักษณ์แทนแต่ละเหตุการณ์ด้วย r นั่นคือ

r สามารถแทนเหตุการณ์ใด ๆ ของ α เหตุการณ์ได้ หรือ

r = 1, 2, 3, 4,........,หรือ α

ในการพิจารณากลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันพบว่า

มีจำนวน S_1 ระบบของกลุ่มระบบเกิดเหตุการณ์ที่ 1

มีจำนวน S_2 ระบบของกลุ่มระบบเกิดเหตุการณ์ที่ 2

มีจำนวน S_3 ระบบของกลุ่มระบบเกิดเหตุการณ์ที่ 3

. . . .

. . . .

มีจำนวน $S_{\alpha-1}$ ระบบของกลุ่มระบบเกิดเหตุการณ์ที่ $\alpha-1$

มีจำนวน S_α ระบบของกลุ่มระบบเกิดเหตุการณ์ที่ α

เมื่อ α วิธี(เหตุการณ์)เป็นแบบที่ไม่เกิดร่วมกัน นั่นคือ

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... + S_\alpha = S$$

เมื่อ S ในสมการนี้คือจำนวนระบบทั้งหมดที่ประกอบกันเป็นกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกัน ดังนั้นเมื่อนำ S ไปหารสมการข้างบนจะได้

$$S_1/S + S_2/S + S_3/S + ... + S_\alpha/S = S/S$$

จะได้

$$P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_\alpha = 1 \qquad ...(2.2)$$

เมื่อ $P_r = S_r/S$ แทนความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ r ซึ่งเป็นไปตามสมการ (2.1) สมการ(2.2)แสดงถึงเมื่อรวมความน่าจะเป็นทั้งหมดแล้วได้ 1 เรียกสมการนี้ว่า*เงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติ*(normalization condition) ของความน่าจะเป็น จึงเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ว่า

$$\sum_{r=1}^{\alpha} P_r = 1 \qquad ....(2.3)$$

ทีนี้ถ้าเราสนใจความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ r หรือเหตุการณ์ s แบบใดแบบหนึ่ง ในการพิจารณากรณีนี้

ถ้ามี S_r ระบบในกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันที่เกิดเหตุการณ์ r

และมี S_s ระบบในกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันที่เกิดเหตุการณ์ s

ดังนั้นจึงมี $S_r + S_s$ ระบบที่เกิดเหตุการณ์ r หรือเหตุการณ์ s สอดคล้องกับความน่าจะเป็น P(r or s) หรือ P(r U s) ของการเกิดเหตุการณ์ r หรือ s อย่างใดอย่างหนึ่งซึ่ง

$$P(r \text{ or } s) = P(r \cup s) = (S_r + S_s)/S$$

ดังนั้น

$$P(r \text{ or } s) = P(r \cup s) = P_r + P_s \quad \text{........(2.4)}$$

ตัวอย่าง

สมมุติเราทอดลูกเต๋า 1 ลูกซึ่งมีลักษณะสมมาตรจึงมีความน่าจะเป็นในการออกแต่ละหน้าซึ่งมี 6 หน้าเป็น 1/6 ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งจะมีความน่าจะเป็นที่จะออกหน้า 3 หรือหน้า 5 อย่างใดอย่างหนึ่งเป็น 1/6+1/6 =1/3 ซึ่งคิดเป็น 1/3 ของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด(1,2,3,4,5,6)

ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ร่วมกัน(Joint probabilities)

สมมุติว่าระบบที่เรากำลังพิจารณามีเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้ 2 แบบที่แตกต่างกัน โดยให้มี

แบบที่ 1 จำนวน α เหตุการณ์ที่จะเป็นไปได้ แต่ละเหตุการณ์แทนด้วยสัญลักษณ์ r โดยที่ $r = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, \alpha$

แบบที่ 2 จำนวน β เหตุการณ์ที่จะเป็นไปได้ แต่ละเหตุการณ์แทนด้วยสัญลักษณ์ s โดยที่ $s = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, \beta$

ให้

P_{rs} = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดร่วมกันทั้งเหตุการณ์ r และเหตุการณ์ s โดยกลุ่มของการพิจารณาประกอบด้วยระบบที่คล้ายคลึงกันจำนวน S(ค่ามาก ๆ) ระบบ โดยมีจำนวน S_{rs} ระบบแทนเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันทั้งเหตุการณ์ r ของแบบแรกและเหตุการณ์ s ของแบบที่สอง

ดังนั้น

$$P_{rs} = S_{rs}/S$$

ถ้าให้

P_r = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ r(โดยไม่คำนึงถึงการเกิดเหตุ

การณ์แบบ s) ดังนั้น

$$P_r = S_r/S$$

ในการหาค่า P_s ซึ่งเราให้เป็นความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ s (โดยไม่คำนึงถึงการเกิดเหตุการณ์แบบ r)ก็หาได้ในทำนองเดียวกัน

มีกรณีพิเศษแต่สำคัญคือ กรณีที่ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์แบบ s ซึ่งไม่ได้รับผลกระทบจากการเกิดหรือไม่เกิดเหตุการณ์แบบ r เรียกเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้ว่าเป็น*เหตุการณ์ที่เกิดอย่างอิสระเชิงสถิติ*(statistically independent)หรือไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน(uncorrelated)

ทีนี้มาพิจารณากลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันที่มี S_r ระบบซึ่งเกิดเหตุการณ์ r โดยไม่คำนึงถึงค่า r ใด ๆ ก็มีเศษส่วน P_s ของระบบเหล่านี้ที่เกิดเหตุการณ์ s ด้วย ดังนั้นจำนวน S_{rs} ของระบบที่จะเกิดทั้งเหตุการณ์ r และ s จึงเขียนได้เป็น

$$S_{rs} = S_r \ P_s$$

สอดคล้องกับความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันทั้งเหตุการณ์ r และ s เป็น

$$P_{rs} = S_{rs}/S = S_r \ P_s/S = P_r \ P_s$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า *ถ้าเหตุการณ์* r *และ* s *ต่างเป็นอิสระเชิงสถิติต่อกันแล้ว*จะได้

$$P_{rs} = P_r \ P_s \qquad \text{..........(2.5)}$$

ดังนั้นถ้ามีเหตุการณ์ที่เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกันเกิน 2 เหตุการณ์ เราสามารถหาความน่าจะเป็นร่วมได้จากผลคูณของแต่ละความน่าจะเป็นแบบสมการ(2.5)

ตัวอย่าง

ระบบ A ประกอบด้วยลูกเต๋าสองลูก A_1 และ A_2 ให้เหตุการณ์ r เกิดขึ้นเมื่อลูกเต๋า A_1 หงายหน้าใดหน้าหนึ่งและให้เหตุการณ์ s เกิดขึ้นเมื่อลูกเต๋า A_2 หงายหน้าใดหน้าหนึ่ง ดังนั้นในการทอดลูกเต๋าทั้งสองลูก เหตุการณ์หนึ่งของระบบคือการหงายของลูกเต๋า A_1 และ A_2 จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูกซึ่งจะได้ 6x6 = 36 วิธีที่จะเกิดขึ้นได้

ความน่าจะเป็นสามารถนำมาใช้กับกลุ่มที่ประกอบด้วย S(ค่ามาก ๆ)คู่เต๋า สมมุติแต่ละลูกมีลักษณะสมมาตรและมีโอกาสออกแต่ละหน้าเท่ากัน ดังนั้น

P_r = ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะออก(หงาย)หน้าใด ๆ r มีค่า = 1/6 เมื่อลูกเต๋าแต่ละลูกไม่มีแรงกระทำต่อกันหรือชนกันกล่าวได้ว่าเป็นอิสระเชิงสถิติ ดังนั้น กรณีนี้เราสามารถนำมาพิจารณาหาความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ร่วมกัน P_{rs} โดย

$$P_{rs} = \text{ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋า } A_1 \text{ จะหงายหน้า } r$$
$$\text{และลูกเต๋า } A_2 \text{ จะหงายหน้า } s$$
$$= P_r . P_s = (1/6)(1/6) = 1/36$$

2.3 การแจกแจงทวินาม(The binomial distribution)

พิจารณาตัวอย่างที่เป็นระบบอุดมคติระบบหนึ่งซึ่งมี N สปิน(1/2) ดังเคยกล่าวมาแล้วในบทที่ 1 หัวข้อ 1.3 ซึ่งเกี่ยวพันกับโมเมนต์แม่เหล็ก μ_o(รายละเอียดเกี่ยวกับสปินจะพบในวิชากลศาสตร์ควอนตัม นับเป็นแบบหนึ่งในหลายระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น) เพื่อเป็นกรณีทั่วไปเราสมมุติว่าระบบนี้อยู่ในสนามแม่เหล็ก B แต่ละโมเมนต์แม่เหล็กอาจมีทิศชี้ขึ้น(up:ขนานกับB) หรือชี้ลง(down:ทิศสวน B) ระบบอุดมคติดังกล่าวนี้เมื่ออยู่ในภาวะสมดุลจะเกิดการเรียงตัวของโมเมนต์แม่-เหล็กในลักษณะต่าง ๆ กัน S ระบบเมื่อนำมาพิจารณาร่วมกันก็คือกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันที่ไม่ขึ้นกับเวลา ทีนี้เมื่อเราพิจารณาสปินใดสปินหนึ่งจะได้ว่าเมื่อ

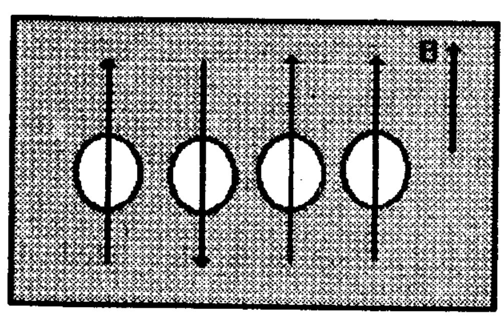
p = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ขึ้น

q = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ลง

ดังนั้นจากเงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติจะได้

$$p + q = 1 \quad \text{หรือ} \quad p = 1 - q \qquad \text{........(2.6)}$$

รูปที่ 2.4 เป็นตัวอย่างหนึ่งในระบบที่คล้ายคลึงกันที่มี 4 สปิน(1/2)ในสนามแม่เหล็ก B ลูกศรที่เห็นแสดงทิศทางของโมเมนต์แม่เหล็กของแต่ละสปิน



รูปที่ 2.4 หนึ่งในระบบที่ประกอบด้วย 4 สปิน(1/2)เรียงตัวในสนามแม่เหล็ก B

เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กผ่านเข้ามาหรือ B = 0 โมเมนต์แม่เหล็กของแต่ละสปินจะชี้ได้อย่างอิสระจะทำให้ $p=q=1/2$ แต่เมื่อมี B จะพบในการทดลองว่าโมเมนต์แม่เหล็กมักจะมีทิศชี้ไปตามสนามแม่เหล็กมากกว่าชี้ตรงข้าม นั่นคือ $p>q$ เมื่อพิจารณาว่าระบบสปินนี้เป็นแบบอุดมคติแต่ละสปินไม่มีอันตรกิริยาต่อกัน จึงถือว่าการเรียงตัวเป็นอิสระเชิงสถิติต่อกัน ดังนั้นความน่าจะเป็นที่โมเมนต์ใดจะชี้ขึ้นจึงไม่ถูกกระทบจากโมเมนต์อื่นในระบบไม่ว่าจะชี้ขึ้นหรือชี้ลง

จากจำนวน N โมเมนต์แม่เหล็กในระบบสปินนี้ ให้

n = จำนวนโมเมนต์แม่เหล็กที่มีทิศชี้ขึ้น(up)

n' = จำนวนโมเมนต์แม่เหล็กที่มีทิศชี้ลง(down)

ดังนั้น $$n + n' = N \qquad \text{.............(2.7)}$$

หรือ $$n' = N - n$$

ที่นี้เมื่อเรานำเอาระบบสปินแบบนี้หลาย ๆระบบมาพิจารณาร่วมกันเป็นกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันเชิงสถิติ(statistical ensemble) ในแต่ละระบบที่นำมาประกอบกันนี้มี n ต่างกันได้โดยอาจมี n = 0, 1, 2, 3, 4,......,N เมื่อ

P(n) = ความน่าจะเป็นที่ n จาก N โมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ขึ้น

= ?

