

## บทที่ ๑

### การแทรกสอดและการเลี้ยวเบน (Interference and Diffraction)

#### ๑.๑ คำนำ

คลื่นส่วนมากที่เราได้ศึกษาในตอนต้นมีเพียงหนึ่งมิติ กล่าวคือในมิตินี้มีหนึ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ (path) ซึ่งคลื่นสามารถแผ่กระจายจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งได้ต่อไป เราจะพิจารณาสถานะการแผ่เมื่อมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นไปทิศทางต่างๆกันจากเครื่องส่งไปยังเครื่องตรวจจับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สิ่งเหล่านี้ทำให้เกิดเหตุการณ์ที่เรียกว่า ลักษณะอาการการแทรกสอดและการเลี้ยวเบนที่เป็นผลจากการรวมกันแบบเสริมกัน และแบบหักล้างกันของคลื่นที่มาจากตำแหน่งต่างๆกัน ที่แต่ละตำแหน่งในลวดลาย (pattern) การแทรกสอดหรือการเลี้ยวเบนมีเฟสต่างกันของคลื่นรวมทั้งขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ต่างกันของคลื่น และผลลัพธ์อันปลิวอาจจะมีมากกว่าหรือน้อยกว่าขององค์ประกอบเดี่ยว

ความแตกต่างระหว่างการแทรกสอดและการเลี้ยวเบนคือ ในการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กๆ (slit) มีความกว้างขนาดของความยาวคลื่นของแสงเลี้ยวเบน อาศัยจากหลักของ Huygen ที่กล่าวว่า ทุกๆจุดบนแนวหน้าคลื่นในระยะยาวของช่องเปิดอาจถือได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ ซึ่งจะปล่อยคลื่นเล็กๆออกไปรอบๆและวิวัฒนาการต่อไปเป็นระบบคลื่นเลี้ยวเบน ดังนั้นถ้าเราทราบรูปร่างของแนวหน้าคลื่นที่เวลาหนึ่ง เราอาจใช้วิธีเรขาคณิตหาหน้าคลื่นที่เวลาต่อไปได้ โดยการสร้างผิวซึ่งสัมผัสกับแนวหน้าคลื่นเล็กๆเหล่านั้น

ในลวดลายการแทรกสอดได้จากช่องเปิดเล็กๆจำนวนสองหรือมากกว่า แต่ละช่องเปิดอาจพิจารณาเป็นแหล่งกำเนิดของคลื่นเดี่ยว ดังนั้นจำนวนขององค์ประกอบรวมกันในลวดลายการแทรกสอดเท่ากับจำนวนของช่องเปิด สิ่งนี้ชี้ให้เห็นว่าลวดลายทั้งหมดจากช่องเปิดมากกว่าหนึ่งช่องจะแสดงทั้งผลการแทรกสอดและผลการเลี้ยวเบน

#### ๑.๒ การแทรกสอดระหว่างสองจุดแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ (Coherent point source)

ปรากฏการณ์การแทรกสอดเกิดขึ้นเมื่อคลื่นหลายขบวนมาพบกัน ผลของการที่คลื่นมา

พบกันที่จุดนั้นไม่สามารถอธิบายได้ด้วยการเขียนเส้นรังสีธรรมดา แต่ต้องอาศัยคุณสมบัติการเป็นคลื่น หมายความว่าผลลัพธ์จะเป็นเช่นไรขึ้นอยู่กับเฟสและอิมพลีจของคลื่นเหล่านั้น ปรากฏการณ์อื่นที่ได้อธิบายโดยอาศัยคุณสมบัติการเป็นคลื่นได้แก่ การเลี้ยวเบนและไปลาโรเซชัน (ได้กล่าวในบทที่ ๘) เราจะเริ่มศึกษาการแทรกสอดจากแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์จำนวนหลายคลื่น คลื่นอาพันธ์หมายถึงคลื่นที่มีความถี่เท่ากัน และมีเฟสผลต่างระหว่างคลื่นทั้งสองคงที่ตลอดเวลาสัมพันธ์กับความถี่ของคลื่นเสมอ

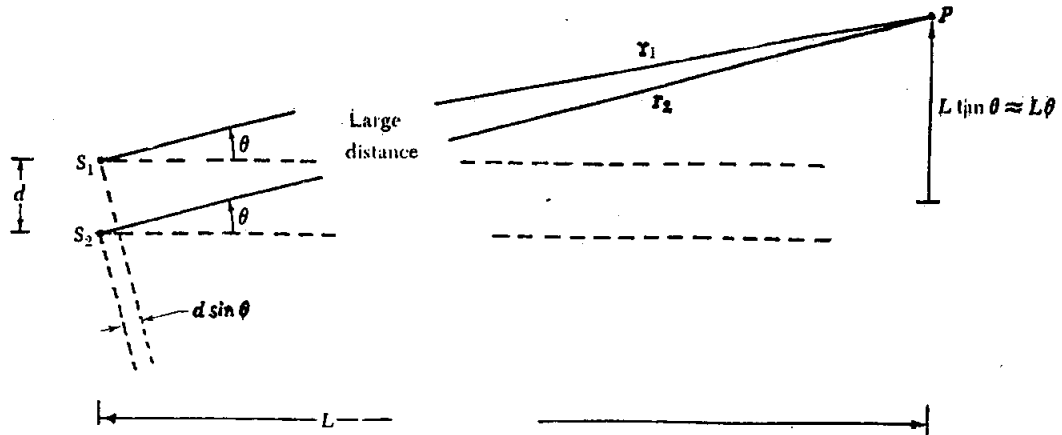
### การทดลองการแทรกสอดที่สนามทางไกล

จากรูป ๔.๑ สองแหล่งกำเนิดคลื่น  $s_1$  และ  $s_2$  กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าไปยังสนามจุด  $P$  เป็นระยะ  $r_1$  และ  $r_2$  ตามลำดับ ดังนั้นรังสีทั้งสองตามเส้นทางจากแหล่งกำเนิดทั้งสองไปยังจุด  $P$  เกือบขนานกันและทำมุม  $\theta$  เท่ากันกับแกน  $z$  ในที่นี้เส้นทางเคลื่อนที่ทั้งสองต่างกันมีค่าเท่ากับ  $d \sin \theta$  ที่จุด  $P$  เมื่อคลื่นจากแหล่งกำเนิดทั้งสองโคจรมาพบกันตลอด ที่ตำแหน่งนั้นเรียกว่า บริเวณของการแทรกสอดแบบเสริมกัน หรือการแทรกสอดมากที่สุด ดังนั้นทั้งสองแหล่งกำเนิดจะต้องออสซิลเลตด้วยเฟสเดียวกัน และ  $P$  จะเป็นบริเวณของการแทรกสอดเสริมกันเมื่อ

$$d \sin \theta = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots \text{etc.} \quad (4.1)$$

$$\text{หรือ} \quad = \pm n\lambda ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

การแทรกสอดมากที่สุดที่  $\theta = 0$  เรียกว่า principal maximum หรือ มากที่สุดอันดับศูนย์ (zero-order maximum) ค่ามากที่สุดครั้งแรกอยู่แต่ละข้างของ principal maximum ที่  $d \sin \theta = \pm \lambda$  เรียกว่า มากที่สุดอันดับหนึ่ง (first-order maximum) และที่บริเวณตำแหน่งอื่นซึ่งคลื่นโคจรมาพบกันโดยคลื่นจากแหล่งกำเนิดหนึ่งรวมกันหักล้างจากแหล่งกำเนิดอื่นตลอดเวลา ที่ตำแหน่งนั้นเรียกว่า บริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้าง หรือการแทรกสอดน้อยที่สุด และบริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้างซึ่งคลื่นรวมทั้งหมดเป็นศูนย์ เรียกว่าเป็นบัพ มันเกิดที่มุมเฟสเมื่อเส้นทางการเคลื่อนที่ต่างกันเป็น



