บทที่ 5
การสะท้อน

๕.๑ Perfect Terminal

ถ้าเครื่องส่งคลื่นต่อกับตัวกลางเปิด และกระตุ้นตัวกลางทำให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่มีความถี่อยู่ในช่วง dispersive ตัวกลางจะมีแรงต่อต้านเครื่องส่งซึ่งแปรตามค่าอิมพีแดนซ์ สำหรับตัวกลางที่เป็นระบบเปิดจริงๆคลื่นเคลื่อนที่จะผ่านตัวกลางไปได้ตลอดไม่มีการสะท้อน แต่ทั้งนี้ต้องขึ้นอยู่กับลักษณะของอิมพีแดนซ์ของตัวกลางเช่นกัน กล่าวคือ ถ้าอิมพีแดนซ์ของตัวกลางมีค่าเท่ากันตลอดจะไม่มีการสะท้อนเกิดขึ้นเป็น perfect terminal แต่ถ้าอิมพีแดนซ์มีค่าต่างกันในตัวกลางนั้นจะทำให้เกิดการสะท้อนของคลื่นได้ และถ้ามีค่าต่างกันมากเกิดคลื่นสะท้อนได้มาก

เราแทนตัวกลางเป็นเส้นเชือกยาว เครื่องส่งคลื่นต่อกับปลายเส้นเชือกด้านซ้ายมือ (เรียกเป็น L สำหรับด้านซ้ายมือ) ส่วนปลายเส้นเชือกอีกด้านต่อกับ dashpot (ซึ่งจะเรียกเป็น R สำหรับด้านขวามือ) ในที่นี้ dashpot หมายถึงเครื่องมือที่มีคุณสมบัติดังนี้ ถ้ามีคลื่นเคลื่อนที่มากระทบ dashpot ด้วยความเร็ว u(t) dashpot จะตอบสนองต่อแรงเคลื่อนด้วยแรงปฏิกริยาในทางตรงกันข้ามแปรตามความเร็วของคลื่นตกกระทบ

$$F(R \text{ on } L) = -Z_R u(t) \qquad (๕.๑)$$

เมื่อ Z_R เป็นค่าคงที่บวก เรียกว่าอิมพีแดนซ์ของ dashpot และถือได้ว่าเป็น purely resistive เพราะว่า F(R On L) เป็นปฏิภาคตรงกับความเร็ว (สำหรับแรงที่แปรตามความเร่งหรือแปรตามการขจัด ถือว่าเป็น reactive ส่วนแรงนี้แปรตามความเร็วเป็น resistive) เมื่อเครื่องส่งได้ส่งคลื่นเคลื่อนที่เข้าสู่ระบบเปิด(ในที่นี้คือเส้นเชือก)ที่มีค่าอิมพีแดนซ์เป็น Z ระบบจะมีแรงต้านทานอาการของเครื่องส่งเป็น drag froce

$$F(R \text{ on } L) = -Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{z=0} \qquad (๕.๒)$$

ในที่นี้ $\partial\psi/\partial t$ เป็นความเร็วของเส้นเชือกที่ $z = 0$ และเป็นความเร็วของ ouçput terminal เช่นกัน เราเห็นได้ว่า ถ้า Z_R เท่ากับ Z dashpot จะทำหน้าที่เสมือนเป็นส่วนหนึ่งของเส้นเชือกยาว คลื่นจะเคลื่อนที่ต่อไปเหมือนกับไม่มีอะไรมากั้น คือไม่มีการสะท้อน นี่คือวิธีการหา perfect termination ของเส้นเชือกต่อเนื่อง กล่าวคือทำให้ไม่มีการสะท้อนของคลื่นเคลื่อนที่ตกกระทบบน termination อิมพีแดนซ์ของ dashpot สามารถเขียนเป็น

$$Z_R = Z = \sqrt{T_o\rho_o} \qquad (๔.๓)$$

สมการ(๔.๓) ใช้ได้ถูกต้อง เรากล่าวได้ว่าอิมพีแดนซ์ของ dashpot และอิมพีแดนซ์ของเส้นเชือกเข้ากันได้(matches) ตัวอย่างของ perfect termination ได้แสดงไว้ในรูป ๔.๑

๔.๒ การสะท้อนและการส่งผ่าน (Reflection and Transmission)

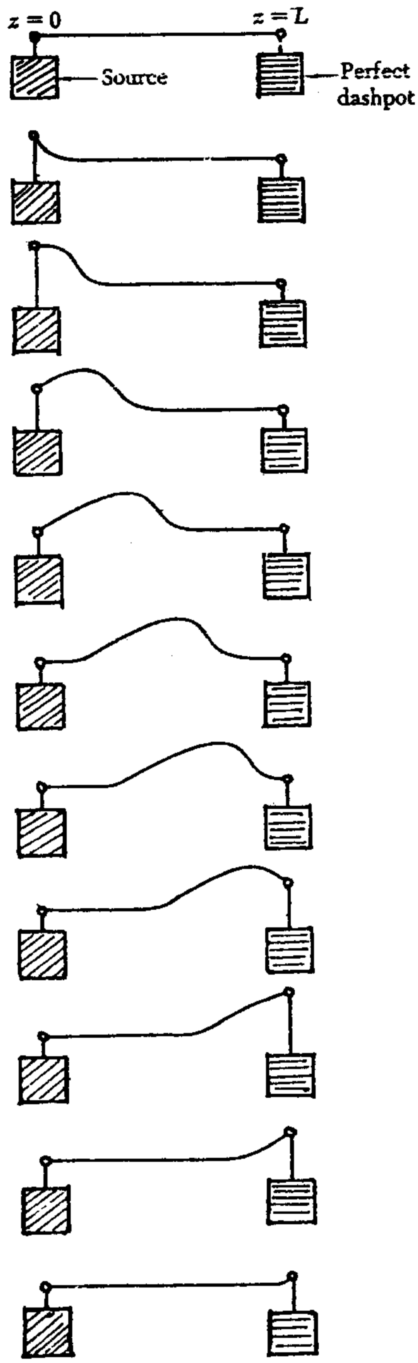
สมมติเรามีเส้นเชือกยาวกึ่งอนันต์ที่มีค่าอิมพีแดนซ์เป็น Z_1 ถูกขึงให้ตึงจาก $z = -\infty$ ถึง $z = 0$ ที่ $z = 0$ ต่อกับ dashpot ที่มีค่าอิมพีแดนซ์เป็น Z_2 ซึ่ง Z_2 ไม่เท่ากับ Z_1 ที่ $z = -\infty$ มีเครื่องส่งให้คลื่นเคลื่อนที่ออกมาในทิศ $+z$ ดังนั้นจะมีคลื่นตกกระทบเป็น

$$\psi_{inc}(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \qquad (๔.๔)$$

ที่ $z = 0$ คลื่นตกกระทบกำหนดด้วย

$$\psi_{inc}(0,t) = A\cos\omega t \qquad (๔.๕)$$

ต่อไปเราจะเรียกจุดปลายบนเส้นเชือกเป็น L (สำหรับด้านซ้าย) และ dashpot เป็น R (สำหรับด้านขวา) ถ้า dashpot มีอิมพีแดนซ์เป็น Z_1 มันจะเข้ากับอิมพีแดนซ์ของเส้นเชือกได้ และไม่เกิดคลื่นสะท้อน ในกรณีนี้ terminating froce ที่เกิดจาก dashpot กระทำ



รูป ๕.๑ แหล่งกำเนิดคลื่นให้คลื่นเคลื่อนที่แก่ เส้นเชือกยาวจำกัดจนถึง dashpot ทำให้เป็น perfectly terminated.

