บทที่ 2
การออสซิลเลตอย่างอิสระของระบบหลายดีกรีออฟฟรีดอม

๒.๑ บทนำ

ในบทที่หนึ่งเราได้ศึกษาระบบที่มีหนึ่งและสองดีกรีออฟฟรีดอมมาแล้ว ในบทนี้เราจะศึกษาต่อด้วยระบบที่มีN ดีกรีออฟฟรีดอม โดยที่N จะเป็นจำนวนเต็มเท่าใดก็ได้และสามารถเป็นไปได้ถึงค่าอนันต์

สำหรับระบบ N ดีกรีออฟฟรีดอมจะมี **mode** ทั้งสิ้น N **mode** ในแต่ละ **mode** จะมีความถี่ ω และลักษณะเป็นของตัวมันเอง เราสามารถดูได้จากอัตราส่วนของอัมปลิจูด A:B: C:D ....etc. ซึ่งสัมพันธ์กับมวล a, b, c, d .....eyc. และในแต่ละ **mode** การเคลื่อนที่ของแต่ละมวลจะผ่านจุดสมดุลย์ในเวลาพร้อมกัน กล่าวคือทุกดีกรีออฟฟรีดอมใน **mode** นั้นจะเริ่มต้นสั้นด้วยค่าคงที่เฟสเท่ากัน ดังนั้นแต่ละ **mode** จะมีค่าคงที่เฟสค่าเดียวซึ่งเราสามารถพิจารณาได้จากสภาวะเริ่มต้น เนื่องจากแต่ละดีกรีออฟฟรีดอมจะออสซิลเลตตาม **mode** ที่กำหนดให้ด้วยความถี่เดียวกัน ω มีค่าเท่ากับแรงคืนกลับต่อหน่วยมวลต่อหน่วยการขจัดเท่ากัน ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเรามีระบบที่เป็นสี่ดีกรีออฟฟรีดอม a, b, c,d ดังนั้นจะมีอยู่สี่ **mode** ด้วยกัน สมมติว่าใน **mode** 1 มีรูปร่างที่เป็นอัตราส่วนของอัมปลิจูดคือ

$$A:B:C:D = 1:0:-2:7$$

การเคลื่อนที่ของมวล a,b,c และ d ถูกกำหนดด้วยสมการ

$$\psi_a = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)\ ,\quad \psi_b = 0\ ,\quad \psi_c = -2\psi_a\ ,\quad \psi_d = 7\psi_a$$

เมื่อค่า A_1 และ ϕ_1 ขึ้นกับสภาวะเริ่มต้นของระบบ เป็นต้น

จากตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วเราพอจะสรุปได้ว่า

ระบบที่มีมวลเคลื่อนที่ ๑ ตัว เป็นหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอมมีเพียงหนึ่ง **mode**

$$\omega^2 = 2T_o/ma \qquad\qquad \psi = A\cos(\omega t+\phi)$$

ระบบที่มีมวลเคลื่อนที่ ๒ ตัว เป็นสองดีกรีออฟฟรีดอมมีสอง **mode**

$$\text{mode 1}\ :\ \omega_1^2 = T_o/ma\ ,\quad \psi_a = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)\ ;\ \psi_b = \psi_a$$

$$\text{mode 2}\ :\ \omega_2^2 = 3T_o/ma\ ,\quad \psi_b = A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\ ;\ \psi_b = -\psi_a$$

ระบบที่มีมวลเคลื่อนที่ ๓ ตัว เป็นสามดีกรีออฟฟรีดอมมีสาม mode

$$\text{mode } 1: \quad \omega_1^2 = T_o/ma\,, \quad \psi_a : \psi_b : \psi_c = 1:1:1$$

$$\psi_a = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)\,, \quad \psi_b = \psi_a\,, \quad \psi_c = \psi_a$$

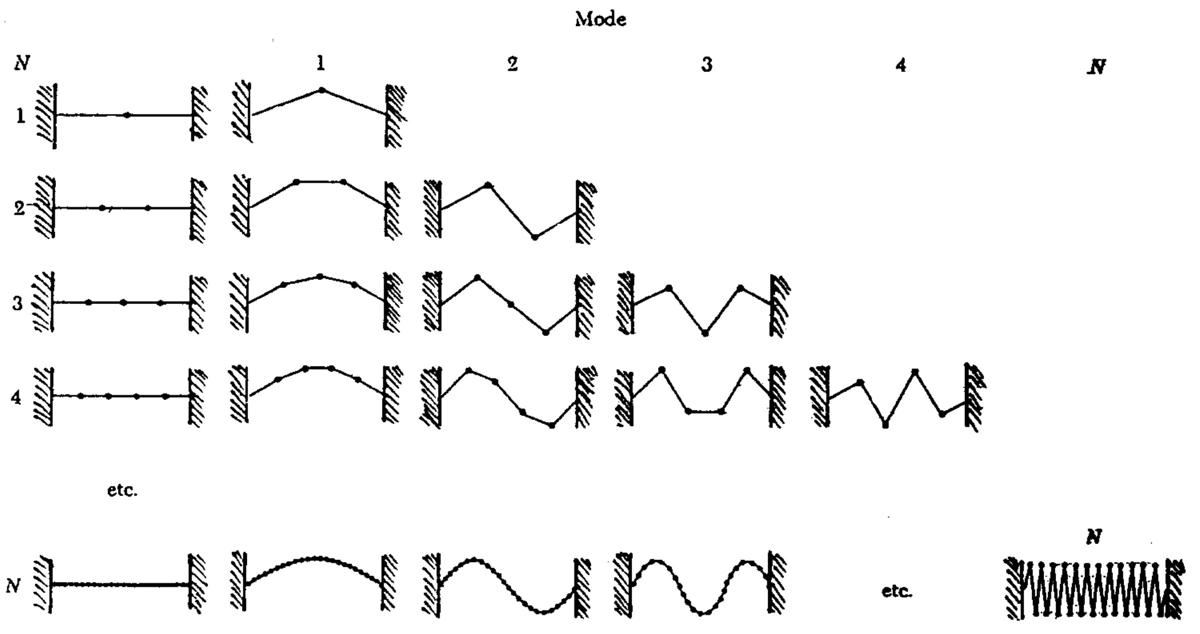
$$\text{mode } 2: \quad \omega_2^2 = 2T_o/ma\,, \quad \psi_a : \psi_b : \psi_c = 1:o:-1$$

$$\psi_a = A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\,, \quad \psi_b = o\,, \quad \psi_c = -\psi_a$$

$$\text{mode } 3: \quad \omega_3^2 = 3T_o/ma\,, \quad \psi_a : \psi_b : \psi_c = 1:-1:1$$

$$\psi_a = A_3\cos(\omega_3 t+\phi_3)\,, \quad \psi_b = -\psi_a\,, \quad \psi_c = \psi_a$$

สำหรับรูปร่าง mode ของระบบสามดีกรีออฟฟรีดอมดูจากรูป ๒.๑ จะเห็นได้ว่าถ้าจำนวน mode ยิ่งมากหรือ mode สูงขึ้นความถี่ยิ่งมีค่ามากขึ้น



รูป ๒.๑ Modes การสั่นตามขวางของเส้นเชือกลูกปัดจำนวนต่างๆ

ถ้าระบบประกอบด้วยอนุภาคเคลื่อนที่เป็นจำนวนมากและอนุภาคเหล่านั้นจัดเรียงตัวอยู่ในขอบเขตจำกัดบริเวณหนึ่ง จนกระทั่งระยะห่างระหว่างอนุภาคข้างเคียงมีค่าน้อยจนชิดกันกลายเป็นศูนย์ เราอาจคิดว่าจำนวนมวลมีค่าเป็นอนันต์ ระบบนี้กลายเป็นระบบต่อเนื่อง (continuous system) เราจึงกล่าวได้ว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m และอนุภาคข้างเคียงเกือบเหมือนกัน จากข้อสรุปเหล่านี้เราสามารถใช้ $\psi(x,y,z,t)$ แทนการขจัดของอนุภาคมวล m ทุกตัวที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียงตำแหน่งเล็กๆของจุด (x,y,z) ได้ ดังนั้น $\psi(x,y,z,t)$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตำแหน่ง x,y,z และเวลา t ซึ่งใช้แทนการขจัด $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$.. ..etc ของแต่ละอนุภาคเคลื่อนที่เหล่านั้น ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเราได้เกี่ยวข้องกับคลื่นแล้ว

Standing waves are normal mode

mode ของระบบต่อเนื่องเราเรียกว่า"คลื่นนิ่ง" (standing waves) หรือ "normal modes" หรือเรียกอย่างง่ายว่า "modes" เฉยๆ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้น ระบบต่อเนื่องจริงๆจะมีอนุภาคเป็นจำนวนนับไม่ถ้วนแม้ว่าอนุภาคเหล่านั้นจะเรียงตัวอยู่ในขอบเขตจำกัดเพียงใดก็ตาม ทำให้จำนวนดีกรีออฟฟรีดอมเป็นอนันต์และจำนวน modes เป็นอนันต์เช่นกัน แต่ในระบบของสสารตามความเป็นจริงมักจะไม่เป็นเช่นนั้น เช่น อากาศปริมาตรหนึ่งลิตรไม่ได้ประกอบด้วยจำนวนอนุภาคเคลื่อนที่เป็นอนันต์แต่มีจำนวนเพียง ๒.๗ x ๑๐^๒๒ โมเลกุลเท่านั้น ซึ่งแต่ละโมเลกุลมีสามดีกรีออฟฟรีดอม (คิดการเคลื่อนที่ตามทิศ x,y และ z)ดังนั้นในภาชนะที่บรรจุอากาศหนึ่งลิตรจะไม่มีจำนวน modes ของการสั่นของอากาศเป็นจำนวนอนันต์ แต่มีอย่างมากที่สุดเพียง ๘ x ๑๐^๒๒ modes นักดนตรีประเภทเครื่องเป่าให้เกิดเสียงของ mode ที่สูงกว่า ๒-๓ mode แรกได้ (โดยทั่วไปเราจัดเรียง mode เรียกตามความถี่ต่ำสุดเป็นหมายเลข ๑ ความถี่สูงถัดไปเป็นหมายเลข ๒ เป็นต้น) ซึ่งความเป็นจริงนั้นความรู้สึกของคนสามารถรับรู้และแยกเสียงได้เพียง mode แรกๆ ๒-๓ mode เท่านั้น

ส่วนมากการเคลื่อนที่ของระบบเราสามารถเขียนได้เป็นการรวมกันได้ของ mode ทั้งหลายเข้าด้วยกัน ส่วนอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของแต่ละ mode ขึ้นกับสภาวะเริ่มต้น การปรากฏการสั่นของระบบทั่วๆไปเป็นลักษณะที่มีความยุ่งยากมาก เพราะว่าตาและสมองของคนไม่สามารถที่จะรับรู้และแยกแยะหลายสิ่งหลายอย่างพร้อมๆกันโดยไม่สับสน กล่าวคือเราไม่สามารถที่จะมองดูการเคลื่อนที่ของหลายๆ modes พร้อมกัน และแยกแยะ modes ทั้งหลายออกมาได้

Modes of beaded string

ก่อนอื่นเราจะศึกษาการออสซิลเลตตามขวางของ beaded string ความหมายของ string เราอาจหมายถึงสปริงก็ได้ เราสมมติว่ามีสปริงเบาผูกติดกับจุดวัตถุมวล M เป็นเส้นตรงยาว ในรูป ๒.๑ ได้แสดงอาการออสซิลเลตต่างๆของระบบ beaded string เรียงเป็นลำดับ คือระบบแรกมี N = 1 (หนึ่งดีกรีออฟฟรีดอม) ระบบต่อไปเป็น N = 2 เป็นต้น และในแต่ละกรณีได้แสดงลักษณะอาการของ normal modes (รูป ๒.๑) จากรูปเราจะสังเกตได้ว่า อันดับของลักษณะอาการเรียงตามลำดับของความถี่ mode เพราะว่า string ทำมุมโตขึ้นกับแกนสมดุลย์เมื่อจำนวน mode เพิ่มขึ้น ทำนองเดียวกันแรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวลสำหรับลูกปัดในระบบมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเปลี่ยนเป็นลักษณะอาการถัดไป และถ้าในระบบมีลูกปัด N ตัวจะมีรูปร่างของ mode ทั้งสิ้น N ลักษณะอาการด้วยกัน ใน mode แรกจะไม่มีบัพ ปรากฏอยู่ (ตำแหน่งที่เส้นเชือกอยู่ในแนวสมดุลย์ยกเว้นที่ปลายทั้งสองข้าง) mode ที่สองมีเพียงบัพเดียวเท่านั้น ดังนั้น mode สูงสุดคือ N จะมี N-1 บัพ ซึ่งปรากฏเป็นลักษณะซิกแซกคือขึ้นและลงสลับกัน

๒.๒ Modes ตามขวางของเส้นเชือกต่อเนื่อง

เราจะพิจารณากรณีเมื่อ N มีค่ามากๆ เช่น N = 1,000,000 หรือมากกว่า นั่นคือสำหรับ modes ต่ำๆก็ยังมีค่ามากอยู่หรือจำนวนลูกปัดระหว่างแต่ละบัพมีจำนวนมากเช่นกัน และการขจัดตรงระหว่างลูกปัดถัดกันเกือบจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงเลย จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นเราจะไม่ใช้การขจัด $\psi_a(t)$, $\psi_a(t)$, $\psi_c(t)$, $\psi_d(t)$,...etc อธิบายลักษณะอาการขณะใดๆของอนุภาคเหล่านั้น แต่จะพิจารณาอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ในบริเวณใกล้เคียงของจุด x,y,z จากตำแหน่งสมดุลย์มีการขจัดเวคเตอร์ขณะใดๆ $\vec{\psi}(x,y,z,t)$ เหมือนกัน

$$\vec{\psi}(x,y,z,t) = \hat{x}\,\psi_x(x,y,z,t) + \hat{y}\,\psi_y(x,y,z,t) + \hat{z}\,\psi_z(x,y,z,t) \quad (๒.๑)$$

เมื่อ $\hat{x},\hat{y}$ และ $\hat{z}$ เป็นเวคเตอร์หน่วยและ ψ_x,ψ_y และ ψ_z เป็นองค์ประกอบของการขจัดเวคเตอร์

