บทที่ 4
คลื่นเคลื่อนที่
(Traveling waves)

๔.๑ คำนำ

ระบบต่างๆที่เราได้ศึกษาในบทที่ ๑, ๒ และ ๓ ต่างเป็นระบบปิด กล่าวคือเป็นระบบที่ มีขอบเขตแน่นอน ดังนั้นพลังงานทั้งหมดของระบบยังคงอยู่ในระบบไม่ได้สูญเสียไป (พลังงานคงที่) เราพบว่าการออสซิลเลตอย่างอิสระของระบบปิดสามารถอธิบายได้ด้วยพจน์ที่เกิดจากการรวมกันของคลื่นนิ่งที่ได้จาก modes ต่างๆ กล่าวคือ mode และแรงเคลื่อนออสซิลเลตที่ steady-state สามารถเขียนเป็นการรวมกันของคลื่นนิ่งจากส่วนของ mode และยังพบว่าลักษณะอาการต่างๆของ mode ที่ปรากฏพิจารณาจากสภาวะขอบเขตของระบบ ดังเช่น สายกีต้า ลวดเปียโน เป็นระบบที่ตรึงปลายทั้งสองไว้ ดังนั้นคลื่นที่เกิดในลวดสะท้อนไปมาทำให้เกิดคลื่นนิ่ง และพลังงานไม่ถ่ายทอดออกนอกระบบ

ในบทที่ ๔ นี้**เราจะพิจารณาการออสซิลเลตด้วยแรงเคลื่อนในระบบเปิด**ซึ่งหมายถึงระบบที่ไม่มีขอบเขตแน่นอน ตัวอย่างเช่น มีคนขึ้นไปพร้อมกับบอลลูน(balloon)และเป่าแตรในขณะที่บอลลูนลอยอยู่ในบรรยากาศระดับสูงๆ อากาศทำหน้าที่เป็นระบบเปิด หรือตัวกลางเปิดของคลื่นเสียง อย่างน้อยที่สุดเราพิจารณาได้ว่าจะไม่มี echoซึ่งเกิดจากเสียงสะท้อนที่พื้นผิวโลกไปยังผู้เป่าแตรคนนั้น แต่จะมีผลแตกต่างกันมากถ้าคนเดียวกันนั้นเป่าแตรในห้องที่มีฝาผนัง ๔ ด้านพร้อมทั้งเพดานที่เป็นวัสดุแข็ง เพราะในห้องแบบนี้อากาศทำหน้าที่เป็นระบบปิด และจะเกิดอภินาทถ้าความถี่ของคลื่นเสียงเท่ากับความถี่ mode แต่ถ้าห้องนั้นบุด้วยวัสดุเก็บเสียงอย่างดีจนกระทั่งไม่เกิดเสียงสะท้อนได้เลย อากาศในห้องนั้นก็จะทำหน้าที่เป็นระบบเปิดได้เหมือนกัน ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ชี้ให้เห็นว่าระบบเปิดไม่จำเป็นจะต้องเป็นระบบที่มีขนาดกว้างขวางจนมองไม่เห็นขอบเขตเท่านั้น ระบบที่มีบริเวณแคบๆก็สามารถเป็นระบบเปิดได้เช่นกัน

คลื่นที่เกิดจากแรงเคลื่อนในระบบเปิดเรียกว่า คลื่นเคลื่อนที่ เพราะว่าคลื่นที่เกิดขึ้นจะกระจายห่างออกไปจากตัวกำเนิดคลื่น คลื่นนี้ มีคุณสมบัติที่สำคัญคือ มันสามารถส่ง

ผ่านพลังงานและโมเมนตัมได้ ดังเช่น ถ้าโยนก้อนหินลงในน้ำนิ่งทำให้เกิดคลื่นวงกลมกระจายออกไปรอบตัวและพาพลังงานจลน์ออกไปเป็นระยะทางไกลได้ เห็นได้จากสิ่งของที่เคยลอยนิ่งอยู่ห่างจากจุดที่ก้อนหินตกกระทบผิวน้ำไปมาก เกิดอาการเคลื่อนไหวได้เมื่อคลื่นน้ำเคลื่อนที่ไปถึง หรือทำให้มีพลังงานศักย์เพิ่มขึ้นได้ ดังเช่นสิ่งที่ครึ่งจมครึ่งลอยในน้ำใกล้ชายฝั่งถูกคลื่นซัดขึ้นไปบนฝั่งสูงจากตำแหน่งเดิมมาก

ความสัมพันธ์อัมปลิจูด

ถ้าคลื่นกระจายออกในทางสองหรือสามมิติ อัมปลิจูดของการเคลื่อนที่มีค่าลดลงเสมอเมื่อเคลื่อนที่ห่างจากตัวกำเนิดคลื่นมากขึ้น(สมมติต้นกำเนิดคลื่นเล็กมาก) ในทางตรงกันข้ามถ้าตัวกลางเป็นหนึ่งมิติ (เช่น เส้นเชือกที่ขึงให้ตึงแล้วสะบัดที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนอีกปลายข้างหนึ่งอยู่ไกลมากหรือต่อกับเครื่องมือดูดกลืนคลื่น) ดังนั้นอัมปลิจูดของส่วนที่เคลื่อนที่ฮาร์โมนิกจะไม่ลดลง(ถ้าตัวกลางเป็นเอกพันธ์) และข้อนี้เป็นจริงไม่เพียงแต่สำหรับกรณีหนึ่งมิติเท่านั้น ยังเป็นจริงสำหรับกรณีสองมิติ คลื่นตรง (straigh waves) และสามมิติ คลื่นระนาบ (plane wave) เช่นสัญญานวิทยุจากดวงดาวบนฟากฟ้าไกลๆ

ความสัมพันธ์เฟส

ความสัมพันธ์เฟสระหว่างสองส่วนเคลื่อนที่ถัดกันในตัวกลางเปิดต่างกันมากกับกรณีสำหรับคลื่นนิ่งในระบบปิด เพราะว่าโมกิรณีของคลื่นนิ่งซึ่งอาจเป็นการออสซิลเลตอย่างอิสระหรือการออสซิลเลตด้วยแรงของระบบปิด ส่วนเคลื่อนที่ทั้งหมดออสซิลเลตด้วยเฟสตรงกัน สำหรับกรณีคลื่นเคลื่อนที่ส่วนเคลื่อนที่ถัดกันจะมีเฟสต่างกันด้วยปริมาณเท่ากับความถี่คูณด้วยเวลาที่ส่วนทั้งสองเคลื่อนที่ตามกัน

๔.๒ คลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกในหนึ่งมิติและความเร็วเฟส

สมมติว่าเรามีระบบที่เป็นหนึ่งมิติประกอบด้วยเส้นลวดเอกพันธ์ยาวขึงตึงที่ $z = 0$ ถึงอนันต์ ตรง $z = 0$ ต่อกับเครื่องมือบางอย่างที่ให้ผลออกมาทำให้เส้นลวดสั่นและส่งคลื่นเคลื่อนที่ผ่านไปตามเส้นลวด เรียกเครื่องมือนี้ว่า transmitter ถ้าให้ $D(t)$ เป็นการขจัดที่เครื่องมือส่งออกมากำหนดด้วยการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก

$$D(t) = A\cos\omega t \qquad (๔.๑)$$

เราต้องการหาการขจัด $\psi(z,t)$ ของเส้นลวดตรงตำแหน่ง z ใดๆที่อยู่ระหว่าง $z = 0$ และอนันต์ ส่วนที่ตำแหน่ง $z = 0$ เราสามารถหา $\psi(0,t)$ ได้ง่าย เพราะว่าเส้นลวดผูกติดกับเครื่องมือโดยตรง ดังนั้นการขจัดของเส้นลวดที่ $z = 0$ เท่ากับ $D(t)$

$$\psi(0,t) = D(t) = A\cos\omega t \qquad (๔.๒)$$

<u>ความเร็วเฟส</u>

จากการสังเกตคลื่นเคลื่อนที่บนผิวน้ำทำให้เรารู้ว่าคลื่นวิ่งด้วยความเร็วคงที่ เมื่อตัวกลางยังคงมีคุณสมบัติสม่ำเสมอ(เช่นความลึกของน้ำ) เมื่อคลื่นเป็นคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์-โมนิก ความเร็วคลื่นเราเรียกว่า ความเร็วเฟส v_ϕ และเรายังพบว่าการเคลื่อนที่ของส่วนเคลื่อนที่ตรงตำแหน่ง z เมื่อเวลา t เป็นเช่นเดียวกับส่วนเคลื่อนที่ตรง $z = 0$ เมื่อเวลาก่อน t' และ t' เป็นเวลาก่อนกว่า t ด้วยเวลาที่คลื่นใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะทาง z ด้วยความเร็ว v_ϕ

$$t' = t - \frac{z}{v_\phi} \qquad (๔.๓)$$

ดังนั้นเราได้รูปแบบของคลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์คือ

$$\begin{aligned}
\psi(z,t) &= \psi(0,t') \\
&= A\cos\omega t' \\
&= A\cos\omega\left(t - \frac{z}{v_\phi}\right) \\
&= A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v_\phi}z\right) \qquad (๔.๔)
\end{aligned}$$

ให้สังเกตตำแหน่ง z แน่นอนตำแหน่งหนึ่ง $\psi(z,t)$ เป็นฮาร์โมนิกออสซิลเลชันในเวลา ทำนองเดียวกันถ้าสังเกตที่เวลา t แน่นอนเวลาหนึ่ง $\psi(z,t)$ เป็นการออสซิลเลตรูปไซน์ใน

ระวางที่ แม้คลื่นจะเป็นคลื่นนิ่งรูปไซน์ทั้งสองกรณียังคงเป็นจริงเสมอ และเราสามารถเขียนการขจัดของคลื่นนิ่งเป็นแบบ

$$\psi(z,t) = B \cos\omega t \cos(\alpha - kz) \qquad (๔.๔)$$

ในที่นี้ α เป็นค่าคงที่ สำหรับเวลาที่แน่นอนสมการ(๔.๔) มีรูปแบบเช่นเดียวกับคลื่นนิ่งตามสมการ(๔.๕) เมื่อเราใช้จำนวนคลื่น k (และความยาวคลื่น λ) สำหรับคลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์เป็นเช่นเดียวกับที่เราใช้สำหรับคลื่นนิ่ง เราสามารถเขียนสมการของคลื่นเคลื่อนที่เป็น

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) \qquad (๔.๖)$$

โดยการเปรียบเทียบสมการ(๔.๔)และ(๔.๖) เราจะเห็นได้ว่า อัตราการเพิ่มของมุมเฟสต่อหน่วยความยาว k สำหรับคลื่นเคลื่อนที่กำหนดด้วย

$$k = \frac{\omega}{v_\phi} \qquad (๔.๗)$$

นั่นคือความเร็วเฟสเป็น $$v_\phi = \frac{\omega}{k} \qquad (๔.๘ก)$$

หรือเมื่อ $\omega = 2\pi\nu$ และ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