วิธีคิด เมื่อ p = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ขึ้น

q = ความน่าจะเป็นที่แต่ละโมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ลง = 1- p

เมื่อไม่มีอันตรกิริยาระหว่างสปิน การเรียงตัวของแต่ละสปินจึงเป็นอิสระเชิงสถิติ เราจึงใช้สมการ(2.5)ได้ว่า

[ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์แบบหนึ่งที่มี n โมเมนต์มีทิศชี้ขึ้นและที่เหลือ n'โมเมนต์มีทิศชี้ลงมีค่า] = $\underbrace{ppp....p}_{(n\ \text{ตัว})}\ \underbrace{qqq....q}_{(n'\text{ตัว})}$

$$= p^{n}q^{n'} \qquad \text{...........(2.8)}$$

แต่สถานการณ์ที่ n โมเมนต์มีทิศชี้ขึ้นนั้นอาจมีหลายวิธี ให้ดูตัวอย่างดังรูปที่ 2.5 แสดงการเรียงตัวในวิธี(แบบ)ต่าง ๆ กรณีระบบมี 4 โมเมนต์แม่เหล็ก ซึ่งรวมแล้วจะได้ 16 วิธีที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ กัน ให้เปรียบเทียบตารางที่ 1.1 กรณีตามรูปนี้ เราให้

$C_N(n)$หมายถึงจำนวนวิธีที่จะเป็นไปได้ที่ n จาก N โมเมนต์มีทิศชี้ขึ้นเมื่อรวม $C_N(n)$ทั้งหมดก็จะได้ 16 วิธี ดังนั้น

$P(n)$ = ความน่าจะเป็นที่ n จาก N โมเมนต์แม่เหล็กจะมีทิศชี้ขึ้น

= ความน่าจะเป็นที่ได้จากการรวมความน่าจะเป็นในแต่ละ $C_N(n)$ ทั้งหมด

= ความน่าจะเป็นตามสมการ(2.8)คูณกับ $C_N(n)$

$= C_N(n)\ p^n\ q^{n'}$

$$= C_N(n)\ p^n\ q^{N-n} \quad , \quad n' = N-n \qquad \text{............(2.9)}$$

1	2	3	4	n	n'	$C_N(n)$
↑	↑	↑	↑	4	0	1
↑	↑	↑	↓	3	1	4
↑	↑	↓	↑	3	1	
↑	↓	↑	↑	3	1	
↓	↑	↑	↑	3	1	
↑	↑	↓	↓	2	2	6
↑	↓	↑	↓	2	2	
↑	↓	↓	↑	2	2	
↓	↑	↑	↓	2	2	
↓	↑	↓	↑	2	2	
↓	↓	↑	↑	2	2	
↑	↓	↓	↓	1	3	4
↓	↑	↓	↓	1	3	
↓	↓	↑	↓	1	3	
↓	↓	↓	↑	1	3	
↓	↓	↓	↓	0	4	1

รูปที่ 2.5 วิธีการเรียงตัวแบบต่าง ๆ ของระบบสปิน
กรณี N = 4 ลูกศรแสดงทิศของโมเมนต์แม่เหล็ก

การคำนวนหาจำนวนวิธีที่จะเป็นไปได้ $C_N(n)$

ก่อนอื่นเรามาพิจารณากรณี เมื่อระบบหนึ่งมี 4 โมเมนต์แม่เหล็ก นั่นคือมี N = 4 โดยมี 2 โมเมนต์ที่มีทิศชี้ขึ้น(Up)นั่นคือมี n=2 เพื่อความสะดวกในการพิจารณาและการเขียนรูปเราจะแทนโมเมนต์ที่ชี้ขึ้นทั้งสองเป็น U_1 และ U_2 เพื่อแสดงว่าต่างโมเมนต์กันซึ่งที่จริงแล้วไม่มีความแตกต่างกันทางกายภาพแต่เพื่อให้เห็นความแตกต่างกันของจำนวนการเรียงตัวใน 2 ลักษณะคือกรณีไม่เหมือนและกรณีเหมือนกัน ส่วนที่เหลืออีกสองโมเมนต์ชี้ลง(Down)เราแทนด้วย D และ D ซึ่งเราไม่ใส่หมายเลขกำกับเพราะเราสนใจเฉพาะที่ชี้ขึ้น(n) เราจะหาว่ามีกี่วิธีที่จะเป็นไปได้ที่ 2 ใน 4 โมเมนต์ดังกล่าวจะมีทิศชี้ขึ้นนั่นคือเราจะหาจำนวน $C_4(2)$ คล้ายการหาในรูปที่ 2.5 เฉพาะที่มี 2 โมเมนต์ชี้ขึ้น และใส่หมายเลขกำกับเพื่อแสดงว่าต่างโมเมนต์กัน เราจึงได้จำนวนวิธีเพิ่มขึ้นดังแสดงในตารางที่ 2.1

รูปแบบเมื่อ $U_1 = U_2$	โมเมนต์แม่เหล็กที่ 1	2	3	4	รูปแบบเมื่อ $U_1 \neq U_2$
I	D	D	U_1	U_2	1
II	D	U_1	D	U_2	2
III	U_1	D	D	U_2	3
I	D	D	U_2	U_1	4
IV	D	U_1	U_2	D	5
VI	U_1	D	U_2	D	6
II	D	U_2	D	U_1	7
IV	D	U_2	U_1	D	8
V	U_1	U_2	D	D	9
III	U_2	D	D	U_1	10
VI	U_2	D	U_1	D	11
V	U_2	U_1	D	D	12

จำนวนของรูปแบบเมื่อ U_1 เหมือน U_2 = 6 วิธี

= จำนวนของรูปแบบเมื่อ U_1 ไม่เหมือน U_2 หารด้วย 2!

= 12/2! วิธี

ตารางที่ 2.1 การเรียงตัวในรูปแบบต่าง ๆ ของระบบที่มี 4 โมเมนต์(N=4)โดยมี 2 โมเมนต์ที่มีทิศชี้ขึ้น(n=2) แทนด้วย U_1 และ U_2 ถ้า U_1 ไม่เหมือน U_2 จำนวนวิธีจะมากกว่ากรณี U_1 เหมือน U_2

จากตารางที่ 2.1 เปรียบเทียบได้กับการนำเอา U_1 และ U_2 ซึ่งต่างกันมาเรียงลงใน 4 ตำแหน่งที่แตกต่างกัน เมื่อวาง U_1 ก่อนจะได้ 4 วิธี จึงเหลืออีก 3 วิธีที่จะวาง U_2 ดังนั้นคิดเป็น *การเรียงสับเปลี่ยน*(Permutation)ได้ 4x3 = 12 วิธี แต่ถ้าพิจารณาว่า U_1 และ U_2 ไม่มีความแตกต่างกันก็จะกลายเป็น *การจัดหมู่*(Combination)จึงมีวิธีที่ซ้ำกันอยู่เป็นจำนวน 2x1 เท่า ดังนั้นจึงคิดเป็นการจัดหมู่ได้ 12/(2x1) = 6 วิธี

ถ้าพิจารณาว่าในจำนวน 4 โมเมนต์(N=4)ดังกล่าวมี 3 โมเมนต์(n=3)ที่มีทิศชี้ขึ้นจะคิดเป็นการเรียงสับเปลี่ยนได้ 4x3x2 = 24 วิธี แต่ถ้าพิจารณาว่าทั้ง 3 โมเมนต์ไม่มีความแตกต่างกันก็จะกลายเป็นการจัดหมู่ทำให้มีวิธีที่ซ้ำกันอยู่เป็นจำนวน 3x2x1เท่า ดังนั้นจึงคิดเป็นการจัดหมู่ได้ 24/(3x2x1) = 4 วิธี

กรณีทั่วไป(ที่มาของสูตร)กรณี *การเรียงสับเปลี่ยน* พิจารณา n โมเมนต์ที่แตกต่างกันที่มีทิศชี้ขึ้น U_1, U_2, U_3, ...,U_n มีตำแหน่งที่จะให้เรียง N ตำแหน่งที่แตกต่างกัน เราจะวางทีละตัวลงในตำแหน่งเหล่านั้นได้ดังนี้

เริ่มจากการวาง U_1 ให้อยู่ตำแหน่งใดก็ได้ใน			N	ตำแหน่ง
ในแต่ละการวาง U_1	มีที่เหลือให้วาง	U_2 ได้อีก	N-1	ตำแหน่ง
ในแต่ละการวาง U_1และ U_2	มีที่เหลือให้วาง	U_3 ได้อีก	N-2	ตำแหน่ง
ในแต่ละการวาง U_1,U_2และU_3	มีที่เหลือให้วาง	U_4 ได้อีก	N-3	ตำแหน่ง
....	.	..	...	...
....	.	..	...	...

ในแต่ละการวาง U_1,U_2,..,U_{n-1}มีที่เหลือให้วาง U_n ได้อีก N-n+1 ตำแหน่ง ดังนั้นจำนวน $P_N(n)$ วิธีจากการเรียงสับเปลี่ยนดังกล่าวนี้ได้จากการคูณจำนวนตำแหน่งที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการวาง U_1,U_2,U_3,....,U_{n-1},U_n นั่นคือ

$$P_N(n) = N(N-1)(N-2)(N-3)......(N-n+1) \qquad .....(2.10)$$

หรือในรูปแฟกทอเรียล(factorial)ได้เป็น

$$P_N(n) = \frac{N(N-1)(N-2)....(N-n+1)(N-n)...(1)}{(N-n).......(1)}$$

$$= N!/(N-n)! \qquad ....(2.11)$$

เมื่อ 0! = 1 สมการที่ได้มานี้เป็นการพิจารณาว่า U_1,U_2,U_3,...,U_{n-1},U_n ต่างไม่เหมือนกัน กรณีที่พิจารณาว่าชี้ขึ้นเหมือนกันโดยแต่ละโมเมนต์ไม่แตกต่าง

กันจึงกลายเป็น *การจัดกลุ่ม* จากกรณีที่แล้วจำนวนที่เป็นไปได้ของการเรียงสับเปลี่ยนที่มี n ห้อย มีจำนวน n! ที่เมื่อนำมาจัดกลุ่มแล้วจะทำให้เกินไปเป็น n! เท่าเนื่องจากเหมือนกันตามที่เราพิจารณาใหม่ ดังนั้นจะให้ได้จำนวนวิธีที่เกิดจากการจัดกลุ่ม $C_N(n)$ ที่ถูกต้องต้องเอา n! มาหารจึงได้

$$C_N(n) = N!/[(N-n)!n!] \qquad \ldots\ldots(2.12)$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นตามสมการ(2.9)จึงเขียนได้เป็น

$$P(n) = N!p^n q^{N-n} /[(N-n)!n!] \qquad \ldots\ldots\ldots(2.13)$$

หรือ

$$P(n) = N!p^n q^{n'} /(n'!n!) \quad \text{เมื่อ } n'=N-n \qquad \ldots\ldots(2.14)$$

กรณีพิเศษคือเมื่อไม่มีสนามเหล็กภายนอกผ่านเข้ามา p=q=1/2 จะได้

$$P(n) = N!(1/2)^N /(n'!n!) \qquad \ldots\ldots(2.15)$$

เมื่อกำหนดค่า N ให้แล้ว P(n)จะเป็นฟังก์ชันขึ้นกับ n เราเรียกสมการในรูปแบบนี้ว่าการแจกแจงทวินาม(binomial distribution)