ต่อเส้นเชือกเป็น

$$F_{term}(R \text{ on } L) = -Z_1 \frac{\partial\psi_{inc}(0,t)}{\partial t} \qquad (๔.๖)$$

แต่อิมพีแดนซ์ของ dashpot เป็น Z_2 ซึ่งไม่เท่ากับ Z_1 ดังนั้นมันจะไม่เข้ากับเส้นเชือก (mismatch) ทำให้เกิดการสะท้อนของคลื่นที่ตำแหน่ง $z = 0$ ให้คลื่นสะท้อนเคลื่อนที่ไปทางทิศ $-z$ เป็น $\psi_{ref}(z,t)$ แรงที่ dashpot ทำให้เกิดคลื่นสะท้อนเรียกว่า froce excess มีค่าเท่ากับ อิมพีแดนซ์คูณกับความเร็ว

$$Z_1 \frac{\partial\psi_{ref}(0,t)}{\partial t} = F_{exc}(R \text{ On } L) \qquad (๔.๗)$$

แรงทั้งหมด $F(R \text{ on } L)$ เป็รการรวมกันของ terminating froce และ froce excess ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน

$$F(R \text{ on } L) = F_{term}(R \text{ on } L) + F_{exc}(R \text{ on } L) \qquad (๔.๘)$$

หรือ

$$F(R \text{ on} L) = -Z_1 \frac{\partial\psi_{inc}(0,t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial\psi_{ref}(0,t)}{\partial t} \qquad (๔.๙)$$

แรงทั้งหมด $F(R \text{ on } L)$ เป็นแรงที่เกิดจากแรงต่อต้านของ dashpot ซึ่งมีค่าเท่ากับ $-Z_2$ คูณด้วยความเร็วของคลื่นที่จุด L ความเร็วนี้เป็นการรวมกันของคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อน

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t}_{inc}(0,t) + \frac{\partial\psi}{\partial t}_{ref}(0,t) \qquad (๔.๑๐)$$

ดังนั้นแรง $F(R \text{ on } L)$ ที่เป็นแรงต่อต้านจาก dashpot คือ

$$F(R \text{ on } L) = -Z_2 \frac{\partial\psi(0,t)}{\partial t}$$

$$= -Z_2 \frac{\partial\psi}{\partial t}_{inc}(0,t) - Z_2 \frac{\partial\psi}{\partial t}_{ref}(0,t) \qquad (๔.๑๑)$$

จัดให้สมการ(๕.๙) เท่ากับสมการ(๕.๑๑) เราได้(ที่ $z = 0$)

$$-Z_1 \frac{\partial\psi}{\partial t}inc + Z_1\frac{\partial\psi}{\partial t}ref = -Z_2 \frac{\partial\psi}{\partial t}inc - Z_2 \frac{\partial\psi}{\partial t}ref$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}ref(0,t) = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right] \frac{\partial\psi}{\partial t}inc(0,t) \qquad (๕.๑๒)$$

กำหนด R_{12} เรียกว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน (reflection coefficient) สำหรับการขจัด ψ เป็น

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (๕.๑๓)$$

จากการอินติเกรทสมการ(๕.๑๒) ทั้งสองข้างและไม่คิดค่าคงที่การอินติเกรท เราได้

$$\psi_{ref}(0,t) = R_{12}\,\psi_{inc}(0,t) = R_{12}A\cos\omega t \qquad (๕.๑๔)$$

ถ้าคลื่นสะท้อนเคลื่อนที่ไปทางทิศ $-z$ จาก $z = 0$ ถึงระยะ z ใดๆสำหรับ $z < 0$ด้วยความเร็วเฟส v_ϕ ใช้เวลา $t = z/v_\phi$ เราสามารถหาคลื่นสะท้อนที่ตำแหน่ง z ใดๆได้ โดยแทนค่าตัวแปร $z = 0, t$ ด้วย $z, t+z/v_\phi$ ดังนั้น

$$(๕.๑๕) \qquad \psi_{ref}(z,t) = R_{12}A\cos\omega(t + z/v_\phi) = R_{12}A\cos(\omega t + kz)$$

ณ ตำแหน่งใดๆบนเส้นเชือกขณะนี้มีทั้งคลื่น $\psi_{inc}(z,t)$ และ $\psi_{ref}(z,t)$ ดังนั้นการขจัด $\psi(z,t)$ เป็นการรวมกันของสองคลื่นเหล่านี้

$$\psi(z,t) = \psi_{inc}(z,t) + \psi_{ref}(z,t)$$

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz) + R_{12}A\cos(\omega t + kz) \qquad (๕.๑๖)$$

แรงคืนกลับและการขจัดมีการสะท้อนด้วยเครื่องหมายตรงกันข้าม ในกรณีของคลื่น ปริมาณทางฟิสิกส์ที่น่าสนใจนอกจากการขจัด $\psi(z,t)$ แล้วเรายังสนใจความเร็วตามขวาง $\frac{\partial\psi}{\partial t}(z,t)$

และแรงคืนกลับในพจน์ของแรงตึง T_0 คือ $-T_0\ \partial\psi(z,t)/\partial z$ พิจารณาจากสมการ(๕.๑๒) และ(๕.๑๔) จะเห็นได้ว่า ความเร็วคลื่น $\partial\psi(z,t)/\partial t$ มีสัมประสิทธิ์การสะท้อนเหมือนกับการขจัด $\psi(z,t)$ แต่คลื่นแรงคืนกลับ $-T_0\partial\psi(z,t)/\partial z$ มีสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่มีขนาดเท่ากับสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับ $\partial\psi/\partial t$ แต่ต่างกันที่เครื่องหมาย

$$\psi_{inc} = A\cos(\omega t - kz)\ , \qquad \psi_{ref} = R_{12}A\cos(\omega t + kz) \quad (๕.๑๗)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}inc = -\omega A\sin(\omega t - kz)\ , \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}ref = R_{12}\ -\omega A\sin(\omega t + kz) \quad (๕.๑๘)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}inc = kA\sin(\omega t - kz)\ , \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}ref = -R_{12}\ kA\sin(\omega t + kz) \quad (๕.๑๙)$$

จากสมการ(๕.๑๘) จะเห็นได้ว่าที่ $z = 0$ ส่วนของความเร็วที่เกิดจากคลื่นสะท้อนมีค่าเป็น R_{12} คูณด้วยส่วนที่เกิดจากคลื่นตกกระทบ และจากสมการ(๕.๑๙) ที่ $z = 0$ จะเห็นได้ว่า ส่วนของแรงคืนกลับที่เกิดจากคลื่นสะท้อนเป็น $-R_{12}$ คูณด้วยส่วนที่เกิดจากคลื่นตกกระทบ ดังนั้นเราสามารถรวบรวมสมการ(๕.๑๗), (๕.๑๘) และ (๕.๑๙) โดยกำหนดสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับ ψ, $\partial\psi/\partial t$ และ $\partial\psi/\partial z$ เป็น

$$R_{\psi} = R_{\partial\psi/\partial t} = R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (๕.๒๐)$$

และ

$$R_{\partial\psi/\partial z} = -R_{12} \quad (๕.๒๑)$$

ให้สังเกตว่า R มีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ $+1$

การสะท้อนที่ขอบเขตระหว่างตัวกลาง

สมมติว่าเส้นเชือกยาวที่มีอิมพีแดนซ์ Z_1 ซึ่งตึงจาก $z = -\infty$ ถึง $z = 0$ ต่อกับเส้นเชือกอีกเส้นหนึ่งที่มีค่าอิมพีแดนซ์ Z_2 ซึ่งขึงจาก $z = 0$ ถึง $z = +\infty$ ดังนั้นคลื่นสะท้อนที่เกิดในตัวกลางแรกต้องมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนตามสมการ(๕.๒๐) และ(๕.๒๑) ให้สังเกตว่า $R_{21} = -R_{12}$ ดังนั้นถ้าคุณสมบัติของตัวกลางทั้งสองเปลี่ยนกลับกันทำให้เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับกัน ตัวอย่างเช่น R_{ψ} เป็นค่าลบสำหรับคลื่นตกกระทบ

จากเส้นเชือกเบาไปยังเส้นเชือกหนัก (ให้แรงตึงบนเส้นเชือกทั้งสองเท่ากัน) ดังนั้นคลื่นตก กระทบจากเส้นเชือกหนักไปยังเส้นเชือกเบาที่บริเวณรอยต่อมี R_ψ เป็นค่าบวก

การส่งผ่านที่ขอบเขตระหว่างตัวกลาง

ที่จุด $z = 0$ มีการออสซิลเลตซึ่งเกิดจากผลรวมของแรงเคลื่อนของคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนในตัวกลาง ๑ ดังนั้นตัวกลาง ๑ ทำหน้าที่เสมือนเป็นต้นกำเนิดของคลื่นส่งคลื่นเคลื่อนที่ผ่านไปทางทิศ $+z$ ในตัวกลาง ๒ เราต้องการหาคลื่นส่งผ่านในปริมาณการขจัด ψ_2 ความเร็วตามขวาง $\partial\psi_2/\partial t$ และแรงคืนกลับ $-T_2\ \partial\psi_2/\partial t$ ในที่นี้มีเลขกำกับ ๒ หมายถึงคลื่นส่งผ่านในตัวกลาง ๒ และจะต้องใช้สภาวะขอบเขตด้วย