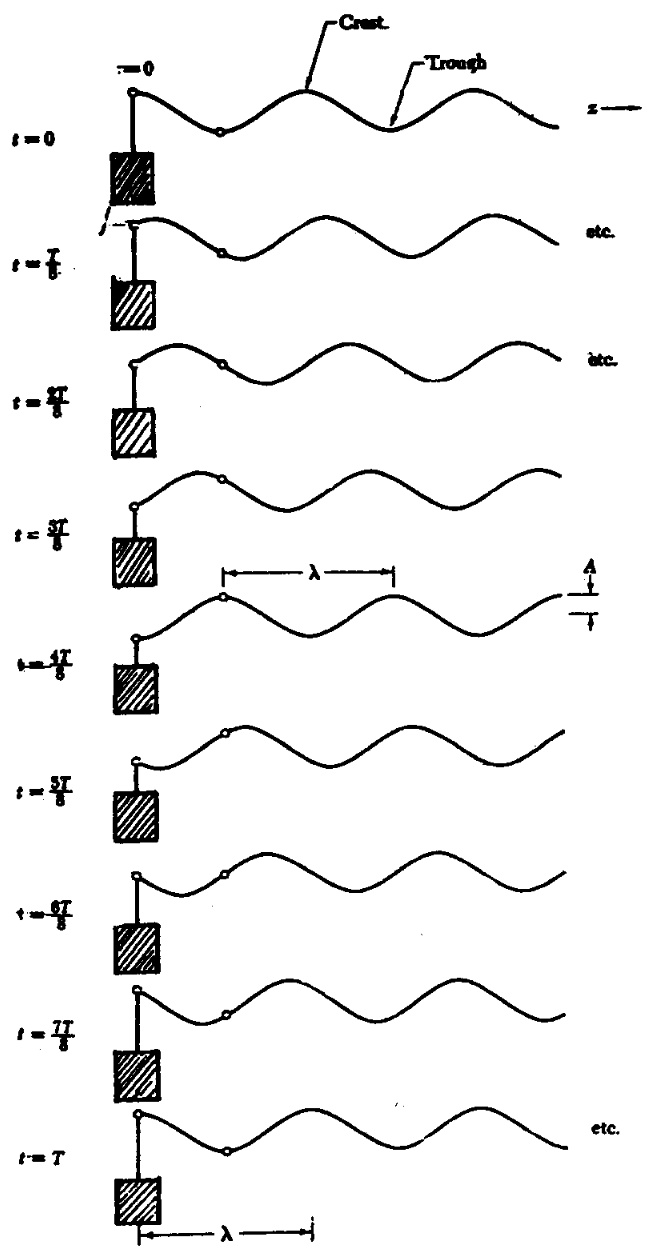
$$v_\phi = \lambda\nu \qquad (๔.๘ข)$$

และเมื่อ $\nu = \frac{1}{T}$

$$v_\phi = \frac{\lambda}{T} \qquad (๔.๘ค)$$

สมการ(๔.๘) มีความสำคัญมากสำหรับคลื่นเคลื่อนที่แบบรูปไซน์ เราอาจหาความเรวเฟสได้อีกวิธีหนึ่งโดยกำหนดเฟสฟังก์ชัน $\zeta(z,t)$ คลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์เคลื่อนที่ไปในทิศ $+z$ เป็น argument ของฟังก์ชันคลื่น $\cos(\omega t - kz)$

$$\zeta(z,t) = \omega t - kz \qquad (๔.๙)$$



รูป ๔.๑ แรงเคลื่อนภายนอกกระทำที่ตำแหน่ง z เป็นแบบฮาร์โมนิกมีคาบเป็น T คลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์เคลื่อนไปทาง +z ความยาวคลื่นเป็น λ. ความเร็วเฟสเป็น $\lambda/T = \omega/k = \lambda\nu$. แต่ละจุดบนเส้นเชือกมีการเคลื่อนที่เหมือนกับที่ $z = 0$.

โดยกำหนด z เป็นค่าคงที่ เราหมายถึงให้สังเกตคลื่นที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง จะพบว่าเฟสมีค่าเพิ่มขึ้นตาม t และถ้ากำหนดให้ t เป็นค่าคงที่ หมายถึงเมื่อเวลาหนึ่งเวลาใดให้สังเกตคลื่น ณ ตำแหน่ง(z) ต่างๆกัน จะพบว่าเฟสมีค่าลดลงเมื่อ z มีค่าเพิ่มขึ้น ถ้าเราต้องการพิจารณาตำแหน่งสันคลื่น(ค่ามากที่สุดของ $\cos\zeta(z,t)$) หรือร่องคลื่น(ค่าต่ำที่สุดของ $\cos\zeta(z,t)$) ติดต่อกันตลอด เราต้องพิจารณาตำแหน่ง z ต่างๆเมื่อ t เปลี่ยนแปลงโดยให้เฟส $\zeta(z,t)$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นอนุพันธ์ทั้งหมดของ $\zeta(z,t)$ จะให้ผลลัพท์เป็นศูนย์ เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง z และ t สำหรับแต่ละตำแหน่งที่เฟสเป็นค่าคงที่ได้ดังนี้

$$d\zeta = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) dz = wdt - kdz \qquad (๔.๑๐)$$

ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ทำให้ dt และ dz สัมพันธ์กันด้วย

$$v_\phi = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{(d\zeta = 0)} = \frac{\omega}{k} \qquad (๔.๑๑)$$

ซึ่งเป็นสมการ(๔.๘ก) และ dz/dt คือความเร็วคลื่นหรือความเร็วเฟสนั่นเอง

Dispersion law for linear array of coupled pendulums

ต่อไปเรามาพิจารณาตัวอย่างของระบบลูกตุ้มแกว่งควบคู่กันด้วยสปริงเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งถูกผลักด้วยแรงที่ z = 0 เพื่อหากฎการกระจายที่แท้จริงสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ซึ่งเราเชื่อว่าเป็นเช่นเดียวกับกฎการกระจายสำหรับคลื่นนิ่ง อาศัยจากกรณีของลูกตุ้มควบคู่ สมการของการเคลื่อนที่แท้จริงของลูกตุ้มตัวที่ n เขียนได้เป็น

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{\ell}\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{K}{M}(\psi_n - \psi_{n-1}) \qquad (๔.๑๒)$$

เรากล่าวได้ว่าส่วนเคลื่อนที่ทุกตัวจะออสซิลเลตเป็นแบบฮาร์โมนิกสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ที่สภาวะไม่เปลี่ยนแปลงเป็นเช่นเดียวกับกรณีของสภาวะไม่เปลี่ยนแปลงออสซิลเลตด้วยแรงของระบบปิด ดังนั้น

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2 \psi_n \qquad (๔.๑๓)$$

แทนค่าสมการ(๔.๑๓) ลงในสมการ(๔.๑๒) รวบรวมพจน์ที่เหมือนกันและหารตลอดด้วย ψ_n เราได้

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2K}{M} - \frac{K}{M}\left(\frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1}}{\psi_n}\right) \tag{๔.๑๔}$$

เราสมมติให้คลื่นเคลื่อนที่แบบรูปไซน์มีสมการเป็น

$$\psi_n = A\cos(\omega t + \phi - kz) \quad , \qquad z = na$$

จากตัวอย่างข้างต้นเราเคยหาได้ว่า

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n \cos ka$$

ดังนั้นสมการ(๔.๑๔)กลายเป็น

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka) \tag{๔.๑๕}$$

หรือ

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2} \tag{๔.๑๖}$$

สมการ(๔.๑๖)คือความสัมพันธ์การกระจายเป็นเช่นเดียวกับที่หาได้ในตอน ๓.๓ สมการ(๓.๗๐) สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรง เราเห็นได้ว่าช่วงความถี่สำหรับคลื่นรูปไซน์มีค่าเป็นเช่นเดียวกันสำหรับคลื่นเคลื่อนที่และคลื่นนิ่ง คือช่วงจาก ω_{min} ถึง ω_{max} เมื่อ

$$\omega^2_{min} = \frac{g}{\ell} \equiv \omega_o^2 \quad \text{และ} \quad \omega^2_{max} = \frac{g}{\ell} + \frac{4K}{M} \tag{๔.๑๗}$$

สำหรับแรงเคลื่อนที่มีความถี่ต่ำกว่า cutoff ω_o จะได้คลื่นเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียล และเราคาดคะเนว่า ความสัมพันธ์การกระจายสำหรับระบบเปิดยังคง มีค่าเหมือนกับระบบปิดอีกด้วย เราจะได้

$$\psi(z,t) = Ae^{-\kappa z}\cos\omega t \qquad z = na \tag{๔.๑๘}$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{4K}{M}\sinh^2\frac{\kappa a}{2} \qquad (๔.๑๙)$$

ทำนองเดียวกันสำหรับแรงเคลื่อนที่มีความถี่สูงกว่า upper cutoff ω_{max} เราจะได้คลื่นแบบเอกซ์โปเนนเชียลซิกแซก

$$\psi(z,t) = A(-1)^n e^{-\kappa z}\cos\omega t \qquad z = na \qquad (๔.๒๐)$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{4K}{M}\cosh^2\frac{\kappa a}{2} \qquad (๔.๒๑)$$

<u>ตัวอย่าง ๑</u> คลื่นตามขวางบนเส้นลวดร้อยด้วยลูกปัดจำนวนมาก

จากความสัมพันธ์การกระจายสำหรับคลื่นตามขวางบนเส้นลวดร้อยด้วยลูกปัดขณะสมดุลย์มีแรงตึง T_o แต่ละลูกปัดมีมวล M และระยะห่างระหว่างลูกปัดเป็น a คือ (ดูสมการ (๒.๗๐) ตอน ๒.๔))

$$\omega^2 = \frac{4T_o}{Ma}\sin^2\frac{ka}{2} \qquad 0 \leq k \leq \frac{\pi}{a} \qquad (๔.๒๒)$$

ดังนั้นความเร็วเฟสสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ตามขวางเป็น

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_o}{Ma}\frac{\sin^2\frac{ka}{2}}{k^2} \qquad 0 \leq ka \leq \pi \qquad (๔.๒๓)$$

สำหรับความถี่สูงกว่า high-frequency cutoff (ซึ่งคือ $\omega_o = \sqrt{4T_o/Ma}$) คลื่นเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียลซิกแซกจะไม่ปรากฏว่ามีความเร็วเฟสอยู่ ถ้าความถี่อยู่ระหว่างศูนย์และ ω_o คลื่นเป็น dispersive waves ความเร็วเฟสมีค่าไม่คงที่ขึ้นกับ k ในกรณีที่คิดว่าคลื่นมีค่าความยาวคลื่นมากเมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างลูกปัด คือ $a/\lambda << 1$ ความเร็วเฟสเกือบจะไม่ขึ้นกับความยาวคลื่น ดังนั้นคลื่นกลายเป็น nondispersive เราสามารถเห็นได้จากการกระจายพจน์ $\sin\frac{ka}{2}$ ตามอนุกรมของเทเลอร์คือ

$$v_\phi = \frac{T_o a}{M}\frac{\sin(\frac{1}{2}ka)}{(\frac{1}{2}ka)}$$

$$= \sqrt{\frac{T_o a}{M}}\ \frac{\frac{1}{2}ka - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}ka)^3 + \ldots .}{(\frac{1}{2}ka)}$$

$$= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\left[1 - \frac{1}{24}(ka)^2 + \ldots\ldots\right] \qquad (๔.๒๔)$$

กำหนด ρ_o เป็นค่ามวลเฉลี่ยต่อหน่วยความยาวที่สมดุลย์ คือ $\rho_o \equiv M/a$ เราได้

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}} \qquad (๔.๒๕)$$

ดังนั้นความเร็วเฟสสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ตามขวางบนเส้นลวดต่อเนื่องมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับความถี่