ตัวอย่าง

กรณีตามรูปที่ 2.5 ให้หาความน่าจะเป็นที่มี n ต่าง ๆ

$$P(4) = 4!(1/2)^4 /(4!0!) = 1/16$$

$$P(3) = 4!(1/2)^4 /(3!1!) = 4/16$$

$$P(2) = 4!(1/2)^4 /(2!2!) = 6/16$$

$$P(1) = 4!(1/2)^4 /(1!3!) = 4/16$$

$$P(0) = 4!(1/2)^4 /(0!4!) = 1/16$$

ข้อสังเกต

เมื่อกระจายรูปทวินามในลักษณะ $(p+q)^N$ สัมประสิทธิ์ของพจน์ $p^n q^{N-n}$ ก็คือจำนวน $C_N(n)$ ตามวิชาคณิตศาสตร์ เรียกการกระจายนี้ว่าทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)ซึ่งอยู่ในรูป

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} [N!/(n!(N-n)!)]p^n q^{N-n} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.16)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ(2.13) จะเห็นว่าแต่ละพจน์ทางขวามือก็คือความน่าจะเป็น $P_N(n)$เป็นเหตุให้เราเรียกสมการ(2.13)นี้ว่าเป็นการแจกแจงทวินาม ความสอดคล้องกันอีกอย่างก็คือถ้า p+q=1 เมื่อ p และ q เป็นความน่าจะเป็นที่เรากล่าวถึงมาแล้วสมการ(2.16)จะกลายเป็น

$$1 = \sum_{n=0}^{N} P(n)$$

นี่เป็นการแสดงว่าเมื่อรวมความน่าจะเป็นทุกค่าที่จะเป็นไปได้ของ n แล้วจะได้ค่าเท่ากับหนึ่งตรงตามเงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติ

ผลที่ได้เพิ่มเติม

$P_N(n)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ขึ้นกับ n เมื่อเราดูสัมประสิทธิ์ $C_N(n)$ พบว่ามี n สัมพันธ์กับ n' ตามสมการ N-n=n' ดังนั้น

$$C_N(n') = C_N(n) \qquad \text{.............(2.17)}$$

เช่น จากรูปที่ 2.5

$$C_4(0) = C_4(4)$$

และยังมี

$$C_N(0) = C_N(N) = 1 \qquad \text{.............(2.18)}$$

และยังมีข้อสังเกตคือ

$$\begin{aligned} C_N(n+1)/C_N(n) &= [N!/((n+1)!(N-n-1)!)] \;/\; [N!/(n!(N-n)!)] \\ &= n!(N-n)! \;/\; [(n+1)!(N-n-1)!] \\ &= (N-n) \;/\; (n+1) \qquad \text{............(2.19)} \end{aligned}$$

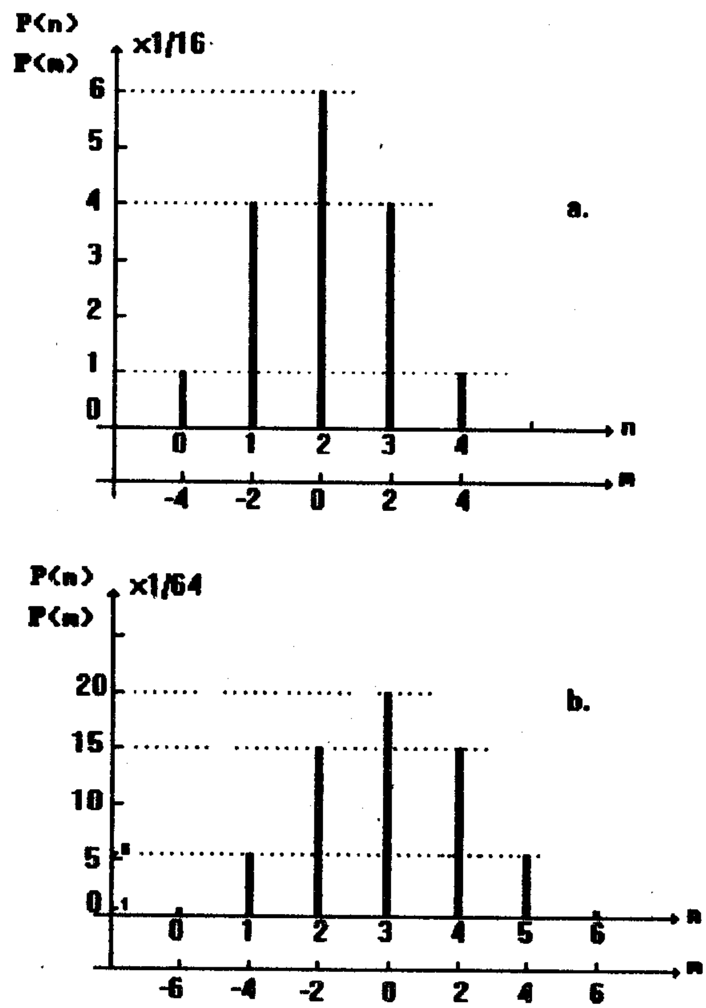
ตามสมการ(2.19)ถ้า n=0 อัตราส่วน(ratio)ของสัมประสิทธิ์ด้านซ้ายมือของสมการจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ N เพิ่ม และจะมีค่าลดลงตามค่า n ที่เพิ่ม แต่ยังคงมีค่ามากกว่า 1(หรือลดลงใกล้ 1)ตราบเท่าที่ n<N/2 และจะมีค่าน้อยกว่า 1 เมื่อ n มากกว่าหรือเท่ากับ N/2 เมื่อพิจารณาพฤติกรรมนี้ร่วมกับสมการ 2.18 จะเห็นว่า $C_N(n)$ มีค่าสูงสุดเมื่อ n มีค่าใกล้ N/2 และจะมีค่าโตมากเมื่อเทียบกับ 1 เมื่อ N มีค่ามาก

ส่วน P(n)ตามสมการ(2.14)กรณี p=q=1/2 จะมี

$$P(n) = P(n') \qquad \text{..........(2.20)}$$

ซึ่งเป็นจริงตามลักษณะที่สมมาตร(symmetry)เนื่องจากไม่มีอิทธิพลมากระทบต่อการเรียงตัว(ไม่มีสนามแม่เหล็กผ่านเข้ามา) ในกรณีนี้ P(n) จะมีค่าสูงสุดเมื่อ n --->N/2 ในกรณีอื่นคือถ้าหาก p>q สัมประสิทธิ์ $C_N(n)$ ก็ยังคงให้ P(n)มีค่าสูงสุดได้แต่ค่าสูงสุดนี้จะเลื่อนไปยังค่า n>N/2 ให้ดูรูปที่ 2.6 และ 2.7 ซึ่งเป็นการแจกแจงทวินามที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็น P(n)กับค่า n ซึ่งเราเทียบให้เป็น P(m)กับ m เมื่อ m=n-n' ตัวอย่าง กรณี N=4 จะได้

P(n)	------->	P(m)
n − n'	=	m
4 − 0	=	4
3 − 1	=	2
2 − 2	=	0
1 − 3	=	−2
0 − 4	=	−4



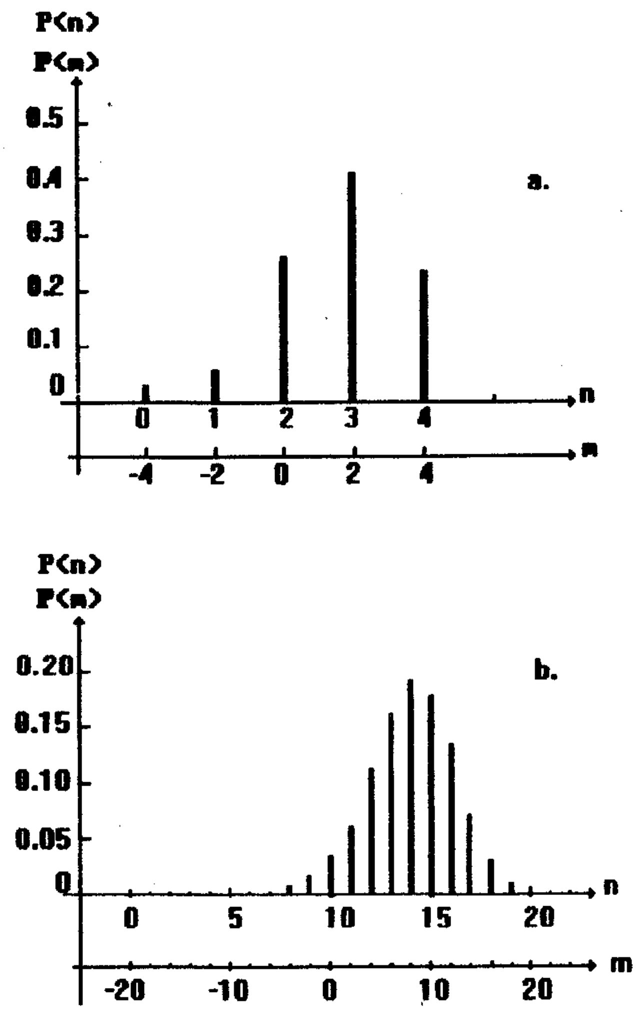
รูปที่ 2.6 การแจกแจงทวินาม กรณี $p=q=1/2$ a. $N=4$ โมเมนต์และ b. $N=6$ โมเมนต์ ความน่าจะเป็น P(n)มี n โมเมนต์มีทิศชี้ขึ้นเทียบได้กับความน่าจะเป็น P(m) เมื่อ $m=n-n'$

ค่า m นี้มีความสัมพันธ์กับค่าของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดในทิศชี้ขึ้นของระบบสปิน ซึ่งค่านี้เป็นปริมาณที่วัดได้จากการทดลอง ความสัมพันธ์มีดังนี้ ให้

M = โมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดในทิศชี้ขึ้น

= ผลรวมทางพีชคณิตของององค์ประกอบในทิศชี้ขึ้นของโมเมนต์แม่เหล็กของทั้งหมด N สปิน

$$= n\mu_o - n'\mu_o = m\mu_o \quad , \quad m = n-n' \quad .....(2.21)$$



รูปที่ 2.7 การแจกแจงทวินาม กรณี p=0.7 และ q=0.3 a. N=4 โมเมนต์ และ b. N=20 โมเมนต์ ความน่าจะเป็น P(n) โดยมี n โมเมนต์มีทิศชี้ขึ้นเทียบได้กับความน่าจะเป็น P(m) เมื่อ m=n-n'

โดยให้ μ_o คือขนาดของโมเมนต์แม่เหล็กของหนึ่งสปิน จากสมการ(2.21)เรายังได้ค่า

$$m = n - n' = n - (N - n) = 2n - N \qquad .....(2.22)$$

แสดงให้เห็นว่า m เป็นเลขคี่(odd)ถ้า N เป็นเลขคี่และ m เป็นเลขคู่(even) เมื่อ N เป็นเลขคู่ นอกจากนี้ยังเห็นว่า n หนึ่งค่าจะได้ m หนึ่งค่า เมื่อหา n จะได้

$$n = (N+m)/2 \qquad ....(2.23)$$

ความน่าจะเป็น P(m)จึงมีค่าเท่ากับ P(n)ตามความสัมพันธ์ระหว่าง m และ n ในสมการ(2.23)นั่นคือ

$$P(m) = P((N+m)/2) \qquad ....(2.24)$$

สมการ(2.24)นี้ จึงแสดงถึงความน่าจะเป็นของการเกิดค่าที่จะเป็นไปได้ใด ๆ ของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดของระบบสปิน ในกรณีพิเศษเมื่อ p=q=1/2 สมการ(2.15)และ(2.24)จะได้

$$P(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]!\ [(N-m)/2]!}(1/2)^N$$

จะเห็นว่าความน่าจะเป็นจะมีค่าสูงสุดเมื่อ m=0 (หรือ m-->0) ซึ่ง M=0

สมการที่กล่าวมานี้สามารถนำไปใช้ได้กับกรณีทั่ว ๆไปโดยให้ N เหตุการณ์เป็นแบบอิสระเชิงสถิติต่อกัน ให้เหตุการณ์ที่เราสนใจมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดมีค่า p และความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดมีค่า q=1-p แล้วหา P(n) ซึ่งจะเกิด n จาก N เหตุการณ์(ขณะที่ n'=N-n เหตุการณ์ไม่เกิด) โดยใช้สมการ(2.14) เราสามารถหาคำตอบนี้ได้