การสั่นตามยาวและการสั่นตามขวาง

จากสมการ(๒.๑) เป็นสมการทั่วไปมีรูปสมการมากเกินกว่าที่เราต้องการใช้ศึกษา

ลักษณะการสั่นของเส้นเชือกหรือเส้นลวด สมมติว่าในขณะสมดุลย์เส้นเชือกถูกตรึงในแนวแกน z ดังนั้นเพียงพิกัด z เท่านั้นก็ใช้รองรับตำแหน่งสมดุลย์ของแต่ละอนุภาคได้อย่างเพียงพอและสมการ (๒.๑) สามารถเขียนอยู่ในรูปง่ายกว่าคือ

$$\vec{\psi}(z,t) = \hat{x}\,\psi_x(z,t) + \hat{y}\psi_y(z,t) + \hat{z}\psi_z(z,t) \qquad (๒.๒)$$

การสั่นตามทิศ z เรียกว่า การสั่นตามยาว ส่วนการสั่นตามทิศ x และทิศ y เรียกว่าการสั่นตามขวาง แต่ในขณะนี้เราเพียงต้องการศึกษาการสั่นตามขวางของเส้นเชือกเท่านั้นก่อน ดังนั้นจึงสมมติว่า ψ_z มีค่าเป็นศูนย์

$$\vec{\psi}(z,t) = \hat{x}\psi_x(z,t) + \hat{y}\psi_y(z,t) \qquad (๒.๓)$$

<u>การโปลาไรซ์เชิงเส้น</u> (**Linear polarization**)

สมมติว่าการสั่นของเส้นเชือกอยู่ในแกน x เท่านั้น(กล่าวคือ $\psi_y = 0$) การสั่นแบบนี้เราเรียกว่า โปลาไรซ์เชิงเส้นตาม x (รายละเอียดของสถานะการโปลาไรซ์จะกล่าวในบทที่ ๘ อีกครั้งหนึ่ง) ต่อไปเราจะละทิ้งเวคเตอร์หน่วย x และอักษรกำกับบน ψ_x จากสัญญลักษณ์ ดังนี้

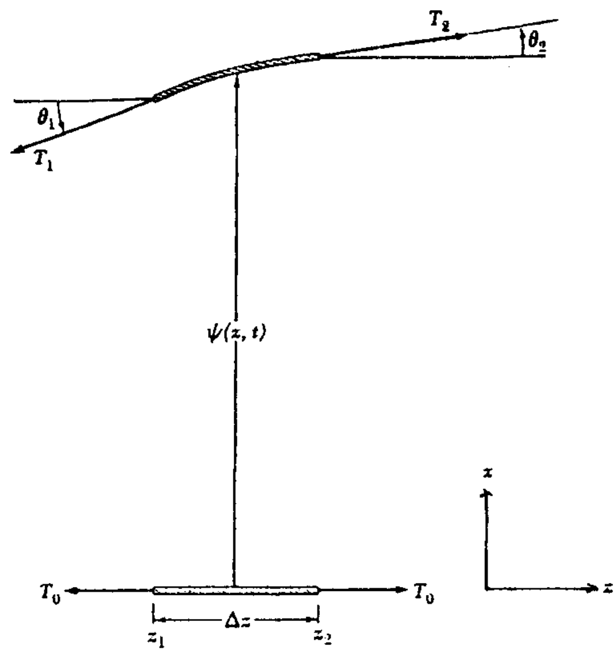
$\vec{\psi}(z,t)$ = การขจัดตามขวางในขณะใดของอนุภาคที่มีแกน z เป็นตำแหน่งสมดุลย์ (๒.๔)

ลองพิจารณาส่วนหนึ่งของเส้นเชือกช่วงสั้นๆ ในขณะสมดุลย์ส่วนของเส้นเชือกนี้มีช่วงความยาว Δz ศูนย์กลางอยู่ที่ z และมีมวลเป็น ΔM คิดการแบ่งเส้นเชือกออกเป็นส่วนย่อยยาว Δz ซึ่งกำหนดเหมือนกับความหนาแน่นมวล (**mass density**) ρ_o ที่วัดในหน่วยของมวลต่อหน่วยความยาวคือ

$$\Delta M = \rho_o\,\Delta z \qquad (๒.๕)$$

ซึ่งความหนาแน่นมวลเราสมมติให้มีค่าคงที่ตลอดความยาวของเส้นเชือก และความตึงในเส้นเชือกขณะสมดุลย์กำหนดเป็น T_o มีค่าเท่ากันตลอดเส้นเชือกเช่นกัน

ในขณะใดๆ (ยกเว้นสมดุลย์) ส่วนของเส้นเชือกนั้นมีการขจัดตามขวาง $\psi(z,t)$ คิดเฉลี่ยตลอดช่วงความยาวส่วนของเส้นเชือก (ตามรูป ๒.๒) ส่วนของเส้นเชือกนี้มิใช่เป็นเส้นตรงแต่มีส่วนโค้งดังรูป ๒.๒ และตรงปลายของส่วนเส้นเชือกทำมุม θ_1 และ θ_2 ซึ่งไม่เท่ากันกับแนวระดับ ความตึงในเส้นเชือกขณะนี้มิใช่เป็น T_o ทำนองเดียวกันช่วงความยาวส่วนของ



รูป ๒.๒ การออสซิลเลตตามขวางของเส้นเชือกยาวต่อเนื่อง

เส้นเชือกมิใช่เป็น z เหมือนในขณะสมดุลย์ ดังนั้นเราจะหาแรงรวมที่ทำให้ส่วนของเส้นเชือกมีการขจัดซึ่งประกอบด้วยแรงจากส่วนปลายของเส้นเชือก ที่ปลายด้านซ้ายมือส่วนของเส้นเชือกถูกดึงลงด้วยแรง $T_1\sin\theta_1$ และที่ปลายด้านขวามือถูกดึงขึ้นด้วยแรง $T_2\sin\theta_2$ ดังนั้นแรงลัพท์เป็นแรงขึ้นคือ

$$F_x(t) = T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 \qquad (๒.๖)$$

แต่เราต้องการแสดง $F_x(t)$ ในพจน์ของ $\psi(z,t)$ และค่าอนุพันธ์ระวางที่ (space derivative) ของมัน

$$\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} = \text{slope} \text{ ของเส้นเชือกที่ตำแหน่ง } z \text{ เมื่อเวลา } t$$

พิจารณาตามรูป ๒.๒ ความชันเส้นเชือกที่ z_1 เป็น $\tan\theta_1$ และความชันที่ z_2 เป็น $\tan\theta_2$ ดังนั้น $T_1\cos\theta_1$ เป็นส่วนประกอบตามแนวราบของแรงดึงเชือกที่ z_1 และ $T_2\cos\theta_2$ เป็นส่วนประกอบตามแนวราบของแรงดึงเชือกที่ z_2 สิ่งที่เราต้องการในขณะนี้คือหาสมการอนุพันธ์

เชิงเส้นของการเคลื่อนที่ เราจะคิดว่าสามารถใช้ทั้งการประมาณแบบสลิงกีหรือการประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อย ในการประมาณแบบสลิงกี T มีค่ามากกว่า T_o ด้วยตัวประกอบ $1/\cos\theta$ ทั้งนี้เพราะว่าส่วนของเส้นเชือกมีความยาวมากกว่า Δz ด้วยตัวประกอบ $1/\cos\theta$ ดังนั้น $T\cos\theta = T_o$ ในการประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อยเราไม่คิดว่าส่วนของเส้นเชือกมีความยาวเพิ่มขึ้นและคิดประมาณว่า $\cos\theta$ มีค่าเป็น 1 ดังนั้น $T\cos\theta = T_o$ จากสมการ(๒.๖)

$$
\begin{aligned}
F_x(t) &= T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 \\
&= T_2\cos\theta_2\tan\theta_2 - T_1\cos\theta_1\tan\theta_1 \\
&= T_o\tan\theta_2 - T_o\tan\theta_1 \\
&= T_o\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 - T_o\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 \qquad (๒.๘)
\end{aligned}
$$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(z)$ ซึ่งกำหนดให้เป็น

$$f(z) = \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z} \qquad (๒.๙)$$

ในที่นี้ฟังก์ชัน $f(z)$ เราได้ละทิ้งตัวแปร t ไว้ เนื่องจากเราจะถือว่า t มีค่าคงที่ก่อน กระจายฟังก์ชัน $f(z)$ ด้วย Taylor's series รอบจุด z_1 และให้ $z = z_2$

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2-z_1)\left(\frac{df}{dz}\right)_1 + \tfrac{1}{2}(z_2-z_1)^2\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)_1 + \ldots\ldots \qquad (๒.๑๐)$$

เมื่อ $z_2-z_1 = \Delta z$ (ดูจากรูป๒.๒) ซึ่งเราสามารถให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้จนสามารถละทิ้งพจน์กำลังสูงๆตั้งแต่สองขึ้นไปในสมการ(๒.๑๐) ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f(z_2) - f(z_1) &= \Delta z\left(\frac{df}{dz}\right)_1 = \Delta z\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\right) \\
&= \Delta z\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(z,t)}{\partial z}\right) \\
&= \Delta z\,\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๒.๑๑)
\end{aligned}
$$

ให้สังเกตว่าก่อนถึงสมการ(๒.๑๑) เราได้ละทิ้งเลขกำกับ 1 เนื่องจากเราได้เขียนอนุพันธ์ของ z เป็นอนุพันธ์ย่อยของ z แทน และได้ละทิ้งพจน์อนุพันธ์กำลังสูงๆในสมการ(๒.๑๐) ดังนั้นมันจึงไม่มีความสำคัญอย่างไร และให้สังเกตด้วยว่าเราต้องเขียนอนุพันธ์ระหว่างที่เป็นอนุพันธ์ย่อย

เมื่อใช้สัญลักษณ์ $\psi(z,t)$ แทนค่าสมการ(๒.๙) และ(๒.๑๑) ลงในสมการ(๒.๘)

$$F_x(t) = T_o \Delta z \frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๒.๑๒)$$

ต่อไปใช้กฎข้อที่สอง ของนิวตัน แรง F_x ในสมการ(๒.๑๒) มีค่าเท่ากับมวล ΔM ส่วนของเส้นเชือกคูณกับความเร่งของส่วนของเส้นเชือก สำหรับความเร็วและความเร่งของส่วนย่อยเส้นเชือกเทียบกับค่าแหน่งสมดุลย์ z เขียนได้ในพจน์ของ $\psi(z,t)$ และค่าอนุพันธ์ของมันดังนี้

$$\begin{aligned} \psi(z,t) &= \text{การขจัด} \\ \frac{\partial\psi(z,t)}{\partial t} &= \text{ความเร็ว} \qquad (๒.๑๓) \\ \frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} &= \text{ความเร่ง} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากกฎของนิวตันให้ $(\Delta M = \rho_o \Delta z)$

$$\rho_o \Delta z \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = F_x = T_o \Delta z \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

หรือ

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_o}{\rho_o}\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๒.๑๔)$$

สมการ(๒.๑๔) เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่รู้จักกันทั่วไป เรียกว่า สมการคลื่นแบบฉบับ (classical wave equation) สมการนี้มีความสำคัญมากซึ่งเราจะต้องพบกับมันบ่อยครั้ง จึงจำเป็นที่เราต้องรู้คุณสมบัติของคำตอบของสมการและสามารถใช้ได้ถูกต้องเข้ากับสถานการณ์ต่างๆ กล่าวคือ ค่าคงที่บวก T_o/ρ_o เป็นค่าเฉพาะใช้กับเส้นเชือกหรือเส้นลวดเท่านั้น ถ้าเป็นคลื่นที่ปรากฏในสถานการณ์อื่นๆเราต้องใช้ค่าคงที่อื่นแทน ลองพิจารณหน่วยของมันจะพบว่าเป็นหน่วยของความเร็ว

$$\frac{T_o}{\rho_o} = \frac{\text{กิโลกรัม x เมตร x วินาที}^{-๒}}{\text{กิโลกรัม x เมตร}^{-๑}} = \left(\frac{\text{เมตร}}{\text{วินาที}}\right)^{๒}$$

ดังนั้นถ้าเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าค่าคงที่จะเป็น c^2 แทน T_o/ρ_o

__คลื่นนิ่ง__ (Standing waves)

พิจารณา normal modes ของเส้นเชือกเส้นหนึ่งซึ่งเป็นคลื่นนิ่ง ชั้นแรกสมมติว่า

มีเพียง ๑ mode กล่าวคือทุกส่วนของเส้นเชือกออสซิลเลตเป็นแบบฮาร์โมนิกด้วยความถี่เชิงมุม ω เดียวกันและมีค่าคงที่เฟสเท่ากัน ดังนั้น $\psi(z,t)$ ซึ่งเป็นการขจัดของอนุภาคในเส้นเชือกเทียบกับตำแหน่งสมดุลย์ z จะมีตัวคูณแปรค่า $\cos(\omega t+\phi)$ เหมือนกันทุกอนุภาคตลอดเส้นเชือกสำหรับทุกๆค่า z และตามปกติค่าคงที่เฟส ϕ สัมพันธ์กับเวลาเริ่มต้นของ mode รูปร่างของ mode ประกอบขึ้นด้วยจำนวนดีกรีออฟฟรีดอมที่แทนด้วย a, b, c,..etc กำหนดให้สัมพันธ์กับการสั่นอัมปลิจูด A, B, C,.etc สำหรับกรณีของเส้นเชือกต่อเนื่องจะมีจำนวนดีกรีออฟฟรีดอมนับไม่ถ้วนเราใช้แทนด้วยตัวพารามิเตอร์ z เราสามารถเขียนอัมปลิจูดของการสั่นของจำนวนดีกรีออฟฟรีดอมที่ตำแหน่ง z ใดๆหรือบริเวณใกล้ๆ z เป็นฟังก์ชันของ z แทนด้วย $A(z)$ รูปร่างของ $A(z)$ เป็นฟังก์ชันของ z ขึ้นกับ mode หมายความว่าแต่ละ mode มีค่า $A(z)$ ต่างกัน ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการทั่วไปสำหรับคลื่นนิ่งเป็น