รูป ๔.๑ แสดงสองแหล่งกำเนิดคลื่นกระจายคลื่นไปยังตำแหน่ง P.

$$d \sin \theta = \pm \lambda/2, \pm 3\lambda/2, \dots \dots \dots \text{etc.} \quad (๔.๓)$$

หรือ 
$$= \pm (n + \frac{1}{2})\lambda \quad \text{เมื่อ } n = 0, 1, 2, \dots \dots (๔.๔)$$

เมื่อทั้งสองแหล่งกำเนิดยังคงให้ความสัมพันธ์เฟสคงที่ บริเวณที่เป็นการแทรกสอดแบบเสริมกันที่เวลาหนึ่งยังคงเป็นบริเวณของการแทรกสอดแบบเสริมกันตลอดเวลา และในทำนองเดียวกัน บริเวณที่เป็นการแทรกสอดแบบหักล้างที่เวลาหนึ่ง ยังคงเป็นบริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้างตลอดเวลา บริเวณที่มีการแทรกสอดแบบหักล้างและแบบเสริมกันเป็นหลายแบบรวมกันเรียกเป็นลวดลายการแทรกสอด ถึงแม้ว่าคลื่นเป็นคลื่นเคลื่อนที่แค่ลวดลายการแทรกสอดที่เกิดขึ้นหยุดนิ่งกับที่ และถ้าสัญญาณจากสองแหล่งกำเนิดถูกปิดและค่อยเปิด สัญญาณจากแหล่งกำเนิดทั้งสองยังคงมีความสัมพันธ์ทางเฟสคงที่ ดังนั้นลวดลายการแทรกสอดยังคงไม่เปลี่ยนแปลง

ต่อไปเราจะหาสมการสำหรับสนามทั้งหมดที่ P ภายใต้การสมมติให้แหล่งกำเนิดคลื่นทั้งสองมีการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกเหมือนกันยกเว้นค่าคงที่เฟสมีค่าต่างกัน เราพิจารณาเฉพาะ

องค์ประกอบเดียวซึ่งเราสามารถจัดให้คลื่นทั้งสองเป็นไปลาไรซ์เชิงเส้นมีทิศทางตามขวางกับเส้นตรงจากแหล่งกำเนิดไปยัง P เราจัดให้เป็นองค์ประกอบไปลาไรซ์เชิงเส้นตาม  $\hat{y}$  เมื่อ  $\hat{y}$  ตั้งฉากกับระนาบของรูป ๕.๑ ดังนั้นการเคลื่อนที่ของจุดประจุ ๑ และ ๒ มีองค์ประกอบ  $y$  เป็น

$$y_1(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$y_2(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi_2) \quad (๕.๕)$$

สนามจุด P อยู่ที่ตำแหน่งซึ่งทำมุม  $\theta$  และระยะ  $r$  เมื่อ  $r$  เป็นค่าเฉลี่ยของ  $r_1$  และ  $r_2$  (กล่าวคือเราให้จุดกำเนิดของแกนพิกัดอยู่ที่ครึ่งทางระหว่างสองแหล่งกำเนิด) สนามรังสี  $E_1(t)$  ที่สนามจุด P เกิดเนื่องจากการเคลื่อนที่เมื่อเวลา  $t_1'$  กำหนดด้วย

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{-q\ddot{y}_1(t_1')}{r_1 c^2} \\ &= \frac{\omega^2 q y_0 \cos(\omega t_1' + \phi_1)}{r_1 c^2} \end{aligned} \quad (๕.๖)$$

และสนามรังสี  $E_2(t)$  เกิดเนื่องจาก  $y_2(t_2')$  กำหนดด้วยสมการที่คล้ายกับสมการ (๕.๖) ในสนามที่ห่างไกลจากแหล่งกำเนิดคลื่นพอสสมการ เราจัดให้  $r_1$  และ  $r_2$  มีค่าเกือบเท่ากับระยะทางเฉลี่ย  $r$

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad (๕.๗)$$

$$E_1(t) = A(r) \cos(\omega t_1' + \phi_1)$$

$$E_2(t) = A(r) \cos(\omega t_2' + \phi_2) \quad (๕.๘)$$

$$A(r) = \frac{\omega^2 q y_0}{r c^2} \quad (๕.๙)$$

เวลาการกระจาย  $t_1'$  และ  $t_2'$  ของรังสีรับที่เวลาภายหลัง  $t$  กำหนดด้วย

$$\omega t'_1 = \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) = \omega t - kr_1$$

$$\omega t'_2 = \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) = \omega t - kr_2 \quad (4.90)$$

เนื่องจากความแตกต่างเส้นทาง  $r_2 - r_1$  ขึ้นกับมุม  $\theta$  ดังนั้นความสัมพันธ์เฟสของสองคลื่นที่ตำแหน่ง P ขึ้นกับมุม  $\theta$  ด้วย ความสัมพันธ์เฟสเนื่องจากความแตกต่างเส้นทางที่เคลื่อนที่กำหนดด้วย

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \omega t'_1 - \omega t'_2 \\ &= k(r_2 - r_1) \\ &= k(d \sin\theta) \\ &= 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.91)$$

เมื่อ  $d \sin\theta$  เป็นความแตกต่างเส้นทางที่ตามรูป 4.9 สนามทั้งหมด E ที่ตำแหน่ง P เป็นการรวมกันของ  $E_1$  และ  $E_2$

$$\begin{aligned} E(r, \theta, t) &= E_1 + E_2 \\ &= A(r) \cos(\omega t'_1 + \phi_1) + A(r) \cos(\omega t'_2 + \phi_2) \end{aligned}$$

$$E(r, \theta, t) = A(r) \cos(\omega t + \phi_1 - kr_1) + A(r) \cos(\omega t + \phi_2 - kr_2) \quad (4.92)$$

แทนที่เราจะเขียน E เป็นการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ทรงกลมแผ่ออกจากแหล่งกำเนิด ๑ และ ๒ เราสามารถเขียนเป็นคลื่นเฉื่อยของคลื่นเคลื่อนที่ทรงกลมแผ่ออกด้วยอิมพลีซุทที่มีฟังก์ชันผสมของทิศทางเคลื่อนที่  $\theta$  และค่าคงที่เฟสที่เป็นค่าเฉื่อยของค่าคงที่เฟส  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  ของทั้งสองคลื่นได้ดังนี้

$$\text{จาก} \quad \cos a + \cos b = \cos \left[ \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \right] + \cos \left[ \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) \right]$$

ให้

$$= 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$$

$$a = \omega t + \phi_1 - kr_1$$

$$b = \omega t + \phi_2 - kr_2$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}(a + b) = \omega t + \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) - k \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

$$= \omega t + \phi_{av} - kr \quad (๔.๑๓)$$

$$\frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2}k(r_1 - r_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi \quad (๔.๑๔)$$

สมการ (๔.๑๒) กลายเป็น

$$\begin{aligned} E(r, \theta, t) &= \left\{ 2A(r) \cos \left[ \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi \right] \right\} \cos(\omega t + \phi_{av} - kr) \\ &= A(r, \theta) \cos(\omega t + \phi_{av} - kr) \quad (๔.๑๕) \end{aligned}$$

อัมพลิจูด  $A(r, \theta)$  คือ

$$A(r, \theta) = 2A(r) \cos \left[ \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi \right]$$