สภาวะขอบเขตและการต่อเนื่อง

ถือได้ว่า $\psi(z,t)$ ที่ตรงขอบเขตระหว่างตัวกลางทั้งสองมีค่าเหมือนกันไม่ว่าจะคิดจากทางขวามือหรือคิดจากทางซ้ายมือของขอบเขตก็ตาม นั่นคือการขจัด $\psi(z,t)$ เป็นค่าต่อเนื่อง ดังนั้นความเร็ว $\partial\psi(z,t)/\partial t$ ก็เป็นค่าต่อเนื่องรวมทั้งแรงคืนกลับ $-T_o\ \partial\psi(z,t)/\partial z$ เป็นค่าต่อเนื่องด้วย สภาวะขอบเขตของการต่อเนื่องสำหรับการขจัดและความเร็วของจุดหนึ่งบนเส้นเชือก เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจน แต่สภาวะขอบเขตของแรงคืนกลับเห็นได้ไม่ชัดเจนนัก เพื่อที่จะเห็นได้ว่า แรงคืนกลับเป็นค่าต่อเนื่องให้คิดว่าที่ $z = 0$ ซึ่งอยู่ระหว่างตัวกลาง ๑ และตัวกลาง ๒ มีธาตุจำนวนเล็กน้อย มวลเหล่านี้มีแรงคืนกลับเป็น $-T_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z}$ กระทำต่อมันจากเส้นเชือกทางด้านซ้ายมือ และมีแรง $+T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z}$ กระทำต่อมันจากเส้นเชือกทางด้านขวามือ ผลรวมของแรงทั้งสองมีค่าเท่ากับมวลของธาตุจำนวนเล็กน้อยนี้คูณกับความเร่ง แต่มวลของมันเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$-T_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0 \qquad \text{ที่ } z = 0$$

ซึ่งเรากล่าวได้ว่า $T_o \frac{\partial\psi}{\partial z}$ เป็นค่าต่อเนื่อง

<u>อัมปลิจูดของสัมประสิทธิ์การส่งผ่าน</u>

ให้ $\zeta(z,t)$ แทนคลื่นปริมาณหนึ่งของการขจัด ความเร็ว หรือแรงคืนกลับ ในตัวกลาง ๑ ฟังก์ชันคลื่น $\zeta_1(z,t)$ เป็นการรวมของคลื่นตกกระทบและคลื่นส่งผ่าน

$$\zeta_1(z,t) = \zeta_o \cos(\omega t - k_1 z) + R\zeta_o \cos(\omega t + k_1 z) \qquad (๔.๒๒)$$

อาศัยจากสมการ(๔.๒๐) และ(๔.๒๑) สัมประสิทธิ์การสะท้อน R มีค่าเท่ากับ R_{12} คือ $R_{12} \equiv (Z_1 - Z_2)/(Z_1+Z_2)$ ถ้า $\zeta(z,t)$ แทนด้วยการขจัดและความเร็ว และ R มีค่าเท่ากับ $-R_{12}$ ถ้า $\zeta(z,t)$ แทนด้วยแรงคืนกลับ ในตัวกลาง ๒ จะมีแต่ปริมาณคลื่นเคลื่อนที่ในทิศ $+z$ เท่านั้น ซึ่งได้แก่คลื่นส่วนที่ส่งผ่านเข้าไปเท่านั้น ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการของ $\zeta_2(z,t)$ ได้ ขณะเดียวกันกำหนดอัมปลิจูดของสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น T

$$\zeta_2(z,t) = T\zeta_o \cos(\omega t - k_2 z) \qquad (๔.๒๓)$$

ใช้สภาวะที่ว่า $\zeta(z,t)$ เป็นค่าต่อเนื่องที่ขอบเขตตรง $z = 0$ ได้

$$\zeta_2(0,t) = \zeta_1(0,t)$$

$$T\zeta_o \cos\omega t = \zeta_o(1 + R) \cos\omega t$$

หรือ

$$T = 1 + R \qquad (๔.๒๔)$$

เมื่อ R เท่ากับ R_{12} สำหรับ ψ และ $\partial\psi/\partial t$ และเท่ากับ $-R_{12}$ สำหรับแรงคืนกลับ $-T_2\partial\psi/\partial z$ ให้สังเกตว่า R มีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 T ต้องมีค่าระหว่างศูนย์และ +2 ดังนั้นสัมประสิทธิ์การส่งผ่านมีค่าเป็นบวกเสมอ ต่อไปเป็นข้อกรณีจำกัดที่น่าสนใจดังนี้

<u>กรณีที่ ๑</u>

ถ้า $Z_2 = Z_1$ ไม่มีคลื่นสะท้อน กล่าวคือ R_{12} มีค่าเป็นศูนย์ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านเป็นหนึ่ง แต่สภาวะ $Z_2 = Z_1$ นั้นไม่ได้หมายความว่าตัวกลางทั้งสองเหมือนกัน ถ้าความหนา

แน่นมวลและแรงดึงของเส้นเชือกทั้งสองต่างเปลี่ยนค่าตรงจุดเชื่อมในทางที่ผลคูณของมันยังคงมีค่าคงที่ ดังนั้นอิมพีแดนซ์ $Z_1 = \sqrt{T_1\rho_1}$ และ $Z_2 = \sqrt{T_2\rho_2}$ มีค่าเท่ากัน แต่ความเร็วเฟส $v_1 = \sqrt{T_1/\rho_1}$ และ $v_2 = \sqrt{T_2/\rho_2}$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากันในสองตัวกลางนั้น

กรณีที่ ๒

ถ้า Z_2/Z_1 เป็นค่าอนันต์ R_{12} เป็น -1 ดังนั้นจุด $z = 0$ เหมือนตรึงอยู่กับที่คือไม่มีการออสซิลเลต การขจัดและความเร็วมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น -1 ดังนั้นคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนที่ $z = 0$ รวมกันได้เป็นศูนย์ กล่าวคือ คลื่นตกกระทบที่เป็น pulse บวก (ขึ้น) เกิดการสะท้อนกลับหมดกลายเป็นคลื่นสะท้อนที่เป็น pulse ลบ(ลง) ส่วนแรงตามขวางมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น +1 ดังนั้นแรงกระทำต่อเส้นเชือกที่ $z = 0$ มีทิศไปทางเดียวกันสำหรับคลื่นทั้งสอง ทำให้แรงเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า(คิดจากผลรวมของ froce exerted และ excess froce) และทำให้คลื่นสะท้อนมีอัมปลิจูดเป็นลบ มีขนาดเท่ากับอัมปลิจูดของคลื่นตกกระทบ

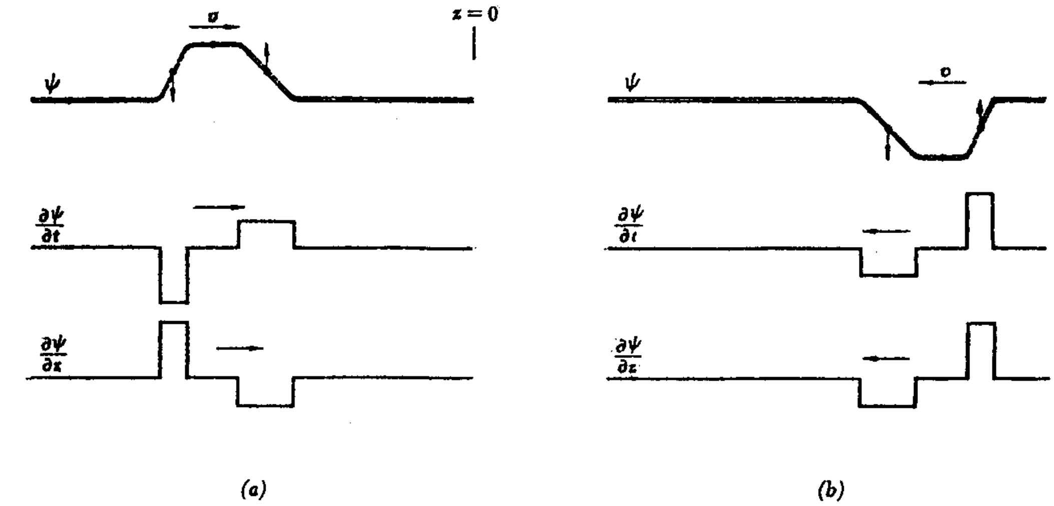
กรณีที่ ๓

ถ้า Z_2/Z_1 มีค่าเป็นศูนย์ คือบริเวณปลายของเส้นเชือกที่ $z = 0$ เป็นปลายอิสระ ดังนั้นความชันของเส้นเชือกที่จุดนั้นมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับแรงคืนกลับเป็น -1 ทำให้คลื่นตกกระทบที่มีแรงคืนกลับเป็น pulse บวกกลายเป็น pulse ลบหลังจากการสะท้อน ส่วนสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับการขจัดและความเร็วเป็น +1 เส้นเชือกจะมีความเร็วเป็นสองเท่าที่ $z = 0$ คลื่นตกกระทบที่มี pulse การขจัดบวกยังคงมี pulse บวกหลังจากการสะท้อนแล้ว กรณีซึ่ง Z_2/Z_1 มีค่าเป็นอนันต์และมีค่าเป็นศูนย์ได้แสดงไว้ในรูป ๕.๒ และ ๕.๓