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t+\phi) \qquad (๒.๑๕)$$

ความเร่งของสมการเคลื่อนที่คือ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = -\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\phi) \qquad (๒.๑๖)$$

หาอนุพันธ์ย่อยครั้งที่สองของสมการ(๒.๑๕) เทียบกับ z เป็น

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2[A(z)\cos(\omega t+\phi)]}{\partial z^2}$$

$$= \cos(\omega t+\phi)\frac{d^2A(z)}{dz^2} \qquad (๒.๑๗)$$

ในสมการ(๒.๑๗) เราได้อนุพันธ์ทั่วไปเทียบกับ z แทนที่จะเป็นอนุพันธ์ย่อยทั้งนี้เพราะว่า $A(z)$ ไม่ขึ้นกับเวลา แทนค่าสมการ(๒.๑๖) และ(๒.๑๗)ลงในสมการ(๒.๑๔)และตัดพจน์เหมือนทั้ง $\cos(\omega t+\phi)$ เราได้

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -\omega^2\frac{\rho_o}{T_o}A(z) \qquad (๒.๑๘)$$

สมการ(๒.๑๘)ได้แสดงลักษณะของ mode แต่ละ mode มีความถี่เชิงมุม ω ต่างกัน ดังนั้นแต่ละ mode จะมีรูปร่างต่างกันด้วย

สมการ(๒.๑๘) เป็นสมการรูปหนึ่งของสมการอนุพันธ์สำหรับการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกแต่เป็นการออสซิลเลตในระวางที่มากกว่าในเวลา รูปทั่วไปของการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกในระวางที่สามารถเขียนได้เป็น

$$A(z) = A\sin(2\pi z/\lambda) + B\cos(2\pi z/\lambda) \qquad (๒.๑๙)$$

เมื่อค่าคงที่ λ แทนความยาวของการออสซิลเลตครบหนึ่งรอบพอดีเราเรียกว่าความยาวคลื่น (wave length) หาอนุพันธ์ของสมการ(๒.๑๙) สองครั้งจะได้

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z) \qquad (๒.๒๐)$$

เปรียบเทียบสมการ(๒.๑๘)และ(๒.๒๐) เห็นได้ว่า

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2\left(\frac{\rho_o}{T_o}\right) = (2\pi\nu)^2\frac{\rho_o}{T_o} \qquad (๒.๒๑)$$

นั่นคือ

$$\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}} \equiv v_o = \text{ค่าคงที่} \qquad (๒.๒๒)$$

ความเร็วคลื่น

สมการ(๒.๒๒) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นและความถี่สำหรับคลื่นนิ่งตามขวางบนเส้นเชือกต่อเนื่อง ค่าคงที่ $(T_o/\rho_o)^{1/2}$ มีหน่วยเป็นความเร็ว ดังนั้น $\lambda\nu$ มีหน่วยเป็นความยาวต่อเวลา ความเร็วในที่นี้ $v_o = (T_o/\rho_o)^{1/2}$ เรียกว่า "ความเร็วเฟสสำหรับคลื่นเคลื่อนที่" สมการทั่วไปสำหรับการขจัด $\psi(z,t)$ ของเส้นเชือกเมื่อเป็นคลื่นนิ่งหาได้จากการรวมสมการ(๒.๑๕)และ(๒.๑๙) ดังนี้

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t+\phi)\left[A\sin(2\pi z/\lambda) + B\cos(2\pi z/\lambda)\right] \qquad (๒.๒๓)$$

สภาวะขอบเขต (Boundary condition)

สมการ(๒.๒๓) เป็นสมการทั่วไปที่เรายังไม่ได้คำนึงถึงสภาวะขอบเขตของมัน เนื่องจากเส้นเชือกถูกขึงตึงที่ปลายทั้งสอง การคิดสภาวะขอบเขตเราทำดังนี้ สมมติว่าเส้นเชือกมีความยาวทั้งหมดเป็น L เลือกจุดกำเนิดอยู่ที่ปลายข้างซ้ายมือของเส้นเชือกที่ $z = 0$ ดังนั้นที่ปลายข้างขวามือของเส้นเชือกอยู่ที่ $z = L$ พิจารณาที่ $z = 0$ ซึ่งเป็นตำแหน่งปลายเชือกถูกขึงตึงไว้ การขจัด $\psi(0,t)$ จะต้องเป็นศูนย์ทุกๆค่า t จากสมการ(๒.๒๓)

$$\psi(0,t) = \cos(\omega t+\phi)\ 0 + B = 0 \qquad (๒.๒๔)$$

ดังนั้น $B = 0$ สำหรับทุกค่า t

เราจะได้

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t+\phi)\ \sin\frac{2\pi z}{\lambda} \qquad (๒.๒๕)$$

ในสภาวะขอบเขตอื่นก็คือเส้นเชือกถูกขึงตึงที่ปลาย $z = L$ ดังนั้น $\psi(L,t)$ ต้องเป็นศูนย์สำหรับทุกค่า t เราไม่อาจจะเลือก $A = 0$ ในสมการ(๒.๒๕)ได้ เพราะว่าจะเป็นการบังคับให้เส้นเชือกหยุดนิ่งกับที่ไม่มีการออสซิลเลต

$$\psi(L,t) = A\cos(\omega t+\phi)\ \sin\frac{2\pi}{\lambda}L = 0$$

ดังนั้นจะเหลือเพียงอย่างเดียวที่สอดคล้องกับสภาวะขอบเขตที่ L คือ

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}L = 0 \qquad (๒.๒๖)$$

ค่าความยาวคลื่น λ ที่สอดคล้องกับสภาวะขอบเขตนี้ต้องเป็นค่าหนึ่งค่าใดที่เป็นไปได้ค่านี้

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (๒.๒๗)$$

ค่าตัวเลขที่เรียงลำดับข้างขวามือของสมการ(๒.๒๗)เหล่านี้สอดคล้องกับสภาวะขอบเขตและสัมพันธ์กับทุก mode ที่เป็นไปได้ของเส้นเชือก เราเรียง mode ตามลำดับเริ่มต้นจากพจน์แรกให้เป็นหมายเลข ๑ ดังนั้นจากสมการ(๒.๒๗) ความยาวคลื่นของ mode กำหนดเป็น

$$\lambda_1 = 2L,\quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\lambda_1,\quad \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1,\quad \lambda_4 = \tfrac{1}{4}\lambda_1,\ldots. \qquad (๒.๒๘)$$

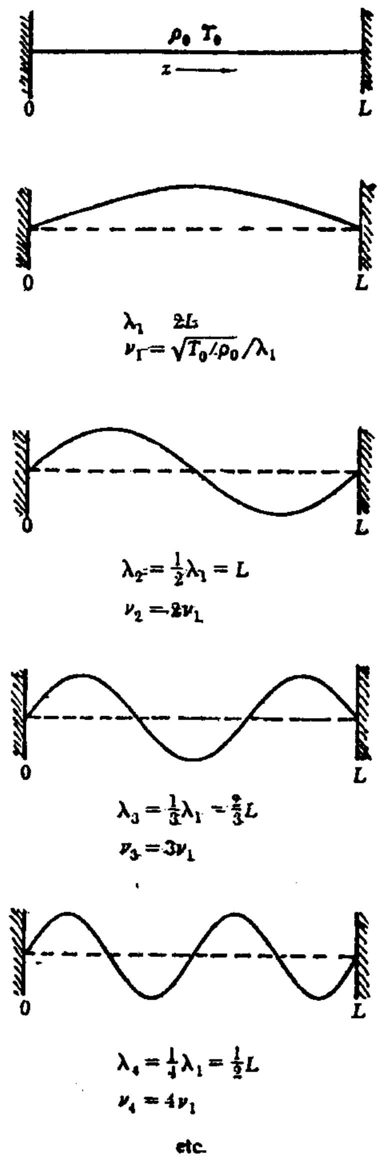
อัตราส่วนความถี่ฮาร์โมนิก (**Harmonic frequency ratios**)

ความสัมพันธ์ความถี่ของ modes หาได้จากสมการ(๒.๒๒) คือ

$$\nu_1 = \frac{v_0}{\lambda_1},\quad \nu_2 = 2\nu_1,\quad \nu_3 = 3\nu_1,\quad \nu_4 = 4\nu_1,\ldots.. \qquad (๒.๒๙)$$

ความถี่ $2\nu_1$, $3\nu_1$,....etc., เรียกว่าฮาร์โมนิกที่สอง, ที่สาม, ...ฯลฯ ของฮาร์โมนิกมูลฐาน ν_1 (fundamental frequecy) ความเป็นจริงความถี่ mode ν_2, ν_3,...etc. ที่ประกอบด้วยลำดับของฮาร์โมนิกของความถี่ mode ต่ำสุด ν_1 เป็นผลจากที่เราสมมติว่าเส้นเชือกมีคุณสมบัติเหมือนกันตลอดทั้งเส้นและไม่มีการยืดหยุ่นจริงๆ

modes ของเส้นเชือกได้แสดงไว้ในรูป๒.๓ ลักษณะในสภาวะสมดุลย์จะสัมพันธ์กับ



รูป ๒.๓ Modes ของเส้นเชือกต่อเนื่องเอกพันธ์ด้วยปลายเชือกทั้งสองข้างยึดตึงแน่น

พจน์แรกที่หายไป $2\pi/\lambda = 0$ ในชุดตัวเลขที่เรียงลำดับของสมการ (๒.๒๗) และสัมพันธ์กับความถี่เป็นศูนย์ไม่มีการเคลื่อนที่และสถานะสมดุลย์ไม่เป็น mode

เลขคลื่น (Wave number)

ส่วนกลับของความยาวคลื่น λ เรียกว่าเลขคลื่น σ มีหน่วยเป็นรอบต่อเซ็นติเมตร หรือส่วนกลับของเซ็นติเมตร มันเป็นพารามิเตอร์สำหรับการออสซิลเลตในระวางที่คล้ายคลึงกับความถี่ ν สำหรับการออสซิลเลตในเวลา

$$\sigma = 1/\lambda = \text{เลขคลื่น (รอบต่อ ซม.)} \qquad (๒.๓๐)$$

เลขคลื่นคูณด้วย 2π เรียกว่า เลขคลื่นเชิงมุม k (angular wave number) มีหน่วยเป็นเรเดียนของเฟสต่อเซนติเมตร ซึ่งเป็นปริมาณสำหรับการออสซิลเลตในระวางที่คล้ายคลึงกับความถี่เชิงมุมสำหรับการฮอสซิลเลตในเวลา

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{เลขคลื่นเชิงมุม (เรเดียนต่อ ซม.)} \qquad (๒.๓๑)$$

เราสามารถอธิบายการใช้ปริมาณเหล่านี้ได้โดยเขียนสมการคลื่นนิ่งในรูปแบบต่างๆดังนี้

$$\psi(z,t) = A \sin 2\pi\frac{t}{T} \sin 2\pi\frac{z}{\lambda} = A \sin 2\pi\nu t \sin 2\pi\sigma z = A\sin\omega t \sin kz \qquad (๒.๓๒)$$

และสามารถอธิบายลำดับของ normal modes ตามสมการ (๒.๒๗), (๒.๒๘) และ (๒.๒๙)

$$k_1L = \pi \text{ เรเดียน}, \quad k_2L = 2\pi \text{ เรเดียน}, \quad k_3L = 3\pi \text{ เรเดียน ฯลฯ} \qquad (๒.๓๓)$$

$$\sigma_1L = \tfrac{1}{2} \text{ รอบ}, \quad \sigma_2L = 1 \text{ รอบ}, \quad \sigma_3L = 3/2 \text{ รอบ ฯลฯ} \qquad (๒.๓๔)$$

ความสัมพันธ์การกระจาย (Dispersion relation)

จากความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความยาวคลื่นสำหรับ normal modes ของเส้นเชือกไม่ยืดหยุ่น

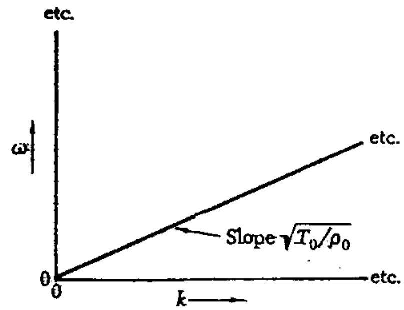
$$\nu = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}}\cdot\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}}\,\sigma ,$$

หรือ (คูณด้วย 2π)

$$\omega = \sqrt{\frac{T_o}{\rho_o}}\,k \qquad (๒.๓๕)$$

สมการ (๒.๓๕) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และเลขคลื่นสำหรับ normal modes ของเส้นเชือก ความสัมพันธ์นี้ให้ ω เป็นฟังก์ชันของ k เราเรียกว่า ความสัมพันธ์การกระจาย ซึ่งเป็นตัวบอกลักษณะและพฤติกรรมของคลื่นในระบบ คลื่นที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์การกระจาย

ω/k = ค่าคงที่ เรียกว่า "nondispersive waves" และเมื่อ ω/k ขึ้นกับความยาวคลื่นหรือความถี่ คลื่นนั้นเราเรียกว่า "dispersive" สำหรับ dispersive waves นิยมเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ω และ k ในตัวอย่างของเส้นเชือกไม่ยืดหยุ่นกราฟที่ได้จะเป็นเส้นตรงผ่านจุด $\omega = k = 0$ และมีความชัน เท่ากับ $(T_0/\rho_0)^{\frac{1}{2}}$ ดังแสดงในรูป ๒.๔



รูป ๒.๔ แสดงความสัมพันธ์การกระจายสำหรับเส้นเชือกต่อเนื่อง

จากสมการ (๒.๓๒) สำหรับ mode ใดๆ

$$\psi(z,t) = A_n \sin\omega_n t \sin k_n z \qquad (๒.๓๖)$$

๒.๓ การเคลื่อนที่ทั่วไปของเส้นเชือกต่อเนื่องและการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis)