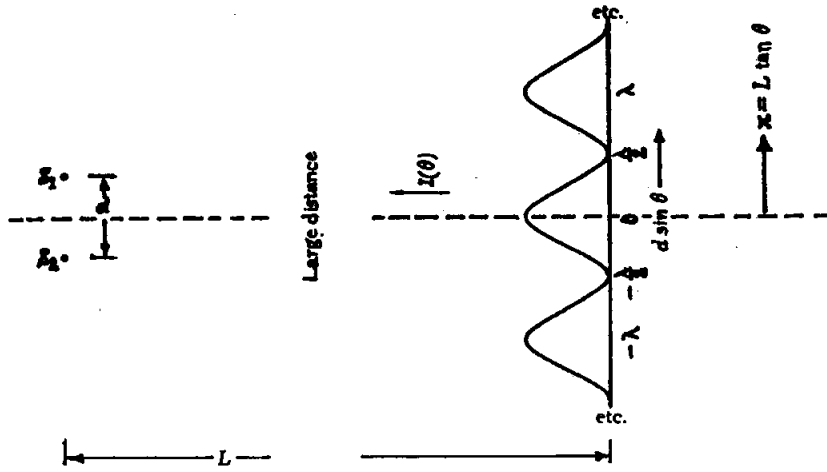
$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda} \quad (๔.๑๖)$$

ฟลักซ์โพตตอนที่สนามจุด P แปรตามฟลักซ์พลังงานเฉลี่ยตามเวลา  $\langle S \rangle$  ถ้าเราพิจารณาเพียงองค์ประกอบไปลาไรซ์ตาม  $\hat{y}$  อย่างเดียว ฟลักซ์พลังงานเป็น

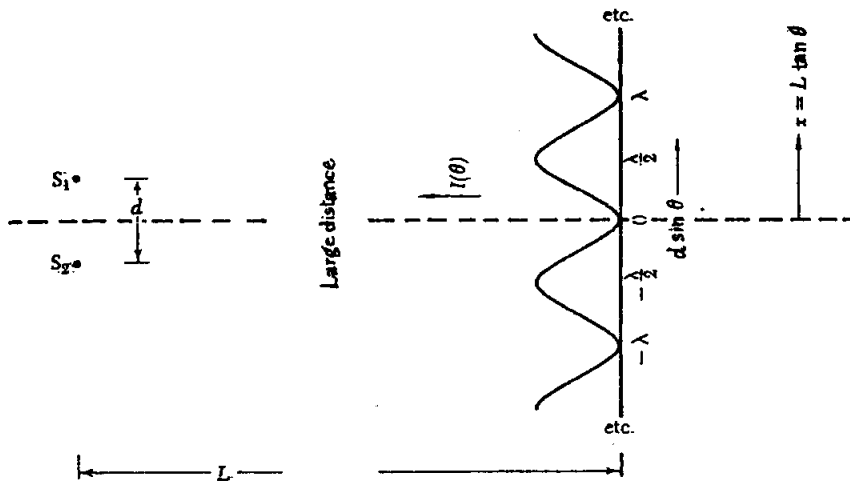
$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E}^2 \rangle \quad (๔.๑๗)$$

ทั่ว

$$\vec{E} = \hat{y}E(r, \theta, t) \quad (๔.๑๘)$$



รูป ๔.๒ แสดงความเข้มของการรวมกันจากสองแหล่งกำเนิดคลื่นมีเฟสเสริมกัน



รูป ๔.๓ แสดงความเข้มของการรวมกันของคลื่นจากสองแหล่งกำเนิดคลื่นที่มีเฟสต่างกัน  $๑๘๐$  องศาหักล้างกัน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \langle \vec{E}^2 \rangle &= \langle [A(r, \theta) \cos(\omega t + \phi_{av} - kr)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} A^2(r, \theta) \end{aligned} \quad (๔.๑๔)$$

$$\text{และ} \quad A^2(r, \theta) = \{2A(r) \cos[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi]\}^2 \quad (๔.๑๕)$$

ดังนั้นฟลักซ์โฟตอนเปลี่ยนแปลงตามมุม

$$I(\theta) = I_{\max} \cos^2[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2}\Delta\phi] \quad (๔.๑๖)$$

สมการ (๔.๑๖) เป็นความเข้มแปรตามโคไซน์กำลังสองของครึ่งความสัมพัทธ์เฟสที่มีส่วนหนึ่งของแหล่งกำเนิดออสซิลเลต และอีกส่วนหนึ่งเป็นความแตกต่างเส้นทางที่ขึ้นกับมุม

ถ้า  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  เท่ากัน ลวดลายการแทรกสอดของสองช่องเปิดเล็กเป็น

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\max} \cos^2 \frac{1}{2}\Delta\phi \\ &= I_{\max} \cos^2 \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (๔.๑๗)$$

เห็นได้ว่าความเข้มมากที่สุดเกิดที่  $\theta = 0$  ในกรณีเมื่อ  $d$  มีค่ามากกว่าความยาวคลื่นหลายเท่า ( $d \gg \lambda$ ) ตามรูป ๔.๒ ก็แสดงความเข้มมากที่สุดและความเข้มน้อยที่สุดหลายค่าความเข้ม  $\theta$  และถ้า  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  เป็นเฟสต่างกันด้วย  $\pm\pi$  ดังนั้นครึ่งหนึ่งของความแตกต่างเฟสเป็น  $\pm\frac{1}{2}\pi$

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\max} \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\phi \\ &= I_{\max} \sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \end{aligned} \quad (๔.๑๘)$$

สำหรับกรณีเมื่อ  $d$  มีค่าเป็นหลายเท่าของความยาวคลื่น ค่ามากที่สุดของ  $I(\theta)$  เกิดที่ใกล้กับบริเวณ  $\theta = 0$  ตามรูป ๔.๓ ก็แสดงความเข้มของการรวมกันของสองคลื่นที่มีเฟสต่างกัน

๔๐ องศา

จากรูป ๔.๒ และ ๔.๓ ค่ามากที่สุดต่อเนื่องกันของความเข้มสอดคล้องกับการเพิ่มขึ้นของความแตกต่างเส้นทางที่ของหนึ่งช่วงความยาวคลื่น กล่าวคือ การเพิ่มขึ้น



ของ  $d \sin \theta$  คุ้มปริมาณ  $\lambda$  สำหรับ  $\theta$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์องศา เราสามารถใช้การประมาณมุมเล็ก ๆ ของ  $\sin \theta \approx \theta$  ดังนั้นช่วงกว้างเชิงมุมระหว่างค่ามุมมากที่สุดต่อเนื่องกันเป็น  $\lambda/d$  เรเดียน เรียกค่าช่วงกว้างเชิงมุมนี้เป็น  $\theta_0$

$$\theta_0 \approx \lambda/d \quad (4.26)$$

ให้ช่วงห่างระยะทางที่สัมพันธ์กับช่วงห่างระหว่างค่ามากที่สุดต่อเนื่องกันเป็น  $x_0$  ดังนั้น  $x_0$  มีค่าเท่ากับระยะทาง  $L$  คูณด้วย  $\theta_0$

$$x_0 \approx L \theta_0 \approx \frac{L\lambda}{d} \quad (4.27)$$

### ๔.๓ การเลี้ยวเบนและหลักของ Huygen's principle

ความปกติลวดลายการแทรกสอดและลวดลายการเลี้ยวเบนไม่แตกต่างกัน เพียงแต่การเกิดลวดลายทั้งสองมีความแตกต่างกันที่แหล่งกำเนิดคลื่น กล่าวคือ ลวดลายอัมปลิจูดหรือลวดลายความเข้มที่เกิดจากส่วนรวมกันไค้ของจำนวนแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ไม่ต่อเนื่อง เรียกว่าลวดลายการแทรกสอด และลวดลายอัมปลิจูดหรือความเข้มที่เกิดจากส่วนรวมกันไค้ของการกระจายต่อเนื่องของแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ทั้งหลาย เรียกว่าลวดลายการเลี้ยวเบน

การเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อคลื่นตกกระทบสิ่งกีดขวาง ปรัชญาการนี้เห็นไค้อย่างชัดเจนเมื่อสิ่งกีดขวางมีขนาดใกล้เคียงกับความยาวคลื่นของคลื่นนั้น สิ่งกีดขวางอาจจะเป็นช่องเปิดเล็กซึ่งแนวหน้าคลื่นส่วนหนึ่งผ่านไปไค้ หรืออาจจะเป็นเส้นลวดหรือแผ่นกั้นที่กั้นส่วนหนึ่งของแนวหน้าคลื่นไค้ การเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นและฉากที่รับอยู่ห่างจากสิ่งกีดขวางเป็นระยะพอสมควรมีชื่อว่า การเลี้ยวเบนแบบเฟรสเนล (Fresnel diffraction) ถ้าต้นกำเนิดคลื่นอยู่ไกลจากสิ่งกีดขวางมากๆ จนถึงไค้ว่าคลื่นที่ไปกระทบสิ่งกีดขวางเป็นคลื่นระนาบ หรือถ้าใช้เลนส์ช่วยร่นระยะทางไค้ที่แหล่งกำเนิดคลื่นและฉากไม่จำเป็นต้องอยู่ไกลมาก การเลี้ยวเบนแบบนี้เรียกว่า การเลี้ยวเบนแบบฟราวนโฮเฟอร์ (Frauhofer diffraction) ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการเลี้ยวเบนแบบหลังนี้ การคำนวณการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กไค้ยาวโดยไค้การสร้างแบบของฮอยเกน (Huygen's construction)

พิจารณาของเปิดเล็กเดี่ยวซึ่งแคบและยาวมากจนไม่ต้องคิดถึงผลที่เกิดจากปลายทั้งสองข้าง ให้ลำแสงตกกระทบบนเป็นแสงขนาน หรือระนาบคลื่นเป็นจำนวนทั้งหมด  $N$  คลื่นบนของเปิดเล็ก แต่ละลำแสงห่างกันเป็นระยะ  $d$  ถ้า  $N$  มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ เราจะได้การกระจายต่อเนื่องของรังสีจากแหล่งกำเนิด ถ้าให้ความกว้างทั้งหมดของช่องเปิดเล็กเดี่ยวเป็น  $D$  ดังนั้น  $D$  เป็นบริเวณที่มีจำนวนรังสีขนาน  $N$  คลื่น  $D = (N - 1)d$  สมมติว่าคลื่นระนาบตกกระทบบนอยู่ในทิศ  $+z$  และ  $N$  ช่องเปิดเล็กย่อยทั้งหมดอยู่ตาม  $x$  ตามรูป ๔.๔

ที่สนามห่างไกลจากจุด  $P$  แต่ละลำแสงให้ส่วนที่มีอัมปลิจูดเดียวกัน  $A(r)$  และถ้าลำแสงทั้งหมดมีเฟสเดียวกัน ดังนั้นสนามไฟฟ้า  $E$  ที่จุด  $P$  กำหนดด้วยการรวมกันได้

$$E = A(r) \cos(kr_1 - \omega t) + A(r) \cos(kr_2 - \omega t) + \dots \\ \dots + A(r) \cos(kr_N - \omega t) \quad (๔.๖๖)$$

เราต้องการเขียนการรวมกันได้ของ  $N$  คลื่นเคลื่อนที่แผ่ออกด้วยคลื่นเคลื่อนที่แผ่ออกเฉลี่ยเพียงคลื่นเดี่ยวที่มีอัมปลิจูดสมเป็นฟังก์ชันของมุมการกระจาย เราสามารถย่อทางคณิตศาสตร์ให้ง่ายขึ้นโดยใช้ complex number ซึ่งสนาม  $E$  เป็นส่วนที่เป็นจริงของปริมาณ complex  $E_c$  เมื่อ

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \dots + e^{ikr_N}) \quad (๔.๖๗)$$

แต่จากรูป ๔.๔

$$r_2 = r_1 + d \sin\theta$$

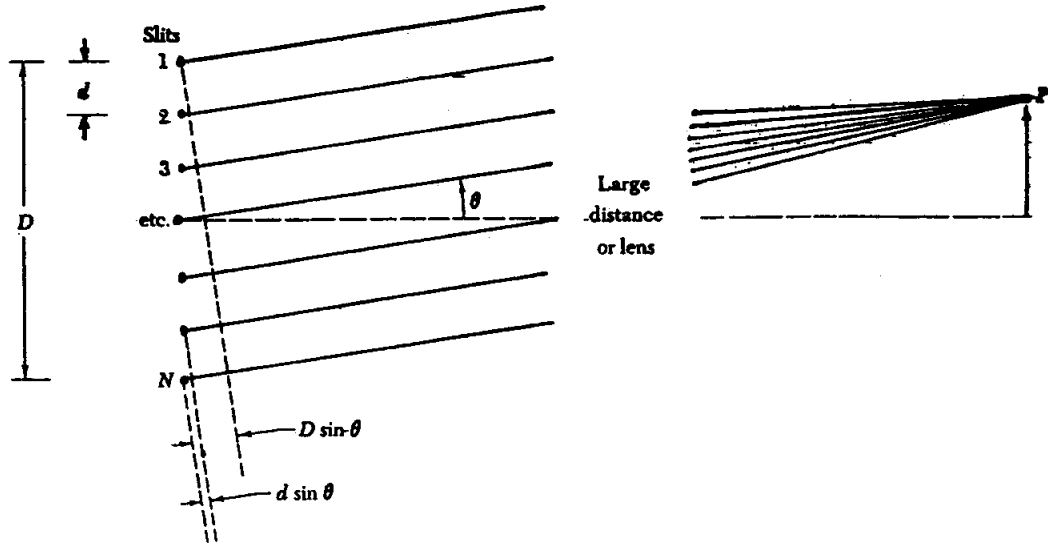
$$r_3 = r_1 + 2d \sin\theta$$

.....

$$r_N = r_1 + (N - 1)d \sin\theta \quad (๔.๖๘)$$

ดังนั้นสมการ (๔.๖๗) กลายเป็น

$$(๔.๖๙) \quad E_c = A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} (1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots)$$



รูป ๔.๔ แสดง N ลำแสงหรือ N ช่องเปิดเล็ก ซึ่งต่างมีเฟสเสริมกันเคลื่อนที่ไป P.

$$E_c = A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} S$$

เมื่อ 
$$S = 1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots$$

$$= 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} \tag{๔.๓๐}$$

ด้วย 
$$a \equiv e^{ik(r_2-r_1)} = e^{ik(d\sin\theta)} = e^{i\Delta\phi} \tag{๔.๓๑}$$

ในที่นี้ 
$$\Delta\phi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \tag{๔.๓๒}$$

เป็นความสัมพันธ์ทางเฟสของคลื่น (ที่ P) จากลำแสงใกล้เคียงกัน  
นำสมการ (๔.๓๐) คูณด้วยสมการ (๔.๓๑) และลบด้วยสมการ (๔.๓๐) จะได้

$$\begin{aligned}
 aS - S &= a^N - 1 \\
 S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} \\
 &= \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} \\
 &= \frac{e^{i(\frac{1}{2})N\Delta\phi} \left[ e^{i(\frac{1}{2})N\Delta\phi} - e^{-i(\frac{1}{2})N\Delta\phi} \right]}{e^{i(\frac{1}{2})\Delta\phi} \left[ e^{i(\frac{1}{2})\Delta\phi} - e^{-i(\frac{1}{2})\Delta\phi} \right]} \\
 &= e^{i(\frac{1}{2})(N-1)\Delta\phi} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\phi} \quad (\text{๔.๓๓})
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ(๔.๒๔) กลายเป็น

$$\begin{aligned}
 E_c &= A(r) e^{-i\omega t} e^{ik[r_1 + (\frac{1}{2})(N-1)d\sin\theta]} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\phi} \\
 &= A(r) e^{-i\omega t} e^{ikr} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\phi} \quad (\text{๔.๓๔})
 \end{aligned}$$