<u>ตัวอย่าง ๒</u> คลื่นตามยาวบนสปริงลูกปัด

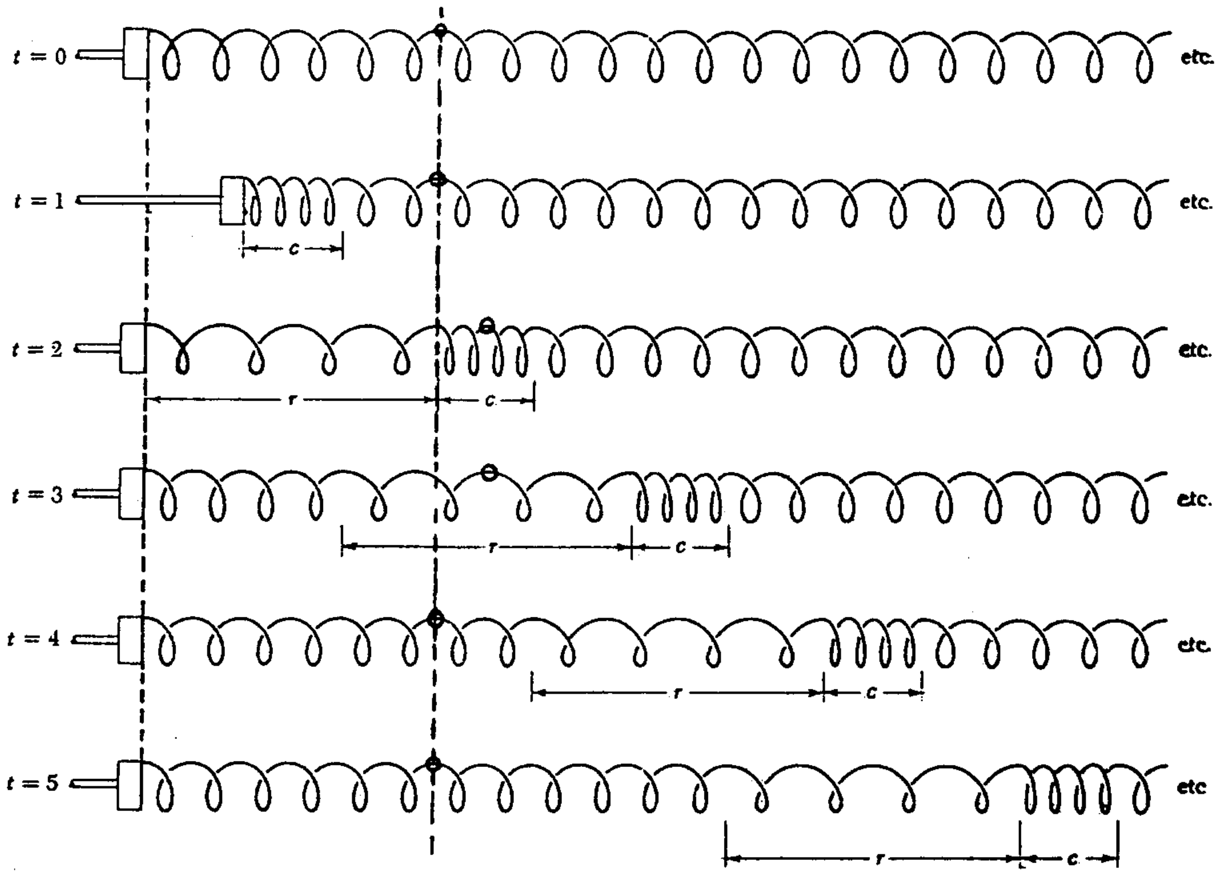
กฎการกระจายสำหรับคลื่นตามยาวเราสามารถหาได้จากกรณีคลื่นตามขวาง โดยการแทนค่าแรงดึงสมดุลย์ T_o ด้วยค่าคงที่สปริงคูณกับระยะห่างระหว่างลูกปัด a (ดูจากสมการ(๒.๗๘) ตอน ๒.๔) เป็น

$$\omega^2 = \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}$$

ดังนั้นในกรณีการต่อเนื่อง เราหาความเร็วเฟสโดยแทน T_o เป็น Ka ในสมการ(๔.๒๕)ได้

$$v_\phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_o}} = \sqrt{\frac{K_\ell L}{\rho_o}} \qquad (๔.๒๖)$$

ในที่นี้เราเขียน $Ka = K_\ell L$ เพื่อบอกว่าถ้าเราต่อสปริงทั้งหมดเข้าด้วยกันมีความยาวทั้งสิ้น L และมีค่าคงที่สปริง K_ℓ ซึ่งเท่ากับ a/L คูณด้วยค่าคงที่สปริง K ของสปริงแต่ละช่วงยาว a พิจารณาจากสมการ(๔.๖๖) จะได้คลื่นตามยาวบนสปริงต่อเนื่องยาวเป็นแบบ **nondispersive** ในรูป ๔.๒ ได้แสดงระลอกคลื่นเคลื่อนที่ประกอบด้วยการอัดและการคลายเคลื่อนที่บนสปริงไปทางขวามือ



รูป ๔.๒ คลื่นเคลื่อนที่ตามยาวประกอบด้วยส่วนอัด c และส่วนคาย r เคลื่อนที่บนสปริง ไปทางขวามือ

<u>ความเร็วเฟสของเสียง</u> **Newton's model**

นิวตันเป็นคนแรกที่ตั้งสมการเพื่อคำนวณหาความเร็วของคลื่นเสียงในอากาศ แต่สูตรของนิวตันให้คำตอบผิดพลาดจากที่เป็นจริง กล่าวคือ สูตรของเขาคำนวณความเร็วเสียงในอากาศได้ประมาณ ๒๘๐ เมตรต่อวินาที แต่จากการทดลองวัดความเร็วเสียงในอากาศได้เท่ากับ ๓๓๒ เมตรต่อวินาที (ที่ STP อุณหภูมิและความดันมาตรฐาน คือที่ความดันหนึ่งบรรยากาศและอุณหภูมิ 0° c) วิธีการของนิวตันเป็นแบบง่ายๆและเหตุผลที่ทำให้คำตอบผิดพลาดนั้นน่าสนใจมาก วิธีการตั้งสมการของนิวตันเป็นดังนี้

ถ้าบรรจุอากาศในภาชนะปิดอันหนึ่ง จะเกิดความดันกระทำต่อผนังภาชนะทุกด้านมีทิศพุ่งออกข้างนอก ดังนั้นอากาศจึงมีลักษณะเหมือนกับสปริงที่ถูกอัดและพยายามยืดตัวมันเองออกสู่สภาวะปกติ ถ้าเราให้ภาชนะเป็นรูปทรงกระบอกยาวปลายปิดข้างหนึ่ง และปลายอีกข้างหนึ่งมีลูกสูบเบาเลื่อนเข้าออกได้ปิดปากท่อกระบอกพอดี ดังนั้นอากาศในภาชนะเหมือนกับสปริงที่ถูกอัดตามแนวทรงกระบอกและพยายามขยายตัวดันลูกสูบออกจากทรงกระบอกด้วยแรงขนาด F ดังนั้นที่สภาวะสมดุลย์ แรงภายนอกขนาด F ที่กระทำต่อลูกสูบพอดีหักล้างกับแรงของอากาศภายใน

สำหรับสปริงที่มีความยาวระยะพัก L_1 (relaxed length) ถูกอัดจนมีความยาวเป็น L (เมื่อ $L < L_1$) และมีค่าคงที่สปริง K_ℓ แรงที่ใช้อัดสปริงมีขนาดเป็น

$$F = K_\ell(L_1 - L)$$

ถ้าความยาวสปริงเปลี่ยนไปทำให้แรงเปลี่ยนแปลงด้วย

$$dF = -K_\ell \, dL \qquad (๔.๒๗)$$

ทำนองเดียวกันแรงเนื่องจากอากาศกระทำต่อลูกสูบพื้นที่ภาคตัด A เป็น

$$F = pA$$

เมื่อ p เป็นความดันอากาศในทรงกระบอก ถ้าลูกสูบเคลื่อนเข้าข้างในทรงกระบอกเพียง

เล็กน้อยจากตำแหน่งสมดุลย์ ทำให้ความยาว L ของทรงกระบอกเปลี่ยนไปด้วย dL ปริมาตรของอากาศในทรงกระบอกเปลี่ยนไปเป็น AdL = dV ดังนั้นแรง F เปลี่ยนไปด้วย

$$dF = A\,dp = A\left(\frac{dp}{dV}\right)_o A\,dL \qquad (๔.๒๘)$$

ในที่นี้เลขกำกับศูนย์หมายถึง dp/dV เป็นการคำนวณที่ปริมาตรสมดุลย์ V_o โดยการเปรียบเทียบสมการ(๔.๒๗) และ(๔.๒๘) เราเห็นได้ว่า ค่าคงที่สปริงสมมูลย์ของอากาศในท่อเป็น

$$K_\ell = -A^2\left(\frac{dp}{dV}\right)_o \qquad (๔.๒๙)$$

ถ้าเราอัดสปริงที่มีค่าคงที่สปริง K_ℓ ความยาวจากตำแหน่งสมดุลย์ L_o และความหนาแน่นมวลเชิงเส้น ρ_o(เชิงเส้น) ดังนั้นความเร็วเฟสสำหรับคลื่นตามยาวกำหนดเป็น (ดูสมการ(๔.๒๖))

$$v^2 = \frac{K_\ell L_o}{\rho_o(\text{เชิงเส้น})} \qquad (๔.๓๐)$$

จากสมการ(๔.๓๐) เมื่อต้องการใช้กับคลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาว ในที่นี้ K_ℓ ต้องเป็นไปตามสมการ(๔.๒๙) $AL_o = V_o$ เป็นปริมาตรเมื่อสมดุลย์ และความหนาแน่นมวลเชิงเส้นกำหนดเป็น

$$\rho_o(\text{เชิงเส้น})L_o = \rho_o(\text{ปริมาตร})AL_o \qquad (๔.๓๑)$$

เมื่อ ρ_o(ปริมาตร) เป็นความหนาแน่นมวลเชิงปริมาตร แทนค่าสมการ(๔.๒๙) และ(๔.๓๑) ลงในสมการ(๔.๓๐) และละทิ้งเครื่องหมายกำกับ " ปริมาตร" จากความหนาแน่นมวลเชิงปริมาตรเป็น ρ_o เราจะได้ความเร็วของเสียง

$$v^2 = -\frac{V_o(dp/dV)_o}{\rho_o} \qquad (๔.๓๒)$$

เรายังคงต้องหาอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันต่อปริมาตร dp/dV ในที่นี้นิวตันได้ใช้กฎของบอยล์ (Boyle) ซึ่งกล่าวว่าที่อุณหภูมิคงที่ ผลคูณของความดันและปริมาตรเป็นค่าคงที่

$$pV = p_oV_o \quad \text{หรือ} \quad p = \frac{p_oV_o}{V} \qquad (๔.๓๓)$$

p_o เป็นความดันสมดุลย์ หาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p_oV_o}{V^2}$$

ขณะสมดุลย์ $V = V_o$ เราได้

$$V_o\left(\frac{dp}{dV}\right)_o = -p_o \qquad (๔.๓๔)$$

ดังนั้นสมการ(๔.๓๒) กลายเป็นผลลัพท์สุดท้ายของนิวตัน

$$v_{\text{นิวตัน}} = \sqrt{\frac{p_o}{\rho_o}} \qquad (๔.๓๕)$$

สำหรับอากาศที่ STP ให้ค่า

p_o = ๑ บรรยากาศ = ๑.๐๑x๑๐^{๖} ดายน์ต่อตารางเซนติเมตร

ρ_o = $\dfrac{\text{๒๙ กรัมต่อโมล}}{\text{๒๒.๔ ลิตรต่อโมล}}$ = ๑.๒๙x๑๐$^{-๓}$ กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้นนิวตันหาความเร็วของเสียงได้เป็น

$$v_{\text{นิวตัน}} = \sqrt{\frac{\text{๑.๐๑x๑๐}^{\text{๖}}}{\text{๑.๒๙x๑๐}^{-\text{๓}}}} = \text{๒.๘๐x๑๐}^{\text{๔}} \text{ เซนติเมตรต่อวินาที}$$

$$= \text{๒๘๐ เมตรต่อวินาที} \qquad (๔.๓๖)$$

ความเร็วเสียงจากการทดลองสำหรับอากาศที่ STP เป็น

v = ๓๓๒ เมตรต่อวินาที

= ๗๔๕ ไมล์ต่อชั่วโมง (๔.๓๗)

<u>แก้ไขข้อผิดพลาดของนิวตัน</u>

ปัญหาที่ทำให้ข้อสมมติฐานของนิวตันผิดพลาดมาจากการใช้กฎของบอยล์(๔.๓๓)

ซึ่งกฎนี้เป็นจริงต่อเมื่ออุณหภูมิคงที่เท่านั้น แต่อุณหภูมิของอากาศในขณะมีคลื่นเสียงไม่เป็นค่าคงที่ เพราะว่าบริเวณของอากาศเมื่อถูกอัดจะมี **work done** เพิ่มขึ้นทำให้อากาศร้อนกว่าอุณหภูมิเมื่อสมดุลย์ บริเวณใกล้เคียงที่ห่างประมาณครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเป็นบริเวณของ **rarefaction** (เป็นบริเวณที่อากาศขยายออก) มีอุณหภูมิต่ำกว่า(ตามหลักพลังงานถาวร) เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิในบริเวณอากาศถูกอัดทำให้ความดันในบริเวณอากาศถูกอัดมีค่ามากกว่าความดันในกฎของบอยล์ และบริเวณอากาศขยายออกมีความดันน้อยกว่าความดันที่คิดไว้ จากผลอันนี้ทำให้แรงคืนกลับมากกว่าที่คาดไว้และความเร็วเฟสเพิ่มขึ้น