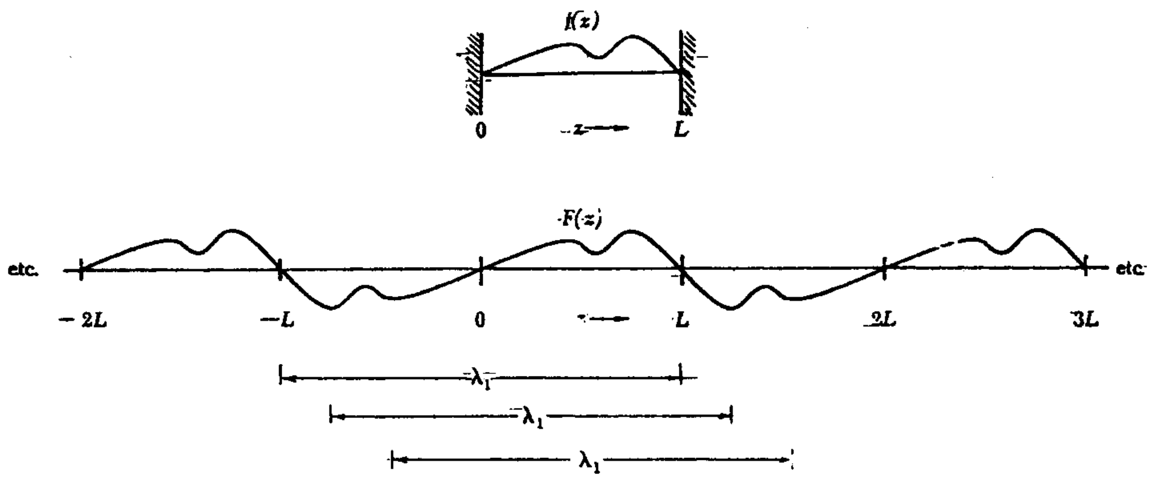
สถานะทั่วไปของการเคลื่อนที่ของเส้นเชือกต่อเนื่องเมื่อปลายทั้งสองถูกขึงตึงและสำหรับการสั่นตามขวางตามแกน x กำหนดด้วยการรวมกันได้ของ modes ทั้งหมดตั้งแต่ ๑,๒,... กับอัมปลิจูด A_1, A_2, A_3, ...และค่าคงที่เฟส ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3,.........

$$\psi(z,t) = A_1\sin k_1 z \cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2\sin k_2 z \cos(\omega_2 t+\phi_2) + .. \qquad (๒.๓๗)$$

ในที่นี้ค่า k_n ถูกเลือกให้สอดคล้องกับสภาวะขอบเขตที่ $z = 0$ และ $z = L$ และค่า ω_n มีความสัมพันธ์กับ k_n ด้วยความสัมพันธ์การกระจาย $\omega(k)$ ส่วนอัมปลิจูด A_n และค่าคงที่เฟส ϕ_n ซึ่งใช้อธิบายการเคลื่อนที่สำหรับทุกค่าบวก z และเวลา t ได้สมบูรณ์หาได้จากสภาวะเริ่มต้น คือการขจัดขณะใดๆ $\psi(z,t)$ และความเร็วขณะใดๆที่สัมพันธ์กัน $v(z,t) = \partial\psi(z,t)/\partial t$ สำหรับแต่ละตำแหน่ง z เมื่อ $t = 0$

<u>การเคลื่อนที่ของเส้นเชือกเมื่อปลายเชือกทั้งสองยึดแน่น</u>

สมมติว่าเมื่อเวลา $t < 0$ เราบังคับให้เส้นเชือกมีรูปร่างเป็นไปตาม $f(z)$ ตามรูป ๒.๕ เมื่อเวลา $t = 0$ เราให้เส้นเชือกเคลื่อนที่ทันทีและแต่ละส่วนของเส้นเชือกจะมีการขจัด $\psi(z,0)$ เท่ากับ $f(z)$ และมีความเร็ว $v(z,0)$ เท่ากับศูนย์ ขณะนี้พจน์ที่ n ในสมการ



รูป ๒.๔ การสร้างฟังก์ชันระยะซ้ำ $F(z)$ ด้วยคาบ $\lambda_1 = 2L$ จากฟังก์ชัน $f(z)$ ที่มีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะ o และ L

ของความเร็ว(ซึ่งเป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสมการ(๒.๓๖)) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\sin(\omega_n t+\phi_n)$ ซึ่งจะเหลือเพียง $\sin\phi_n$ ที่ $t = 0$ ดังนั้นเราสามารถทำให้ $v(z,0) = 0$ สำหรับทุกค่า z ได้ง่ายโดยกำหนดให้แต่ละค่าคงที่เฟส ϕ_n เท่ากับศูนย์หรือเท่ากับ π อย่างไรก็ตามถ้าค่าคงที่เฟส $\phi_1 = \pi$ จะสัมพันธ์กับพจน์ที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า A_1 ดังนั้นเราจึงสามารถกำหนดให้ค่าคงที่เฟสทั้งหมดเท่ากับศูนย์ได้ แต่ให้อัมปลิจูดเป็น A_1, A_2,...ฯลฯ มีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบ เราจะได้สภาวะเริ่มต้น $v(z,0) = 0$ สำหรับ

$$\psi(z,t) = A_1 \sin k_1 z \cos\omega_1 t + A_2 \sin k_2 z \cos\omega_2 t + \ldots\ldots$$

และที่ $t = 0$ $\quad \psi(z,0) = f(z) = A_1 \sin k_1 z + A_2 \sin k_2 z + \ldots\ldots\ldots \qquad$ (๒.๓๘)

<u>อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันที่ปลายทั้งสองเป็นศูนย์</u>

ฟังก์ชัน $f(z)$ อาจจะเป็นฟังก์ชันทั่วไปของ z เราเพียงแต่ต้องการใช้บังคับเส้นเชือกเท่านั้น ดังนั้นเราไม่เพียงแต่ต้องการให้ $f(z) = 0$ ที่ $z = 0$ และ $z = L$ เรายังต้องการทราบค่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันของ z ใดๆ คือเราต้องการว่า $f(z)$ ไม่เป็นเพียงมีรูป

ร่างเว้าๆแห่วงๆบนช่วงสั้นๆเท่านั้น เมื่อฟังก์ชันคลื่น $\psi(z,t)$ ถูกสมมติเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้าช้าของ z ดังนั้น f(z) จะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสม่ำเสมอและเป็นไปตามสมการอนุพันธ์แบบเดียวกับที่หาได้จากการประมาณแบบต่อเนื่อง ดังนั้นจึงมีเหตุผลที่ว่าฟังก์ชัน f(z) เป็นศูนย์ที่ z = 0 และ z = L สามารถกระจายออกในอนุกรมแบบสมการ(๒.๓๘) ซึ่งเป็นผลรวมของการออสซิลเลตแบบรูปไซน์(sinusoidal) สมการ(๒.๓๘) เรียกว่าเป็น อนุกรมฟูเรียร์หรือการกระจายฟูเรียร์(Fourier expansion) เป็นตัวอย่างพิเศษของอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้กับฟังก์ชัน f(z) เป็นศูนย์ที่ z = 0 และ L เท่านั้น

ฟังก์ชัน f(z) ในที่นี้ใช้สำหรับบังคับเส้นเชือกและถูกกำหนดอยู่ภายในช่วง z = 0 และ L เท่านั้น แต่ฟังก์ชัน $\sin k_1 z$, $\sin 2k_1 z$, $\sin 3k_1 z$,.... ฯลฯ เป็นอนุกรมอนันต์ของสมการ(๒.๓๙) และกำหนดใช้ได้กับทุกค่า z จาก $-\infty$ ถึง $+\infty$ ดังนั้น $\sin k_1 z$ จึงเป็นระยะซ้ำใน z ด้วยคาบ λ_1 หมายความว่ามันสอดคล้องกับสภาวะการเกิดขึ้นเป็นระยะ (periodicity condition) กล่าวคือสำหรับระยะ z ใดๆที่กำหนดมันจะต้องมีค่าที่ $z+\lambda_1$ เหมือนกับที่ z (คาบ λ_1 คือ 2L ในตัวอย่างของเรา) สำหรับฟังก์ชันใดซึ่งเกิดขึ้นซ้ำกับตัวมันเองอย่างสม่ำเสมอตลอดช่วงระยะทางหรือระยะเวลาที่กำหนดเราเรียกว่า periodic function และสามารถเขียนได้ในแบบ $f(z) = f(z \pm \lambda)$ เมื่อ λ เป็นช่วงหรือคาบ เราสังเกตได้ว่าฟังก์ชัน $\sin 2k_1 z$ ก็เป็นระยะซ้ำใน z ด้วยคาบ λ_1(ความจริงมันเคลื่อนที่ผ่านไป ๒ รอบในระยะทาง λ_1 ดังนั้นมันเป็นระยะซ้ำด้วยคาบ $\frac{1}{2}\lambda_1$ ซึ่งก็เหมือนกับเป็นระยะซ้ำด้วยคาบ λ_1 นั่นเอง) นั่นคือทุกฟังก์ชันในสมการ(๒.๓๘) เป็นระยะซ้ำใน z ด้วยคาบ λ_1 หรือสามารถกระจายตัวมันเองเป็นระยะซ้ำด้วยคาบ λ_1 และเราสามารถขยายทุกฟังก์ชันที่เป็นการกระจายฟูเรียร์ของสมการ(๒.๓๘) เป็นฟังก์ชันระยะซ้ำ F(z) ทั้งหมดด้วยคาบ λ_1 เป็นศูนย์ที่ z = 0 และ $z = \frac{1}{2}\lambda_1$ และสามารถกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ของแบบสมการ(๒.๓๙) จากฟังก์ชัน f(z) ที่กำหนดให้อยู่ภายใน z = 0 และ L เป็นศูนย์ที่จุดทั้งสอง เราสามารถสร้างฟังก์ชันระยะซ้ำ F(z) ซึ่งมีรูปอนุกรมฟูเรียร์แบบเดียวกับ f(z) ดังนี้คือ ระหว่าง z = 0 และ L เราให้ F(z) เป็นแบบเดียวกับ f(z) ทั้งตำแหน่งและลักษณะระหว่าง L และ 2L เราสร้าง F(z) โดยทำเป็นภาพเงากระจกหัวกลับของ f(z) ในตำแหน่งกระจกที่ z = L เราได้ฟังก์ชัน F(z) ระหว่าง z = 0 และ 2L ต่อไปเราทำซ้ำแบบเดียวกันในช่วงจาก z = 2L ถึงอนันต์จะได้ F(z)

สำหรับทุกค่า z ตามรูป ๒.๕

<u>การวิเคราะห์ฟูเรียร์ของฟังก์ชันระยะซ้ำของ z</u>

จากสมการ (๒.๓๘) สัมพันธ์กับฟังก์ชันที่เป็นระยะซ้ำด้วยคาบ λ_1 และเป็นศูนย์ที่ $z = 0$ และ $\frac{1}{2}\lambda_1$ อย่างไรก็ตามสภาวะที่ฟังก์ชันเป็นศูนย์ที่ $z = 0$ และ $\frac{1}{2}\lambda_1$ เป็นผลจากการเลือกสภาวะขอบเขตที่ว่าปลายทั้งสองของเส้นเชือกถูกยึดแน่นไว้ ถ้าหากปราศจากสภาวะขอบเขตเหล่านี้แล้วเราจะได้คำตอบสำหรับการสั่นของเส้นเชือกไม่ใช่มีเพียงแต่พจน์ $\sin mk_1 z$ แต่มีพจน์ $\cos mk_1 z$ รวมอยู่ด้วย ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นระยะซ้ำใน z ด้วยคาบ λ_1 เช่นเดียวกันแต่ไม่เป็นศูนย์ที่ $z = 0$ และ $\frac{1}{2}\lambda_1$ โดยรวมฟังก์ชันทั้งสองเข้าด้วยกันเราจะได้คำตอบทั่วไปสำหรับอนุกรมฟูเรียร์ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันระยะซ้ำ $F(z)$ ที่มีคาบ λ_1 กล่าวคือฟังก์ชันนั้นเป็นไปตาม $F(z+\lambda_1) = F(z)$ สำหรับทุกค่า z สามารถกระจายในอนุกรมฟูเรียร์เป็น

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n \sin n\frac{2\pi}{\lambda_1}z + B_n \cos n\frac{2\pi}{\lambda_1}z\right] \\
&= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\frac{2\pi}{\lambda_1}z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\frac{2\pi}{\lambda_1}z \\
&= B_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nk_1 z \qquad (๒.๓๙)
\end{aligned}
$$

<u>การหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์</u>

วิธีการหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์หรืออัมปลิจูด B_o, A_n และ B_n (สำหรับ n ทุกตัว) สำหรับฟังก์ชันระยะซ้ำ $F(z)$ เรียกว่า การวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis) ครั้งแรกเราหา B_o ก่อนดังนี้ อินติเกรทสมการ (๒.๓๙) ทั้งสองข้างตลอดครบรอบของ $F(z)$ กล่าวคือ เราอินติเกรทจาก $z = z_1$ ถึง $z = z_2$ ในเมื่อ z_1 เป็นค่าใดๆของ z และ $z_2 = z_1+\lambda_1$ และฟังก์ชัน $f(z)$ สมมติว่ารู้ค่าก่อนแล้ว ดังนั้นการอินติเกรทจาก z_1 ถึง z_2 ข้างซ้ายมือของสมการ (๒.๓๙) สามารถหาค่าได้ ต่อไปพิจารณาการอินติเกรทข้างขวามือของสมการ (๒.๓๙) มีพจน์ทั้งหมดเป็นอนันต์ดังนั้นจะมีจำนวนอินติกราลทั้งหมดเป็นอนันต์ด้วย พจน์แรกเป็น B_o ทำให้เกิดอินติกราล

$$\int_{z_1}^{z_2} B_o\, dz = B_o(z_2 - z_1) = B_o \lambda_1 \qquad (๒.๔๐)$$

ส่วนพจน์อื่นๆจะเป็นศูนย์ทั้งหมดเมื่ออินติเกรทครบหนึ่งรอบ ทั้งนี้เพราะว่า $\sin nk_1 z$ และ $\cos nk_1 z$ มีค่าเป็นบวกและเป็นลบต่างกันเสมอในระยะครบรอบใดๆทำให้การอินติเกรทมีค่าเป็นศูนย์

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin nk_1 z \, dz = 0 \quad ; \quad \int_{z_1}^{z_2} \cos nk_1 z \, dz = 0$$