ตัวอย่างการนำมาใช้

กรณีแรก แก๊สอุดมคติ N โมเลกุลจุอยู่ในกล่องปริมาตร V_o โดยไม่มีอันตรกิริยาต่อกัน การเคลื่อนที่จึงเป็นแบบอิสระเชิงสถิติ ถ้ากล่องถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนโดยมีปริมาตร V_1 และ V_2 ตามลำดับ นั่นคือ

$$V_o = V_1 + V_2 \qquad ....(2.25)$$

พิจารณากลุ่มของกล่อง(ensemble)บรรจุแก๊สอุดมคติ ให้

p = ความน่าจะเป็นที่จะพบแก๊สแต่ละโมเลกุลในกล่องส่วนที่มีปริมาตร V_1

q = ความน่าจะเป็นที่จะพบแก๊สแต่ละโมเลกุลในกล่องส่วนที่มีปริมาตร V_2

เมื่อแก๊สในกล่องอยู่ในภาวะสมดุล โมเลกุลแก๊สจะกระจายอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้ง

กล่อง ดังนั้น

$$p = V_1/V_o \quad \text{และ} \quad q = V_2/V_o \qquad \text{........(2.26)}$$

ซึ่ง $p + q = 1$ เหมือนกับสมการ(2.6)
ถามว่า ความน่าจะเป็น $P(n)$ มีค่าเท่าใด เมื่อมี n จากทั้งหมด N โมเลกุลจะอยู่ในกล่องส่วนที่มีปริมาตร V_1 (เมื่อที่เหลือ $n'=N-n$ โมเลกุลอยู่ใน V_2) คำตอบหาได้โดยใช้การแจกแจงทวินามสมการ(2.14) กรณีเฉพาะถ้า $V_1 = V_2$ จะมี $p=q=1/2$ ก็จะเหมือนที่เราเคยกล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.1 กรณีนี้เราต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะพบ n จาก N โมเลกุลอยู่ด้านซ้ายของกล่อง

กรณีที่สอง เมื่อโยนเหรียญชุดหนึ่งซึ่งมี N เหรียญซึ่งมีลักษณะเป็นแบบอิสระเชิงสถิติต่อกัน ให้

p = ความน่าจะเป็นที่เหรียญหนึ่งเหรียญใดจะขึ้นหัว

q = ความน่าจะเป็นที่เหรียญหนึ่งเหรียญใดจะขึ้นก้อย

เมื่อเหรียญมีลักษณะสมมาตรเราจึงพิจารณาได้ว่า $p=q=1/2$ คำถามมีว่าความน่าจะเป็นที่ n จาก N เหรียญจะขึ้นหัว = $P(n)$ = ? หาคำตอบได้โดยใช้การแจกแจงทวินามสมการ(2.14) เช่น โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะออก 2 หัว(HH) หาคำตอบนี้ได้จากสมการ(2.14) โดยให้ $N=3$ และ $n=2$ จะได้ว่า

ความน่าจะเป็นที่จะออก 2 หัว(HH) $= (3!/(2!1!))(1/2)^3 = 3/8$

กรณีที่สาม เมื่อทอดลูกเต๋า N ลูกก็คล้ายกันเมื่อถือว่าแต่ละลูกมีอิสระเชิงสถิติ(ไม่มีผลต่อกันและกัน) ให้

p = ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าใด ๆ จะออกหน้า 4

q = ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าใด ๆ จะไม่ออกหน้า 4

$= 1-p$

เมื่อลูกเต๋ามี 6 หน้าและมีลักษณะสมมาตรเราจึงได้ว่า

$$p = 1/6 \quad \text{ขณะที่} \quad q = 1-p = 5/6$$

ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจำนวน n จาก N ลูกจะออกหน้า 4 มีค่า = $P(n)$ =? หาคำตอบได้โดยใช้การแจกแจงทวินามสมการ(2.14) เช่น ทอดลูกเต๋า 3 ลูก 1 ครั้งจงหาความน่าจะเป็นที่สองลูกจะขึ้นหน้าหนึ่งทั้งคู่ หาคำตอบได้จากสมการ(2.14) โดยให้ $N=3$ และ $n=2$ จะได้ว่า

ความน่าจะเป็นที่สองลูกจะขึ้นหน้าหนึ่งทั้งคู่มีค่า $=(3!/(2!1!))(1/6)^2(5/6)$

$= 15/6^3$

2.4 ค่าเฉลี่ย (Mean values)

พิจารณา การหาตำแหน่งของระบบศูนย์กลางมวลที่ประกอบด้วยวัตถุซึ่งมีมวลต่าง ๆ กัน α ก้อนซึ่งอยู่ในแนวแกน +x ในระยะต่าง ๆ กัน เราสามารถบอกตำแหน่งของศูนย์กลางมวลดังกล่าวว่าห่างจากจุดกำเนิด(origin)ตามแนวแกน +x ด้วยค่าเฉลี่ย(mean or average)ซึ่งนิยามว่า

ตำแหน่งเฉลี่ยจากจุดกำเนิด = x_{ave}

$$= (m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+.....+m_\alpha x_\alpha) \;/\; M$$

เมื่อ m_1 คือมวลของวัตถุก้อนที่ 1 ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ x_1

m_2 คือมวลของวัตถุก้อนที่ 2 ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ x_2

m_3 คือมวลของวัตถุก้อนที่ 3 ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ x_3

....

m_α คือมวลของวัตถุก้อนที่ α ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ x_α

และ $M = m_1 + m_2 + m_3 + ...+ m_\alpha$

= มวลของวัตถุรวมทั้งหมดทุกก้อน

ในทำนองเดียวกัน

ให้ v เป็นตัวแปรของระบบใด ๆ ที่จะมีค่าแตกต่างกันได้ α ค่า

คือ $v_1, v_2, v_3, ..., v_\alpha$

และให้ $r = 1,\ 2,\ 3, ..., \alpha$

ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะเกิด v ต่าง ๆ ตามลำดับดังนี้

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_\alpha$$

นั่นหมายถึงว่าเมื่อนำเอาระบบที่คล้ายคลึงกันนี้ S(ค่ามาก)ระบบมารวมเป็นกลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกัน ค่า v ซึ่งเป็นตัวแปรจะมีค่าเฉพาะใด ๆ เป็น v_r มีจำนวนระบบในกลุ่มที่มีค่านี้เป็น $S_r = S.P_r$ ดังนั้นจึงนิยามค่าเฉลี่ยของ v ในกลุ่มของระบบดังกล่าวนี้เป็น

$$v_{ave} = (S_1v_1+S_2v_2+S_3v_3+............+S_\alpha v_\alpha)/S$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{\alpha} S_r v_r\right)/S \qquad ....(2.27)$$

เมื่อ v_{ave} = ค่าเฉลี่ย(ensemble average)ของ v

S = จำนวนระบบทั้งหมดในกลุ่ม

$= S_1+S_2+S_3+.......+S_\infty$

แต่เนื่องจาก $S_r/S = P_r$ คือความน่าจะเป็นของการเกิดค่า v_r ดังนั้นสมการ (2.27)เขียนในรูปที่ง่ายกว่าได้เป็น

$$v_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r v_r \qquad ....(2.28)$$

ทำนองเดียวกันถ้า F(v) เป็นฟังก์ชันของ v ค่าเฉลี่ยของ F จึงนิยามอยู่ในรูป

$$[F(v)]_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r F(v_r) \qquad ....(2.29)$$

จากนิยามนี้แสดงว่า ค่าเฉลี่ยมีสมบัติ(propeerties)ที่มีลักษณะทั่วไป เช่น ถ้า F(v) และ G(v)เป็นสองฟังก์ชันของ v จะได้ว่า

$$(F+G)_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r [F(v_r)+G(v_r)]$$

$$(F+G)_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r F(v_r) + \sum_{r=1}^{\infty} P_r G(v_r)$$

หรือ

$$(F+G)_{ave} = F_{ave} + G_{ave} \qquad ....(2.30)$$

จากผลที่ได้นี้แสดงว่าค่าเฉลี่ยของผลรวมของพจน์ต่าง ๆ มีค่าเท่ากับผลรวมของค่าเฉลี่ยของพจน์เหล่านั้น ในทำนองเดียวกัน ถ้า c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$(cF)_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r [cF(v_r)] = c \sum_{r=1}^{\infty} PF(v_r)$$

หรือ

$$(cF)_{ave} = cF_{ave} \qquad ....(2.31)$$

ตัวอย่าง

ระบบหนึ่งประกอบด้วย 4 สปิน เมื่อมี p=q=1/2 จำนวนโมเมนต์ที่จะชี้

ขึ้นมีได้ตามค่า $n = 0,1,2,3,4$

1. จงหาความน่าจะเป็นที่มี n โมเมนต์ชี้ขึ้น หรือ $P(n)$
2. จำนวนเฉลี่ยของโมเมนต์ที่ชี้ขึ้น (n_{ave})
3. จำนวนเฉลี่ยของโมเมนต์ที่ไม่ชี้ขึ้น (n'_{ave})
4. ค่าเฉลี่ยของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมด (m_{ave})

วิธีทำ

1. ข้อนี้เราเคยได้มาแล้วโดยใช้สมการ(2.15)จะได้ความน่าจะเป็นตามลำดับดังนี้

$$P(n) = 1/16 \ , \ 4/16 \ , \ 6/16 \ , \ 4/16 \ , \ 1/16$$

2. หาจาก

$$n_{ave} = \sum_{n=0}^{4} nP(n) = 0(1/16)+1(4/16)+2(6/16)+3(4/16)+4(1/16)$$

$$= 2$$

เฉลี่ยแล้วมี 2 โมเมนต์ที่ชี้ขึ้น (กรณีนี้อาจใช้ $Nxp = 4x(1/2) = 2$)

3. เนื่องจากความน่าจะเป็นของแต่ละสปิน $p=q$ หมายถึงมีความน่าจะเป็นเท่ากันที่จะชี้ในทิศทั้งสองในอวกาศ จึงได้

จำนวนเฉลี่ยของโมเมนต์ที่ชี้ขึ้น = จำนวนเฉลี่ยของโมเมนต์ที่ไม่ชี้ขึ้น

$$n_{ave} = n'_{ave} = 2$$

ผลที่ได้นี้อาจคำนวนจากสมการ(2.30)

$$n'_{ave} = (N-n)_{ave} = N_{ave} - n_{ave}$$
$$= 4 - 2 = 2$$

4. เนื่องจากมีความน่าจะเป็นเท่ากันที่จะชี้ในทิศทั้งสองในอวกาศ ค่าเฉลี่ยของโมเมนต์แม่เหล็กจึงหายไป(เพราะมีเครื่องหมายต่างกัน)หรือพิจารณาได้จาก

$$m_{ave} = (n-n')_{ave} = n_{ave} - n'_{ave}$$
$$= 2 - 2 = 0$$

ซึ่งค่า m_{ave} อาจคำนวณได้โดยตรงจากความน่าจะเป็น $P(m)$ ซึ่งมี m ที่สมมุติว่ามีความเป็นไปได้ต่าง ๆ คือ $m = -4,-2,0,2,4$

จึงได้ว่า

$$m_{ave} = \sum_{m} mP(m)$$

$$m_{ave} = -4(1/16)-2(4/16)+0(6/16)+2(4/16)+4(1/16)$$
$$= 0$$

สมบัติของค่าเฉลี่ยที่สำคัญอีกประการจะกล่าวถึงต่อไปนี้

สมมุติว่าเราสนใจ 2 ตัวแปร u และ v ซึ่งมีค่าที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ คือ

กรณีตัวแปร u มี $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots, u_\alpha$

ใช้สัญลักษณ์แทนตัวห้อย $r=1, 2, 3, \ldots\ldots, \alpha$

กรณีตัวแปร v มี $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\ldots, v_\beta$