แทนที่จะใช้กฎของบอยล์เราต้องใช้กฎ **adiabatic gas** ซึ่งให้ความสัมพันธ์ระหว่าง p และ V เมื่อไม่มีความร้อนไหล ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนได้เป็น

$$pV^{\gamma} = p_oV_o^{\gamma} \quad \text{หรือ} \quad p = p_oV_o^{\gamma}V^{-\gamma} \qquad (๔.๓๘)$$

ในที่นี้ γ มีค่าคงที่เป็นอัตราส่วนของความร้อนจำเพาะเมื่อความดันคงที่ต่อความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ และมีค่านับได้เป็น

$$\gamma = ๑.๔๐ \text{ สำหรับอากาศที่ STP}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (๔.๓๘) และแทน $V = V_o$ ได้

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_oV_o^{\gamma}V^{-\gamma-1}$$

$$V_o\left(\frac{dp}{dV}\right)_o = -\gamma p_o$$

แทนลงในสมการ (๔.๓๒) ให้ผลถูกต้องสำหรับความเร็วเสียงในอากาศคือ

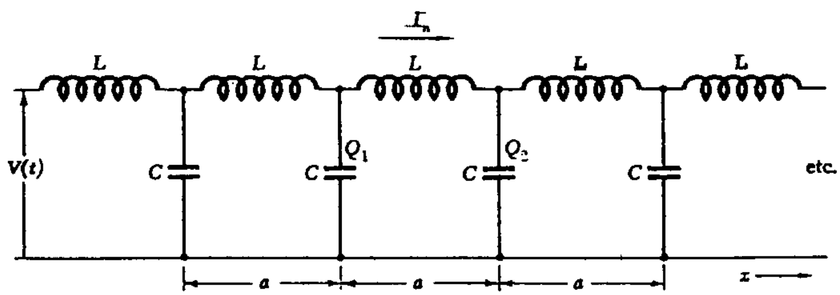
$$v_{\text{เสียง}} = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_o}}$$

$$= \sqrt{๑.๔๐}\, v_{\text{นิวตัน}} = ๓๓๒ \text{ เมตร/วินาที} \qquad (๔.๓๙)$$

ตัวอย่าง ๓ สายอากาศ (Transmission line-low pass filter)

ระบบได้แสดงไว้ในรูป ๔.๓ สายอากาศมีแรงเคลื่อนความต่างศักย์แบบฮาร์โมนิก กระทำตรงตำแหน่งปลายสายอากาศข้างซ้าย $z = 0$ ในตอน ๒.๔ เราเคยหาสมการของการเคลื่อนที่สำหรับระบบนี้มาแล้ว มีลักษณะแบบเดียวกับการออสซิลเลตตามยาวของระบบมวลและสปริง โดยเราแทนค่า K ด้วย C^{-1}/a และแทน M ด้วย L/a หาความสัมพันธ์การกระจายได้คือ

$$\omega^2 = \frac{4C^{-1}}{L}\sin^2\frac{ka}{2}$$



รูป ๔.๓ สายอากาศที่เป็นวงจรไฟฟ้า LC ควบคู่กันยาวเป็นอนันต์ ให้แรงเคลื่อนไฟฟ้าเข้าที่ตำแหน่ง $z = 0$ ไปทางขวามือ

เป็นช่วงความถี่ dispersive (the pass band) มีค่าตั้งแต่ศูนย์ถึง $\omega_o = 2\sqrt{C^{-1}/L}$ ในการหาการจำกัดของความถี่ต่ำ ($k \approx 0$) หรือการจำกัดแบบต่อเนื่อง ($a \approx 0$) เราสามารถแทน $\sin\frac{1}{2}ka$ เป็น $\frac{1}{2}ka$ ได้ ดังนั้นความเร็วเฟสกำหนดด้วย

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{(C/a)(L/a)} \qquad (๔.๔๐)$$

เมื่อ C/a คือ shunt capacitance ต่อหน่วยความยาว และ L/a คือ series inductance ต่อหน่วยความยาว ดังนั้นสำหรับสายอากาศต่อเนื่องยาว หรือแผ่นคู่ขนานเหนี่ยวนำในสุญญากาศมีความเร็วเฟสเป็นส่วนกลับของรากกำลังสองของ capacitance

ต่อหน่วยความยาวคูณด้วย inductance ต่อหน่วยความยาว และเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับความถี่ ดังนั้น คลื่นของความต่างศักย์และกระแสไฟฟ้าเป็น nondispersive wave

ตัวอย่าง ๔ สายอากาศแบบแผ่นคู่ขนาน

ระบบประกอบด้วยแผ่นคู่ขนานเหนี่ยวนำ ๒ แผ่น กว้าง ω ในทิศทาง y ผิวหน้าภายในทั้งสองด้านห่างกันด้วยช่องว่าง g ในทิศทาง x และให้กระแสเคลื่อนที่ได้ในทิศทาง z ตามรูป ๔.๔ เราต้องการคำนวน capacitance และ inductance ต่อหน่วยความยาวตามทิศ z โดยให้ความต่างศักย์ระหว่างแผ่นคู่ขนานที่ตำแหน่ง z = 0 เป็นค่าคงที่ ดังนั้นกระแสไฟฟ้ามีค่าสม่ำเสมอในแผ่นขนานเหนี่ยวนำ ทำให้แผ่นล่างมีศักย์ไฟฟ้าเป็นบวก และแผ่นบนมีศักย์ไฟฟ้าเป็นลบ สมมติให้ค่า ω มีค่าใหญ่กว่า g มาก ดังนั้นจึงสามารถละทิ้งผลจากขอบได้ ให้ Q เป็นการขจัดประจุบนพื้นที่ของแผ่นทั้งสองด้วยความกว้าง ω ตาม y และยาว a ตาม z ให้ C เป็น capacitance ของพื้นที่ของแผ่นคู่ตรงนี้ ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์

$$Q = CV \qquad (๔.๔๑)$$

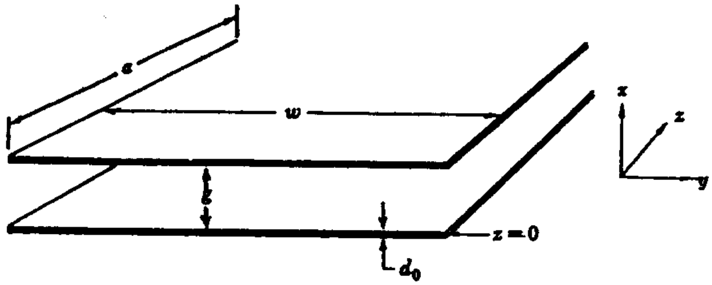
$$V = gE_x \qquad (๔.๔๒)$$

$$E_x = \frac{4\pi Q}{\omega a} \qquad (๔.๔๓)$$

ในที่นี้สมการ (๔.๔๑) และ (๔.๔๒) ใช้ได้ทั้งหน่วย esu และหน่วย MKS และสมการ (๔.๔๓) เป็น 4π คูณด้วยประจุต่อหน่วยพื้นที่ และให้สนามไฟฟ้าในหน่วย esu (statvolts per cm.) แก้สมการทั้งสามหาค่า C จะได้ capacitance ต่อหน่วยความยาวเป็น

$$\frac{C}{a} = \frac{\omega}{4\pi g} \qquad (๔.๔๔)$$

ต่อไปเราหา inductance ต่อหน่วยความยาว L/a แผ่นล่างต่อกับขั้วบวกของ power supply และแผ่นบนต่อกับขั้วลบ ดังนั้นกระแสไฟฟ้าบวก I ไหลในทิศ +z บนแผ่นล่างและ



รูป ๔.๔ สายอากาศแบบแผ่นคู่ขนาน ให้ความต่างศักย์ V(t) ระหว่างแผ่นคู่ขนานที่ z = 0 ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้า I(t) เคลื่อนที่บนแผ่นหนึ่งไปทาง −z และเคลื่อนที่กลับ −z

ไหลในทิศ +z บนแผ่นบน โดยใช้หลักมือขวาและรูป ๔.๔ เราจะได้สนามแม่เหล็กระหว่างแผ่นคู่ขนานมีทิศ +y และนอกบริเวณแผ่นคู่ขนานไม่มีสนามแม่เหล็ก ให้ L เป็น self-inductanceของแผ่นคู่ขนานนั้น ดังนั้นฟลักซ์แม่เหล็ก Φ ผ่านพื้นที่ ga มีค่าเท่ากับ

$$\Phi = B_y ga \qquad (๔.๔๕)$$

สนามแม่เหล็กมีความสัมพันธ์กับกระแสดังนี้

$$\omega B_y = \frac{4\pi I}{c} \qquad (๔.๔๖)$$

และ self-inductance L กำหนดด้วย

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

เมื่อกระแส I สม่ำเสมอ

$$LI = \frac{1}{c}\Phi \qquad (๔.๔๗)$$

อาศัยจากสมการ(๔.๔๕), (๔.๔๖), และ(๔.๔๗) หาค่า self-inductance ต่อหน่วย

ความยาวได้

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c_{\omega}^{2}} \qquad (๔.๔๘)$$

หาความเร็วเฟส v_ϕ สำหรับคลื่นเคลื่อนที่ได้โดยใช้สมการ (๔.๔๐)

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c \qquad (๔.๔๙)$$

ดังนั้นเราหาได้ว่า ความเร็วเฟสของคลื่นเคลื่อนที่แม่เหล็กไฟฟ้าในสูญญากาศมีค่าเท่ากับ c

ถ้าที่ว่างระหว่างแผ่นคู่ขนานสายอากาศ มีสาร dielectric ซึ่งมีค่าคงที่ dielectric ε เติมอยู่ ค่า capacitance จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเฟคเตอร์ ε ทำนองเดียวกันถ้าสาร dielectric ที่เติมอยู่มีค่า magnetic permeability μ ดังนั้น self-inductance มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเฟคเตอร์ μ ทำให้ความเร็วเฟสของคลื่นเคลื่อนที่ของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์เคลื่อนที่ไปตามสายอากาศแบบแผ่นคู่ขนานที่มีสาร dielectric อยู่ภายในที่ว่างมีค่าเป็น

$$v_\phi = \sqrt{\frac{a}{L}\frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\, v_\phi(\text{สูญญากาศ})$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (๔.๕๐)$$

สมการ (๔.๕๐) เป็นกรณีพิเศษของคลื่นเคลื่อนที่ของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์ในสายอากาศ และใช้ได้กับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าชนิดอื่นๆที่เคลื่อนที่ผ่านสสาร เช่น ใช้ได้กับคลื่นแสงเคลื่อนที่ผ่านแผ่นแก้วหรือสาร dielectric อื่นๆในสมการ (๔.๕๐) เฟคเตอร์ $\mu\varepsilon$ เรียกว่า ดัชนีของการหักเห (index of refraction) ใช้สัญญาลักษณ์แทนด้วย n

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (๔.๕๑)$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\frac{c}{\nu} = \frac{1}{n}\lambda(\text{สูญญากาศ}) \qquad (๔.๕๒)$$

$$k = n\frac{\omega}{c} = nk\ (\text{สูญญากาศ}) \qquad (๔.๔๓)$$

จะเห็นได้ว่าตัวกลางไม่เป็นผลต่อความถี่ของแรงเคลื่อนแต่อย่างไร และ c หมายถึงความเร็วของแสงในสูญญากาศ ดังนั้นเมื่อต้องการกำหนดความยาวคลื่นในสูญญากาศ เราสามารถใช้ c/ν แทน λ (สูญญากาศ) ทำนองเดียวกัน k(สูญญากาศ) $= \omega/c$ ความยาวคลื่นแสงขณะเคลื่อนที่ผ่านแก้วมีค่าเพียง ๒/๓ ของความยาวคลื่นในสูญญากาศ แต่จำนวนคลื่น $\sigma = 1/\lambda$ ในแก้วมีค่ามากกว่าด้วยเฟคเตอร์ ๑.๕ ในสูญญากาศ

๔.๓ อิมพีแดนซ์ (Impedance) และฟลักซ์พลังงาน (Energy Flux)