ดังนั้นค่า B_o จะหาได้จาก

$$B_o \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} F(z) \, dz \qquad (๒.๔๑)$$

ต่อไปเราต้องการหาค่า A_m ในที่นี้ m เป็นค่าเฉพาะของ n มีค่าตั้งแต่หนึ่งถึงอนันต์ โดยการคูณสมการ(๒.๓๙)ทั้งสองข้างด้วย $\sin mk_1 z$ และอินติเกรทท้งสองข้างตลอดครบหนึ่งรอบพอดีของ F(z) อินติกราลข้างซ้ายมือของสมการสามารถคำนวณค่าออกมาได้เมื่อรู้ค่า F(z) มาพิจารณาอินติกราลข้างขวามือ พจน์แรกเป็นอินติกราลของ B_o คูณกับ $\sin mk_1 z$ และอินติเกรทเป็นศูนย์ เพราะว่ามันเป็นจำนวน m รอบพอดีของ $\sin mk_1 z$ ขณะนี้จะเหลือเพียงอินติกราลของ $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ และของ $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots\ldots$ พิจารณาพจน์เฉพาะที่เป็น $n = m$ อินติกราลของพจน์กำลังสองของ $\sin mk_1 z$ เฉลี่ยเป็น ½ ของหนึ่งคาบของความยาว λ_1 ของ F(z) (ซึ่งเป็นจำนวน m คาบพอดีของฟังก์ชัน $\sin mk_1 z$) จะได้เป็น $\frac{1}{2}A_m\lambda_1$ ส่วนพจน์อื่นๆอินติเกรทเป็นศูนย์ทั้งหมด เราเห็นได้ดังต่อไปนี้ พิจารณาสำหรับตัวอย่างของการอินติเกรทพจน์ $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ สำหรับ m ไม่เท่ากับ n สามารถเขียนได้เป็น

$$\sin nk_1 z \sin mk_1 z = \tfrac{1}{2} \cos(n-m)k_1 z - \tfrac{1}{2} \cos(n+m)k_1 z \qquad (๒.๔๒)$$

เมื่อ (n-m) และ (n+m) เป็นจำนวนเต็มแต่ละพจน์ทั้งสองทางขวามือของสมการ(๒.๔๒) จะมีค่าเป็นบวกและลบเสมอในคาบความยาว λ_1 ใดๆของ F(z) ดังนั้นทั้งสองพจน์จึงอินติเกรทแล้วเป็นศูนย์(ยกเว้นสำหรับกรณี $n = m$ ซึ่งเราได้พิจารณาเรียบร้อยแล้ว) ทำนองเดียวกันพจน์ของ $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$ อินติเกรทเป็นศูนย์โดยดูได้จากเอกลักษณ์

$$\cos nk_1 z \sin mk_1 z = \tfrac{1}{2} \sin(m+n)k_1 z + \tfrac{1}{2} \sin(m-n)k_1 z$$

ดังนั้นเราจะได้

$$\tfrac{1}{2} A_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sin mk_1 z \; F(z) \; dz \qquad (๒.๔๓)$$

ทำนองเดียวกันเราสามารถหาสัมประสิทธิ์ B_m ได้โดยการคูณทั้งสองข้างของสมการ(๒.๓๙) ด้วย $\cos mk_1 z$ และอินติเกรทตลอดหนึ่งคาบความยาว λ_1 ซึ่งจะได้

$$\tfrac{1}{2} B_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \cos mk_1 z \; F(z) \; dz \qquad (๒.๔๔)$$

เราได้ผลลัพธ์ตามสมการ(๒.๓๙),(๒.๔๑),(๒.๔๓),และ(๒.๔๔) ซึ่งเป็นสมการของ Fourier series และ Fourier coefficients

$$\begin{aligned} F(z) &= B_o + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1 z \\ B_o &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \; dz \\ A_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin mk_1 z \; dz \qquad (๒.๔๕) \\ B_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos mk_1 z \; dz \end{aligned}$$

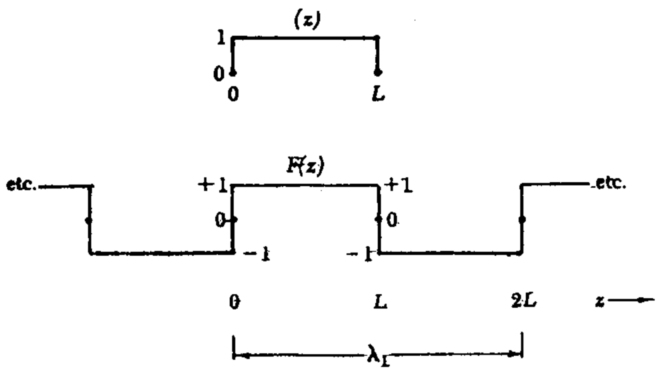
ในที่นี้ z_1 เป็นค่าใดๆของ z สมการ(๒.๔๕)บอกให้เรารู้ถึงวิธีวิเคราะห์ $F(z)$ แบบ Fourier และเป็นฟังก์ชันระยะซ้ำใดๆของ z มีคาบความยาว λ_1

<u>ตัวอย่าง</u> **Square wvae**

ให้ $f(z)$ เป็นศูนย์ที่จุด $z = 0$ และ $z = L$ แต่มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับ $0 < z < L$ ฟังก์ชันนี้มีตำแหน่งที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$ และ $z = L$ ดังนั้นมันจึงไม่ค่อยสอดคล้องกับเหตุผลที่เราได้สมมติไว้ข้างต้นว่ามันมีค่าสม่ำเสมอทุกจุด เราจึงไม่สามารถคาดคะเนได้ว่า Fourier series จะใช้แทน square wave ได้ดีอย่างสมบูรณ์

ฟังก์ชันระยะซ้ำ $F(z)$ ที่เราจะสร้างให้สอดคล้องกับรูป๒.๕ ได้โดยกำหนด $F(z) = 0$ สำหรับ $z = 0$ และเท่ากับ $+1$ สำหรับ $0<z<L$; และเท่ากับศูนย์สำหรับ $z = L$;

และเท่ากับ -1 สำหรับ $L < z < 2L$ ดังแสดงตามรูป ๒.๖



รูป ๒.๖ แสดงคลื่นจัตุรัส f(z) และ คลื่นจัตุรัสระยะซ้ำ F(z).

โดยใช้สมการ(๒.๔๕) เราสามารถหาค่าผลลัพธ์ออกมาได้ดังนี้ ค่าของฟังก์ชันกำหนดด้วย

$$F(z) = 1 \qquad \text{สำหรับ } o < z < L$$

และ

$$F(z) = -1 \qquad \text{สำหรับ } L < z < 2L$$

เมื่อคาบความยาวมีค่าเป็น $2L = \lambda_1$

ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมเป็น

$$B_o = \frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\,dz = \frac{1}{2L}\left(\int_o^L dz - \int_o^{2L} dz\right) = 0$$

เพราะว่า

$$\int_o^L dz = \int_L^{2L} dz$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+} F(z)\,\sin mk_1 z\,dz$$

$$= \frac{1}{L}\left(\int_o^L \sin mk_1 z\,dz - \int_L^{2L} \sin mk_1 z\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{Lmk_1}\left[\Big[\cos mk_1 z\Big]_L^o + \Big[\cos mk_1 z\Big]_{2L}^L\right]$$

$$= \frac{1}{Lmk_1}\left[(1 - \cos mk_1 L) + (1 - \cos mk_1 L)\right]$$

เพราะว่า $k_1 = \frac{2}{\lambda_1} = \frac{\pi}{L}$ ดังนั้นจะได้ค่า $A_m = 0$ สำหรับ m เป็นเลขคู่ และ $A_m = \frac{4}{m\pi}$ สำหรับ m เป็นเลขคี่ $A_m = \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{5\pi}, \frac{4}{7\pi}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

และ

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos mk_1z\,dz$$

$$= \frac{1}{L}\left(\int_0^L \cos mk_1z\,dz - \int_L^{2L}\cos mk_1z\,dz\right) = 0$$

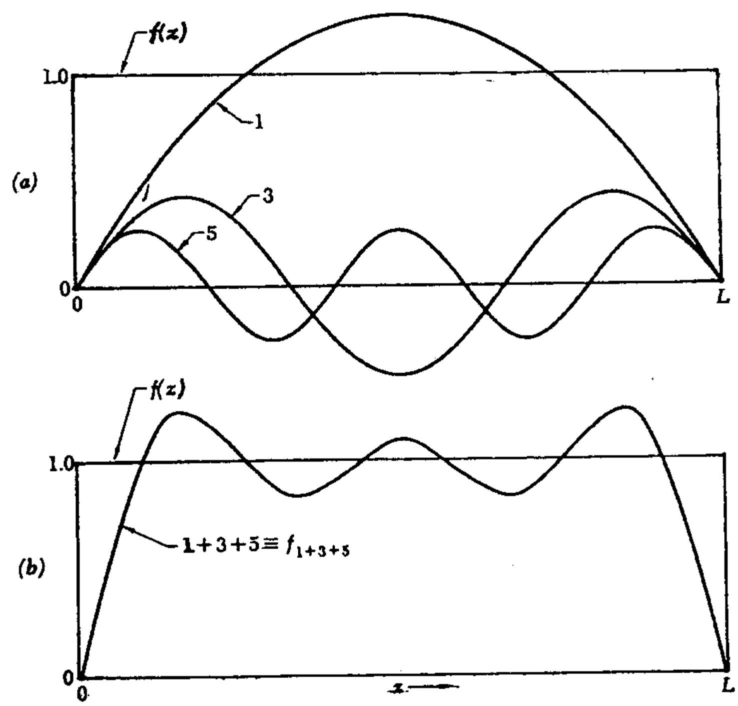
เพราะว่า

$$\int_0^{2L}\cos mk_1z\,dz = \int_L^{2L}\cos mk_1z\,dz = 0$$

ดังนั้น Fourier series ที่ใช้แทน square wave กำหนดด้วย

$$F(z) = \frac{4}{\pi}\left(\sin k_1z + \frac{\sin 3k_1z}{3} + \frac{\sin 5k_1z}{5} + \frac{\sin 7k_1z}{7} + \ldots\right)$$

$$= 1.273\sin\frac{\pi z}{L} + 0.424\sin\frac{3\pi z}{L} + 0.255\sin\frac{5\pi z}{L} +,.(๒.๕๖)$$



รูป ๒.๗ การวิเคราะห์ฟูเรียร์ของคลื่นจัตุรัส f(z). (a) คลื่นจัตุรัส f(z) และสาม mode แรกของฟูเรียร์แทนด้วยหมายเลข 1, 3, 5 (b) คลื่นจัตุรัสและคลื่นรวมกันได้ f_{1+3+5}

ในรูป ๒.๗ แสดงการวิเคราะห์ฟูเรียร์ ของ square wave f(z) รูป (a) เป็น square wave f(z) และสามพจน์แรกของ อนุกรมฟูเรียร์ หมายเลข 1, 3 และ 5 หมายถึง normal modes 1, 3, 5 รูป (b) เป็น square wave f(z) และการรวมกันของ f_{1+3+5} สามพจน์แรกขององค์ประกอบฟูเรียร์

<u>อนุกรมฟูเรียร์สำหรับช่วงความยาวใดๆ</u>

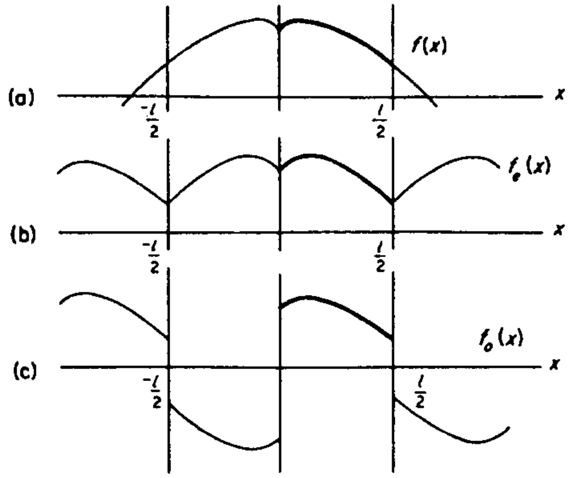
ถึงแม้ว่าเราได้ศึกษาอนุกรมฟูเรียร์ในพจน์ของฟังก์ชันระยะซ้ำแล้วก็ตาม แต่การประยุกต์ใช้นั้นเราจำเป็นต้องทราบความรู้มูลฐานมากขึ้นกว่านี้ กล่าวคือสำหรับตอนหรือช่วงความยาวใดๆของฟังก์ชันที่สม่ำเสมอเราอาจจะเลือกหรือแสดงในพจน์ของอนุกรมฟูเรียร์ได้ โดยที่อนุกรมนั้นจะต้องใช้แทนฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้องโดยเฉพาะภายในช่วงความยาวที่เลือกไว้เท่านั้น แต่ถ้าใช้กับภายนอกช่วงนั้นแล้วมันจะไม่เป็นไปตามค่าฟังก์ชันก็ได้และแสดงค่าของฟังก์ชันเป็นคาบซ้ำๆกันในช่วงระยะที่เลือกไว้ ถ้าเราแทนช่วงเหล่านี้ด้วยอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ ลักษณะที่ได้เป็นฟังก์ชันคู่(even function) แต่ถ้าเราแทนช่วงระยะเหล่านั้นด้วยอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ลักษณะที่ได้เป็นฟังก์ชันคี่(odd function)

สมมติว่าเรากำลังสนใจลักษณะอาการของฟังก์ชันบนครึ่งหนึ่งของตลอดช่วงยาวทั้งหมด ลักษณะอาการที่เกิดนอกบริเวณเหล่านี้เราไม่ต้องสนใจ ในรูป ๒.๘ ฟังก์ชัน f(x) ได้แสดงค่าฟังก์ชันทั้งหมดในช่วง $-\ell/2$ ถึง $+\ell/2$ แต่ช่วงที่เราสนใจคือค่า f(x) ที่แสดงจากค่า 0 ถึง $+\ell/2$ เราสามารถเขียนด้วยค่าทั้งฟังก์ชันโคไซน์ซึ่งสามารถแทนตัวมันในแต่ละครึ่งช่วงเป็นฟังก์ชันคู่ หรือแสดงด้วยฟังก์ชันไซน์ที่สามารถแทนตัวมันเองในแต่ละครึ่งช่วงเป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นในครึ่งช่วงตั้งแต่ 0 ถึง $+\ell/2$ เราสามารถเขียนด้วย