ในเมื่อปริมาณ

$$\begin{aligned}
 r &\equiv r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d\sin\theta \\
 &= r_1 + \frac{1}{2}D\sin\theta \quad (\text{๔.๓๕})
 \end{aligned}$$

คือเฉพาะส่วนเป็นจริงของสมการ(๔.๓๔) เราหาสนามที่ P เป็น

$$\begin{aligned}
 E(r, \theta, t) &= \left[ \frac{A(r) \sin \frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\phi} \right] \cos(kr - \omega t) \\
 &\equiv A(r, \theta) \cos(kr - \omega t) \quad (\text{๔.๓๖})
 \end{aligned}$$

ตรวจสอบสมการ(๔.๓๖) เทียบกับผลลัพธ์จากตอน ๔.๒ สมการ(๔.๑๕)และ(๔.๑๖) สำหรับ  $N = 2$  โดยใช้  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  ท้าย  $x = \frac{1}{2}\Delta\phi$

$$\begin{aligned}
 E(r, \theta, t) &= \frac{A(r) 2 \sin \frac{1}{2}\Delta\phi \cos \frac{1}{2}\Delta\phi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\phi} \cos(kr - \omega t) \\
 &= [2A \cos \frac{1}{2}\Delta\phi] \cos(kr - \omega t)
 \end{aligned}$$

ซึ่งให้ผลเช่นเดียวกัน

ลวดลายการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กเดี่ยว

เราให้  $N$  มีค่าเข้าใกล้อนันต์ และ  $D$  เป็นค่าคงที่ทำให้ระยะห่าง  $d$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ให้ความสัมพันธ์เฟสเลื่อนไปเป็น  $\Delta\phi$  ระหว่างคลื่นที่ใกล้กันเข้าใกล้ศูนย์ เฟสเลื่อนไปทั้งหมดเป็น  $\phi$  ระหว่างส่วนของลำแสงที่หนึ่งและลำแสงที่  $N$  ที่จุด  $P$  มีค่าเท่ากับ  $(N-1)\Delta\phi$

$$\phi = (N-1)\Delta\phi = kD \sin\theta \quad (4.37)$$

$$\phi = N\Delta\phi \quad N \gg 1 \quad (4.38)$$

ดังนั้นอัมพลิจูดสมในสมการ (4.36) กลายเป็น

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\phi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\phi} = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{[\sin \frac{1}{2} \phi / N]} \quad (4.39)$$

เมื่อจำกัดให้  $N$  เป็นค่าใหญ่มาก เราสามารถละทิ้งพจน์ทั้งหมดยกเว้นพจน์แรกของการกระจายแบบเทเลอร์สำหรับ  $\sin[\frac{1}{2}\phi/N]$  ในสมการ (4.39)

$$\sin \frac{1}{2} \phi / N = \frac{1}{2} \phi / N \quad (4.40)$$

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi} \quad (4.41)$$

ขณะที่  $N$  เข้าใกล้อนันต์ เราต้องให้  $A(r)$  เข้าใกล้ศูนย์ ทำให้  $NA(r)$  เป็นค่าคงที่ จากสมการ (4.41) ให้สังเกตว่า ขณะที่  $\theta$  เข้าใกล้ศูนย์  $\phi$  เข้าใกล้ศูนย์ด้วย และอัตราส่วน  $\sin \frac{1}{2} \phi / \frac{1}{2} \phi$  มีค่าเข้าใกล้หนึ่ง คือ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots$$

$$= 1 \quad \text{สำหรับ } x = 0$$

ดังนั้น  $A(r, \theta)$  เท่ากับ  $NA(r)$  ทุกที่หนึ่ง ชุดท้ายเราได้

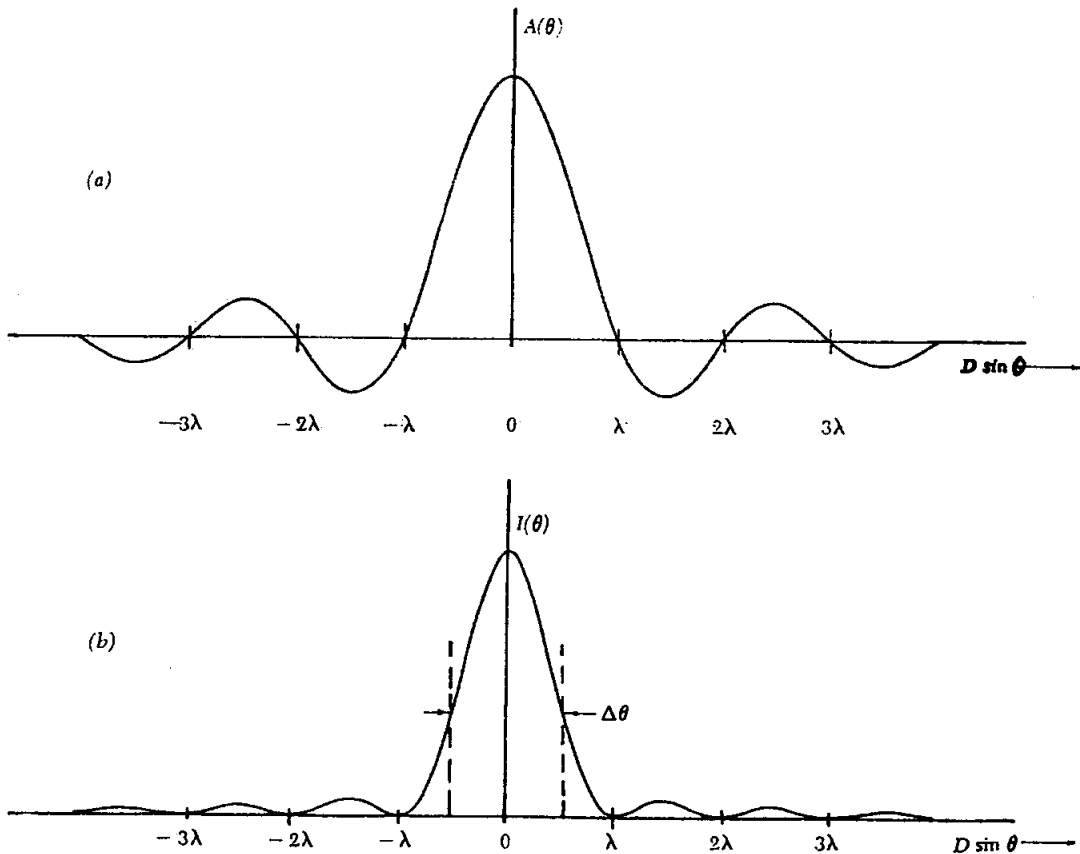
$$E(r, \theta, t) = A(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right] \cos(kr - \omega t) \quad (๔.๔๖)$$

และ 
$$= 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (๔.๔๗)$$

ฟังก์ชันพลังงานเฉลี่ยตามเวลา (สำหรับ  $r$  คงที่) คือ

$$I(r, \theta) = I_{\max} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\phi}{(\frac{1}{2}\phi)^2} \quad (๔.๔๘)$$