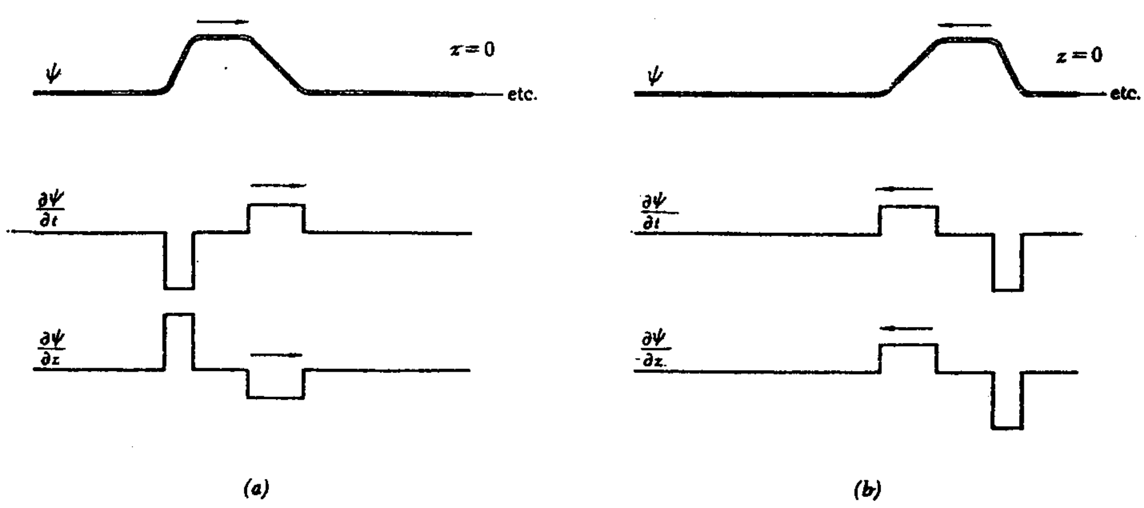
ลักษณะทั่วไปของคลื่นรูปไซน์

ในตัวกลาง ๑ เรามีทั้งคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนเขียนได้เป็น

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz) + RA\cos(\omega t + kz) \qquad (๕.๒๕)$$



รูป ๔.๒ การสะท้อนของ pulse ตกกระทบที่ปลายเส้นเชือกยึดแน่น (a) ก่อนตกกระทบ (b) หลังตกกระทบ



รูป ๔.๓ การสะท้อนของ pulse ตกกระทบที่ปลายเส้นเชือกอิสระ (a) ก่อนตกกระทบ (b) หลังตกกระทบ

ในที่นี้ R คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 เมื่อ R มีค่าเป็นศูนย์เราได้ perfect termination ดังนั้น $\psi(z,t)$ เป็นคลื่นเคลื่อนที่อย่างเดียวเคลื่อนที่ไปทางทิศ +z และเมื่อ R เป็น -1 $\psi(z,t)$ เป็นคลื่นนิ่งอย่างเดียวมี บัพอยู่ที่ z = 0 เมื่อ R เป็น +1 $\psi(z,t)$ เป็นคลื่นนิ่งอย่างเดียวเช่นกัน แต่มีปฏิบัพอยู่ที่ z = 0 ส่วนบัพอยู่ที่ระยะห่างจาก z = 0 เป็นเศษหนึ่งส่วนสี่ของความยาวคลื่น เมื่อ R ไม่เป็นทั้ง ± 1 $\psi(z,t)$ ไม่เป็นทั้งคลื่นนิ่งหรือคลื่นเคลื่อนที่อย่างเดียว มันเป็นแบบคลื่นรูปไซน์ทั่วไป ซึ่งเราสามารถเขียนได้ทั้งจากการรวมกันของคลื่นนิ่งด้วยกัน หรือจากการรวมกันของคลื่นเคลื่อนที่ด้วยกัน หรืออาจจะเป็นการรวมกันของคลื่นนิ่งและคลื่นเคลื่อนที่ ดังนั้นคลื่นรูปไซน์ $\psi(z,t)$ สามารถเขียนได้ในแบบ

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t + \alpha)\sin kz + B\cos(\omega t + \beta)\cos kz \qquad (๔.๒๖)$$

ซึ่งเป็นการรวมกันของสองคลื่นนิ่งที่มีบัพอยู่ห่างกันเป็นความยาวคลื่นส่วนสี่ และมีอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสต่างกัน หรือเราอาจเขียนคลื่น $\psi(z,t)$ ในลักษณะเดียวกันคือ

$$\psi(z,t) = C\cos(\omega t - kz + \gamma) + D\cos(\omega t + kz + \delta) \qquad (๔.๒๗)$$

ซึ่งเป็นการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม และมีอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสต่างกัน

<u>ตัวอย่าง ๑</u> การสะท้อนของคลื่นเสียง

สมการของการเคลื่อนที่สำหรับคลื่นเสียงเหมือนกับที่ได้สำหรับคลื่นตามยาวบนเส้นเชือก ซึ่งคล้ายกับที่ได้สำหรับคลื่นตามขวางบนเส้นเชือกต่อเนื่อง ดังนั้นเราสามารถใช้ผลลัพท์ที่หาได้สำหรับสัมประสิทธิ์การสะท้อนและการส่งผ่านสำหรับเส้นเชือกคือ ความเร็วอากาศเป็น $\partial\psi/\partial t$ ความดันปรากฏเป็น $-\gamma p_0\, \partial\psi/\partial z$ คล้ายกับแรงคืนกลับ $-T_0 \partial\psi/\partial z$ สำหรับเส้นเชือก

<u>สำหรับท่อปลายปิดด้านหนึ่ง</u>

ที่ปลายปิดความเร็วเฉลี่ยของโมเลกุลอากาศคิดตาม z (ตามความยาวท่อ)

เป็นศูนย์ตลอด (เพราะว่า โมเลกุลของอากาศทุกตัวเมื่อเคลื่อนที่ไปทางขวามือตามทิศ +z จนถึงผนังปลายปิด จะมีส่วนหนึ่งเคลื่อนที่กลับหลังจากชนผนังแล้ว และเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ) ดังนั้นคลื่นของความเร็ว $\partial\psi/\partial t$ ต้องมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น -1 ตรงปลายปิด ทำให้การรวมกันของคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนเป็นศูนย์ ส่วนความดันปรากฏซึ่งเป็นคลื่นแรงคืนกลับ $-\gamma p_o\,\partial\psi/\partial z$ มีสัมประสิทธิ์การสะท้อนขนาดเท่ากันแต่มีเครื่องหมายต่างกันกับของคลื่นความเร็ว ดังนั้นความดันปรากฏต้องสะท้อนด้วยสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น +1 ที่ปลายปิด นั่นคือความดันปรากฏมีการสะท้อนด้วยเครื่องหมายเหมือนกับคลื่นเสียง perfectly terminated แต่มีขนาดเป็นสองเท่า เพราะว่า ทั้งคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนต่างให้ความดันทั้งไปและสท้อนกลับในทิศทางเดียวกัน ซึ่งความดันคือ แรงต่อหน่วยพื้นที่ และแรงเป็นการส่งผ่านโมเมนตัมต่อหน่วยเวลา

<u>สำหรับท่อปลายเปิด</u>

ที่ปลายเปิดของท่อต่อกับอากาศภายในห้องที่มีความดันปกติ p_o เหมือนกับอากาศในท่อ และที่ปลายเปิดของท่อ อากาศสามารถเคลื่อนเข้าออกอย่างอิสระ ขณะที่มีคลื่นเสียงผ่านเข้าไปในท่อ การเคลื่อนที่ของอากาศไปตามทิศ z อย่างเดียว ดังนั้นความเร็วของอากาศที่ปลายเปิดไม่เป็นศูนย์ ที่บริเวณห่างจากปลายเปิดเล็กน้อยพอเหมาะ ความดันเป็น p มีค่าเกือบเท่ากับความดันปกติ p_o แต่ไม่เท่ากับ p_o เพราะว่าคลื่นความดันเคลื่อนที่จากท่อยังคงเคลื่อนออกจากท่อตลอดเวลา และที่บริเวณนี้อากาศสามารถกระจายออกได้ทุกทิศทุกทางทำให้อากาศมีความเร็วเพิ่มขึ้น สามารถเคลื่อนออกไปเป็นระยะห่างจากปลายท่อเปิดพอสมควรจนถึงบริเวณที่มีความดันอากาศเท่ากับ p_o ดังนั้นที่ปลายเปิดของท่อภายในห้องกว้างความดันปรากฏภายนอกท่อเป็นศูนย์ เราได้สัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับความดันปรากฏเป็น -1 ที่ปลายเปิด ดังนั้นสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับความเร็วเป็น +1 ทำให้อิมพีแดนซ์ z_2 ของอากาศในห้องให้ผลเหมือนกับเป็นศูนย์

ต่อไปเราลองพิจารณาว่าเกิดอะไรขึ้นเมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนมาถึงปลายเปิด ก่อนที่คลื่นเสียงจะถึงปลายเปิดมันเคลื่อนผ่านในท่อโดยผลักอากาศส่วนล่างและถ่ายเทโมเมนตัมแก่มัน ขณะเดียวกันจะผลักอากาศส่วนบนและรับโมเมนตัมกลับคืน ทันทีที่คลื่นเสียงมาถึงปลาย