ในการศึกษา mode และคลื่นนิ่งเราพบว่า ในตัวกลางต่อเนื่องเราสามารถอธิบายลักษณะของมันได้ด้วยพารามิเตอร์สองตัว คือ ตัวหนึ่งกำหนดด้วยแรงคืนกลับ และอีกตัวหนึ่งคือความเฉื่อย(inertia) เช่นเส้นลวดต่อเนื่อง แรงตึงสมดุลย์ T_o เป็นแรงคืนกลับ และความหนาแน่นมวล ρ_o เป็นความเฉื่อย สำหรับสายอากาศ สองพารามิเตอร์สัมพันธ์นั้นคือ $(C/a)^{-1}$ คือส่วนกลับของ shunt capacitance ต่อหน่วยความยาว และ L/a คือ inductance ต่อหน่วยความยาว สำหรับคลื่นตามยาวบนสปริง พารามิเตอร์ทั้งสอง แรงคืนกลับคือ Ka และความเฉื่อยคือ $M/a = \rho_o$ สำหรับคลื่นเสียง แรงคืนกลับกำหนดด้วย γP_o ส่วนความเฉื่อยกำหนดด้วยความหนาแน่นมวลปริมาตร ρ_o ในกรณีทั้งหมดเหล่านี้ประพฤติแบบเดียวกันเหมือนตัวออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย

ส่วนคลื่นเคลื่อนที่ได้แสดงลักษณะแตกต่างจากคลื่นนิ่งมากมาย กล่าวคือ มันสามารถส่งผ่านพลังงานและโมเมนตัมได้ ความสัมพันธ์เฟสต่างจากคลื่นนิ่ง และตัวกลางที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านไปนั้นไม่มีลักษณะที่เป็น one big harmonic oscillator เหมือนอย่างคลื่นนิ่ง ดังนั้น แรงคืนกลับและความเฉื่อยจึงไม่เป็นพารามิเตอร์ที่ดีใช้อธิบายตัวกลางที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านได้ ปริมาณอันหนึ่งที่ใช้อธิบายลักษณะของตัวกลางได้คือ ความเร็วเฟส v_ϕ สำหรับคลื่นตามขวางบนเส้นลวด ความเร็วนี้คือ

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}} \qquad (๔.๔๔)$$

ซึ่งเป็นผลรวมของแรงคืนกลับและความเฉื่อย T_o และ ρ_o ผลรวมของ T_o และ ρ_o อีกปริมาณหนึ่งคือ

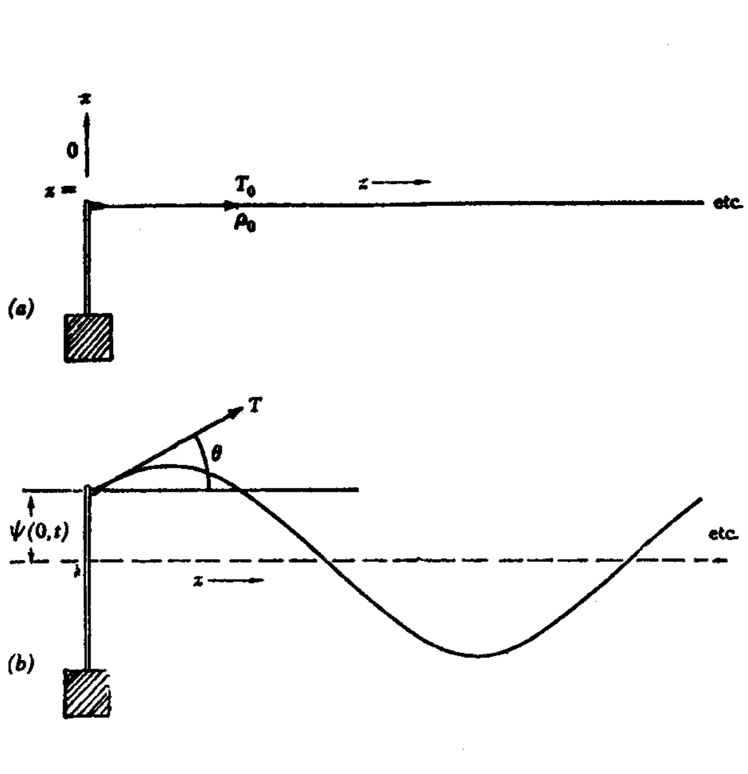
$$Z = \sqrt{\rho_o T_o} \qquad (๔.๔๔)$$

ปริมาณนี้เรียกว่า characteristic impedance หรือเรียกย่อว่า อิมพีแดนซ์ สำหรับคลื่นเคลื่อนที่บนเส้นลวดต่อเนื่อง เป็นตัวบอกอัตราการถ่ายเทพลังงานจากแรงเคลื่อนสู่เส้นลวด ดังนั้น เราสามารถใช้ความเร็วเฟสและอิมพีแดนซ์เป็นพารามิเตอร์สองตัว อธิบายคลื่นเคลื่อนที่ในตัวกลางแทนแรงคืนกลับและความเฉื่อยในคลื่นนิ่ง

<u>ตัวอย่าง ๕</u> คลื่นเคลื่อนที่ตามขวางบนเส้นลวดต่อเนื่อง

สมมติว่าเรามีเส้นลวดยาวขึงตึงจากซ้ายไปขวา ด้วยปลายซ้ายอยู่ที่ตำแหน่ง $z = 0$ ต่อกับตัวแปลงคลื่นให้แรงเคลื่อนเป็น การออสซิลเลตตามขวางแบบฮาร์โมนิก ระบบได้แสดงไว้ตามรูป ๔.๕ ให้เรากำหนดสัญญาลักษณ์ของการต่อกันด้วยแรงเคลื่อนและเส้นลวด คือ กำหนด transmitter output terminal ด้วยอักษร L (สำหรับข้างซ้าย) และกำหนดเส้นลวดที่ปลายต่อด้วยอักษร R (สำหรับข้างขวา) ขณะสมดุลย์ (รูป ๔.๕ a) แรงตึงบนเส้นลวดขณะสมดุลย์ T_o และไม่มีส่วนของแรงเคลื่อนตามขวางกระทำบน L ในขณะใดๆ (รูป ๔.๕b) แรงตึงเส้นลวดเป็น T เส้นลวดมีแรงกระทำต่อ transmitter output ที่ปลายด้วยแรง F_x(R on L) เป็น

$$
\begin{aligned}
F_x(\text{R on L}) &= T\sin\theta \\
&= (T\cos\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= T_o\tan\theta \\
&= T_o\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (๔.๔๖)
\end{aligned}
$$



รูป ๔.๔ การกระจายคลื่นเคลื่อนที่ตามขวาง (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

สมการ(๔.๕๖) ใช้ได้อย่างดีสำหรับสลิงกี้ ซึ่งมี $T = T_o/\cos\theta$ และยังใช้ได้กับสปริงใดๆ สำหรับมุม θ เล็กๆ

Characteristic impedance

สมมติให้ตัวแปลงคลื่นทำให้เกิดแรงเคลื่อนในระบบเปิดเป็นแบบสภาวะไม่เปลี่ยนแปลง เกิดคลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ +z การขจัดมีสมการเป็น

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz) \quad (๔.๕๗)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับระยะทางคือ

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = kA\sin(\omega t - kz) \quad (๔.๕๘)$$

และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาคือ $$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz) \qquad (๔.๕๙)$$

เปรียบเทียบสมการ(๔.๕๘) และ(๔.๕๙) และใช้ $v_\phi = \omega/k$ เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_\phi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (๔.๖๐)$$

แทนค่าสมการ(๔.๖๐) ลงในสมการ(๔.๕๖) เราได้

$$F_x(R \text{ on } L) = -\frac{T_o}{v_\phi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (๔.๖๑)$$

ในที่นี้ $\partial\psi/\partial t$ ก็คือความเร็วตามขวางของอนุภาคในเส้นลวดตรงจุดที่ต่อกับปลาย transmitter output ปริมาณ T_o/v_ϕ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นเราพบว่าตัวแปลงคลื่นให้คลื่นเคลื่อนที่แก่เส้นลวดในทิศทาง L ไป R เส้นลวดเกิดแรงปฏิกริยาต่อตัวแปลงคลื่นเป็นแรงต่อต้านการเคลื่อนที่ แรงนี้เป็นค่าลบแปรตามความเร็วที่กระทำต่อมัน ค่าคงที่แปรตามเรียกว่า characteristic impedance Z

$$F_x(R \text{ on } L) = -Z\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (๔.๖๒)$$

เมื่อ $$Z = \frac{T_o}{v_\phi} \qquad (๔.๖๓)$$

สำหรับคลื่นเคลื่อนที่ตามขวางบนเส้นลวดต่อเนื่องกำหนดเป็น

$$v_\phi = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}} \quad \text{หน่วยเป็น ซม/วินาที} \qquad (๔.๖๔)$$

ดังนั้น $$Z = \frac{T_o}{v_\phi} = \sqrt{T_o\rho_o} \quad \text{มีหน่วยเป็น ดายน์/(ซม/วินาที)} \qquad (๔.๖๕)$$

<u>ตัวแปลงคลื่นให้กำลังแก่ระบบ</u>

แรงหรือพลังงานที่ตัวแปลงคลื่นให้ออกมามากน้อยเท่าไรจะถูกเส้นลวดดูดกลืนหมด เราถือว่าไม่มีการสูญเสียพลังงานในรูปของความร้อน การแผ่กระจายกำลังออกมาของ

ตัวแปลงคลื่นกำหนดด้วยผลคูณของแรงตามขวางที่กระทำจากตัวแปลงคลื่นต่อเส้นลวดตรงจุด $z = 0$ และความเร็วตามขวางของเส้นลวดที่จุด $z = 0$ โดยใช้ความจริงที่ว่าแรง $F_x(L \text{ on } R)$ เป็นค่าลบของแรง $F_x(R \text{ on } L)$ (ตามกฎข้อที่สามของนิวตัน) และใช้สมการ(๔.๖๒) เราได้ว่ากำลังขณะใดๆ $P(t)$ เป็น

$$P(t) = F_x(L \text{ on } R)\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{(ทั่วไป)}$$

$$P(t) = \left(Z\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \quad \text{(คลื่นเคลื่อนที่)} \qquad (๔.๖๖)$$

ปริมาณแรกในสมการ(๔.๖๖) ใช้ได้ทั่วไป ส่วนปริมาณที่สองใช้ได้สำหรับคลื่นเคลื่อนที่เท่านั้น ในสมการ(๔.๖๖) เราได้เขียนกำลังในพจน์ของความเร็วขณะใดๆ $\partial\psi/\partial t$ ของเส้นลวด (ที่ $z = 0$) และเรายังสามารถเขียนกำลังของตัวแปลงคลื่นเป็นพจน์อื่นได้อีกโดยใช้สมการ(๔.๕๖) และ(๔.๖๐) ดังนี้

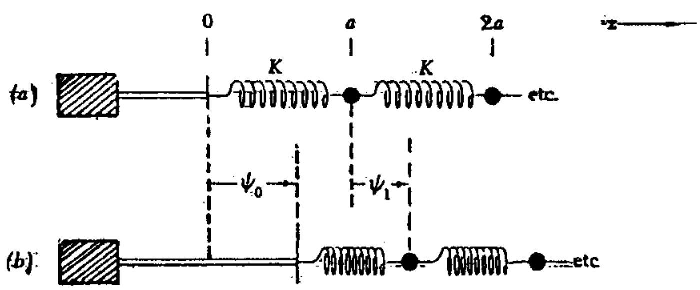
$$\begin{aligned}
P(t) &= F_x(L \text{ on } R)\frac{\partial\psi}{\partial t} && \text{(ทั่วไป)}\\
&= \left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi}{\partial t} && \text{(ทั่วไป)}\\
&= \left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\left[-v_\phi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] && \text{(คลื่นเคลื่อนที่)} \qquad (๔.๖๗)\\
&= \frac{v_\phi}{T_0}\left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]^2\\
&= \frac{1}{Z}\left[-T_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]^2
\end{aligned}$$

สมการ(๔.๖๖) และ(๔.๖๗) ต่างก็เป็นสมการใช้บอกพลังงานที่ถ่ายเทจากตัวแปลงคลื่นให้แก่เส้นลวด แต่ที่บอกไว้สองแบบด้วยกันเพื่อต้องการหาปริมาณคลื่นต่างๆได้สะดวก เพราะว่าในบางระบบเราอาจต้องเลือกใช้อย่างใดอย่างหนึ่งในขณะที่อีกระบบหนึ่งต้องใช้อีกสมการหนึ่ง ตัวอย่างเช่น ในกรณีของคลื่นเสียง เราต้องใช้ความดันปรากฏ (guage pressure) แทนแรงคืนกลับ $-T_0\,\partial\psi/\partial z$ สำหรับเส้นลวด และความเร็วคลื่นเสียงในอากาศตามยาวใช้แทนความเร็วคลื่นในเส้นลวดตามขวาง $\partial\psi/\partial t$ ทำนองเดียวกัน ในกรณีของการแผ่กระจาย