ลวดลายอัมปลิจูดและความเข้มของสมการ (๔.๔๖) และ (๔.๔๘) ใกล้เคียงในรูป ๔.๕



รูป ๔.๕ แสดงลวดลายการเลี้ยวเบนของช่องเปิดเล็กเดี่ยว (a) อัมปลิจูด (b) ความเข้ม

### ลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับสองช่องเปิดเล็กขนานกัน

ถ้ามีช่องเปิดเล็กยาวสองช่องขนานกัน แต่ละช่องกว้าง  $D$  และวางห่างกัน  $d$  ถ้าความกว้าง  $D$  ของช่องเปิดไม่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างช่องเปิดทั้งสอง ภาพที่ได้จะเป็นลวดลายการแทรกสอดซ้อนอยู่บนลวดลายการเลี้ยวเบน ลวดลายการเลี้ยวเบนเกิดจากการผสมของลวดลายการเลี้ยวเบนที่ได้จากแต่ละช่องเปิดเล็กเดี่ยว เพราะว่าแต่ละช่องเปิดเล็กจะให้สนามไฟฟ้าที่มีอัมพลิจูดและค่าคงที่เฟสแน่นอนอันหนึ่ง ค่าคงที่เฟสของส่วนที่มาจากช่องเปิดเล็กเหมือนกับค่าคงที่เฟสที่ได้จากส่วนย่อยที่ศูนย์กลางของช่องเปิดเล็ก และอัมพลิจูดแปรตาม  $\sin \frac{1}{2}\phi$  ในเมื่อ  $\phi$  คือความแตกต่างทางเฟสของส่วนที่มาจากขอบตรงกันข้ามของช่องเปิดเล็ก เมื่อมีสองช่องเปิดเล็กห่างกันด้วยระยะ  $d$  ทำให้แต่ละช่องเปิดเล็กให้ส่วนซึ่งเหมือนกับส่วนที่ได้จากช่องเปิดเล็กแคบเดี่ยวที่อยู่ตรงศูนย์กลางของช่องเปิดเล็ก และมีอัมพลิจูดเป็นไปตามทำนองเดียวกันคือมีเฟคเตอร์  $\sin \frac{1}{2}\phi$  ทั้งนี้ลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับสองช่องเปิดเล็กเป็นเช่นเดียวกับที่เราหาได้ก่อนหน้านี้ ยกเว้นค่าคงที่อัมพลิจูด  $A(x)$  ที่ได้จากแต่ละช่องเปิดเล็กมีการเปลี่ยนแปลงไปโดยมีเฟคเตอร์  $\sin \frac{1}{2}\phi$  คูณเพิ่มขึ้นจากเดิม ทั้งนี้เรากล่าวได้ว่าลวดลายของสองช่องเปิดเล็กหาได้จากสองช่องเปิดเล็กแคบที่บวมกันโดยคูณด้วย  $\sin \frac{1}{2}\phi$  และเราพบว่า ถ้าสองช่องเปิดเล็กถูกกระตุบด้วยเฟสเดียวกัน ลวดลายการแย่งรังสีกำหนดด้วย

$$E(\theta, t) = A(\theta) \cos(kr - \omega t) \quad (4.44)$$

$$A(\theta) = A(0) \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right] \cos \frac{1}{2}\Delta\phi \quad (4.45)$$

$$\phi = kD \sin\theta = 2\pi \frac{D \sin\theta}{\lambda} \quad (4.46)$$

$$\Delta\phi = kd \sin\theta = 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda} \quad (4.47)$$

เมื่อ  $x$  เป็นระยะจากจุดสังเกต  $P$  ถึงจุดกึ่งกลางระยะศูนย์กลางของสองช่องเปิดเล็ก ลวดลายความเข้ม  $I(\theta)$  เป็นปฏิภาคกับค่าเฉลี่ยตามเวลาของกำลังสองของสนามไฟฟ้า

$$I(\theta) = I(0) \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right]^2 (\cos^2 \frac{1}{2}\Delta\phi) \quad (4.48)$$

เฟคเตอร์  $\cos^2 \frac{1}{2} \Delta\phi$  ให้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของลวดลายสองช่องเปิดเล็ก ด้วยระยะห่างกันมากที่สุดตามมุมเป็น  $\lambda/d$  และเฟคเตอร์  $(\sin \frac{1}{2} \Delta\phi)^2$  ให้การผสมของช่องเปิดเล็กเกี่ยวกับความกว้างเชิงมุมเต็มประมาณเป็นความเข้มครึ่งหนึ่งของ  $\lambda/D$  หรือความกว้างเชิงมุมเต็มระหว่างระดับที่ศูนย์บนแต่ละด้านของศูนย์กลางมากที่สุดของ  $2\lambda/D$  โดยการนับจำนวนของริ้วสองช่องเปิดเล็กในศูนย์กลางมากที่สุดของการผสมช่องเปิดเล็กเดี่ยว (single-slit modulation) ลวดลายความเข้มที่สอดคล้องกับสมการ (๔.๔๔) ได้แสดงในรูป ๔.๖

ลวดลายการเลี้ยวเบนและการแทรกสอดสำหรับช่องเปิดเล็กขนานกันจำนวนมาก

จากการศึกษากรณีของสองช่องเปิดเล็กทำให้เราสามารถหาลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับช่องเปิดเล็กจำนวนมากได้ง่าย โดยสมมติให้ช่องเปิดเล็กเป็นช่องเปิดเล็กแคบและคูณผลสิทธิ์ด้วยเฟคเตอร์การผสมอัมปลิจูดสำหรับช่องเล็กเดี่ยว  $\sin \frac{1}{2} \Delta\phi$  ท่อไปพิจารณาการแทรกสอดสำหรับ  $N$  ลำแสงของรูป ๔.๔ อัมปลิจูดสำหรับช่องเปิดเล็กจำนวน  $N$  ช่องกำหนดด้วยสมการ (๔.๓๖) เขียนใหม่เป็น

$$E(r, \theta, t) = A(r, \theta) \cos(kr - \omega t) \quad (๔.๔๐)$$

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\phi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\phi} \quad (๔.๔๑)$$

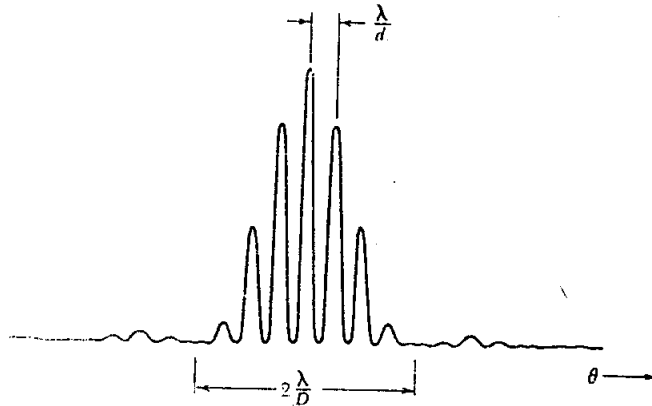
$$\Delta\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (๔.๔๒)$$

มุมที่ทำให้พจน์เศษบนของสมการ (๔.๔๑) เป็นศูนย์กำหนดด้วย  $\frac{1}{2} \Delta\phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  ซึ่งมุมเหล่านี้ให้ความยาวของเส้นทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นเป็น  $d \sin \theta$  เป็นศูนย์ หรือ ,etc. และสอดคล้องกับการแทรกสอดแบบเสริมกันระหว่างลำแสงจำนวน  $N$  ทั้งหมด เรียกว่า principal maxima

$$d \sin \theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots, m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (๔.๔๓)$$

มีค่ามากที่สุดที่  $\theta = 0$  เรียกว่าศูนย์กลางมากที่สุด หรือมากที่สุดอันดับที่ศูนย์ ค่าที่  $m = 1$  เรียกว่ามากที่สุดอันดับหนึ่ง ..... etc.