เปิดของท่ออากาศส่วนล่างเหมือนกับมีอิมพีแดนซ์น้อยกว่าเดิมจะถูกผลักให้พุ่งพรวดออกไปโดยไม่มีการถ่ายเทโมเมนตัมกลับคืน ทำให้ความดันอากาศส่วนล่างที่ปลายเปิดน้อยกว่าปกติ เรียกว่า **rarefaction** อากาศส่วนบนขณะนี้เหมือนกับว่ามีอิมพีแดนซ์น้อยกว่าปกติ มันจะเคลื่อนเข้าแทนที่อากาศส่วนล่างทันที ทำให้อากาศส่วนบนเป็น **rarefaction** และอากาศส่วนบนที่อยู่ห่างไกลออกไปจะเข้ามาแทนที่ต่อๆไปจึงเกิดการเสริมกัน ดังนั้นเราเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับความเร็วเป็นบวก และสำหรับความดันเป็นลบที่ปลายเปิด

<u>ตัวอย่าง ๒</u> การสะท้อนในสายอากาศ

ให้คลื่นความต่างศักย์จากแรงเคลื่อนเป็น $V(t)$ เข้าที่ปลาย$(z = 0)$ ของแผ่นคู่ขนานที่มีอิมพีแดนซ์ Z_1 ทำให้เกิดคลื่นกระแสเคลื่อนที่ $I(z,t)$ ไปตามทิศ $+z$ ดังนั้นที่ปลาย $z = 0$ เรามี

$$V(t) = V_o \cos\omega t = Z_1 I(o,t) \qquad (๔.๒๔)$$

โดยที่คลื่นเคลื่อนที่กระแสและคลื่นความต่างศักย์กำหนดด้วย

$$(๔.๒๔) \qquad V(z,t) = V_o \cos(\omega t - k_1 z), \quad I = I_o \cos(\omega t - k_1 z), \; V_o = Z_1 I_o$$

ที่บริเวณขอบเขตอิมพีแดนซ์เปลี่ยนค่ากระทันหันจาก Z_1 เป็น Z_2 จะเกิดคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่าน การคำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนและการส่งผ่านเป็นเช่นเดียวกับที่ได้สำหรับกรณีคลื่นบนเส้นเชือกและคลื่นเสียง เราจึงไม่มีความจำเป็นต้องไปย้อนวิธีการตามขั้นตอนต่างๆที่ใช้สำหรับเส้นเชือกอีก แต่เราจะพิจารณาเฉพาะบางกรณีเท่านั้นคือ กรณีของอิมพีแดนซ์ Z_2 เป็นศูนย์และเป็นอนันต์ที่ปลายของสายอากาศ

<u>กรณีปลายวงจรปิด</u> $(Z_2 = 0)$

ต่อแผ่นคู่ขนานด้วยลวดที่มีความต้านทานน้อย ความต่างศักย์ระหว่างปลายมีค่าน้อยเป็นศูนย์ ดังนั้นสัมประสิทธิ์การสะท้อนที่ปลายปิดเป็น -1 ในทางตรงกันข้ามกระแสมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนเป็น $+1$ ดังนั้นหน้าคลื่นของความต่างศักย์บวกเคลื่อนผ่านในทิศ $+z$ ถูก

สะท้อนกลับเป็นหน้าคลื่นของความต่างศักย์ลบ ส่วนคลื่นกระแสบวกถูกสะท้อนให้เป็นคลื่นกระแสบวก

กรณีปลายวงจรเปิด ($Z_2 = \infty$)

ถ้าปลายวงจรด้านขวามือต่อกับตัวต้านทานที่มีค่าเป็นอนันต์ (เช่นอากาศ หรือที่ปลายวงจรไม่ได้ต่อกับอะไรเลย) ไม่มีกระแสไหลผ่านจากตัวนำหนึ่งไปยังอีกตัวนำหนึ่ง ดังนั้นกระแสเป็นศูนย์ที่ปลายวงจรเปิด และสัมประสิทธิ์การสะท้อนของกระแสต้องเป็น -1 ดังนั้นสัมประสิทธิ์การสะท้อนความต่างศักย์เป็น $+1$

จากการพิจารณากรณีข้างบน เราสามารถกำหนดสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับความต่างศักย์ V และกระแส I เป็น

$$R_v = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \equiv -R_{12}, \qquad R_i = -R_v \tag{๔.๓๐}$$

ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ สำหรับ $Z_2 = 0$ (ปลายปิด) สมการ(๔.๓๐) ให้ $R_v = -1$ และ $R_i = +1$ และสำหรับ $Z_2 = \infty$ (ปลายเปิด) $R_i = -1$ เหมือนกับที่เราหาได้ตอนต้น

สัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับสนาม E_x และ B_y

ในระบบแผ่นคู่ขนานสายอากาศที่มีช่องว่างระหว่างแผ่นมีสาร dielectric อยู่ อิมพีแดนซ์ถูกกำหนดด้วย(สมการ(๔.๔๔) ตอน ๔.๓)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,\frac{4\pi}{c}\,\frac{g}{\omega} \tag{๔.๓๑}$$

เราเห็นได้ว่าถ้าความกว้างของช่องว่าง g เพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ทำให้ค่าอิมพีแดนซ์เป็นสองเท่าด้วย สนามไฟฟ้า E_x ในสายอากาศเป็นปฏิภาคตรงกับความต่างศักย์ V และสนามแม่เหล็ก B_y เป็นปฏิภาคตรงกับกระแสไฟฟ้า I ดังนั้นเราได้

$$g\,E_x = V$$

$$\omega\,B_y = \frac{4\pi}{c}\,I\mu \tag{๔.๓๒}$$

เมื่อคลื่นสะท้อนเกิดในแผ่นบนของสายอากาศที่มีช่องว่าง g ความกว้าง w และมีค่า permeability μ เหมือนกับคลื่นตกกระทบของสายอากาศ เราจะเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับ E_x เหมือนกับที่ได้สำหรับ V และสัมประสิทธิ์การสะท้อนสำหรับ B_y เป็นเช่นเดียวกับที่ได้สำหรับ I ในทำนองเดียวกัน เราจะเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่านสำหรับ gE_x เป็นเช่นเดียวกับที่ได้สำหรับ V และสัมประสิทธิ์การส่งผ่านสำหรับ wB_y/μ เท่ากับที่ได้สำหรับ I แต่เราจะพิจารณาเฉพาะสัมประสิทธิ์การสะท้อนเท่านั้น ดังนั้น

$$\text{สนามไฟฟ้า} \ : \ R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \qquad (๔.๓๓)$$

ส่วนสนามแม่เหล็กมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนขนาดเท่ากับของสนามไฟฟ้า E_x แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

ในตัวกลางสารต่างๆเช่น แก้ว น้ำ อากาศ และ ionosphere มี $\mu = 1$ และสมมติว่ารูปทรงเรขาภาคตัดของตัวกลาง (คือความกว้าง w และช่องว่างห่าง g) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่ขอบเขต ดังนั้น อาศัยจากสมการ(๔.๓๐) ปริมาณในอิมพีแดนซ์ Z ที่เปลี่ยนแปลงตรงขอบเขตได้คือ dielectric constant ε ดังนั้น Z แปรตาม $1/\sqrt{\varepsilon}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1/n$ เมื่อ $n = \sqrt{\varepsilon}$ เป็นค่าดัชนีหักเหของสาร dielectric (สำหรับ $\mu = 1$) โดยแทนค่า $Z_1 = 1/n_1$ และ $Z_2 = 1/n_2$ ในสมการ(๔.๓๓) และคูณด้วย n_1n_2 เราจะได้

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad (๔.๓๔)$$

สมการ(๔.๓๔) นี้ใช้ได้กับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใดๆที่ตกกระทบตั้งฉากกับผิวที่ซึ่งค่า ε เปลี่ยนแปลงทันทีทันใด เราจึงสามารถใช้ผลลัพธ์นี้ได้กับกรณีของคลื่นแสง

<u>ตัวอย่าง ๓</u> การสะท้อนของคลื่นแสง

เราใช้สมการ(๔.๓๔) สำหรับหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนของคลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้า ตกกระทบตั้งฉากบนผิวขอบเขตระหว่างตัวกลางโปร่งใสสองชนิด (ถ้าทั้งสองตัวกลาง

มี n = 1 . เช่น อากาศและแก้ว) ดังนั้น ให้ดัชนีหักเหของอากาศเป็น ๑.๐๐ และดัชนีหักเหของแก้วเป็น ๑.๕๐ สำหรับคลื่นแสงเคลื่อนที่ผ่านจากอากาศไปยังแก้ว

$$R_E = \frac{๑ - n}{๑ + n} = \frac{๑ - ๑.๕}{๑ + ๑.๕} = -\frac{๑}{๕} \qquad (๕.๓๕)$$