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เราสามารถใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง B_y แทนความเร็วคลื่นตามขวางในเส้นลวด $\partial\psi/\partial t$ ได้ ขณะที่สนามไฟฟ้าตามขวาง E_x ใช้แทนแรงคืนกลับ $-T_o\ \partial\psi/\partial z$ สำหรับเส้นลวด

<u>ตัวอย่าง ๖</u> การแผ่กระจายของคลื่นตามยาวบนสปริง

เราจะพิจารณาการกระจายของคลื่นตามยาวจากการอัดและการขยายของสปริง จากผลลัพท์ที่ได้นี้สามารถนำไปปรับปรุงใช้ได้กับการกระจายของคลื่นเสียงโดยใช้วิธีการของนิวตัน ระบบได้แสดงในรูป ๔.๖ คือ



รูป ๔.๖ การกระจายคลื่นเคลื่อนที่ตามยาว (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

ในสมการของการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่ตามขวางของลูกปัดและสปริง เราสามารถใช้ปริมาณ Ka แทนค่าแรงดึงสมดุลย์ T_o ในสมการของการเคลื่อนที่สำหรับการออสซิลเลตตามขวางของลูกปัดและสปริงได้ โดยวิธีนี้ความเร็วเฟสหาได้จากการเปลี่ยนค่า T_o เป็น Ka ในสมการ(๔.๖๔) ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาค่าอิมพีแดนซ์และฟลักซ์พลังงานของกรณีคลื่นตามยาวบนสปริงต่อเนื่องได้ ด้วยการแทนค่า T_o เป็น Ka ในผลลัพท์ที่หาได้จากการออสซิลเลตตามขวาง ดังนั้นจากสมการ(๔.๖๔), (๔.๖๕), (๔.๖๖) และ (๔.๖๗) กลายเป็น

$$v_\phi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_o}}\ , \qquad Z = \sqrt{Ka\rho_o} \qquad (๔.๖๘)$$

และการไหลของกำลังในคลื่นเคลื่อนที่เป็น

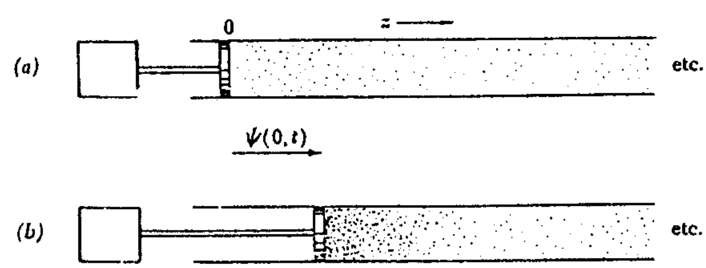
$$P(z,t) = Z\left[\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{Z}\left[-Ka\,\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\right]^2 \quad (๔.๖๙)$$

ปริมาณ $\psi(z,t)$ คือการขจัดคิดจากตำแหน่งสมดุลย์อยู่ในแนว z $P(z,t)$ มีค่าเป็นบวกถ้าการขจัดในทิศ $+z$ สัมพันธ์กับความเร็ว $\partial\psi(z,t)/\partial t$ เป็นบวกด้วย และปริมาณ $-Ka\,\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}$ คือแรงกระทำจากตัวแปลงคลื่นต่อสปริงในทิศ $+z$ ถ้าให้ F_o เป็นแรงกระทำในขณะสมดุลย์ ดังนั้นแรงทั้งหมดที่ตัวแปลงคลื่นกระทำต่อสปริงสมควรเป็น

$$F_z(L \text{ on } R) = F_o - Ka\,\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} \quad (๔.๗๐)$$

<u>ตัวอย่าง ๗</u> คลื่นเสียง

เราจะใช้ระบบแบบอย่างของนิวตันสำหรับคลื่นเสียงที่ได้กล่าวไว้แล้วตอน ๔.๒ ตามรูป ๔.๗ คือ



รูป ๔.๗ การกระจายคลื่นเสียงตามยาว (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

ในตอน ๔.๒ เราพบว่าความเร็วเฟสของคลื่นเสียงที่หาจากแบบอย่างของนิวตันคล้ายคลึงกับคลื่นตามยาวบนสปริงต่อเนื่อง เพียงแต่เปลี่ยนค่าความหนาแน่นมวลตามเส้นสำหรับสปริงเป็นความหนาแน่นมวลตามปริมาตรสำหรับอากาศ และเปลี่ยนค่า Ka สำหรับ

สปริงเป็นความดันสมดุลย์ p_o สำหรับอากาศคูณด้วย γ ดังนั้น เราสามารถคาดคะเนค่าอิมพีแดนซ์และพลังงานสำหรับคลื่นเสียงได้ง่าย โดยแทนค่า Ka ด้วย γp_o ในความสัมพันธ์สำหรับคลื่นตามยาวบนสปริง เราหาผลลัพท์สำหรับคลื่นเสียงได้คือ

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_o}} , \qquad Z = \sqrt{\gamma p_o \rho_o} \qquad (๔.๗๑)$$

และความเข้มของพลังงานที่ไหลในคลื่นเสียงคิดในหน่วย $erg/cm^2.sec$ เป็น

$$I(z,t) = Z\left[\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{Z}\left[-\gamma p_o \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\right]^2 \qquad (๔.๗๒)$$

ปริมาณ $\psi(z,t)$ เป็นการขจัดของกลุ่มอากาศเล็กๆคิดจากตำแหน่งสมดุลย์ในทิศ z ปริมาณ $\partial\psi(z,t)/\partial t$ เป็นความเร็ว และปริมาณ $-\gamma p_o \partial\psi(z,t)/\partial z$ เท่ากับแรงต่อหน่วยพื้นที่กระทำต่ออากาศในทิศ +z ไปทางขวามือ ภายหลังจากสมดุลย์ของแรงต่อหน่วยพื้นที่แล้วจะได้

$$\frac{F_z(L \text{ on } R)}{A} = p_o - \gamma p_o \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}$$

เป็นลักษณะเช่นเดียวกับสมการ(๔.๗๐) สำหรับคลื่นตามยาวบนสปริง โดยเปลี่ยนเป็น p_o สำหรับ F_o และ γp_o สำหรับ Ka เราเรียก $-\gamma p_o\ \partial\psi(z,t)/\partial z$ ใหม่เป็นความดันปรากฏ

$$p_g = -\gamma p_o \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} \qquad (๔.๗๓)$$

สำหรับอากาศที่ STP เราได้ p_o = ๑ บรรยากาศ = ๑.๐๑x๑๐^{๖} ดายน์/ซม^{๒} และ ρ_o = ๑.๒๙x๑๐$^{-๓}$ กรัม/ซม^{๓} ดังนั้นสมการ(๔.๗๑)ให้

$$v_\phi = ๓.๓๒\times๑๐^{๔} \quad \text{ซม/วินาที} \qquad (๔.๗๔)$$

$$Z = ๔๒.๘ \quad \frac{(\text{ดายน์/ซม}^{๒})}{(\text{ซม/วินาที})} \qquad (๔.๗๕)$$

<u>ความเข้มเสียงมาตรฐาน</u>

ความเข้มของคลื่นเสียงกำหนดเป็นพลังงานเคลื่อนที่ผ่านไปต่อหน่วยพื้นที่ต่อหน่วย

เวลา ความเข้มเสียงมาตรฐานทั่วไปกำหนดเป็น

ความเข้มมาตรฐาน = I_o = ๑ μw/cm^2 = ๑๐ erg/cm^2.sec (๔.๓๖)

เนื่องจาก ๑ μw = ๑๐$^{-๖}$ watt และ ๑ watt = ๑๐^{๗} erg/sec คนทั่วไปคนหนึ่งขณะสนทนาจะเปล่งพลังงานเสียงออกมาอยู่ในระดับเฉลี่ยประมาณ ๑๐๐ erg/sec ถ้าคิดพื้นที่ของบริเวณปากขณะสนทนาประมาณ ๑๐ ตาราง ซม. ดังนั้นความเข้มเสียงทั้งหมดที่เปล่งออกมาประมาณ (๑๐๐ erg/sec)/๑๐ ตาราง ซม. = I_o ถ้าคนเราตะโกนเปล่งเสียงให้ดังที่สุดเท่าที่ทำได้ เขาสามารถทำให้มีความเข้มเสียงได้ประมาณ ๑๐๐ I_o ซึ่งช่วงความเข้มเสียงระหว่าง ๑๐๐ ถึง ๑๐๐๐ เท่าของ I_o สามารถทำให้คนได้ยินเสียงรู้สึกเจ็บปวดได้

เสียงแผ่วเบาที่สุดที่คนได้ยินยังขึ้นอยู่กับความถี่ของคลื่นเสียง ที่ความถี่ ๔๔๐ Hz เป็นเสียงระดับต่ำที่คนทั่วไปได้ยินรู้สึกสบายที่สุดมีความเข้มประมาณ ๑๐$^{-๑๐}$ I_o ดังนั้นหูคนจึงสามารถยินเสียงได้สบายเป็นช่วงของเฟคเตอร์ ๑๐^{๑๒} ในความเข้ม(จาก ๑๐๐ I_o ถึง ๑๐$^{-๑๐}$ I_o)

เมื่อความเข้มเสียงเพิ่มขึ้นด้วยเฟคเตอร์ของ ๑๐ พูดได้ว่ามันเพิ่มขึ้น ๑ bel ดังนั้น ช่วงความเข้มของเสียงที่หูคนฟังได้ประมาณ ๑๒ bels เมื่อความเข้มเสียงเพิ่มขึ้นด้วยเฟคเตอร์ของ ๑๐$^{๐.๑}$ มันเพิ่มขึ้นด้วย ๐.๑ bel หรือ ๑ decibel ดังนั้น

๑ ดบ. = ๑ เดซิเบล = เฟคเตอร์ของ ๑๐$^{๐.๑}$ = เฟคเตอร์ของ ๑.๒๖ ในความเข้ม

๑ เบล = ๑๐ ดบ. = เฟคเตอร์ของ ๑๐ ในความเข้ม (๔.๓๗)

Application :

- RMS gauge pressure for painful sound intensity

เราต้องการทราบว่า สำหรับความเข้มเสียงที่ทำให้แก้วหูของคนเจ็บปวดมีรากกำลังสองเฉลี่ยของความดันปรากฏเป็นเท่าไร? และต้องการทราบคำตอบในหน่วยของบรรยากาศ เพราะว่า เราสนใจว่าอากาศทำให้เกิดความเจ็บปวดได้เช่นเดียวกับขณะที่คุณดำน้ำลงไปลึก ๑๕ ฟุต หรือลึกกว่านั้นจากผิวน้ำหรือไม่ เรารู้ว่าที่ความลึก ๓๓ ฟุตของน้ำมีค่าความดันเท่ากับ ๑ บรรยากาศของความดันอากาศ ดังนั้น ที่ความลึก ๑๕ ฟุต ความดันปรากฏประมาณ ๑/๒ บรรยากาศของความดันอากาศ ความดันปรากฏนี้ทำให้เกิดความเจ็บปวดได้หรือไม่

กำหนดให้ความเข้มเสียงที่ทำให้เจ็บปวดมากที่สุดเป็น $I = ๑๐๐๐\ I_o$ อาศัยจากสมการ(๔.๗๒) เราได้

$$\langle p_g^2 \rangle^{1/2} = (ZI)^{1/2}$$

$$= (๑๐๐๐\ ZI_o)^{1/2}$$

$$= \left[(๑๐๐๐)(๔๒.๘)(๑๐)\right]^{1/2} = ๖๕๐ \text{ dyne/cm}^2$$

ค่านี้น้อยเมื่อเทียบกับ ๑ บรรยากาศ = $๑.๐๑\text{x}๑๐^{๖}$ ดายน์/ซม^{๒} ดังนั้นเราได้คำตอบที่น่าสนใจว่าความเจ็บปวดไม่ใช่เกิดจากการเฉลี่ยความดันที่เป็นความลึก เพราะว่าความดันเท่ากับ ๖๕๐ ดายน์/ซม^{๒} หรือเท่ากับ ๖.๕×๑๐^{-๔} บรรยากาศ ซึ่งเหมือนกับการว่ายน้ำใต้ผิวน้ำที่ลึกเพียง ๑/๒ ซม. เท่านั้น