รูป ๔.๖ แสดงลวดลายของสองช่องเปิดเล็ก ช่องเปิดเล็กห่างกันเป็น  $d$  เป็นสี่เท่าของความกว้าง  $D$  ของแต่ละช่องเปิด

ที่ principal maximum ค่าหนึ่งอัมปลิจูดของการรวมกันเป็น  $N$  คูณด้วยอัมปลิจูดของแต่ละช่องเล็ก เห็นได้จากสมการ (๔.๕๑) สำหรับศูนย์กลางมากที่สุด ซึ่ง  $\Delta\phi = 0$  เราได้

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - \frac{1}{6}(Nx)^3 + \dots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots} = N \frac{1 - \frac{1}{6}(Nx)^2 + \dots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots}$$

=  $N$  สำหรับ  $x \rightarrow 0$

สำหรับค่ามากที่สุดอันดับหนึ่ง เมื่อ  $m = +1$  ทานองเดียวกันเราสามารถเขียนได้ว่า ขณะที่  $x$  เข้าใกล้  $\pi$  การจำกัดพจน์  $\sin Nx / \sin x$  เป็น  $\pm N$  โดยการกระจายในพจน์ของมุมเล็กๆ  $\epsilon$  ซึ่งต่างจาก  $x$  ด้วย  $\pi$

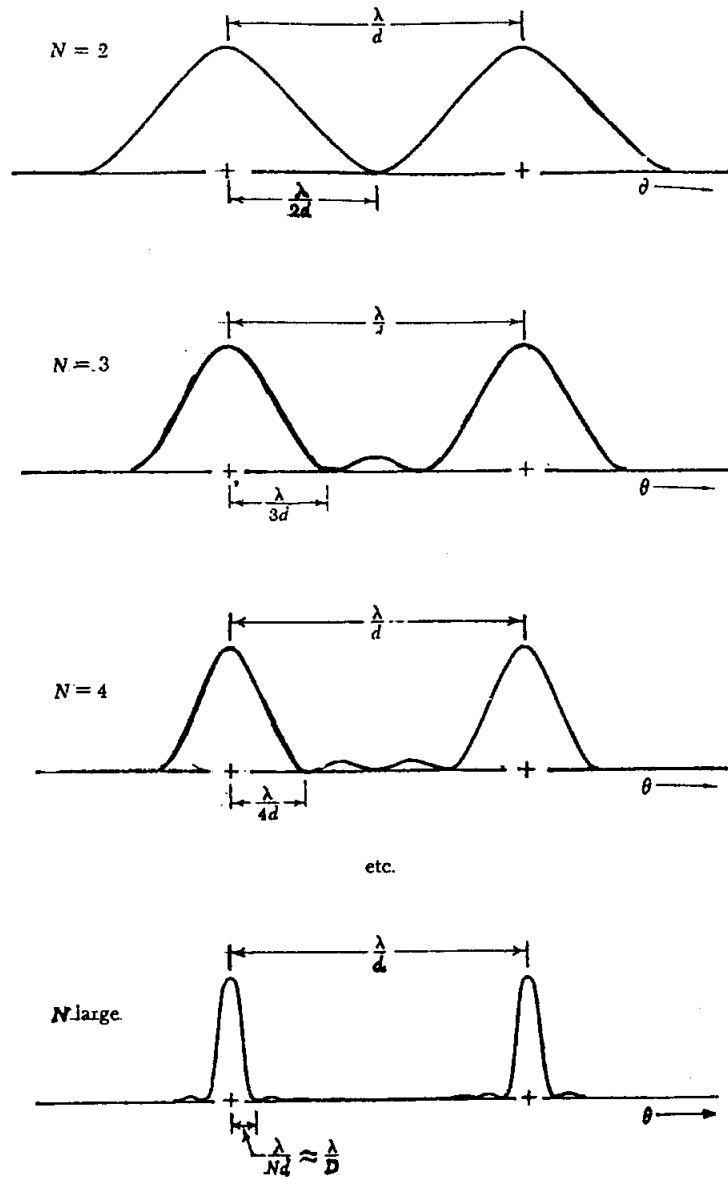
$$x = \pi - \epsilon$$

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\epsilon)}{\sin(\pi - \epsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\sin N\epsilon}{\sin \epsilon} \quad (๔.๕๕)$$

ในขณะที่  $\epsilon$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราได้การจำกัดของอัตราส่วนเป็น  $(-1)^{N+1} N = \pm N$

ในขณะที่  $N$  มีค่าเพิ่มขึ้น ช่วงกว้างเชิงมุมของ principal maximum จะลดลง

ครึ่งช่วงกว้างเรียงมุมจาก principal maximum ไปยังศูนย์กลางครึ่งแรกบนคานโคก้านหนึ่ง  
 ของค่ามากที่สุดกำหนดด้วยสมการ (๔.๕๐) ที่ค่า principal maximum ค่าหนึ่งทั้งหมด  
 และส่วนต่างข้างเป็นศูนย์ เมื่อ argument  $\frac{1}{2}N\Delta\phi$  ของฟังก์ชันไซน์ในพจน์เศษของสมการ  
 (๔.๕๐) เพิ่มขึ้นด้วย  $\pi$  พจน์เศษเป็นศูนย์อีกครั้งหนึ่ง (แต่พจน์ส่วนล่างไม่เป็นศูนย์) ดังนั้น  
 ส่วนเพิ่มของเฟส  $\Delta\phi$  เพิ่มขึ้นด้วย  $2\pi/N$  จากค่า principal maximum ค่าหนึ่งไปยังค่า  
 ศูนย์ครึ่งแรกของอัมปลิจูด และความยาวของเส้นทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นระหว่างสองค่าของ  
 principal maximum เป็น  $\lambda$  ดังนั้น เราเห็นได้ว่าอัมปลิจูดมีค่าลดลงจากค่ามากที่สุดไป  
 เป็นศูนย์ในช่วง  $\sin \theta$  เป็น  $N$  เท่าที่แคบกว่าช่วง  $\lambda/d$  ใน  $\sin \theta$  ระหว่างค่า  
 principal maximum สำหรับ  $N$  เป็นค่าใหญ่หรือสำหรับ  $N$  เป็นเลขคู่ เราเห็นได้ง่ายว่า  
 ค่าศูนย์ครึ่งแรก (ต่อจาก principal maximum) เกิดเมื่อความยาวของเส้นทางการเคลื่อน  
 ที่เพิ่มขึ้น  $d \sin \theta$  เป็น  $\lambda/N$  ในรูป ๔.๓ ได้แสดงลวดลายการแทรกสอดที่ขึ้นกับ  $N$  อย่างไร  
 เมื่อช่องเปิดเล็กห่างกันเป็นระยะ  $d$



รูป ๔.๗ แสดงผลของการแทรกสอดจากช่องเปิดหลายช่อง

## แบบฝึกหัดบทที่ ๔

9.1 ให้แสงสีเทียที่มีความยาวคลื่น  $5.9 \times 10^{-7}$  เมตร ผ่านช่องเล็กสองช่องซึ่งห่างกัน 0.8 มิลลิเมตร ( $8 \times 10^{-4}$  เมตร) จากอยู่ห่างจากช่องเล็ก 0.5 เมตร จงหาระยะระหว่างริ้วมืดและริ้วสว่างที่อยู่ติดกัน (ตอบ  $3.7 \times 10^{-4}$  เมตร)

9.2 แสงความยาวคลื่น  $\lambda$  และ  $\lambda'$  ผ่านช่องเล็กช่องหนึ่งจากลวดลายการเลี้ยวเบนพบว่า ตำแหน่งมืดลำดับแรกของแสง  $\lambda$  อยู่ที่เดียวกับตำแหน่งมืดอันดับที่สองของ  $\lambda'$  จงหาความสัมพันธ์ของ  $\lambda$  และ  $\lambda'$  (ตอบ  $\lambda' = \lambda/2$ )

9.3 A double slit of slit separation 0.5 mm is illuminated by a parallel beam from a helium-neon laser that emits monochromatic light of wavelength  $6328 \text{ \AA}$ . Five meters beyond the slits is a screen. What is the separation of the interference fringes on the screen?