(ในทางกลับกัน ถ้าคลื่นแสงเคลื่อนที่จากแก้วไปยังอากาศ สัมประสิทธิ์การสะท้อนจะมีเครื่องหมายตรงกันข้าม คือ + ๑/๕) พลังงานฟลักซ์สะท้อนแปรตามกำลังสองของสนามไฟฟ้า ดังนั้น ส่วนของความเข้มแสงสะท้อนบนผิว อากาศ–แก้ว ครั้งเดียวเป็น ๑/๒๕ นั่นคือมีเพียง ๔ เปอร์เซนต์ของความเข้มแสงตกกระทบที่สะท้อนกลับ

๕.๓ การเข้ากันได้ของอิมพีแดนซ์ระหว่างตัวกลางโปร่งใส

สมมติว่าเราต้องการส่งคลื่นเคลื่อนที่จากตัวกลางชนิดหนึ่งไปยังตัวกลางชนิดอื่น โดยปราศจากคลื่นสะท้อนเกิดขึ้น เช่น เราต้องการส่งพลังงานเสียงจากอากาศภายในลำโพงไปยังอากาศในห้องโดยไม่เกิดเสียงสะท้อน เพราะว่าเสียงสะท้อนอาจทำให้เกิดอภินาทที่บางความถี่และมีเสียงหวีดรบกวนได้ หรือเราอาจต้องการส่งคลื่นแสงจากอากาศผ่านเข้าไปยังเลนซ์แก้วหรือแผ่นแก้วโดยไม่ให้เกิดแสงสะท้อน เพราะว่าการสะท้อนของแสงทำให้ความเข้มของลำแสงที่ผ่านเข้าไปยังแก้วลดลง และเราอาจจะไม่ต้องการให้แสงสะท้อนไปตกกระทบกับส่วนอื่นของเครื่องมือ วิธีการแก้ปัญหาของการส่งผ่านคลื่นเคลื่อนที่จากตัวกลางหนึ่งไปยังอีกตัวกลางอื่นโดยไม่มีการสะท้อน เราเรียกว่า "impedance matching" เราจะศึกษาสองวิธีด้วยกัน วิธีแรกคือ "nonreflecting layer" อีกวิธีคือ "tapering"

วิธี nonreflecting layer

สมมติให้ตัวกลางที่ ๑ มีบริเวณขอบเขตตั้งแต่ $z = -\infty$ ถึง $z = 0$ ส่วนตัวกลางที่ ๒ เป็นเครื่องมือที่ทำให้เกิด impedance matching มีบริเวณขอบเขตตั้งแต่ $z = 0$ ถึง $z = L$ และตัวกลางที่ ๓ มีบริเวณขอบเขตตั้งแต่ $z = L$ ถึง $z = +\infty$ เราต้องการทำให้อิมพีแดนซ์ของตัวกลางที่ ๑ และตัวกลางที่ ๓ เข้ากันได้ สำหรับคลื่นความ

ถี่เชิงมุม ω กล่าวคือ เราไม่ต้องการให้มีคลื่นสะท้อนเมื่อคลื่นตกกระทบจากตัวกลางที่ ๑ เคลื่อนไปทางทิศ + z ตามความเป็นจริงเราไม่สามารถทำให้ไม่เกิดการสะท้อนเมื่อคลื่นตกกระทบที่จุดอิมพีแดนซ์ไม่ต่อเนื่อง แต่เราสามารถทำให้อิมพีแดนซ์เข้ากันได้ โดยจัดให้คลื่นสะท้อนเนื่องจากจุดไม่ต่อเนื่องที่ $z = 0$ และคลื่นสะท้อนเนื่องจากจุดไม่ต่อเนื่องที่ $z = L$ เกิดการรวมกันได้ ให้คลื่นสะท้อนทั้งหมดในตัวกลางที่ ๑ มีอัมปลิจูดเป็นศูนย์

เราให้บริเวณจาก $z = 0$ ถึง L เป็นตัวกลาง dispersive ที่มีอิมพีแดนซ์เป็น Z_2 ถ้าเราแก้ปัญหาการเข้ากันได้ของอิมพีแดนซ์ เราจะพบว่า Z_2 มีค่าอยู่ระหว่าง Z_1 และ Z_3 จากสูตรของสัมประสิทธิ์การสะท้อนเรามี

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - (Z_2/Z_1)}{1 + (Z_2/Z_1)} \quad \text{และ} \quad R_{23} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{1 - (Z_3/Z_2)}{1 + (Z_3/Z_2)} \qquad (๔.๓๖)$$

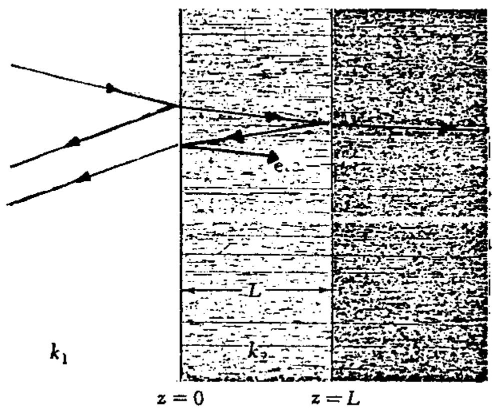
ดังนั้นเมื่อเราสมมติ $Z_1 < Z_2 < Z_3$ สัมประสิทธิ์การสะท้อน R_{12} และ R_{23} มีเครื่องหมายเหมือนกัน จุดมุ่งหมายที่สำคัญของเราคือต้องการให้ทั้งสองคลื่นสะท้อนหักล้างกันเองจนเป็นศูนย์ แต่เราต้องคำนึงถึงว่าคลื่นสะท้อนทั้งสองเกิดในที่ต่างกันคือที่ $z = 0$ และ $z = L$ ดังนั้นเฟสของคลื่นทั้งสองต้องต่างกัน เรามาพิจารณาตอนเริ่มต้นตั้งแต่คลื่นตกกระทบที่ $z = 0$ มีคลื่นส่วนหนึ่งสะท้อนกลับด้วยสัมประสิทธิ์ R_{12} และบางส่วนส่งผ่านไปด้วย T_{12} สัมประสิทธิ์การส่งผ่าน T_{12} ที่เป็นค่าบวกเสมอ คลื่นส่งผ่านเคลื่อนที่ไปยัง $z = L$ ที่ตำแหน่งนี้จะมีคลื่นบางส่วนสะท้อนกลับด้วยสัมประสิทธิ์ R_{23} และบางส่วนส่งผ่านไป คลื่นสะท้อนเคลื่อนกลับมาที่ $z = 0$ อีกครั้ง และที่นี้มีคลื่นบางส่วนส่งผ่านด้วยสัมประสิทธิ์ T_{21} ดังนั้นมันจะผ่านเข้าไปในตัวกลางที่ ๑ ตรงตำแหน่ง $z = 0$ เคลื่อนไปในทิศ $-z$ ด้วยอัมปลิจูดที่เป็นอัมปลิจูดของคลื่นตกกระทบครั้งแรกคูณด้วยปริมาณ $T_{12}R_{23}T_{21}$ และด้วยค่าคงที่เฟสที่ต่างจากคลื่นสะท้อนที่ผิวแรก เพราะว่าคลื่นสะท้อนกลับออกมาครั้งหลังต้องใช้เวลาส่วนหนึ่งในการเคลื่อนที่ทั้งไปและกลับในตัวกลางที่ ๒ เป็นระยะทาง $2L$ ดังนั้นในตัวกลางที่ ๑ มีคลื่นทั้งหมดเป็น

$$\psi_{inc} = A\cos(\omega t - k_1 z) \qquad (๔.๓๗)$$

$$\psi(\text{สะท้อนที่ } z = 0) = R_{12}A\cos(\omega t + k_1 z) \qquad (๕.๓๘)$$

$$\psi(\text{สะท้อนที่ } z = L) = T_{12}R_{23}T_{21}A\cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L) \qquad (๕.๓๙)$$

เมื่อ $-2kL$ เป็นเฟสสัมพันธ์กับคลื่นที่ใช้ไปในการเคลื่อนที่ไปและกลับเป็นระยะ $2L$ ด้วยจำนวนคลื่นเชิงมุม k_2 คลื่นตกกระทบและสองคลื่นสะท้อนตามสมการ (๕.๓๘) และ (๕.๓๙) ได้แสดงไว้ในรูป ๕.๔



รูป ๕.๔ แสดงคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนสองลำแสงแรกบนผิวตัวกลางที่สองและตัวกลางที่หนึ่ง