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x) \qquad (๒.๕๗)$$

ตัวอักษรกำกับ e และ o คือ even (cosine) หรือ odd (sin) แทนฟูเรียร์ฟังก์ชันตามลำดับค่า argument ของไซน์และโคไซน์ต้องเป็นมุมเฟสและตัวแปรค่า x ต้องวัดเป็นเรเดียน ดังนั้นตลอดช่วงยาวของรอบเป็นระยะทางและมีการเปลี่ยนแปลงด้วยค่า $2\pi x/\ell$ กล่าวคือแต่ละครั้งที่ x เปลี่ยนค่าไปเป็นระยะ ℓ มุมเฟสเปลี่ยนไปด้วย 2π

$$f_e(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{\ell} \qquad (๒.๕๘)$$



รูป ๒.๘ แสดงฟูเรียร์ครึ่งช่วง

(a) ฟังก์ชันทั่วไปในช่วง $0<x<l/2$

(b) ฟังก์ชันคู่ หรือฟังชันอนุกรมโคไซน์

(c) ฟังก์ชันคี่ หรือฟังก์ชันอนุกรมไซน์

เมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\text{ ของช่วง}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\,dx \qquad (๒.๔๙)$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f_e(x)\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_e(x)\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{\ell}\int_{0} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{\ell}\,dx$$

เพราะว่า $f(x) = f_e(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $\ell/2$

และ $f(x) = f(-x) = f_e(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $-\ell/2$

ทำนองเดียวกันเราสามารถแทน $f(x)$ ด้วย sine series

$$f(x) = f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nx}{\ell} \qquad (๒.๕๐)$$

ในระยะ $x = 0$ ถึง $\ell/2$ ด้วย

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\text{ของช่วง}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f_o(x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_o(x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx\right]$$

ในพจน์อินติกราลที่สอง $f_o(x) = f(x)$ ในช่วงจาก 0 ถึง $\ell/2$ ซึ่ง

$$\int_{\frac{1}{2}}^{0} f_o(x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0} f_o(-x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} f_o(x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx$$

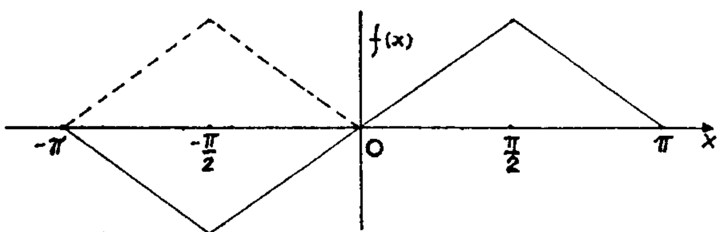
$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} f_0(-x)\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx$$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{4}{\ell}\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\ \sin\frac{2\pi nx}{\ell}\ dx$$

ถ้าเราพิจารณา $f_e(x)$ และ $f_o(x)$ นอกบริเวณครึ่งช่วงของ 0 ถึง $\ell/2$ (ตามรูป ๒.๘) จะเห็นได้ว่ามันไม่ใช่ $f(x)$

ตัวอย่าง ๒ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชันสามเหลี่ยม



รูป ๒.๙ แสดงค่าฟังก์ชันที่เราอธิบายด้วยอนุกรมไซน์ในครึ่งช่วงตั้งแต่ 0 ถึง π ฟังก์ชันนั้นคือ

$$f(x) = x \quad (0 < x < \pi/2)$$

$$= \pi - x \quad (\pi/2 < x < \pi) \qquad (๒.๔๑)$$

เราเขียน $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันของอนุกรมไซน์คือ

$$f(x) = \Sigma\, b_n \sin nx$$

โดยที่

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} x \sin nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\ \sin nx\ dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ ดังนั้นพจน์จำนวนเต็มคี่ของ n คือ

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots\ldots\ldots \right) \qquad (๒.๔๒)$$

ให้สังเกตว่าที่ $x = \frac{\pi}{2}$ ค่า $f(x) = \frac{\pi}{2}$ ด้วยทำให้

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (๒.๔๓)$$

ตัวอย่าง ๓ การประยุกต์ใช้กับพลังงานใน normal modes ของเส้นลวดยาว

ถ้าเรามีเส้นลวดยาว ℓ ตรึงให้แน่นที่ปลายลวดทั้งสองข้างและขมวดตรงกลางระยะเป็น d เราจะได้ลักษณะของครึ่งช่วงจาก 0 ถึง π ตามรูป ๒.๙ ซึ่งเราแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ปรับระบบเส้นลวดจนกระทั่งได้ normal modes หรือได้ลักษณะการสั่นแบบคลื่นนิ่งในแต่ละครึ่งช่วงยาวและการขจัดเป็นไปตามสมการ (๒.๓๖) ของ mode ใดๆ

$$\psi_n = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \sin\frac{\omega_n x}{v}$$

เมื่อ $\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}$ เป็นความถี่ normal mode

การขจัดทั้งหมดที่ใช้แทนรูปร่างของเส้นลวดที่ถูกขมวดกำหนดด้วยอนุกรมฟูเรียร์

$$\psi = \Sigma\,\psi_n = \Sigma(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{\omega_n}{v}x$$

หรือ $$\psi_o(x) = \Sigma\,\psi_n(x) = \Sigma(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{\omega_n}{v}x$$

เมื่อเวลา $t = 0$ $$= \Sigma A_n \sin\frac{\omega_n}{v}x \qquad (๒.๔๔)$$

ทำนองเดียวกันเราอาจจะเขียนความเร็วของเส้นลวดที่เวลา $t = 0$ เป็น

$$v_o(x) = \frac{\partial\psi_0(x)}{\partial t} = \Sigma\,\dot{\psi}_n(x)$$

$$= \Sigma(-\omega_n A_n \sin\omega_n t + \omega n B_n \cos\omega_n t)\sin\frac{\omega_n}{v}x$$

$$= \Sigma\omega_n B_n \sin\frac{\omega_n}{v}x \quad \text{ที่ } t = 0 \qquad (๒.๔๔)$$

ทั้ง $\psi_o(x)$ และ $v_o(x)$ สามารถเขียนเป็นอนุกรมฟูเรียร์ได้ ถ้าเส้นลวดหยุดนิ่งเมื่อเวลา $t = 0$ หรือ $v_o(x) = 0$ ทำให้สัมประสิทธิ์ B_n ทั้งหมดเป็นศูนย์เหลือเพียง A_n และถ้าการขจัดของเส้นลวดเป็น $\psi_o(x) = 0$ ที่เวลา $t = 0$ ขณะเส้นลวดกำลังเคลื่อนที่ ดังนั้น A_n ทั้งหมดเป็นและสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เป็น $\omega_n B_n$

เราสามารถหาค่าตอบทั้ง A_n และ $\omega_n B_n$ ตามวิธีที่แล้วมาคือ

$$\psi_o(x) = \Sigma A_n \sin \frac{\omega_n}{v} x$$

และ

$$v(x) = \Sigma \omega_n B_n \sin \frac{\omega_n}{v} x$$

สำหรับเส้นลวดที่มีความยาว ℓ ดังนั้น

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_o^{\ell} \psi_o(x) \sin \frac{\omega_n}{v} x \, dx$$

และ

$$\omega_n B_n = \frac{2}{\ell} \int_o^{\ell} v_o(x) \sin \frac{\omega_n}{v} x \, dx \qquad (๒.๕๖)$$

ถ้าเส้นลวดที่ถูกขมวดมีมวลเป็น M ความหนาแน่นตามยาวเป็น ρ และถูกกำหนดให้หยุดนิ่งเมื่อเวลา $t = 0$ ($v_o(x) = 0$) พลังงานที่มีในมวลในแต่ละ normal mode ของการสั่นมีค่าเป็น

$$E_n = \frac{1}{4} M\omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

เหลือเพียง

$$E_n = \frac{1}{4} M\omega_n^2 A_n^2 \qquad (๒.๕๗)$$

เพราะว่า B_n ทั้งหมดเป็นศูนย์ พลังงานการสั่นทั้งหมดของเส้นลวดจะเป็นผลรวม ΣE_n ของทุก mode ที่ปรากฏในการสั่น

ต่อไปเป็นการแก้ปัญหาของระบบเส้นลวดที่ถูกขมวดมีสภาวะหยุดนิ่งเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ตามรูป ๒.๙ (เส้นลวดยาว ℓ ขมวดตรงกลางระยะ d) กำหนดด้วย

$$\psi_0(x) = \frac{2dx}{\ell} \qquad 0 \le x \le \frac{\ell}{2}$$

$$= \frac{2d(\ell - x)}{\ell} \qquad \frac{\ell}{2} \le x \le \ell \qquad (๒.๕๘)$$

ดังนั้น $$A_n = \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2} \frac{2d}{\ell}\, x \sin\frac{\omega_n x}{v}\, dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{2d(\ell-x)}{\ell} \sin\frac{\omega_n x}{v}\, dx\right]$$

$$= \frac{8d}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} \qquad (\text{สำหรับ } \omega_n = \frac{n\pi v}{\ell})$$

เราเห็นได้ว่า $A_n = 0$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มคู่ (เมื่อพจน์ sine เป็นศูนย์) ดังนั้นการขจัดสำหรับเส้นลวดที่ถูกขมวดกำหนดด้วยผลบวกของพจน์จำนวน mode เลขคี่

$$\psi_o(x) = \sum_{n\,\text{เลขคี่}} \psi_n(x) = \sum_{n\,\text{เลขคี่}} A_n \sin\frac{\omega_n}{v} x$$

เมื่อ $$A_n = \frac{8d}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} \qquad n = \text{เลขคี่}$$

พลังงานของ mode ที่ n ของการออสซิลเลตคือ

$$E_n = \frac{1}{4} M\omega_n^2 A_n^2 = \frac{64\, d^2 M\omega_n^2}{4(n^2\pi^2)^2} \qquad (๒.๕๙)$$

และพลังงานทั้งหมดของการสั่นเป็น $E = \sum_{n\,\text{เลขคี่}} E_n = \frac{16d^2M}{\pi^4} \sum_{n\,\text{เลขคี่}} \frac{\omega_n}{n^4} = \frac{16d^2v_n^2}{\pi^2\ell^2} \sum_{n\,\text{เลขคี่}} \frac{1}{n^2}$

สำหรับ $$\omega_n = \frac{n\pi v}{\ell} \qquad (๒.๖๐)$$

แต่จากตัวอย่างที่แล้ว $$\sum_{n\,\text{เลขคี่}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ดังนั้น $$E = \Sigma E_n = \frac{2Mv^2d^2}{\ell^2} = \frac{2Td^2}{\ell} \qquad (๒.๖๑)$$

ในที่นี้ $T = \rho v^2$ เป็นแรงดึงคงที่ในเส้นลวดขณะสมดุลย์

พลังงานการสั่นสะเทือนเมื่อไม่ได้สูญเสียไปในทางใดทางหนึ่งแล้วต้องเท่ากับพลังงานศักย์ของเส้นลวดที่ถูกขึงดึงไว้ก่อนที่จะปล่อยให้มีการเคลื่อนที่อย่างอิสระ และท่านผู้อ่านสามารถพิสูจน์ข้อความนี้ได้

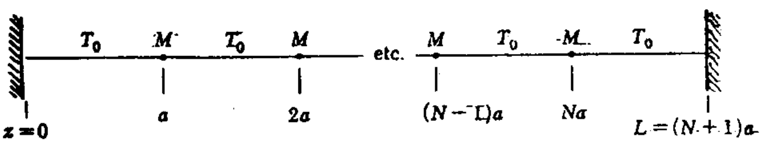
สรุปได้ว่า อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ใช้แทนอาการเคลื่อนที่ทั้งหมดของเส้นลวดที่ถูกขึงดึงไว้แล้วปล่อยให้เคลื่อนที่อย่างอิสระ แต่ละส่วนของอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ให้ค่า normal mode ที่เป็นไปได้ของการสั่น พลังงานทั้งหมดของการสั่นเป็นผลรวมของพลังงานที่เกิดจากแต่ละ

normal mode และต้องเท่ากับพลังงานศักย์ของเส้นลวดที่ถูกขึงตึงก่อนปล่อยให้มีการเคลื่อนที่ พลังงานของ n^{th} mode เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ n^{-2} ดังนั้นมันมีค่าลดลงขณะที่ความถี่มีค่ามากขึ้น และจะไม่ปรากฏว่ามี mode เลขคู่เมื่อเราคำนึงถึงสภาวะขอบเขตเริ่มต้น

๒.๔ mode ของระบบไม่ต่อเนื่องด้วยจำนวน N ดีกรีออฟฟรีดอม

ในตอน ๒.๒ เราได้พิจารณาเส้นเชือกยาวต่อเนื่องซึ่งเป็นระบบที่มีจำนวนดีกรีออฟฟรีดอมเป็นอนันต์ ได้ความสัมพันธ์การกระจายคือ $\omega/k =$ ค่าคงที่ แต่ในระบบกลไกที่เป็นจริงไม่มีจำนวนดีกรีออฟฟรีดอมเป็นอนันต์อย่างแท้จริง ในตอนนี้เราจะหาคำตอบที่แท้จริงสำหรับ mode ของระบบเส้นเชือกลูกปัดที่มีจำนวน N ลูกปัดร้อยในเส้นเชือกห่างกันอย่างสม่ำเสมอและตึงแน่นกับที่ตรงปลายทั้งสองของเส้นเชือก ในบางกรณีเราอาจจะให้ N เป็นจำนวนอนันต์ เราจะได้คลื่นนิ่งแบบเดียวกับที่เราหาได้ในตอน ๒.๒ ผลที่ได้จากระบบใหม่มีที่น่าสนใจมากคือ กฎการกระจายซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความยาวคลื่นที่เราหาได้สำหรับเส้นลวดต่อเนื่องที่ว่า ω เท่ากับค่าคงที่คูณกับ k ไม่เป็นความจริงเสมอไป ในตัวกลางที่เป็นไปตามความสัมพันธ์การกระจายข้างต้นคือ ω เท่ากับค่าคงที่คูณกับ k เรียกว่า nondispersive ส่วนตัวกลางที่ไม่เป็นไปตามความสัมพันธ์การกระจายดังกล่าวเรียกว่า dispersive พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