9.4 If a "line" source of visible light is not really a line but has width 1 mm, how far must it be from a double slit which it illuminates in order for the two slits to be reasonably coherent? Assume the slit separation is  $\frac{1}{2}$  mm.

9.5 Venus has a diameter of about 800 miles. When it is visible at a "morning star" (or "evening star"), it is about as far away as the sun, i.e., about 93 million miles. It looks "larger than a point" to the unaided eye. Are you seeing the true size of Venus?

9.6 A plane slab of glass of thickness  $t$  and index  $n$  is inserted between an observer's eye and a point source. Show that the point source appears to be displaced to a point closer to the observer by approximately  $[(n-1)/n]t$ . Use small-angle approximations.

9.7 A "corner reflector" consists of three plane mirrors joined so as to form an inside corner of a rectangular box. Show that a light beam that strikes a corner reflector is directed back at 180 deg to its original direction, independent of the angle of incidence, as long as it hits all three surfaces.

9.8 Show that a plane wave normally incident on one face of a wedge-shaped prism of angle  $A$  is deviated by an amount  $\theta_{\text{dev}}$ , where

$$n \sin A = \sin(A + \theta_{\text{dev}}).$$

9.9 A diffraction-limited laser beam of diameter 1 cm is pointed at the moon. What is the diameter of the area illuminated on the moon? (The moon is 240,000 miles away.) Take the light wavelength to be  $6328 \text{ \AA}$ . Neglect scattering in the earth's atmosphere.

9.10 (a) Two equal sources radiate a wavelength  $\lambda$  and are separated a distance  $\lambda/2$ . There is a phase difference  $\delta_0 = \pi$  between the signals at source. If the intensity of each source is  $I_s$  show that the intensity of the radiation pattern is given by

$$I = 4I_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right)$$

where the sources lie on the axis  $\pm\pi/2$ . Plot  $I$  versus  $\theta$ .

(b) If the source in (a) are now  $\lambda/4$  apart and  $\delta_0 = \pi/2$  show that

$$I = 4I_s \left[ \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 + \sin\theta) \right]$$

Plot  $I$  versus  $\theta$ .

9.11 (a) A large number of identical radiators is arranged in rows and

columns to form a lattice which the unit cell is a square of side  $d$ . Show that all the radiation from the lattice in the direction  $\theta$  will be in phase at a large distance if  $\tan\theta = m/n$ , where  $m$  and  $n$  are integers.

(b) If the lattice of section (a) consists of atoms in a crystal where the rows are parallel to the crystal face, show that radiation of wavelength  $\lambda$  incident on the crystal face at a grazing angle of  $\theta$  is scattered to give interference maxima when  $2d \sin\theta = n\lambda$ . (Bragg reflexion).

9.12 Show that the separation of equal sources in a linear array producing a principal maximum along the line of the sources ( $\theta = \pm\pi/2$ ) is equal to the wavelength being radiated. Such a pattern is called 'end fire'. Determine the positions (values of  $\theta$ ) of the secondary maxima for  $N = 4$  and plot the angular distribution of the intensity.

9.13 The condition for the maxima of the intensity of light of wavelength  $\lambda$  diffracted by a single slit of width  $d$  is given by  $\alpha = \tan\alpha$ , where  $\alpha = \pi d \sin\theta/\lambda$ . The approximate values of  $\alpha$  which satisfy this equation are  $\alpha = 0, +3\pi/2, +5\pi/2, \text{etc.}$  Writing  $\alpha = 3\pi/2 - \delta, 5\pi/2 - \delta, \text{etc.}$ , where  $\delta$  is small, show that the real solutions for  $\alpha$  are  $\alpha = 0, \pm 1.43\pi, \pm 2.459\pi, \pm 3.471\pi, \text{etc.}$

## Useful Constants

Speed of light in vacuum	$c = 2.997925 \times 10^{10}$ cm/sec $= 3 \times 10^{10}$ cm/sec
Fundamental charge	$e = 4.8 \times 10^{-10}$ statcoulomb $= 1.6 \times 10^{-19}$ coulomb
Planck's constant	$h = 6.6 \times 10^{-27}$ erg-sec
Electron rest mass	$m_e = 0.9 \times 10^{-27}$ gm
Proton rest mass	$m_p = 1.7 \times 10^{-24}$ gm
Gravitational constant	$G = 6.7 \times 10^{-8}$ CGS units
Acceleration of gravity at sea level	$g = 980$ cm/sec <sup>2</sup>
Bohr radius	$a_0 = 0.5 \times 10^{-8}$ cm
Avogadro's number	$N_0 = 6.0 \times 10^{23}$ mole <sup>-1</sup>
Boltzmann's constant	$k = 1.4 \times 10^{-16}$ erg/deg Kelvin
Standard temperature	$T_0 = 273$ deg Kelvin
Standard pressure	$P_0 = 1$ atm = $1.01 \times 10^6$ dyne/cm <sup>2</sup>
Molar volume at S.T.P.	$V_0 = 22.4 \times 10^3$ cm <sup>3</sup> /mole
Thermal energy kT at S.T.P.	$kT_0 = 3.8 \times 10^{-14}$ erg = $\frac{1}{40}$ ev
Density of air at S.T.P.	$\rho_0 = 1.3 \times 10^{-3}$ gm/cm <sup>3</sup>
Speed of sound in air at S.T.P.	$v_0 = 3.32 \times 10^4$ cm/sec
Sound impedance of air at S.T.P.	$Z_0 = 42.8$ (dyne/cm <sup>2</sup> )/(cm/sec)
Standard sound intensity	$I_0 = 1$ $\mu$ Watt/cm <sup>2</sup>
Factor of ten in intensity	$= 1$ bel = 10 db
One fermi (F)	$= 10^{-13}$ cm
One angstrom unit ( $\text{\AA}$ )	$= 10^{-8}$ cm

One micron ( $\mu$ )	$= 10^{-4}$ cm
One hertz (Hz)	$= 1$ cycle per second (cps)
Wavelength of one-electron-volt photon	$= 1.24 \times 10^{-4}$ cm $\approx 12345 \text{ \AA}$
One electron volt (ev)	$= 1.6 \times 10^{-12}$ erg
One watt (W)	$= 1$ joule/sec $= 10^7$ erg/sec
One coulomb (coul)	$= 3 \times 10^9$ statcoul $= c/10$ statcoul
One volt (V)	$= \frac{1}{300}$ statvolt $= 10^8/c$ statvolt
One ohm ( $\Omega$ )	$= 1/(9 \times 10^{11})$ statohm $= 10^9/c^2$ statohm
Thirty ohms	$= 1/c$ statohm
Impedance per square of vacuum for electromagnetic waves	$= 4\pi/c$ statohm $= 377$ ohm
One farad (F)	$9 \times 10^{11}$ statfarad $= c^2/10^9$ statfarad
One henry (H)	$= 1/(9 \times 10^{11})$ stathenry $= 10^9/c^2$ stathenry



## Useful Identities

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x - y) \sin \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x - y) \sin \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \dots; x^2 < 1.$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \gamma) + \cos(\theta_1 + 2\gamma) + \dots + \cos[\theta_1 + (N-1)\gamma] \\ = \cos[\theta_1 + \frac{1}{2}(N-1)\gamma] \frac{\sin \frac{1}{2}N\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \end{aligned}$$