-Amplitude for painfully loud sound

เราต้องการหาอัมปลิจูด A ของโมเลกุลอากาศของเสียงดังที่ทำให้เจ็บปวดมีค่าเท่าไร? โดยให้ $\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz)$ หากำลังสองของ $\partial\psi/\partial t$ และเฉลี่ย

ในหนึ่งรอบที่ค่า z คงที่ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\omega^2 A^2$ โดยใช้สมการ (๔.๗๒) และสมมติให้ความถี่มีค่าเป็น ๔๔๐ รอบ/วินาที เราได้

$$A = \frac{(2I/Z)^{1/2}}{\omega}$$

$$= \frac{(๒\cdot๑๐๐๐\cdot๑๐/๔๒.๘)^{1/2}}{(๖.๒๘)(๔๔๐)}$$

$$= ๒.๔ \times ๑๐^{-๒} \text{ cm.} = ๑/๔ \text{ mm.}$$

-Amplitude for barely audible sound

ต้องการหาอัมปลิจูดของอากาศสำหรับเสียงแผ่วเบาที่สุดที่คนสามารถยินได้เป็นเท่าไร ? สมมติให้ความเข้มของเสียงเป็น $๑๐^{-๑๐}\ I_o$ อัมปลิจูดของเสียงจะแปรตามรากกำลังสองของ I ดังนั้นสำหรับความถี่ ๔๔๐ รอบ/วินาที

$$A = \frac{(๒.๑๐^{-๑๐} \times ๑๐/๔๒.๘)^{๑/๒}}{(๖.๒๘)(๔๔๐)}$$

$$= ๑๐^{-๖.๕}(๒.๕ \times ๑๐^{-๒})$$

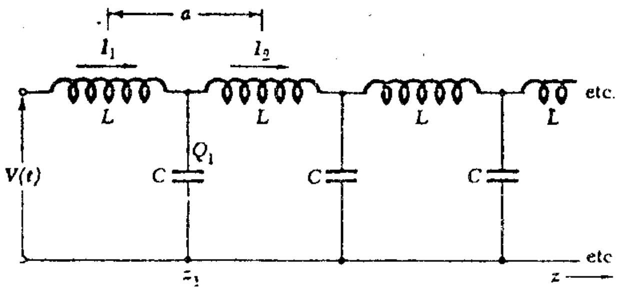
$$= \frac{๒.๕ \times ๑๐^{-๘}}{\sqrt{๑๐}} \simeq ๑๐^{-๘} \text{ ซม.}$$

<u>ตัวอย่าง ๘</u> คลื่นเคลื่อนที่บนสายอากาศ

ให้แรงเคลื่อนที่เป็นความต่างศักย์ V(t) ที่ z = 0 แก่สายอากาศ เราจะพิจารณาเฉพาะกรณีความยาวคลื่นมีค่ามาก ในที่นี้ V(z,t) และ I(z,t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ z ถ้าสายอากาศยาวมากเราจะได้ระบบเปิดที่มีคลื่นเคลื่อนที่ของความต่างศักย์ V(z,t) และกระแสไฟฟ้า I(z,t) แรงเคลื่อนศักดา V(t) ที่ให้แก่ระบบตรงปลายคือ

$$V(t) = V_o \cos\omega t \qquad (๔.๗๘)$$

ดังนั้นคลื่นความต่างศักย์ V(z,t) ต้องเท่ากับ $V_o \cos\omega t$ ที่ z = 0 และที่ z ใดๆมันเป็น



รูป ๔.๘ การกระจายคลื่นเคลื่อนที่บนสายอากาศ

$$V(z,t) = V_o \cos(\omega t - kz) \qquad (๔.๘๙)$$

สำหรับกระแสไฟฟ้า $I(z,t)$ มีความสัมพันธ์กับ $V(z,t)$ โดยแปรตามซึ่งกันและกัน เราอาจเขียนเป็น

$$I(z,t) = I_o \cos(\omega t - kz) + J_o \sin(\omega t - kz) \qquad (๔.๙๐)$$

เราต้องการพิสูจน์ว่าค่าคงที่ J_o มีค่าเป็นศูนย์

พิจารณาตัวเก็บประจุตัวแรกในรูป ๔.๘ มีการเปลี่ยนแปลงประจุ $Q_1(t)$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $V_1(t)$ คือ

$$Q_1(t) = CV_1(t) = CV(z_1,t) \qquad (๔.๙๑)$$

ดังนั้น

$$C\frac{\partial V(z_1,t)}{\partial t} = \frac{dQ_1}{dt}$$

$$= I_1 - I_2 = -(I_2 - I_1)$$

$$= -a\frac{\partial I(z_1,t)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(z_1,t) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} \frac{\partial I}{\partial z}(z_1,t) \qquad (๔.๔๒)$$

แทนค่าสมการ(๔.๓๙) และ(๔.๔๐) ลงในสมการ(๔.๔๒) เราเห็นได้ว่าค่าคงที่ J_o ในสมการ(๔.๔๐) ต้องเป็นศูนย์ พจน์ที่เหลือคือ

$$-\omega V_o \sin(\omega t - kz) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} I_o k \sin(\omega t - kz)$$

ได้

$$V_o = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} I_o \qquad (๔.๔๓)$$

หรือ

$$V(z,t) = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} I(z,t) \equiv ZI(z,t) \qquad (๔.๔๔)$$

จากคำนิยามของ z ดังนั้นความเร็วเฟสและค่าอิม-พีแคนซ์กำหนดด้วย

$$v_\phi = \sqrt{\frac{(C/a)^{-1}}{(L/a)}} \qquad (๔.๔๕)$$

$$Z = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\phi} = \sqrt{\left(\frac{L}{a}\right)\left(\frac{C}{a}\right)^{-1}} \qquad (๔.๔๖)$$

กำลังขณะใดๆจากตัวแปลงคลื่น ที่ $z = 0$ เป็น

$$P(t) = V(t)\,I(t) = V(0,t)I(0,t) = ZI^2(0,t) \qquad (๔.๔๗)$$

เช่นเดียวกัน

$$P(t) = V(0,t)\,I(0,t) = \frac{V^2}{Z}(0,t) \qquad (๔.๔๘)$$

ให้สังเกตว่า เราสามารถหาค่า z ได้โดยการแทนเป็น C^{-1} สำหรับ K และ L สำหรับ M ในผลลัพท์ที่ได้สำหรับการออสซิลเลตตามยาวของมวลและสปริง

<u>ตัวอย่าง ๘</u> สายอากาศแบบแผ่นคู่ขนาน

อาศัยจากตัวอย่าง ๘ ในสมการ(๔.๔๔) และ(๔.๔๘) เราได้ capacitance ต่อหน่วยความยาว และ inductance ต่อหน่วยความยาวดังนี้

$$\frac{C}{a} = \frac{\omega}{4\pi g}, \qquad \frac{L}{a} = \frac{4g\pi}{\omega c^2} \tag{๔.๔๙}$$

เมื่อ ω คือความกว้างและ g เป็นช่องว่างระหว่างแผ่น ดังนั้น อิมพีแดนซ์เป็น

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{4\pi}{c}\frac{g}{\omega} \tag{๔.๕๐}$$

การแผ่กระจายกำลัง $P(t)$ มีค่าเป็น

$$P(t) = \frac{1}{Z}V^2(0,t) = \frac{c}{4\pi}\frac{\omega}{g} V^2(0,t) \tag{๔.๕๑}$$

เราต้องการแสดงสมการของกำลังที่กระจายจากแรงเคลื่อนในพจน์ของสนามไฟฟ้า E_x ในบริเวณระหว่างแผ่นคู่ขนานมากกว่าพจน์ความต่างศักย์ $V(0,t)$ ซึ่งสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าผ่านช่องว่าง g คือ

$$V(0,t) = gE_x(0,t) \tag{๔.๕๒}$$

ดังนั้นสมการ(๔.๕๑) กลายเป็น

$$P(t) = \frac{c}{4\pi}(\omega g)\,E_x^2(0,t) \tag{๔.๕๓}$$

ให้สังเกตว่า ωg คือพื้นที่ภาคตัดขวางตรงปลายของสายอากาศ ถ้าเราหารกำลังการกระจายด้วย ωg จะได้ความเข้มพลังงานการกระจาย(ในหน่วย erg/cm^2.sec) และใช้สัญญลักษณ์เป็น S ซึ่งเป็นสัญญลักษณ์ทั่วไปใช้สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้น สำหรับคลื่นระนาบเคลื่อนที่ของการกระจายแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ผ่านในทิศ $+z$ ในสายอากาศแบบแผ่นคู่ขนานพลังงานต่อหน่วยตารางเซนติเมตรต่อหน่วยเวลาผ่านจุด z กำหนดด้วยความเข้ม

$$S(z,t) = \frac{c}{4\pi}E_x^2(z,t) \tag{๔.๕๔}$$

ต่อไปเราต้องการทราบอัตราส่วนระหว่างสนามแม่เหล็ก $B_y(z,t)$ ต่อสนามไฟฟ้า $E_x(z,t)$ เป็นอย่างไร ซึ่งเราสามารถหาได้เพราะว่า เราทราบค่าอัตราส่วนของ

$V(z,t)$ ต่อ $E(z,t)$ เป็นค่าคงที่ Z และทราบความสัมพันธ์ของ V ต่อ E_x และ I ต่อ B_y ดังนั้นเราได้

$$V = ZI \qquad (๔.๙๔)$$

หรือ

$$gE_x = \frac{4\pi}{c}\frac{g}{\omega} I \qquad (๔\ ๙๖)$$

แต่จากสมการ(๔.๔๖) เรามี

$$\omega B_y = \frac{4\pi}{c} I \qquad (๔.๙๗)$$

โดยการเปรียบเทียบสมการ(๔.๙๖) และ(๔.๙๗) พบว่า สำหรับสายอากาศแบบแผ่นคู่ขนาน คลื่นระนาบเคลื่อนที่ไปทางทิศ $+z$ มีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่ง z และเวลา t ใดๆมีขนาดเท่ากัน ตั้งฉากซึ่งกันและตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่ไปตาม cross product $E \times B$ เขียนเป็น

$$E_x(z,t) = B_y(z,t) \qquad (๔.๙๘)$$

<u>คลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลางโปร่งใส</u>

สมมติว่าช่องว่างระหว่างแผ่นคู่ขนานของสายอากาศ มีสารที่มีค่า dielectric constant ε และ magnetic permeability μ ขั้นอยู่ ให้แรงเคลื่อนเป็นความต่างศักย์ $V(t)$ ดังนั้นกำลังการกระจายเป็น

$$P(t) = \frac{V^2}{Z}$$

เมื่อ

$$V = gE_x$$

และ

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, Z \text{ (สุญญากาศ)}$$

หรือ

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{4\pi}{c}\frac{g}{\omega} \qquad (๔.๙๙)$$

จากสมการทั้งสองให้ความเข้มพลังงานเป็น

$$S = \frac{P}{g\omega}$$

$$S(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{c}{4\pi}E_x^2(z,t) \qquad (๔.๑๐๐)$$

ต่อไปเราหาอัตราส่วนของ B_y ต่อ E_x อีกครั้งหนึ่ง กำหนดกระแสไฟฟ้า I สนามแม่เหล็กขณะนี้มีค่ามากขึ้นด้วยเฟคเตอร์ μ จากกรณีไม่มีสารอยู่ที่ช่องว่าง ดังนั้น

$$\omega B_y = \mu\frac{4\pi}{c} I$$

แต่

$$V = ZI$$

กล่าวคือ

$$gE_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{4\pi}{c}\frac{g}{\omega} I$$

เปรียบเทียบสมการเหล่านี้จะได้

$$\frac{B_y}{E_x} \qquad \sqrt{\varepsilon\mu}$$

ดังนั้น

$$B_y = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E_x = n\,E_x \qquad (๔.๑๐๑)$$

n คือค่าดัชนีหักเหของสาร dielectric

คลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าในสูญญากาศปราศจากขอบเขตจำกัด