<u>การประมาณแบบการสะท้อนเล็กน้อย</u>

สมมติให้อิมพีแดนซ์ Z_1, Z_2 และ Z_3 มีค่าต่างกันไม่มากนัก ทำให้สัมประสิทธิ์การสะท้อนมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับหนึ่ง จากการสะท้อนและการส่งผ่านระหว่างสองผิวของตัวกลางทั้งสามทำให้เกิดลำแสงสะท้อนได้มากมาย แต่เราสามารถละทิ้งลำแสงเหล่านั้นได้นอกจากสองลำแสงสะท้อนครั้งแรกที่ได้แสดงไว้เท่านั้นด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น จากสมการ (๕.๓๙) เราพิจารณาพจน์

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \qquad (๕.๔๐)$$

ดังนั้นในกรณีของการประมาณแบบการสะท้อนเล็กน้อย คลื่นสะท้อนทั้งหมดเกิดจากผลรวมของสองคลื่นสะท้อนจาก $z = 0$ และ $z = L$ เป็น

$$\psi_{ref} \approx R_{12}A\cos(\omega t + k_1 z) + R_{23}A\cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L) \quad (๕.๔๑)$$

คำตอบสำหรับการทำให้อิมพีแดนซ์เข้ากันได้หาโดย ในขั้นแรกหาได้จากการเลือก Z_2 ที่ทำให้ $R_{12} = R_{23}$ ดังนั้น

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} \quad (๕.๔๒)$$

สมการ(๕.๔๑) กลายเป็น

$$\psi_{ref} = R_{12}A\left[\cos(\omega t + k_1 z) + \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L)\right] \quad (๕.๔๓)$$

ต่อไปเลือกค่า L ที่ทำให้คลื่นสะท้อนทั้งสองรวมกันได้และหักล้างกันเป็นศูนย์ เราจะได้การแทรกสอดหักล้างอย่างสมบูรณ์ ในกรณีนี้ $2k_2L$ เท่ากับ π ซึ่งเป็นเฟสที่เปลี่ยนไปหลังจากคลื่นเคลื่อนที่ในตัวกลางที่ ๒ ทั้งไปและกลับเป็นระยะ 2L และจาก $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ ดังนั้น

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

สรุปได้ว่า คลื่นสะท้อนทั้งหมดรวมเป็นศูนย์ต่อเมื่อ Z_2 เป็นค่ารากกำลังสองของผลคูณ Z_1 และ Z_3 และถ้าความหนา L ของ nonreflective layer เป็นความยาวคลื่นส่วนสี่ของคลื่นเคลื่อนที่ในตัวกลางนั้น

<u>ตัวอย่าง ๔</u> การเคลือบแผ่นแก้ว

เมื่อลำแสงผ่านเข้าไปในแผ่นแก้ว มันจะผ่านผิวแก้วเป็นจำนวนสองผิวด้วยกัน ที่แต่ละผิวความเข้มของแสงสะท้อนซึ่งถูกกำหนดด้วยกำลังสองของสัมประสิทธิ์การสะท้อนจากสมการ(๕.๓๕) ในตอน ๕.๒ มีความเข้มแสงสูญเสียไปเท่ากับ $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25} = 4\%$ ในแต่ละผิว ดังนั้นสำหรับการส่งผ่านไปทั้งสองผิวของแผ่นแก้วมีความเข้มแสงสูญเสียไปเป็น 8% อย่างไรก็ตามเราสามารถทำให้ไม่เกิดการสูญเสียความเข้มแสงได้ โดยการเคลือบแก้วด้วย nonreflecting layer ที่มีคุณสมบัติตามสมการ(๕.๔๒) กล่าวคือ อิมพีแดนซ์ของสารเคลือบต้องเท่ากับรากกำลังสองของผลคูณอิมพีแดนซ์ของแก้วและอากาศ ดังนั้น

ดัชนีหักเหของสารเคลือบต้องเป็นค่ารากกำลังสองของ ๑ คูณกับ n สำหรับแก้วมีค่าเป็น ๑.๕๐ ดังนั้น $\sqrt{๑.๕๐}$ = ๑.๒๒ และต้องเคลือบสารให้มีความหนาเท่ากับ $\frac{1}{4}\lambda_2$ เมื่อ λ_2 เป็นความยาวคลื่นของแสงในสารเคลือบ สำหรับแสงที่มีความยาวคลื่นในสุญญากาศเท่ากับ ๕๕๐๐ Å ความยาวคลื่นในสารเคลือบกลายเป็น ๕๕๐๐/๑.๒๒ = ๔๕๐๐ Å หรือเท่ากับ ๑.๑๒ x ๑๐$^{-๕}$ ซม. สำหรับวิธีการเคลือบสาร นำแผ่นแก้วที่จะเคลือบวางในห้องสุญญากาศ(vacuum chamber) ที่ประกอบด้วยเบ้าหลอมขนาดเล็ก ภายในเบ้าหลอมมีสารที่จะใช้เคลือบถูกทำให้ร้อนจนกลายเป็นไอ โมเลกุลจากไอสารเหล่านี้จะลอยไปเกาะบนผิวหน้าของแผ่นแก้วที่อยู่ใกล้กับเบ้าหลอม จนกระทั่งได้ความหนาตามต้องการ

วิธี Tapered section

ในวิธี nonreflecting layer ที่เคลือบสารให้มีความหนาเท่ากับ $\lambda/4$ นั้น ใช้ได้ดีเฉพาะคลื่นแสงที่มีความถี่เดียวเท่านั้น ถ้าเรามีความกว้างของสารเคลือบได้อย่างเพียงพอเราสามารถทำได้ดีกว่าวิธี **nonreflecting layer** อีก โดยใช้วิธี **tapered section** กล่าวคือ สมมติให้ L มีความหนายาวมากกว่าความยาวคลื่นใดๆ เราต้องการแต่คลื่นส่งผ่านโดยไม่มีการสะท้อน และให้อิมพีแดนซ์มีการเปลี่ยนแปลงค่าตลอดความยาว L ในช่วงความยาวคลื่นส่วนสี่อิมพีแดนซ์มีค่าเปลี่ยนไปเล็กน้อย เพื่อความสะดวกเราจะคิดว่าอิมพีแดนซ์มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยปริมาณเท่ากันเป็น ΔZ ในแต่ละช่วงความหนา $\Delta z = \lambda/4$ สำหรับความยาวคลื่นผ่านสารเคลือบนั้น การสะท้อนจากแถบความหนาหนึ่งซึ่งอิมพีแดนซ์เพิ่มขึ้นจาก Z_1 ไปยัง $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$ ทำให้สัมประสิทธิ์การสะท้อนเปลี่ยนไปด้วย ΔR ซึ่ง

$$\Delta R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\frac{\Delta Z}{2Z} \approx -\frac{1}{2Z}\left[\frac{dZ(z)}{dz}\right](\tfrac{1}{4}\lambda) \qquad (๕.๕๕)$$

ถ้าการสะท้อนจากแถบหนาสารเคลือบเล็กๆถูกหักล้างจากแถบสารเคลือบถัดไปที่ห่างกันเป็นระยะความยาวคลื่นส่วนสี่ ΔR ต้องเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับระยะทาง z เรียกค่าคงที่นี้ด้วย α ดังนั้นแทนค่า $\Delta R = \alpha$ ในสมการ(๕.๕๕) ให้

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{8\alpha}{\lambda}dz \qquad (๔.๔๔)$$

ถ้าเราให้ λ เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับ z อิมพีแดนซ์มีค่าลดลงอย่างเอกซ์โปเนนเชียลตามระยะทาง z ซึ่งได้จากการอินติเกรทสมการ(๕.๔๕) เราได้

$$Z = e^{-\frac{8\alpha}{\lambda}z} \qquad (๕.๔๖)$$

แบบฝึกหัดบทที่ ๕

5.1 A rubber tube in which the speed of transverse waves is c_1 is joined end-to-end to a second tube in which the speed is c_2. A train of sine waves travels toward the junction in the first tube. (1) What is the speed c_2, in terms of c_1, if the amplitude of the reflected wave equals that of the transmitted wave? (2) What is then the ratio of the average power reflected to that transmitted? (3) Explain why the average power are not equal, although the amplitudes are equal. (4) What is the speed c_2 if the reflected power equals the transmitted power? Ans. (1) $c_2 = c_1/3$; (4) $c_2 = 5.9c_1$, $c_2 = 0.18c_1$.

5.2 A rubber tube in which the speed of transverse waves is 20 m/sec is joined end-to-end to a second tube in which the speed is 10 m/sec. A transverse sine wave of wavelength 1 m and amplitude 3 cm travels in the first tube toward the junction. (1) What is the amplitude of the wave reflected at the junction? (2) What is the amplitude of the transmitted wave? (3) What is the ratio of the average power transmitted to that reflected?

5.3 Two transverse cosine waves, each of amplitude 1 in. and wavelength 2 in., travel in opposite directions in a string with a speed of ½ in/sec. Construct graphs of the shape of the string at the following times: $t = 0$, $t = 2$ sec, $t = 4$ sec.