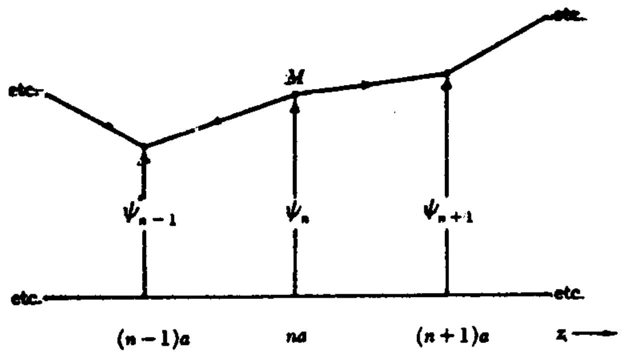
<u>ตัวอย่าง ๔</u> การออสซิลเลตตามขวางของเส้นเชือกลูกปัด



รูป ๒.๑๐ แสดงลักษณะเส้นเชือกลูกปัด

เส้นเชือกถูกขึงตึงแน่นที่ตำแหน่ง $z = 0$ และ L มีลูกปัดร้อยกับเส้นเชือกทั้งหมด N ลูกปัด ลูกปัดเหล่านี้อยู่ที่ตำแหน่ง $z = a, 2a, \ldots\ldots\ldots\ldots Na$ และมีมวล M เท่ากันหมด เส้นเชือกยาว L เท่ากับ $(N+1)a$ แต่ละส่วนของเส้นเชือกมีลักษณะเหมือนกันและมีแรงตึงขณะสมดุลย์เป็น T_0 พิจารณาลักษณะทั่วไปตามรูป ๒.๑๑ (ไม่เป็นลักษณะทั่วไปอย่างสมบูรณ์ ทั้งนี้เพราะว่าเราพิจารณาเฉพาะการออสซิลเลตตามขวางตามแกน x เท่านั้น ภายหลังเราจึงจะพิจารณา

การออสซิลเลตตามยาวตามแกน z ดังนั้นการเคลื่อนที่ทั่วไปจึงเป็นการรวมกันได้ของการออสซิลเลตตามยาวตามแกน z และการออสซิลเลตตามขวางตามแกน x และ y) การขจัดของลูกปัดตัวที่ n พุ่งขึ้น(ตามรูป ๒.๑๑) จากตำแหน่งสมดุลย์เป็น $\psi_n(t)$ เมื่อ n = 1, 2, 3,....,N-1, N เรามาสนใจเฉพาะลูกปัดใดๆตัวที่ n และลูกปัดที่อยู่ข้างเคียงคือ n-1 (ถัดไปทางซ้าย) และ n+1 (ถัดไปทางขวา)



รูป ๒.๑๑ แสดงลักษณะของเส้นเชือกลูกปัดสำหรับการออสซิลเลตตามขวางทาง x

สมการของการเคลื่อนที่ เราต้องการสมการของการเคลื่อนที่สำหรับลูกปัดตัวที่ n ซึ่งเราเคยแก้ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกับปัญหาแบบนี้มาแล้ว (ในตอน ๑.๒ สำหรับหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอมและตอน ๑.๔ สำหรับสองดีกรีออฟฟรีดอม) ดังนั้นจึงเป็นการง่ายที่จะแสดงว่าสำหรับทั้งการประมาณแบบสลิงกีและการประมาณแบบการออสซิลเลตเพียงเล็กน้อยสามารถใช้กับการเคลื่อนที่ของลูกปัดตัวที่ n ได้ สมการของการเคลื่อนที่จากกฎของนิวตันคือ

$$M\frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2} = T_o\left[\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a}\right] - T_o\left[\frac{\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)}{a}\right] \qquad (๒.๖๒)$$

สมการ(๒.๖๒) เป็นสมการที่สมบูรณ์ทั่วไป กล่าวคือมันเป็นจริงสำหรับการเคลื่อนที่ใดๆของระบบการออสซิลเลตอย่างอิสระรวมทั้งเป็นจริงสำหรับการรวมกันได้ของ mode ต่างๆ N modes เข้าด้วยกัน

Normal modes ต่อไปเราต้องการหาความถี่และลักษณะอาการต่างๆของแต่ละ mode เหล่านั้น เราสมมติว่าการออสซิลเลตของระบบมีเพียง mode เดียวด้วยความถี่ ω ภายใน mode นั้นแต่ละลูกปัดออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกด้วยความถี่ ω เท่ากันและมีค่าคงที่เฟส φ เดียวกัน

รูปร่างของ mode ถูกกำหนดด้วยอัตราส่วนของอัมปลิจูดของลูกปัดเหล่านั้น ดังนั้นเรากำหนดให้ A_n เป็นอัมปลิจูดของการสั่นสำหรับลูกปัด n ใน mode ที่เรากำลังพิจารณา เราได้

$$\psi_1(t) = A_1\cos(\omega t+\phi) \quad ; \quad \psi_2(t) = A_2\cos(\omega t+\phi) \ ;$$

$$\psi_{n-1}(t) = A_{n-1}\cos(\omega t+\phi) \quad ; \quad \psi_n(t) = A_n\cos(\omega t+\phi) \ ;$$

$$\psi_{n+1}(t) = A_{n+1}\cos(\omega t+\phi) \ ; \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (๒.๖๓)$$

จากสมการ (๒.๖๓) เราได้

$$\frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2} = -\omega^2\psi_n(t) = -\omega^2 A_n\cos(\omega t+\phi) \qquad (๒.๖๔)$$

แทนค่า สมการ (๒.๖๔) ลงทางข้างซ้ายมือของสมการ (๒.๖๒) และแทนสมการ (๒.๖๓) ลงทางข้างขวามือแล้วตัดพจน์เหมือนที่เป็นเฟคเตอร์ร่วม $\cos(\omega t+\phi)$ ออกตลอดสมการ คงเหลือเพียง

$$-M\omega^2 A_n = \frac{T_o}{a}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1})$$

หรือ

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n(2 - \frac{Ma}{T_o}\,\omega^2) \qquad (๒.๖๕)$$

สมการ (๒.๖๕) เป็นสมการขั้นมูลฐาน ต่อไปพิจารณาเริ่มจากมวลแรก n = 1 และมวลถัดไปจนตลอดเส้นเชือก ได้กลุ่มของสมการที่คล้ายกันจากการสมมติค่า n = 1, 2, 3, ..., N และต้องคำนึงด้วยว่าเนื่องจากที่ปลายทั้งสองของเส้นเชือกถูกดึงแน่นไว้ ดังนั้น

$$\psi_o = A_o = 0 \quad \text{และ} \quad \psi_{N+1} = A_{N+1} = 0$$

เมื่อ n = 1 สมการ (๒.๖๕) กลายเป็น

$$(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o})\,A_1 - A_2 = 0 \qquad (A_o = 0)$$

เมื่อ n = 2 เราได้

$$-A_1 + (2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o})\,A_2 - A_3 = 0$$

และเมื่อ n = N เราได้

$$-A_{n-1} + (2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o})\,A_N = 0 \qquad (A_{N+1} = 0)$$

เราได้กลุ่มของ N สมการซึ่งเมื่อหาคำตอบของสมการเหล่านั้นจะได้ค่าของ ω^2 ต่างๆกัน N ค่า แต่ละค่าของ ω^2 คือความถี่ของ normal mode จำนวนของ normal mode มีค่าเท่ากับจำนวนของมวล คำตอบจริงของกลุ่ม N สมการเหล่านี้เราต้องหาโดยใช้ทฤษฎีของเมตริกส์ (theory of matrices) อย่างไรก็ตามเราอาจหาคำตอบของสมการโดยใช้วิธีธรรมดาอย่างง่ายสำหรับหนึ่งหรือสองมวลบนเส้นเชือก(n = 1 หรือ 2) และเป็นไปได้ที่เราจะหาคำตอบอย่างสมบูรณ์สำหรับ N มวลโดยไม่จำเป็นต้องใช้วิชาคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากจนเกินไปได้ดังนี้

เมื่อ N = 1 มีหนึ่งมวลบนเส้นเชือกยาว 2a เราต้องการเพียงสมการสำหรับ n = 1 ที่ปลายทั้งสองของเส้นเชือกถูกตึงแน่น ให้ $A_o = A_2 = 0$

เราได้

$$\left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o}\right) A_1 = 0$$

หรือ

$$\omega^2 = \frac{2T_o}{Ma} \qquad (๒.๖๖)$$

ได้ค่าของความถี่ของการสั่นเพียงค่าเดียว

เมื่อ N = 2 เส้นเชือกยาว 3a เราต้องการสมการสำหรับทั้ง n = 1 และ n = 2 ได้

$$\left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o}\right) A_1 - A_2 = 0$$

และ

$$-A_1 + \left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o}\right) A_2 = 0 \qquad (A_o = A_3 = 0)$$

กำจัด A_1 หรือ A_2 แสดงว่าทั้งสองสมการสามารถหาคำตอบได้เมื่อ

$$\left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o} - 1\right)\left(2 - \frac{Ma\omega^2}{T_o} - 1\right) = 0$$

ดังนั้นมีสองความถี่ normal mode

$$\omega_1^2 = \frac{T_o}{Ma} \qquad \text{และ} \qquad \omega_2^2 = \frac{3T_o}{Ma} \qquad (๒.๖๗)$$

โดยใช้ค่าของ ω_1 ในสมการสำหรับ n = 1 และ n = 2 ให้ $A_1 = 2$ แสดงว่าการออสซิลเลตอย่างช้าของมวลไปทางเดียวกันและพร้อมกัน ตรงกันข้ามกับค่า ω_2 ซึ่งให้ $A_1 = -A_2$

เป็นการออสซิลเลตอย่างเร็วไปทางตรงกันข้าม

เพื่อหาคำตอบทั่วไปสำหรับค่าใดๆของ N ให้เราเขียนสมการ (๒.๖๕) ใหม่เป็นแบบ

$$\frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{A_n} = \frac{2\omega_o^2 - \omega^2}{\omega_o^2} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \omega_o^2 = \frac{T_o}{Ma}$$

เราเห็นได้ว่าสำหรับค่าที่แน่นอนค่าใดค่าหนึ่งของความถี่ normal mode ω (เรียกว่า ω_s) ข้างขวามือของสมการนี้เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับค่า n ดังนั้นสมการนี้ใช้ได้กับทุกค่าของ n แต่ค่า A_n จะเป็นอย่างไรนั้นเราต้องพิจารณาให้สอดคล้องกับสมการนี้ และต้องเป็นไปตามสภาวะขอบเขต $A_o = A_{N+1} = 0$ ที่ปลายทั้งสองของเส้นเชือก โดยอาศัยจากคำตอบสำหรับ mode ของเส้นเชือกต่อเนื่องและขึงตึงที่ปลายทั้งสองที่ z = 0 และ L เราพบว่า

$$A(z) = A \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = A \sin kz$$

ในคำตอบสำหรับ A_n ต้องมีลักษณะคล้ายกันเราอาจจะหาได้โดยกำหนดให้ z = na ในสมการข้างบน

$$A_n = C \sin \frac{2\pi na}{\lambda} = A \sin kna \qquad (๒.๖๘)$$

ดังนั้น

$$\frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{A_n} = \frac{C\{\sin k(n-1)a + \sin k(n+1)a\}}{C \sin kna} = \frac{2C \sin kna \cos ka}{C \sin kna}$$

$$= 2\cos ka$$

ซึ่งเป็นค่าคงที่และไม่ขึ้นกับ n ค่าของ ka (ที่ค่า ω_s) เราหาค่าได้ง่ายจากสภาวะขอบเขต

$$A_o = A_{N+1} = 0$$

สำหรับ $\quad A_o = C \sin 0 = 0 \qquad$ (ที่ n = 0)

และ $\quad A_{N+1} = C \sin(N+1)ka = 0$

เมื่อ $\quad (N+1)ka = s\pi \qquad$ สำหรับ s = 1, 2, ...N

$$k_s a = \frac{s\pi}{N+1}$$

และ

$$A_n = C \sin k_s a = C \sin \frac{ns\pi}{N+1} \qquad (๒.๖๙)$$

ซึ่งเป็นอัมปลิจูดของมวลตัวที่ n ด้วยความถี่ ω_s ของ normal mode ค่าใดค่าหนึ่ง หาค่าที่เป็นไปได้ของ ω_s เราเขียน

$$\frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{A_n} = \frac{2\omega_o^2 - \omega_s^2}{\omega_o^2} = 2\cos k_s a = 2\cos\frac{s\pi}{N+1}$$

ได้

$$\omega_s^2 = 2\omega_o^2\{ 1 - \cos\frac{s\pi}{N+1} \} \qquad (๒.๓๐)$$

ค่า s อาจมีค่าตั้งแต่ s = 1, 2, ...N และ $\omega_o^2 = \frac{T_o}{Ma}$

ให้สังเกตว่าค่าความถี่มากที่สุดของการสั่น $\omega_s = 2\omega_o$ เราเรียกว่าความถี่ "cut off" และเป็นความถี่สูงสุดที่บอกลักษณะของระบบออสซิลเลตประกอบด้วยมวลคล้ายทั้งหมดออสซิลเลตซ้ำกันเป็นคาบตลอดโครงสร้างของระบบ

สรุป เราได้ normal mode ของการออสซิลเลตที่ N มวลคู่ควบกันบนเส้นเชือก มีความถี่เป็น

$$\omega_s^2 = \frac{2T_o}{Ma}\{1 - \cos\frac{s\pi}{N+1}\} \qquad (s = 1, 2, 3,....N)$$

หรืออาจเขียนอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$\omega_s^2 = \frac{2T_o}{Ma}\{ 1 - \cos k_s a \}$$