ใช้สัญลักษณ์แทนตัวห้อย $s=1, 2, 3, \ldots\ldots, \beta$

ให้ P_r เป็นความน่าจะเป็นที่ u จะมีค่าเป็น u_r

และ P_s เป็นความน่าจะเป็นที่ v จะมีค่าเป็น v_s

เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นที่มี u และ v ต่างเป็นอิสระเชิงสถิติต่อกัน จะได้ความน่าจะเป็นร่วม(joint probability) P_{rs} ที่มีตัวแปร u มีค่า u_r และตัวแปร v มีค่า v_s ตามสมการ(2.5)เป็น

$$P_{rs} = P_r P_s \qquad \ldots\ldots(2.32)$$

ทีนี้สมมุติว่า F(u) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ u ขณะที่ G(v) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ v ดังนั้นค่าเฉลี่ยของผลคูณ FG ตามนิยามสมการ(2.29)จะได้

$$[F(u)G(v)]_{ave} = \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\beta} P_{rs}F(u_r)G(v_s) \qquad \ldots\ldots(2.33)$$

โดยมีการรวม(summation)ตลอดค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ u_r และ v_s ถ้าตัวแปร r และ s เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกัน ตามสมการ(2.32)จึงเขียนสมการ(2.33)ใหม่ได้เป็น

$$[FG]_{ave} = \sum_r \sum_s P_r P_s F(u_r)G(v_s)$$
$$= \sum_r \sum_s [P_r F(u_r)][P_s G(v_s)]$$
$$= [\sum_r P_r F(u_r)]\ [\sum_s P_s G(v_s)]$$

พิจารณาขวามือของสมการตัวประกอบตัวแรกคือ F_{ave} และตัวประกอบตัวที่สองคือ G_{ave} ดังนั้นเราจะได้ว่า

ถ้า u และ v เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกันแล้วจะได้

$$[FG]_{ave} = F_{ave}G_{ave} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.34)$$

ซึ่งหมายถึงค่าเฉลี่ยของผลคูณมีค่าเท่ากับผลคูณของค่าเฉลี่ย

2.5 การกระจาย(Dispersion)

สมมุติตัวแปร v มีค่าเป็นไปได้ต่าง ๆ v_r ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่สอดคล้องตามลำดับ P(r) การแจกแจงความน่าจะเป็นสามารถบอกได้ด้วยพารามิเตอร์(parameters)ที่สำคัญอยู่ 2-3 ตัว ตัวหนึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของ v (หรือ v_{ave} ตามสมการ(2.28) ซึ่งเป็นค่ากลางของ v ที่จะกระจายไปเป็นค่า v_r ต่าง ๆ อย่างไร เราสามารถหาค่าที่ v ที่จะมีค่าเป็นไปได้ต่าง ๆ ว่าห่างจากค่าเฉลี่ย v_{ave} มากแค่ไหนได้จาก

$$\Delta v = v - v_{ave} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.35)$$

เมื่อ Δv คือ *ค่าเบี่ยงเบน*(deviation)ของ v จากค่าเฉลี่ย v_{ave}ให้สังเกตว่า *ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนมีค่าเป็นศูนย์* หรืออาศัยสมการ(2.30)จะได้

$$(\Delta v)_{ave} = (v-v_{ave})_{ave} = v_{ave} - v_{ave} = 0 \qquad \ldots(2.36)$$

จะเป็นการสะดวกขึ้นถ้าเราจะนิยามพารามิเตอร์ตัวหนึ่งขึ้นมาเพื่อวัดว่า v ห่างจากค่าเฉลี่ย v_{ave}ไปมากน้อยเท่าใด ค่าที่ห่างจากค่าเฉลี่ยแต่ละตัวมีที่เป็นบวกพอ ๆ กับที่เป็นลบเมื่อนำมาเฉลี่ยกันแล้วจะหายไปตามสมการ(2.36)แต่ถ้าหากเราใช้ $(\Delta v)^2$ จะไม่มีค่าใดเป็นลบและจะได้ค่าเฉลี่ยซึ่งนิยามว่า

$$(\Delta v)^2_{ave} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r(\Delta v_r)^2 = \sum_{r=1}^{\infty} P_r(v_r - v_{ave})^2 \qquad \ldots(2.37)$$

เรียกสมการนี้ว่า*การกระจาย*(dispersion or variance)ของ v และมีค่าเป็นบวกเสมอ(ให้สังเกตว่า $(\Delta v)^2_{ave}$ มีค่าต่างจาก $[(\Delta v)_{ave}]^2$)นั่นคือ

$$(\Delta v)^2_{ave} \text{ >หรือ= } 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2.38)$$

การกระจายนี้จะมีค่าเป็นศูนย์หรือหายไปเมื่อทุกค่าของ v_r เท่ากับ v และจะมีค่ามากขึ้นถ้าค่าเหล่านี้ห่างจาก v_{ave} มาก ดังนั้นการกระจายจึงเหมาะในการบอกว่ามีการกระจัดกระจายของค่า v อย่างไร

การกระจาย $(\Delta v)^2_{ave}$ นี้เป็นปริมาณที่มีมิติ(dimension)เป็นกำลังสองของ v จึงได้มีการพิจารณาวัดการกระจายเชิงเส้นของค่าที่จะเป็นไปได้ของ v ในรูปการหารากที่สองของการกระจายเป็น **Δv** (พิมพ์ตัวหนาเพื่อให้ต่างไปจาก

Δv)โดย

$$\Delta v = [(\Delta v)^2_{ave}]^{1/2} \qquad \text{...........(2.39)}$$

ซึ่งมีมิติเดียวกันกับ v เราเรียก Δv นี้ว่า *ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน* (standard deviation)ของ v จากนิยามตามสมการ(2.37)แสดงให้เห็นว่าเมื่อมีค่า v เพียง 2-3 ค่าที่มีโอกาสตกห่างจากค่า v_{ave} ก็จะมีผลต่อการหาค่า Δvได้ ดังนั้นค่า v ต่าง ๆ จะตกอยู่รอบ ๆ ค่าเฉลี่ย v_{ave} ด้วยระยะขนาด(order)Δv

ตัวอย่าง

จากตัวอย่างที่แล้วกรณี 4 สปิน ที่มี p=q=1/2 เราได้ n_{ave} = 2 เราสามารถหาการกระจายของ n ได้จากนิยาม

$$(\Delta n)^2_{ave} = \sum_n P(n)(n-2)^2$$

$$= (1/16)(0-2)^2 + (4/16)(1-2)^2 + (6/16)(2-2)^2 + (4/16)(3-2)^2 + (1/16)(4-2)^2$$

$$= 1$$

ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ n คือ

$$\Delta n = (1)^{1/2} = 1$$

ทำนองเดียวกันเราสามารถคำนวนหาการกระจายของโมเมนต์แม่เหล็กได้ เริ่มจากหาค่าเฉลี่ย m_{ave} โดย

$$m = n - n' = 2n - N$$

$$m_{ave} = (n - n')_{ave} = n_{ave} - n'_{ave} = 2 - 2 = 0$$

ดังนั้น

$$(\Delta m)^2_{ave} = \sum P'(m)(m-0)^2$$

$$= (1/16)(-4)^2 + (4/16)(-2)^2 + (6/16)(0)^2 + (4/16)(2)^2 + (1/16)(4)^2$$

$$= 4$$

ดังนั้น

$$\Delta m = (4)^{1/2} = 2$$

เราลองมาตรวจสอบดูว่าค่าที่ได้มาเหล่านี้ไม่ขัดแย้งกันโดยพิจารณาจากที่

$$m_{ave} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n_{ave} = n'_{ave} = 2$$

ดังนั้นพิจารณาทุกค่าของ m และ n จะได้ว่า

$$\Delta m = m - m_{ave} = m = n - n' = n - (4 - n)$$
$$= 2n - 4 = 2(n - 2)$$

หรือ

$$\Delta m = 2(n - n_{ave}) = 2\Delta n$$

ดังนั้น

$$(\Delta m)^2_{ave} = 4(\Delta n)^2_{ave}$$

สอดคล้องกับการคำนวนที่เราได้มาแล้ว

เมื่อเรารู้ความน่าจะเป็น P_r สำหรับทุกค่า u_r ทำให้เราได้รายละเอียดเชิงสถิติเกี่ยวกับการแจกแจงของ u ในกลุ่มระบบได้ครบถ้วน แต่ถ้าเรารู้เพียงค่าเฉลี่ยบางตัว เช่น u_{ave} และ $(\Delta u)^2_{ave}$ จะทำให้เรารู้เพียงบางส่วนของลักษณะการแจกแจงและไม่เพียงพอที่จะหาความน่าจะเป็น P_r อย่างไรก็ตามค่าเฉลี่ยดังกล่าวอาจคำนวณได้จากวิธีการง่าย ๆ โดยไม่ต้องอาศัยค่าของความน่าจะเป็นซึ่งการคำนวณความน่าจะเป็นเหล่านี้อาจยาก เราจะกล่าวถึงเรื่องนี้ในหัวข้อต่อไป

2.6 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของระบบสปิน
(Mean values of a spin system)

พิจารณาระบบอุดมคติระบบหนึ่งที่ประกอบด้วย N สปิน(spins 1/2) เมื่อสปินเหล่านี้เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกันจะทำให้เราคำนวณหาค่าเฉลี่ยต่าง ๆได้ง่ายภายใต้เงื่อนไขทั่วไป การคำนวนนี้ไม่จำเป็นต้องหาความน่าจะเป็นใด ๆ เช่น ความน่าจะเป็น P(n) ตามสมการ(2.14)

เริ่มต้นจากกรณีง่าย ๆ ก่อนแล้วจึงเข้าสู่ปริมาณเชิงกายภาพของระบบสปิน โดยให้ M เป็นโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดในแนวทิศชี้ขึ้น(ซึ่งผลลัพธ์ออกมาเป็นบวกหรือจะมีทิศตรงข้ามเมื่อเป็นลบ)และให้ μ_i เป็นองค์ประกอบในแนวทิศชี้ขึ้น(มีค่าบวกหรือทิศตรงข้ามเมื่อมีค่าเป็นลบ)ดังนั้นโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมด M จึงมีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนต์แม่เหล็กของทุกสปิน นั่นคือ

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_N$$

หรือ

$$M = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \qquad \ldots\ldots\ldots(2.40)$$

เราจะคำนวณหาค่าเฉลี่ยและการกระจายของค่า M โดยการหาค่าเฉลี่ยทั้งซ้ายและขวาของสมการ(2.40)โดยอาศัยสมการ(2.30)จะได้

$$M_{ave} = [\sum_{i=1}^{N} \mu_i]_{ave} = \sum_{i=1}^{N} (\mu_i)_{ave} \quad ....(2.41)$$

เมื่อ $(\mu_i)_{ave}$ คือโมเมนต์เฉลี่ยของสปินที่ i (ซึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ถ้าความน่าจะเป็นที่จะชี้ขึ้น p ไม่เท่ากับความน่าจะเป็นที่จะชี้ลง q)และเนื่องจากความน่าจะเป็นของการเรียงตัวชี้ขึ้น p ของแต่ละสปินมีค่าเท่ากัน และเช่นเดียวกันความน่าจะเป็นของการเรียงตัวชี้ลง q ของแต่ละสปินมีค่าเท่ากัน จึงได้ค่าโมเมนต์แม่เหล็กเฉลี่ยของแต่ละสปินมีค่าเหมือนกัน นั่นคือ

$$(\mu_1)_{ave} = (\mu_2)_{ave} = (\mu_3)_{ave} = ...= (\mu_N)_{ave}$$

เราจะใช้สัญลักษณ์แทนค่าเฉลี่ยที่เท่ากันนี้ด้วย μ_{ave} ดังนั้นสมการ(2.41)จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$M_{ave} = N \mu_{ave} \quad ......(2.42)$$

นั่นคือโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดเฉลี่ยของ N สปินมีค่าเท่ากับ N เท่าของโมเมนต์เฉลี่ยของหนึ่งสปิน