5.4 A stretched string is observed to vibrate with a frequency of 30 cycle/sec in its fundamental mode when the supports at its end are 60 cm apart. The amplitude at the antinode is 3 cm. The string has a mass of 30 gm.

(1) What is the speed of propagation of a transverse wave in the string? (2) Compute the tension in the string. (3) Write the equation representing the wave motion, using the constants given above and computed in (1).

5.5 The relation between the impedance Z and the refractive index n of a dielectric is given by $Z = 1/n$. Light travelling in free space enters a glass lens which has a refractive index of 1.5 for a free space wavelength of 5.5×10^{-7} meters. Show that reflections at this wavelength are avioded by a coating of refractive index 1.22 and thickness 1.12×10^{-7} meters.

5.6 Suppose a coaxial transmission line having 50 ohms characteristic impedance is joined to one having 100 ohms characteristic impedance.

(a) A voltage pulse of +10 volts (maximum value) is incident from the 50 Ω line to the 100 Ω line. What is the "height" (in volts, including the sign) of the reflected pulse? Of the transmitted pulse?

(b) A + 10-volt pulse is incident from the 100 Ω to the 50 Ω line. What are the reflected and transmitted pulse heights?

5.7 Light of wavelength $\lambda = 5000$ Å is incident normally on a series of two transparent plastic disks separated by a distance large compared with the wavelength. If the index of refraction of the disks is $n = 1.5$, what fraction of the light is transmitted? Neglect absorption, internal multiple reflections, and interference effects. Ans. $I_t/I_o = 0.85$.

5.8 Compare the amplitude and intensity reflection coefficients for light normally incident on a smooth water surface (index $n = 1.33$) for the two cases of incidence from air to water and from water to air.

5.9 Reflections in a thin film of air. Suppose you have two optically flat slabs of glass touching at one edge and spaced apart by a sheet of paper at the other edge, which is a distance L from the edge where they touch. Assume the paper has the thickness of one page of this book. (How can you measure that without a micrometer?) Suppose you want successive fringes of green light to be separated by 1 mm so that you can see them easily. How long must the length L of the "wedge" of air be?

5.10 For light (or other electromagnetic radiation) incident from medium 1 to medium 2, we found that, provided the magnetic permeability of the medium is unity (or does not change at the discontinuity) and provided the "geometry" is constant (parallel-plate transmission line of constant cross-sectional shape or slab of meterial in free space), then the reflection and transmission coefficients for the electric field E_x and magnetic field B_y are given by

$$R_E = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T_E = 1 + R_E = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$R_B = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad T_B = 1 + R_B = \frac{2k_2}{k_2 + k_1},$$

where $k = n\omega/c$ and n is the index of refraction. Show that the reflection and transmisiion coefficients for E_x imply that E_x and $\partial E_x/\partial z$ are both continuous at the discontinuity, i.e., that they have the same instantaneous values on either side of the discontinuity. (By the field on the left side (medium 1) we mean, of course, the superposition of the incident and reflected waves.) Similarly, show that the reflection and transmission coefficients for the magnetic field B_y imply that B_y is continuous at the boundary but that $\partial B_y/\partial z$ is not continuous. Show that $\partial B_y/\partial z$ increases by a factor $(k_2/k_1)^2 = (n_2/n_1)^2$ in crossing from medium 1 to medium 2. It is important to notice that we mean the total field, not just the part traveling in a particular direction.

5.11 Show that for waves on a string the boundary condition that is analogous to constant magnetic permeability (across a discontinuity) for light is that the mass density of the string be constant. Show that an increase in dielectric constant for light in crossing the boundary is analogous to a decrease in string tension. Show that the transverse string velocity behaves like the magnetic field in a light wave, in the sense that it is continuous but that its z derivative increases by a factor $(k_2/k_1)^2$ in going from medium 1 to 2. Show that the transverse tension $-T_o\partial\psi/\partial z$ behaves like the electric field, in that both it and its z derivative are continuous at the boundary. (In all cases, we are referring to the total field, not to components traveling in a particular direction.)

5.12 General sinusoidal wave. Write the traveling wave $\psi(z,t) = A\cos(\omega t-kz)$ as a superposition of two standing waves. Write the standing wave $\psi(z,t) = A\cos\omega t\cos kz$ as a superposition of two traveling waves traveling in opposite directions. Consider the following superposition of traveling waves:

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz) + RA\cos(\omega t + kz).$$

Show that this sinusoidal wave can be written as a superposition of standing waves given by

$$\psi(z,t) = A(1 + R)\cos\omega t\cos kz + A(1 - R)\sin\omega t\sin kz.$$

Thus the same wave can be thought of as a superposition either of standing waves or of traveling waves.

5-13 Suppose you want to match optical impedances between a region of index n_2, and you want to expend a total distance L in the impedance-matching transition region. What is the optimum z dependence of the index n between the two region? Is it exponential? Why not?

Ans. The wavelength $\lambda = (c/\nu)/n$ should vary linearly with z, i.e., if the transition region extends from $z = 0$ to $z = L$, we want $\lambda(z) = \lambda_1 + (z/L)(\lambda_2 - \lambda_1)$

5.14 Multiple refletion. In the following derivations you are to use complex numbers. Suppose ψ_{inc} is the real part of $Ae^{i(\omega t - kz)}$, where A is real. Thus $\psi_{inc} = A\cos(\omega t - kz)$. At $z = 0$ the impedance suffers a sudden change from Z_1 to Z_2. At $z = L$ the impedance changes again from Z_2 to Z_3. Let $R_{12} = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = -R_{21}$. $R_{23} = (Z_2 - Z_3)/(Z_2 + Z_3)$. Assume that in medium 1 there is a reflected wave that is the real part of $RAe^{i(\omega t + kz)}$, where R is complex, and may be written $R = |R|e^{-i\delta}$

(a) Show that if we neglect all contributions except the reflection from $z = 0$ and the first reflection from $z = L$, we obtain

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2ik_2L},$$

where $T_{12} = 1 + R_{12}$ and $T_{21} = 1 + R_{21} = 1 - R_{12}$.

(b) Show by explicit summation of the infinte series corresponding to an infinite number of multiple reflections that the exact solution for R is

$$R \qquad R_{12} + \frac{(1 - R_{12}^{\ 2})R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 - R_{23}R_{21}e^{-2ik_2L}},$$

where the first term, R_{12}, is due to the reflection at the first discontinuity at $z = 0$, and the rest is due to one or more reflections at $z = L$. Show that in the small-reflection approximation this result reduces to that of part (a) Show that the exact result can be written in the form

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2ik_2L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_2L}} .$$

5.15 Transmission resonance. (a) Show that for reflection due to two discontinuitiesthe fractional time-averaged energy flux that is not reflected (and hence by energy conservation must be transmitted) is given by

$$1 - |R|^2 = \frac{1 - R_{12}^2 - R_{23}^2 + R_{12}^2R_{23}^2}{1 + 2R_{12}R_{23}\cos 2k_2L + R_{12}^2R_{23}^2}$$

(b) Show that if medium 3 has the same impedance as medium 1 this becomes

$$1 - |R|^2 = \frac{(1 - R_{12}^2)^2}{1 - 2R_{12}^2\cos 2k_2L + R_{12}^4} .$$

(c) Show that at certain values of k_2L the fractional time-averaged energy flux not reflected is unity, i.e., for those values, all the energy is transmitted and none reflected. Call any one of these "resonance values" of k_2 by the name k_o. Show that the resonance values are given by $k_oL = \pi$, 2π, 3π, etc.

(d) Show that for k_2 sufficiently near a resonance value k_o the transmitted (time-averaged) energy flux is given by

$$1 - |R|^2 \approx \frac{(1 - R_{12}^2)^2}{(1 - R_{12}^2)^2 + R_{12}^2[2L(k_2 - k_o)]^2} .$$

5-16 Suppose that a point a on a string at $z_a = 10$ cm oscillates in harmonic motion at frequency 10 cps with amplitude 1 cm. Its phase is such that at $t = 0$ the point on the string is passing through its equilibrium position with upward velocity (positive displacement is upward).

(a) What is the magnitude and direction of the velocity of point a at $t = 0.05$ sec? Suppose the string parameters (mass per unit length and tension) are such that the wave velocity is 100 cm/sec.

(b) What is the wavelength of a traveling wave? What is the wavelength of a standing wave?

(c) Another point b at $z_b = 15$ cm oscillates with the same amplitude as that at $z_a = 10$ cm, but with a relative phase of 180 deg with respect to the oscillation at z_a. Can you tell whether we have here a pure traveling wave, a pure standing wave, or a combination?

(d) A third point c at 12.5 cm also oscillates with the same amplitude as that at z_a but 180 deg out of phase with point a. Point b oscillates as given above. Now tell us whether the wave is a traveling or a standing wave (or a combination).