จากผลลัพท์ที่ได้สำหรับสูญญากาศตามสมการ(๔.๙๙) และ(๔.๙๘)

$$(๔.๑๐๒) \qquad S(z,t) = \frac{c}{4\pi}E_x^2(z,t)\,, \qquad B_y(z,t) = E_x(z,t)$$

ซึ่งเราหาได้สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นกระแสไฟฟ้าและคลื่นความต่างศักย์ในสายอากาศเส้นตรงและแผ่นคู่ขนาน แต่มันยังเป็นจริงสำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสูญญากาศของระบบทั่วไป ทั้งสนามไฟฟ้า $E_x(z,t)$ และ สนามแม่เหล็ก $B_y(z,t)$ ยังคงที่มีค่าสม่ำเสมอ

พิจารณาที่ตำแหน่ง z และเวลาแน่นอนขณะหนึ่ง E_x มีค่าเท่ากัน สำหรับทุกค่าของ x และ y และ B_y ก็เป็นไปทำนองเดียวกันไม่ขึ้นกับ x และ y คลื่นแบบนี้เรียกว่า คลื่นระนาบ (**plane wave**) ระนาบใดๆที่ตั้งฉากกับแกน z เป็นระนาบของเฟสคงที่ กล่าวคือ เป็นระนาบของค่าคงที่ของ $\omega t - kz$ ระนาบเหล่านี้เรียกว่า หน้าคลื่น (**wave fronts**)

คลื่นระนาบเคลื่อนที่แม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ไปในทิศ +z ในสุญญากาศต้องมีคุณสมบัติดังนี้ คือ

๑. $E(z,t)$ และ $B(z,t)$ ต่างตั้งฉากกับ $\hat{z}$ และตั้งฉากซึ่งกันด้วย

๒. ขนาดของ $E(z,t)$ เท่ากับขนาดของ $B(z,t)$

๓. ทิศทางของ $E(z,t)$ และ $B(z,t)$ เป็นเช่นเดียวกับ $E(z,t) \times B(z,t)$ ไปตามทิศ $+\hat{z}$

๔. จากคุณสมบัติสามข้อแรกข้างต้น กล่าวได้ว่า $B(z,t) = \hat{z} \times E(z,t)$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $B_y(z,t) = E_x(z,t)$ และ $B_x(z,t) = -E_y(z,t)$

๕. ความเร็วเฟสคือ c ซึ่งไม่ขึ้นกับความถี่ กล่าวคือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศเป็น nondispersive

๖. ความเข้มขณะใดๆ (ในหน่วยของ $\mathrm{erg/cm^2.sec}$) กำหนดด้วย

$$S(z,t) = \frac{c}{4\pi} E^2(z,t) = \frac{c}{4\pi}\left[E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t)\right] \quad (๔.๑๓)$$

ในบางกรณีใช้สัญลักษณ์สำหรับปริมาณนี้เป็นความเข้ม, ฟลักซ์, และพลังงานฟลักซ์

แบบฝึกหัดบทที่ ๔

4-1 The equation of a certain traveling transverse wave is

$$Y = 2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{30}\right),$$

where x Y are in centimeters and t is in seconds. What are (1) the amplitude, (2) the frequency, (3) the wavelength, and (4) the speed of porpagation of the wave?

4.2 (a) Show that the equation of a traveling transverse wave in a string can be written $y = Y \cos(2\pi/\lambda)(x - ct)$.

(b) Let Y = 1 in., λ = 2 in., c = 0.25 in.sec. Show in a full-size diagram the shape of the string at times t = 0, 1 sec, and 2sec. Determine from your diagram the direction in which the wave is traveling.

4.3 A transverse sine wave of amplitude 10 cm and wavelength 200 cm travels from left to right along a long horizontal stretched string with a speed of 100 cm/sec. Take the origin at the left end of the undisturbed string. At time t = 0, the left end of the string is at the origin and is moving downward. (a) What is the frequency of the wave ? (b) What is the angular frequency? (c) What is the propagation constant? (d) What is the equation of the wave? (e) What is the equation of motion of the left end of the string? (f) What is the equation of motion of a particle 150 cm to the right of the origin? (g) What is the (absolute) maximum transverse velocity of any particle of the string? (h) Find the transverse displacement and the transverse velocity of a particle 150 cm to the right of the origin, at time t = 3.25 sec. (i) Make a sketch of the shape of the string, for a length of 400 cm, at time t = 3.25 sec.

(Ans.: (a) f = 0.5 cps. (b) $\omega = \pi$ rad/sec; (c) $k = \pi/100\ \text{cm}^{-1}$;

(d) $y = 10 \sin\left[(\pi x/100) - \pi t\right]$; (e) $y = -10 \sin\pi t$; (f) $y = 10 \sin\left[(3\pi/2) - \pi t\right]$; (g) 10π cm/sec; (h) $y = 5\sqrt{2}$ cm, $v = -5\pi\sqrt{2}$ cm/sec.)

4.4 (1) Light waves travel in vacuum with a speed $c = 3 \times 10^{8}$ m/sec. The visible spectrum extends from a wavelength of about 4×10^{-7} m (violet) to about 7×10^{-7} m (red). What are the frequencies of light waves of these wavelengths? (2) Radio waves travel at the speed of lirht. The "broadcast band" extends from a frequency of 550 kc/sec to a frequency of 1600 kc/sec. What are the wavelengths corresponding to these frequencies?

4.5 One end of a rubber tube is fastened to a fixed support. The other end passes over a pulley at a distance of 8 m from the fixed end, and carries a load of 2 kgm. The mass of the tube, between the fixed end and the pulley, is 600 gm. What is the speed of a small- amplitude transverse wave in the tube?

4.6 A long rubber tube for which $\rho = 0.10$ kgm/m (weight about ¼ lbf/m) is stretched with a tension T of 90 newtons. One end is oscillated transversely with SHM of amplitude Y = 30 cm and with a frequency f of 1 oscillation per second. If all of the energy transmitted is absorbed at the far end, what is the average power required?

4-7 A stretched string is observed to vibrate with a frequency of 30 cycles/sec in its fundamental mode when the supports at its ends are 60 cm apart. The amplitude at the antinode is 3 cm. The string has a mass of 30 gm.

(a) What is the speed of propagation of a transvere wave in the string?

(b) Compute the tension in the string. (c) Write the equation representing the wave motion, using the constants given above and computed in (a).

(d) Suppose the center of the string is pulled to one side, distorting the string into one-half of a triangular wave, and is then released. What frequencies would you expect to be present in the resulting vibration of the string?

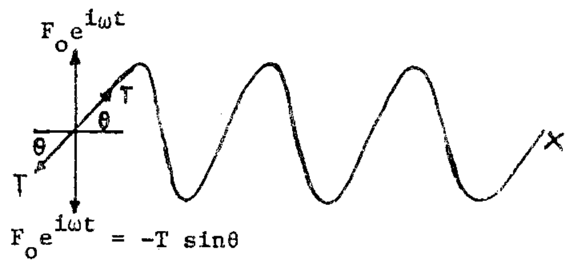
4.8 The velocity of sound in air of density 1.29 kgm^{-3} may be taken as 330 metres sec^{-1}. Show that the acoustic pressure for the painfull sound of 10 watts $metre^{-2}$ = 6.5×10^{-4} of an atmosphere.

4.9 Show that the displacement amplitude of an air molecule at a painful sound level of 10 watts $meter^{-2}$ at 500 Hertz = 3.10^{-4} meter.

4.10 If the wave on the string in fig. below propagates with a displacement

$$y = a \sin(\omega t - kx)$$

Show that the average rate of working by the force (average value of transverse force times transverse velocity) equals the rate of energy transfer along the string.



4.11 Show that the characteristic impedance for a pair of Lecher wires of radius r and separation d in a medium of permeability μ and permittivity ε is given by

$$Z_o = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{d}{r}$$

4.12 The end of a string at $z = 0$ is driven harmonically at frequency 10 cps and with amplitude 1 cm. The far end of the string is infinitely far away (or else the string is "terminated" so that there are no reflections). The phase velocity is 5 meter/sec. Describe (precisely) the motion of a point on the string located 325 cm downstream from the driving terminal. What is the motion of a second point located 350 cm downstream?

4.13 Assume that the piano string Of length 1 meter and with frequency A440 (440 cps) for its lowest mode, and has diameter 1 mm and is made of steel having volume density 7.9 gm/cm^3. Find the tension in dynes and in pounds. (980 dyne = 1 gm-wt; 1 kgm weighs 2.2 lb.) Ans. about 1100 lb.

4.14 Coaxial transmission line. Show that the capacitance per unit length, C/a, for a coaxial transmission line with inner conductor of redius r_1 and outer conductor of radius r_2 and with vacuum between the inner and outer cylindrical conductors is given (in esu, i.e., cm of capacitance per cm of length along the axis) by

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{2\ln(r_2/r_1)} .$$

Show that the self-inductance per unit length, L/a, is given by

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

To obtain C/a, use $Q = CV$ and Gauss's law. To obtain L/a, use $L = (1/c)\Phi/I$, where Φ is the magnetic flux produced by a current I.

4.15 Show that the electric and magnetic fields are zero outside the outer conductor of a coaxial transmission line and inside the inner conductor.

Show that the electric and magnetic fields are zero outside of the region between the plates of a parallel-plate transmission line.

4.16 Show that the self-inductance of a parallel-plate transmission line is given by Eq.(4.48), for alternating current as well as for steady current, as long as the wavelength is long compared with the plate thickness d_o.

4.17 An infinte string with linear mass density 0.1 gm/cm and tension 100 lb (1 lb = 354 gm-wt; 1 gm-wt = 980 dyne) is driven at z = 0 in harmonic motion of amplitude 1 cm and frequency 100 cps. What is the time-averaged energy flux in watts? Ans. About 4o watts.

4.18 Find the rms (root-mean-square) electric field (averaged over all frequencies) at a point in space 1 meter from a 40-watt light bulb.

4.19 Suppose two traveling waves on an elastic string with $T_o = 1$ dyne, $\rho = 1$ gm/cm, and $\omega = 10^3$ rad/sec are given by

$$\psi_1 = A\cos(\omega t - kz + \pi),$$

$$\psi_2 = A\cos(\omega t - kz + \tfrac{\pi}{4}).$$

Find the time-averaged intensity of the superposition of ψ_1 and ψ_2.

4-20 Three plane electromagnetic waves, given by

$$E_{1x} = E_o\cos(kz - \omega t - \delta_1) = B_{1y},$$

$$E_{2x} = E_o\cos(kz - \omega t - \delta_2) = B_{2y},$$

and

$$E_{3x} = E_o\cos(kz - \omega t - \delta_3) = B_{3y},$$

travel over the same space. What are the maximum and minimum amplitudes and energy fluxes that can be produced by adjusting the values of the constants δ_1, δ_2, and δ_3?

4.21 "Gauge pressure" for longitudinal waves on a spring. Derive Eq.(4.70), which is

$$F_z(L \text{ on } R) = F_o - Ka\,\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}.$$

Start with a lumped-parameter beaded spring. At equilibrium each spring is compressed so that it exerts a force F_o. The spring constant is K. The bead separation is a. Find the force on a given bead exerted in the +z direction by the spring just to the left of that bead. Go to the continuous limit, and thus derive the desired relation. Note that in the continuous limit the product Ka is a property of the continuous spring and is independent of the length a.

4.22 Are sound waves perfectly nondispersive? We found in sec.4.2 that the phase velocity of sound is constant, independent of frequency. The dispersion law that gave that result was

$$\omega^2 = \frac{\gamma p_o}{\rho_o}\,k^2,$$

which is similar to the dispersion law for longitudinal oscillations on a continuous spring

$$\omega^2 = \frac{K}{M}\,k^2.$$

For a lumped-parameter beaded spring, the dispersion law is

$$\omega^2 = \frac{K}{M}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}ka}{(\frac{1}{2}a)^2},$$

which leads to a high-frequency cutoff. By analogy and by physical resoning, guess a value for a high-frequency cutoff for sound in air at STP (standard temperatur and pressure). Would you expect ultrasonic wave of frequency $\nu \approx 100$ Mc to travel at ordinary sound velocity? Ans. You expect a high-frequency cutoff $\nu_o \approx 10^{10}$ Hz.