ทีนี้มาคำนวณหาค่าการกระจายของ M นั่นคือการหาค่า $(\Delta M)^2_{ave}$ โดยเริ่มจากที่

$$\Delta M = M - M_{ave} \quad ....(2.43)$$

แทนค่าจากสมการ(2.40)และ(2.41)จะได้

$$\Delta M = M - M_{ave} = \sum_{i=1}^{N} [\mu_i - (\mu_i)_{ave}]$$

หรือ

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mu_i \quad ....(2.44)$$

โดยที่

$$\Delta\mu_i = \mu_i - (\mu_i)_{ave} \quad ....(2.45)$$

สำหรับค่า $(\Delta M)^2$ หาได้จากการยกกำลังสองสมการ(2.44)

$$(\Delta M)^2 = (\Delta\mu_1+\Delta\mu_2+\Delta\mu_3+...+\Delta\mu_N)\ (\Delta\mu_1+\Delta\mu_2+\Delta\mu_3+...+\Delta\mu_N$$

$$(\Delta M)^2 = [(\Delta\mu_1)^2+(\Delta\mu_2)^2+(\Delta\mu_3)^2+\ldots\ldots+(\Delta\mu_N)^2]$$
$$+[\Delta\mu_1\Delta\mu_2+\Delta\mu_1\Delta\mu_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\Delta\mu_1\Delta\mu_N$$
$$+\Delta\mu_2\Delta\mu_1+\Delta\mu_2\Delta\mu_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\Delta\mu_N\Delta\mu_{N-1}]$$

หรือ

$$(\Delta M)^2 = \sum_{i=1}^{N}(\Delta\mu_i)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j) \qquad \ldots\ldots(2.46)$$

เมื่อเครื่องหมาย # หมายถึงไม่เท่ากับ หาค่าเฉลี่ยของสมการ(2.46)ได้โดยอาศัยสมบัติตามสมการ(2.30) ซึ่งทำให้เราสามารถเปลี่ยนลำดับของการเฉลี่ยและการรวม จะได้

$$(\Delta M)^2_{ave} = \sum_{i=1}^{N}[(\Delta\mu_i)^2]_{ave} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N}\sum_{i=1}^{N}[(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)]_{ave} \quad \ldots(2.47)$$

ทุกผลคูณในพจน์ที่สองซึ่ง i#j(iไม่เท่ากับj)หมายถึงต่างสปินกัน แต่เนื่องจากสปินต่าง ๆ เหล่านี้มีลักษณะเป็นอิสระเชิงสถิติดังนั้นตามสมบัติในสมการ(2.34) จะได้ว่ากรณี i#j

$$[(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)]_{ave} = (\Delta\mu_i)_{ave}\,(\Delta\mu_j)_{ave} = 0 \qquad \ldots.(2.48)$$

เนื่องจาก $(\Delta\mu_i)_{ave} = (\mu_i)_{ave} - \mu_{ave} = 0$

ดังนั้นขวามือของสมการ(2.47)จึงหายไป(เนื่องจากมีทั้งค่าบวกและลบมาเฉลี่ยกัน)จึงเหลือเฉพาะค่าที่ยกกำลังสองซึ่งไม่เป็นลบ

$$(\Delta M)^2_{ave} = \sum_{i=1}^{N}[(\Delta\mu_i)^2]_{ave} \qquad \ldots\ldots(2.49)$$

จึงเหมือนที่เคยกล่าวมาแล้วจากสมการที่(2.41) เมื่อความน่าจะเป็นที่โมเมนต์ใด ๆ จะเรียงตัวชี้ขึ้นหรือชี้ลงแต่ละกรณีมีค่าเท่ากัน(pเท่ากัน qเท่ากัน) ดังนั้นการกระจาย $[(\Delta\mu_i)^2]_{ave}$ จึงมีค่า
เหมือนกันทุกสปิน นั่นคือ

$$[(\Delta\mu_1)^2]_{ave} = [(\Delta\mu_2)^2]_{ave} = \ldots\ldots\ldots = [(\Delta\mu_N)^2]_{ave}$$

จึงใช้สัญลักษณ์แทนค่าที่เท่ากันนี้แทนด้วย$[(\Delta\mu)^2]_{ave}$ สมการ(2.49)จึงเป็น

ผลรวมของ N พจน์ที่เท่ากันเป็น

$$(\Delta M)^2_{ave} = N[(\Delta\mu)^2]_{ave} \qquad \text{......(2.50)}$$

ความสัมพันธ์นี้จะบอกถึงการกระจายของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดว่ามีค่า N เท่าของการกระจายโมเมนต์แม่เหล็กของหนึ่งสปิน จากสมการ(2.50)เรายังได้

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ M มีค่า $= \Delta M = N^{1/2}\,\Delta\mu$ ...(2.51)

เมื่อ $\Delta M = [(\Delta M)^2_{ave}]^{1/2}$

และ $\Delta\mu = [(\Delta\mu)^2_{ave}]^{1/2}$

สอดคล้องกับนิยามทั่วไปตามสมการ(2.39)เราจึงได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมด(ΔM)และของโมเมนต์แม่เหล็กต่อสปิน($\Delta\mu$) ตามลำดับ

จากสมการ(2.42)และ(2.51)แสดงให้เห็นว่า M_{ave} และ ΔM ขึ้นอยู่กับจำนวนสปินทั้งหมดในระบบ เมื่อ $\mu_{ave} \neq 0$ ค่าโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดเฉลี่ย M_{ave} มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับ N และเช่นกันค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ΔM (ซึ่งวัดความกว้างของการแจกแจงของ M รอบ ๆ ค่าเฉลี่ย M_{ave})จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ N เพิ่มแต่เป็นแบบ $N^{1/2}$ ดังนั้นขนาดสัมพัทธ์(relative magnitude) ของ ΔM เทียบกับ M_{ave} จะลดลงเป็นสัดส่วนกับ $N^{-1/2}$ ซึ่งเราพิจารณาได้จากสมการ(2.42)และ(2.51)จะได้ว่า

กรณี $\mu_{ave} \neq 0$, $\quad \Delta M / M_{ave} = N^{-1/2}(\Delta\mu/\mu_{ave})$ ...(2.52)

รูปที่(2.8)แสดงแนวโน้มของลักษณะดังกล่าว

สมการ(2.42)และ(2.51)ที่ได้มานี้เป็นกรณีทั่วไปซึ่งขึ้นกับสมการ(2.41) โดยมีสปินเหล่านั้นต่างเป็นอิสระเชิงสถิติและยังใช้ได้กับกรณีที่ μ_i มีค่าต่าง ๆ นอกจากนี้ยังสามารถใช้ได้กับอนุภาคที่มีสปินมากกว่า 1/2 ซึ่งมีการเรียงตัวที่จะเป็นไปได้ในอวกาศมากกว่า 2 ทิศทาง

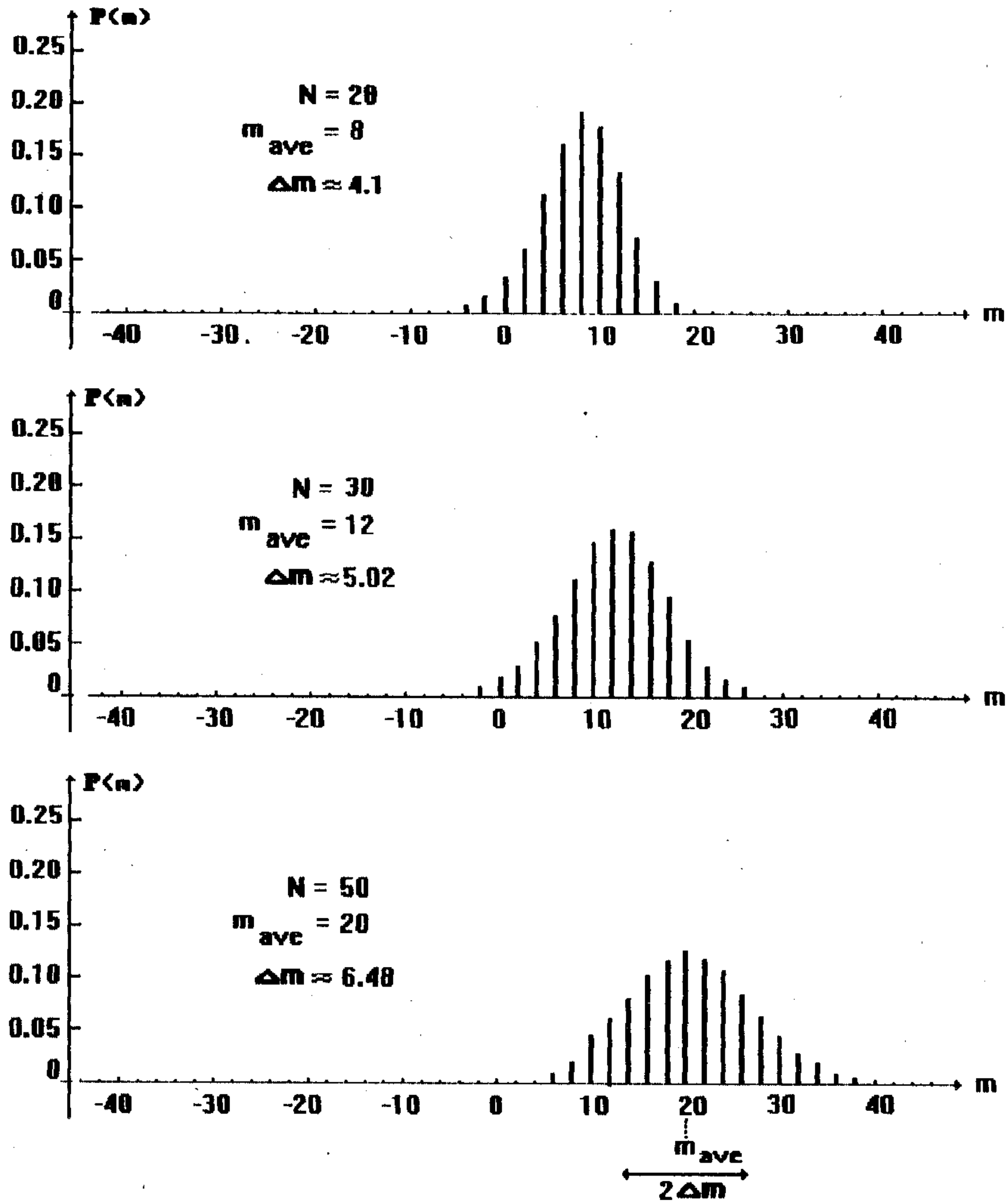
การนำมาใช้กับระบบของอนุภาคที่มีสปิน 1/2

(System of particles with spin 1/2)

จากผลที่ได้มาแล้วนั้นเราสามารถนำมาใช้ได้กับกรณีเฉพาะที่เราคุ้นเคยมาแล้วกรณีแต่ละอนุภาคมีสปิน 1/2 เหมือนที่เคยกล่าวมาแล้วเราให้โมเมนต์แม่เหล็กที่ชี้ขึ้นมีขนาด μ_o โดยมีความน่าจะเป็นที่ชี้ขึ้น p และโมเมนต์แม่เหล็กที่ชี้ลงมีขนาด $-\mu_o$ โดยมีความน่าจะเป็นที่ชี้ลง $q = 1-p$ ดังนั้นโมเมนต์แม่เหล็กเฉลี่ยในทิศชี้ขึ้นของหนึ่งสปินมีค่า

$$\mu_{ave} = p\mu_o + q(-\mu_o) = (p-q)\mu_o$$

$$= (2p-1)\mu_o \qquad \text{....(2.53)}$$



รูปที่ 2.8 ความน่าจะเป็น P(m) ที่โมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดของระบบที่ประกอบด้วย N สปิน(1/2) เกิด m(วัดในหน่วยของ μ_o) เนื่องจากมีสนามแม่เหล็กผ่านเข้ามา ให้ p=0.7 และ q=0.3 กรณี N = 20, 30 และ 50

ข้อสังเกต ถ้าเราตรวจสอบดูกรณีสมมาตรซึ่งมี p=q จะได้ $\mu_{ave} = 0$ ตามที่เราหวังไว้

การกระจายของโมเมนต์แม่เหล็กของหนึ่งสปินหาได้จาก

$$(\Delta\mu)^2_{ave} = (\mu - \mu_{ave})^2_{ave} = p(\mu_o - \mu_{ave})^2 + q(-\mu_o - \mu_{ave})^2 \quad \text{........(2.54)}$$

แต่

$$\mu_o - \mu_{ave} = \mu_o - (2p-1)\mu_o = 2\mu_o(1-p) = 2\mu_o q$$

และ

$$\mu_o + \mu_{ave} = \mu_o + (2p-1)\mu_o = 2\mu_o p$$

ดังนั้นสมการ(2.54)จึงกลายเป็น

$$(\Delta\mu)^2_{ave} = p(2\mu_o q)^2 + q(2\mu_o p)^2 = 4\mu_o^2 pq(q+p)$$

หรือ

$$(\Delta\mu)^2_{ave} = 4pq\mu_o^2 \quad \text{.......(2.55)}$$

เนื่องจาก p+q = 1

ดังนั้นสมการ(2.42)และ(2.50)จึงมีค่า

$$M_{ave} = N\,\mu_{ave} = N(p-q)\mu_o \quad \text{.......(2.56)}$$

$$(\Delta M)^2_{ave} = N\,[(\Delta\mu)^2]_{ave} = 4Npq\mu_o^2 \quad \text{.......(2.57)}$$

ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ M จึงหาได้เป็น

$$\Delta M = 2(Npq)^{1/2}\mu_o \quad \text{.......(2.58)}$$

ถ้าเราให้ $M=m\mu_o$ จะได้เลขจำนวนเต็ม $m=M/\mu_o$ อยู่ในรูปของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดในหน่วยของ μ_o สมการ(2.56)-(2.58)จึงอาจเขียนใหม่ในรูป

$$m_{ave} = N(p-q) = N(2p-1) \quad \text{.......(2.59)}$$

$$(\Delta m)^2_{ave} = 4Npq \quad \text{.......(2.60)}$$

$$\Delta m = 2(Npq)^{1/2} \quad \text{.......(2.61)}$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับการแจกแจงค่าที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ ของ M หรือ m ให้ดูรูปที่ 2.8 ประกอบซึ่งแสดงกราฟกรณี N = 20, 30 และ 50 เมื่อ p=0.7 และ q=0.3 โดยใช้สมการ(2.59)ถึง(2.61) คำนวณหาค่า m_{ave}, $(\Delta m)^2_{ave}$, และ Δm ของแต่ละค่า N ตามลำดับ

ตัวอย่าง

สมมุติว่ามีสนามแม่เหล็ก B ผ่านเข้ามาในระบบสปิน ทำให้ความน่าจะเป็นที่แต่ละสปินจะชี้ขนานกับ B มีค่า p=0.51 และมีความน่าจะเป็นที่จะชี้ตรงข้ามกับ B มีค่า q=1-p=0.49 จงหา

1.โมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดเฉลี่ย(M_{ave})ของระบบที่ประกอบด้วย N สปิน

2.ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมด(ΔM)

3.หา $\Delta M/M_{ave}$ กรณี N=100 และ $N=10^{24}$ และเปรียบเทียบการกระจาย

วิธีทำ

1.จากสมการ(2.56)

$$\begin{aligned} M_{ave} &= N(p-q)\mu_o \\ &= N(0.51-0.49)\mu_o \\ &= 0.02N\mu_o \end{aligned}$$

2.จากสมการ(2.58)

$$\begin{aligned} \Delta M &= 2(Npq)^{1/2}\mu_o \\ &= 2(Nx0.51x0.49)^{1/2}\mu_o \\ &\sim N^{1/2}\mu_o \end{aligned}$$

3.จาก 1.และ 2. จะได้

$$\begin{aligned} \Delta M/M_{ave} &\sim N^{1/2}\mu_o/0.02N\mu_o \\ &\sim 50/N^{1/2} \end{aligned}$$

กรณีแรกที่มีจำนวนสปินค่อนข้างน้อยคือ N=100 จะได้

$$\Delta M/M_{ave} \sim 50/100^{1/2} = 5$$

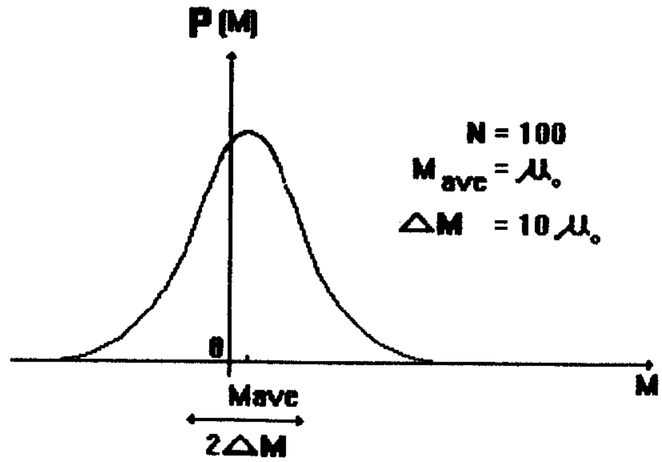
ซึ่งแสดงว่า $\Delta M > M_{ave}$ การกระจายของค่า M ต่าง ๆ จึงเห็นได้เด่นชัด นั่นคือค่า M_{ave} ต่างไปจากค่า M_{ave} มากมีทั้งทางซ้าย(-)และทางขวา(+)ให้ดูรูปที่ 2.9 ประกอบ

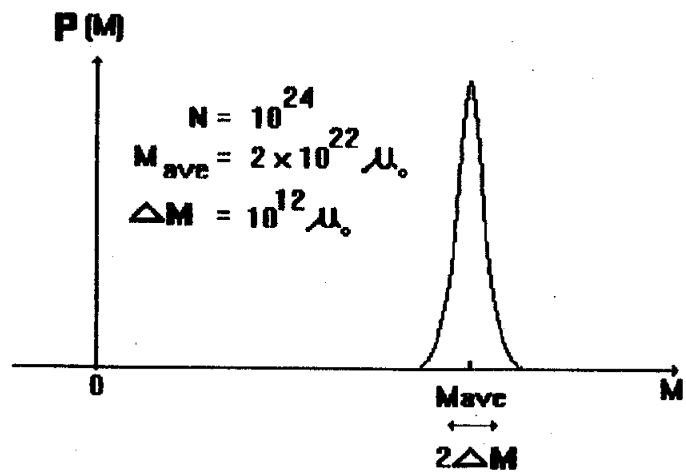
ส่วนกรณี $N=10^{24}$ ถือเป็นระบบสปินขนาดแมโครสโคปิคซึ่ง N มีขนาดไล่เลี่ยเลขอาโวกาโดร(Avogadro's number)ได้

$$\begin{aligned} \Delta M/M_{ave} &\sim 50/(10^{24})^{1/2} \\ &\sim 5x10^{-11} \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $\Delta M << M_{ave}$ การกระจายของค่า M ต่าง ๆ จึงต่างไปน้อยมากจากค่าโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดเฉลี่ย(M_{ave})ดังนั้นในการวัดค่าโมเมนต์แม่เหล็ก

ทั้งหมดในแต่ละครั้งจึงได้ค่าใกล้เคียงมากกับค่าโมเมนต์แม่เหล็กเฉลี่ย





รูปที่ 2.9 ความน่าจะเป็น $\mathbb{P}$(M) ที่จะมีค่าโมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดของระบบสปินมีค่า M กรณี N=100 และ $N=10^{24}$ สนามแม่เหล็กทำให้ p=0.51 และ q=0.49 (รูปทั้งสองใช้สเกลต่างกัน)

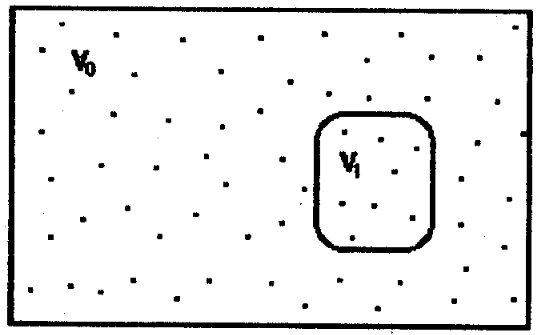
การแจกแจงของโมเลกุลแก๊สอุดมคติ

(Distribution of molecules in an idal gas)

พิจารณาแก๊สอุดมคติทั้งหมด N โมเลกุลซึ่งบรรจุอยู่ในกล่องปริมาตรทั้งหมด V_o มีจำนวน n โมเลกุลที่จุอยู่ในปริมาตร V_1 ในกล่องนี้ดังรูปที่ 2.10 เมื่อแก๊สอยู่ในภาวะสมดุล ความน่าจะเป็นที่จะพบแก๊สอยู่ในปริมาตร V_1 คือ

$$p = V_1/V_o$$

ดังเคยกล่าวมาแล้วตามสมการ(2.26)เราจะหา n_{ave} และการกระจายได้ไม่ยากเนื่องจากแก๊สอุดมคติที่เรากำลังพิจารณานี้คล้ายกับระบบสปิน ความน่าจะ



รูปที่ 2.10 กล่องปริมาตร V_o จุแก๊สอุดมคติทั้งหมด N โมเลกุล มี n โมเลกุลจุอยู่ในปริมาตรย่อย V_1 ส่วนที่เหลือ n'(หรือ N-n) จุอยู่ในปริมาตรที่เหลือ V_2(หรือ V_o-V_1)

เป็นทั้งสองแบบหาจากทฤษฎีบททวินามดังนั้นอาศัยสมการ(2.59)และ(2.60)มาใช้เมื่อ

$$n' = \text{จำนวนโมเลกุลในปริมาตร } V_2$$

$$V_2 = V_o - V_1$$

$$m = n - n' \quad = 2n - N$$

ดังนั้น

$$n = (N + m)/2 \qquad \text{..........(2.62)}$$

$$n_{ave} = (N + m_{ave})/2$$

จากสมการ 2.59 แทนค่า m_{ave} จะได้

$$n_{ave} = N(1 + p - q)/2$$

หรือเมื่อ q=1-p จะได้

$$n_{ave} = Np \qquad \text{..........(2.63)}$$

และจากสมการ(2.62)จะได้

$$\Delta n = n - n' = (N + m)/2 - (N + m_{ave})/2$$
$$= (m - m_{ave})/2$$

หรือ $$\Delta n = (\Delta m)/2$$

ดังนั้น

$$(\Delta n)^2_{ave} = (\Delta m)^2_{ave} / 4$$

และจากสมการ(2.60)จะได้ว่า

$$(\Delta n)^2_{ave} = Npq \qquad \text{.........(2.64)}$$

ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ n จึงมีค่า

$$\Delta n = (Npq)^{1/2} \qquad \text{.........(2.65)}$$

ดังนั้น

$$\Delta n / n_{ave} = (Npq)^{1/2} / Np$$
$$= (q/p)^{1/2} (1/N)^{1/2} \qquad \text{......(2.66)}$$

เมื่อพิจารณาสมการเหล่านี้จะเห็นว่า Δn มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับ $N^{1/2}$ และค่าสัมพัทธ์ $\Delta n / n_{ave}$ มีค่าลดลงเป็นสัดส่วนกับ $N^{-1/2}$ ซึ่งจะเห็นชัดมากเมื่อ N มาก สมการเหล่านี้ใช้ได้ดีกับแก๊สอุดมคติที่จุในกล่อง กรณี n โมเลกุลจะอยู่ในครึ่งกล่องที่มี p=q=1/2 โดยสมการ(2.63)จะกลายเป็น

$$n_{ave} = N/2$$

ขณะที่

$$\Delta n / n_{ave} = N^{-1/2}$$

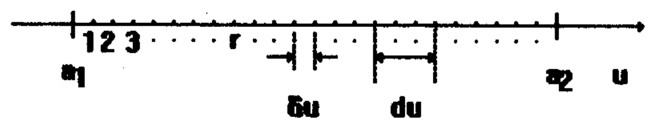
ข้อสังเกต สมการ(2.63)และ(2.64)อาจหาที่มาได้โดยตรงตามวิธีในหัวข้อนี้โดยไม่ต้องพิจารณาจากค่า m

2.7 การแจกแจงความน่าจะเป็นอย่างต่อเนื่อง (Continuous probability distribution)

พิจารณาตัวแปร u ซึ่งมีค่าต่อเนื่องอยู่ในช่วง $a_1 <= u >= a_2$ โดยที่โดเมน(domain)หรือช่วงดังกล่าวอาจขยายไปไม่สิ้นสุดได้ เช่น a_1---->-อนันต์ หรือ a_2---->+อนันต์ หรือทั้งคู่ เริ่มต้นเราพิจารณาให้ตัวแปรต่อเนื่อง u นี้มีโดเมนถูกแบ่งออกเป็นช่วงเล็ก ๆขนาดเท่า ๆกันดังในรูปที่ 2.11 ถ้าพิจารณาในระยะระหว่าง(range) u และ u+du ว่ามีความน่าจะเป็นเท่าใดที่ตัวแปรนี้จะตกอยู่ในระหว่างนี้ เมื่อ du มีค่าน้อยพอความน่าจะเป็นจึงมีค่าเป็นสัดส่วนกับ

du ซึ่งอาจเขียนอยู่ในรูป P(u)du โดย P(u)คือความหนาแน่นของความน่าจะเป็น(probability density)ซึ่งไม่ขึ้นกับขนาดของ du

เริ่มต้นเพื่อความสะดวกเราแบ่งโดเมนของตัวแปรออกเป็นช่วง ๆ (หรือ discrete)และนับได้มีขนาดคงที่ดังในรูปที่ 2.11 แต่ละช่วงแทนด้วยสัญลักษณ์



รูปที่ 2.11 โดเมนของตัวแปรต่อเนื่อง u ถูกแบ่งออกเป็นช่วงเล็ก ๆขนาดคงที่เท่า ๆ กัน แต่ละช่วงแทนด้วยเครื่องหมาย r ซึ่งให้มีค่าเป็น 1,2,3,.......ให้เปรียบเทียบกับระยะน้อย ๆ แบบแมโครสโคปิค du

r ค่าของ u ในช่วงนี้จึงแทนด้วย u_r และ ความน่าจะเป็นที่ u จะอยู่ในช่วงนี้คือ P_r หรือ $P(u_r)$ ดังนั้นตามเงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติจะได้

$$\sum_r P(u_r) = 1 \qquad ....(2.67)$$

หมายถึง ความน่าจะเป็นของทุกค่าที่จะเป็นไปได้ของตัวแปรรวมกันแล้วมีค่าเท่ากับหนึ่งแต่ถ้ากรณีที่ตัวแปรมีค่าต่อเนื่องเราใช้วิธีการอินทิเกรต(integrating) ตลอดอวกาศ จะได้

$$\int_c^d P(u)du = 1 \qquad ....(2.68)$$

โดย $c=a_1, d=a_2$ และ P(u)คือความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

เมื่อเราอาศัยความคล้ายคลึงกับนิยามทั่วไปตามสมการ(2.29)เกี่ยวกับค่าเฉลี่ย กรณีตัวแปรที่มีค่าเป็นช่วง ๆ ซึ่งมีฟังก์ชันเป็น f(u)จะมีค่าเฉลี่ยเป็น

$$[f(u)]_{ave} = \sum_r P(u_r)f(u_r) \qquad ....(2.69)$$

ส่วนสมการแสดงค่าเฉลี่ยของตัวแปรที่มีค่าต่อเนื่องจะเป็น

$$[f(u)]_{ave} = \int_{o}^{d} P(u)f(u)du \qquad ....(2.70)$$

สรุปท้ายบท

มีค่านิยามและสมการที่ควรจำดังนี้

กลุ่มของระบบที่คล้ายคลึงกันเชิงสถิติ หมายถึงการนำเอาระบบหลาย ๆ ระบบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขอันเดียวกันมาพิจารณาร่วมกันเชิงสถิติ

ความน่าจะเป็น P_r ของการเกิดเหตุการณ์ r ในกลุ่มของระบบที่ประกอบด้วยระบบที่คล้ายคลึงกัน S ระบบ เมื่อมี S_r ระบบที่เกิดเหตุการณ์ r มีค่า

$$P_r = S_r/S \qquad (\text{เมื่อ } S \text{ ----> อนันต์})$$

ความเป็นอิสระเชิงสถิติ บ่งบอกถึงเหตุการณ์ที่เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกัน การเกิดเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลกระทบต่อการเกิดเหตุการณ์อื่น

ค่าเฉลี่ย(หรือค่าเฉลี่ยของกลุ่มระบบที่คล้ายคลึงกัน) ค่าเฉลี่ยของตัวแปร v มีค่า

$$v_{ave} = \sum_r P_r v_r$$

การกระจายของตัวแปร v มีค่า

$$(\Delta v)^2_{ave} = \sum_r P_r(\Delta v_r)^2 = \sum_r P_r(v_r - v_{ave})^2$$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของตัวแปร v มีค่า

$$\Delta v = [(\Delta v)^2_{ave}]^{1/2}$$

การแจกแจงทวินาม

$$P(n) = N!p^n q^{N-n} / [(N-n)!n!]$$

แบบฝึกหัด

1. ในการเขียนเลขฐาน 2 ในแต่ละตำแหน่งเขียนด้วยเลข 0 หรือ 1 ถ้าให้เขียนเลขฐาน 2 ให้มี 5 ตำแหน่ง จะเขียนได้ทั้งหมดกี่ค่าที่จะเป็นไปได้
2. ลูกเต๋ามีหกหน้า ในการทอดลูกเต๋าแต่ละลูกมีโอกาศขึ้นแต่ละหน้าเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นของการเกิดแต้มรวมเป็น 6 หรือน้อยกว่าจากการทอดลูกเต๋า 3 ลูก
3. ในการทอดลูกเต๋า 5 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นเลข 6 กรณี
   3.1 ขึ้นลูกเดียว
   3.2 ขึ้นอย่างน้อยหนึ่งลูก
   3.3 ขึ้นสองลูก
4. ให้อาศัยสมบัติทั่วไปของค่าเฉลี่ยเพื่อแสดงว่า การกระจายของตัวแปร v สามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์ทั่วไปตามสมการ

$$(\Delta v)^2_{ave} = (v - v_{ave})^2_{ave}$$
$$= v^2_{ave} - v_{ave}^2 \qquad \ldots.(1)$$

ด้านขวามือของสมการเป็นวิธีอย่างง่ายในการคำนวณหาค่าการกระจายและให้แสดงว่าสมการ(1)เป็นอสมการทั่วไป(general inequality)ในรูป

$$v^2_{ave} >= v_{ave}^2 \qquad \ldots.(2)$$

5. โมเมนต์แม่เหล็กของสปิน(1/2)ตัวหนึ่ง มีองค์ประกอบของ μ ในทิศชี้ขึ้นมีค่าเป็น μ_o โดยมีความน่าจะเป็น p และในทิศชี้ลงมีค่าเป็น $-\mu_o$ โดยมีความน่าจะเป็น q=1-p
   5.1 ให้คำนวณหาค่า μ_{ave} และ μ^2_{ave}
   5.2 ให้ใช้สมการ(1)ในข้อ 4.คำนวณหาค่า $(\Delta\mu)^2_{ave}$ ซึ่งจะตรงกับสมการ(2.55)
6. สมมุติว่าตัวแปร v มีค่าที่จะเป็นไปได้ต่าง ๆ เป็น v_r ซึ่งมีความน่าจะเป็น P_r ตามลำดับ
   6.1 ให้ใช้นิยามของ v_{ave} และ v^2_{ave} รวมทั้งเงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติ ให้แสดงว่า

$$v^2_{ave} - v_{ave}^2 = (1/2)\sum_{r}\sum_{s} P_r P_s (v_r - v_s)^2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

   เมื่อแต่ละผลรวมครอบคลุมทุกค่าที่จะเป็นไปได้ของ v

6.2 เนื่องจากพจน์ของผลรวมในสมการ(1)ไม่มีค่าใดเป็นลบให้แสดงว่า

$$\overline{v^2}_{ave} >= v_{ave}{}^2 \quad \ldots\ldots(2)$$

เครื่องหมายเท่ากับใช้กับกรณีที่มีค่า v เพียงหนึ่งค่าเกิดขึ้นเมื่อมีความน่าจะเป็นมีค่าไม่เป็นศูนย์ คำตอบในสมการ(2)สอดคล้องกับคำตอบในโจทย์ข้อ 4.

7. พิจารณานิวเคลียสที่มีสปิน(1)[หมายถึงมี spin angular momentum = $h/2\pi$]มีองค์ประกอบμ ของโมเมนต์แม่เหล็กเทียบกับทิศทางที่กำหนดได้ 3 ค่าที่จะเป็นไปได้คือ $+\mu_o$,0 และ $-\mu_o$ สมมุติว่านิวเคลียสนี้มีลักษณะไม่เป็นทรงกลมที่สมมาตรแต่มีลักษณะทรงรีแกนหลักของนิวเคลียสจึงมักจะเรียงตัวขนานกับทิศทางที่กำหนดทิศทางหนึ่งในของแข็งที่เป็นผลึกที่นิวเคลียสนี้เป็นส่วนประกอบ ดังนั้นจึงมีความน่าจะเป็น p ที่จะมี $\mu = +\mu_o$ และความน่าจะเป็น p เช่นกันที่ $\mu = -\mu_o$ และมีความน่าจะเป็นที่เหลือ 1-2p ที่ $\mu = 0$

7.1 ให้คำนวณหา μ_{ave} และ $\mu^2{}_{ave}$

7.2 ให้คำนวณหา $(\Delta\mu)^2{}_{ave}$

7.3 สมมุติของแข็งที่เรากำลังพิจารณานี้ประกอบด้วย N นิวเคลียสที่อาจละอันตรกิริยาระหว่างกันได้ เมื่อให้ M เป็นองค์ประกอบทั้งหมดของโมเมนต์แม่เหล็ก(ในแนวทิศทางที่กำหนด)ของทุกนิวเคลียส ให้คำนวณหาค่า M_{ave} และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ΔM ในพจน์ของ N, p และ μ_o

8. ให้คำนวณหาค่า ความน่าจะเป็น P(m)ที่โมเมนต์แม่เหล็กทั้งหมดของระบบที่ประกอบด้วย N สปิน(1/2)เกิด m(วัดในหน่วยของ μ_o)เนื่องจากมีสนามแม่เหล็กผ่านเข้ามา ให้ p=0.7 และ q=0.3 กรณี N = 20,30 และ 50 และให้ใช้สมการ(2.59)ถึง(2.61)คำนวณหาค่าที่ปรากฏในรูปที่(2.8)

9. พิจารณาระบบอุดมคติที่ประกอบด้วย N สปิน(1/2)ที่มีลักษณะเหมือนกัน เราสามารถเขียนจำนวน n โมเมนต์แม่เหล็กที่มีทิศชี้ขึ้นอยู่ในรูป

$$n = u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+u_N \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

เมื่อ $u_i = 1$ ถ้าโมเมนต์ที่ i ชี้ขึ้น และ $u_i = 0$ ถ้าชี้ลง ให้ใช้สมการ(1) และความจริงที่ว่าสปินเหล่านี้ต่างเป็นอิสระเชิงสถิติเพื่อตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 ให้แสดงว่า $n_{ave} = N\, u_{ave}$

9.2 ให้แสดงว่า $(\Delta n)^2{}_{ave} = N\,(\Delta u)^2{}_{ave}$

9.3 สมมุติว่าแต่ละโมเมนต์แม่เหล็กมีความน่าจะเป็นที่จะชี้ขึ้น p และมี

ความน่าจะเป็นที่จะชี้ลง $q=1-p$ ให้หาค่า u_{ave} และ $(\Delta u)^2_{ave}$
9.4 ให้หาค่า n_{ave} และ $(\Delta n)^2_{ave}$ ค่าตอบที่ได้สอดคล้องกับสมการ (2.63)และ(2.64)