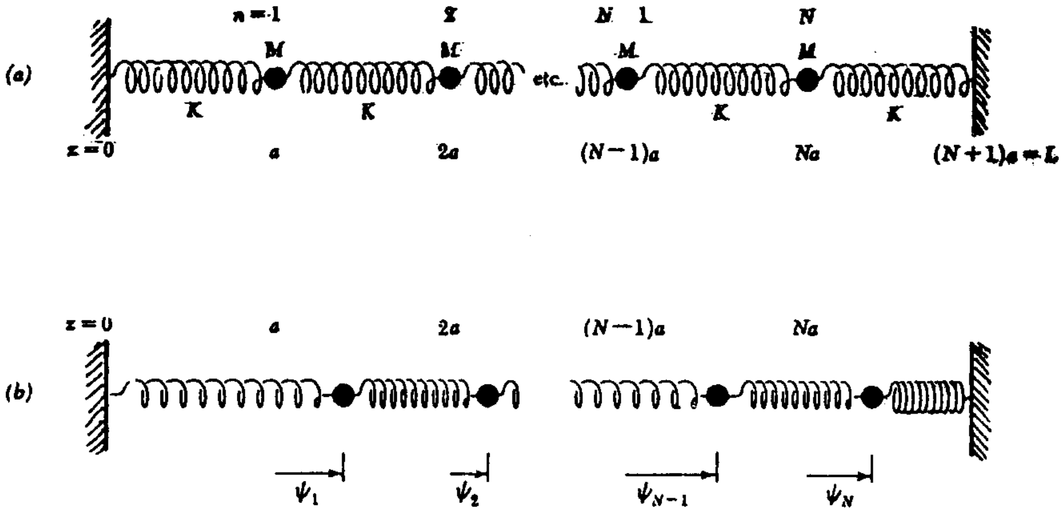
$$= \frac{2T_o}{Ma}\{1 - (\cos^2\frac{k_s a}{2} - \sin^2\frac{k_s a}{2})\}$$

$$\omega_s^2 = \frac{4T_o}{Ma}\sin^2\frac{k_s a}{2} \qquad (๒.๓๑)$$

สมการนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความยาวคลื่น(หรือจำนวนคลื่น) สำหรับ mode ที่มีความถี่เชิงมุม ω_s เป็นความสัมพันธ์การกระจายสำหรับเส้นเชือกลูกปัด

<u>ตัวอย่าง ๕</u> การออสซิลเลตตามยาวของระบบสปริงและมวล

เราได้ศึกษาระบบสปริงและมวลในกรณี N = 1 และ 2 ในตอน ๑.๒ และ ๑.๔ ตามลำดับมาแล้ว ต่อไปเรามาพิจารณากรณีทั่วไปของ N มวลควบคู่ด้วยสปริงดังในรูป ๒.๑๒



รูป ๒.๑๒ การออสซิลเลตตามยาวของ N มวล และ N + 1 สปริง

สมการของการเคลื่อนที่ของลูกปัดตัวที่ n ใดๆคือ

$$M\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \qquad (๒.๗๒)$$

รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของสมการ(๒.๗๒) เป็นเช่นเดียวกับสมการของการเคลื่อนที่สำหรับการออสซิลเลตตามขวางสมการ(๒.๖๒) ต่างกันเพียงแต่แทนค่า T_o/a ด้วยค่าคงที่สปริง K เท่านั้น โดยการหาและคำนวณเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่แล้ว เราจะได้ค่าตอบแสดงความสัมพันธ์การกระจาย (โดยแทนค่า T_o/a ด้วย K ในสมการ(๒.๗๘)) เป็น

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{\pi a}{\lambda} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \qquad (๒.๗๓)$$

ใน mode ที่มีจำนวนคลื่น k การเคลื่อนที่ของมวล n ใดๆกำหนดด้วย

$$\psi_n(t) = A\ \sin kna\ \cos\{\omega(k)t + \phi\} \qquad (๒.๗๔)$$

ค่าที่เป็นไปได้สำหรับ k เป็น N ค่าด้วยกันคือ (เมื่อ (N+1)a = L)

$$k_1L = \pi, \quad k_2L = 2\pi, \ \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad k_NL = N\pi \qquad (๒.๗๕)$$

ตัวอย่าง ๖ สลิงกี

สลิงกีคือชื่อของสปริงชนิดหนึ่งที่มีจำนวนขดลวด $N = ๑๐๐$ รอบ เส้นผ่าศูนย์กลางของแต่ละรอบยาวประมาณ ๗ เซนติเมตร ความยาวของสปริงขณะยังไม่ยืดออกประมาณ ๖ เซนติเมตร เมื่อยืดออกสามารถยืดได้ยาวประมาณ ๑ เมตร ดังนั้นมันจึงใช้ได้ดีกับการประมาณแบบสลิงกี ให้ระยะห่างระหว่างมวลเป็น a เพื่อความสะดวกกำหนดเป็นความยาวทั้งหมดต่อรอบ $a = L/N$ ดังนั้น คือค่าคงที่สปริงสำหรับหนึ่งรอบ และ K^{-1}/a ไม่ขึ้นกับความยาว L ความสัมพันธ์การกระจายหาได้จากความสัมพันธ์การกระจายสำหรับการออสซิลเลตตามยาวและเป็นกรณีระบบต่อเนื่อง เริ่มจากสมการ (๒.๗๓)

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{K}{M}}\left\{\frac{ka}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{ka}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\right\} \qquad (๒.๗๖)$$

$$= \sqrt{\frac{Ka^2}{M}}\,k$$

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{Ka}{(M/a)}}\,k \qquad (๒.๗๗)$$

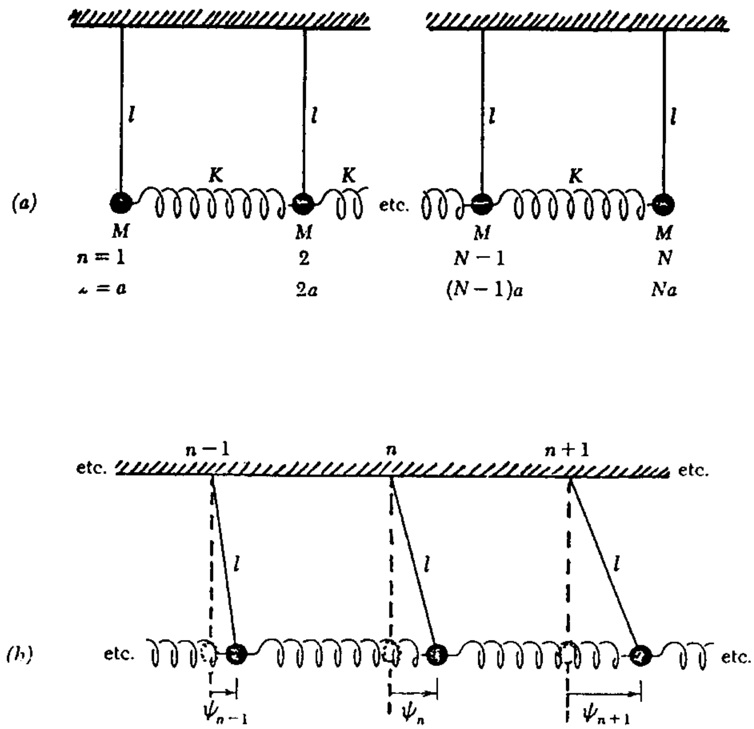
จากความสัมพันธ์การกระจายสำหรับการออสซิลเลตตามขวาง สมการ (๒.๗๑)

$$(k) = \sqrt{\frac{T_o}{M/z}}\,k$$

$$= \sqrt{\frac{Ka}{M/a}}\,k$$

เมื่อ $T_o = Ka$ ในการประมาณแบบสลิงกี ดังนั้นสลิงกีมีความสัมพันธ์การกระจายสำหรับการออสซิลเลตตามยาวเหมือนกับการออสซิลเลตตามขวาง หรือถ้ามีสภาวะขอบเขตเหมือนกัน (ตัวอย่างเช่น ปลายทั้งสองข้างต่างยึดแน่นสำหรับการออสซิลเลตตาม x, y หรือ z) mode ของการออสซิลเลตสำหรับ x, y และ z มีชุดของความยาวคลื่นและความถี่เหมือนกัน

ตัวอย่าง ๗ ระบบลูกตุ้มควบคู่



รูป ๒.๑๓ ลูกตุ้มควบคู่ (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

แต่ละมวลมีแรงคืนกลับสู่สมดุลย์สองส่วน คือ ส่วนจากภายนอกเกิดจากแรงโน้มถ่วง ซึ่งแปรตามการขจัดของมวลที่ห่างจากตำแหน่งสมดุลย์ของมัน และไม่ขึ้นกับการขจัดของมวลข้างเคียง ส่วนที่สองเป็นแรงเนื่องจากสปริงควบคู่ระหว่างลูกตุ้มข้างเคียง แรงส่วนนี้ขึ้นกับการขจดของมวลข้างเคียง

ให้เราหาความสัมพันธ์การกระจายของระบบ ถ้าเรามีแรงเฉพาะส่วนสปริงควบคู่ระหว่างมวล กล่าวคือ ถ้า g เป็นศูนย์ เราจะได้ความสัมพันธ์การกระจายเหมือนกับสำหรับการออสซิลเลตตามยาวของมวลควบคู่ ดังนั้นแรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวล ω^2 กำหนดด้วยสมการ (๒.๗๓)

$$\omega^2 = 4\frac{K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}, \qquad \text{ถ้า} \quad g = 0 \qquad (๒.๗๘)$$

ต่อไปสมมติว่าเรามีการออสซิลเลตใน mode เดียว (ความจริงมีจำนวนเป็นอนันต์ พิจารณาได้จากค่า k ที่มีจำนวนอนันต์ค่าซึ่งหาจากสภาวะขอบเขต) โดยให้ g มีค่าเพิ่มขึ้นได้ตลอดเวลาจนกระทั่งถึงค่าสุดท้าย ๙๘๐ (หน่วย cps) เมื่อ g มีค่าเพิ่มขึ้นจากศูนย์เป็นค่าเล็กๆ g' แรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวลสำหรับแต่ละอนุภาคมีค่าเพิ่มขึ้นด้วยส่วนของ g' คือ

ส่วนของ g' เป็น ω^2 คือ $\frac{g'}{\ell}$ สำหรับทุกมวล

นั่นหมายความว่า อนุภาคยังคงมีการออสซิลเลตด้วยรูปร่างเหมือนเดิม ค่า k เดียวกัน และด้วยผลรวมของส่วน sinkz และ coskz แต่มันจะออสซิลเลตเร็วขึ้นด้วยส่วนเพิ่มขึ้นเนื่องจาก g' ดังนั้นสุดท้ายเมื่อเพิ่มขึ้นจนถึงค่า g รูปร่างและความยาวคลื่นยังคงมีค่าเหมือนกับสำหรับ g = 0 และแรงคืนกลับทั้งหมดต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวลกลายเป็น

$$\omega^2(k) = \frac{g}{\ell} + 4\frac{K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}. \qquad (๒.๗๙)$$

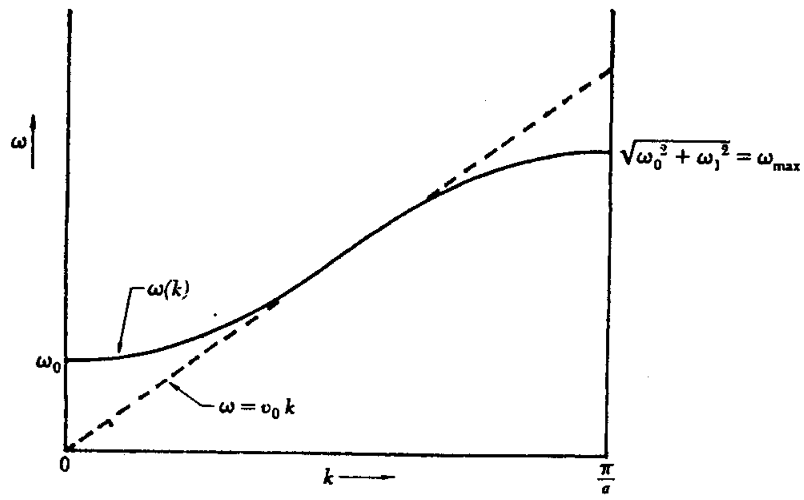
ในที่นี้เราจะได้ความสัมพันธ์การกระจายเขียนใหม่ในลักษณะทั่วไป โดยใช้สมการ (๒.๗๙) คือ

$$\omega^2(k) = \omega_o^2 + \omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2} \qquad (๒.๘๐)$$

ในการจำกัดต่อเนื่อง เรามี $ka << 1$ ความสัมพันธ์นี้กลายเป็น

$$\omega^2(k) = \omega_o^2 + v_o^2 k^2 \qquad (๒.๘๑)$$

เมื่อ v_o^2 เป็นค่าคงที่ $\omega_1^2 a^2/4$ เราเขียนความสัมพันธ์ของสมการ (๒.๘๑) ตามรูป ๒.๑๔



รูป ๒.๑๔ แสดงความสัมพันธ์การกระจายของระบบลูกตุ้มควบคู่หลายชุด

แบบฝึกหัดบทที่ ๒

2.1 ลวดเหล็กยาว6 เมตรมีมวล 60 กรัม ถูกขึงให้ตึง 1000 นิวตัน. ถามว่าอัตราเร็วของคลื่นตามขวางในลวดเหล็กนี้เท่ากับเท่าไร? ตอบ. 316 $m.s^{-1}$

2.2 ปลายข้างหนึ่งของเส้นเชือกผูกไว้กับส้อมเสียงซึ่งสั่นด้วยความถี่ 240 เฮิทซ์. อีกปลายหนึ่งขึงผ่านลูกรอกแล้วถ่วงด้วยตุ้มน้ำหนัก 2 กิโลกรัม. ความหนาแน่นเชิงเส้นของเชือก = 0.021 กิโลกรัม/เมตร. (ก) อัตราเร็วของคลื่นตามขวางเท่ากับเท่าไร? (ข) ความยาวคลื่นเป็นเท่าไร? ตอบ. 30.5 เมตร/วินาที, 0.13 เมตร.

2.3 สายเปียโนทำด้วยเหล็กยาว 0.5 เมตร, มวล 5×10^{-3} กิโลกรัม, มีความตึง 400 นิวตัน. (ก) ความถี่หลักมูล (fundamental frequency)เท่ากับเท่าไร? (ข) จำนวนโอเวอร์-โทนสูงสุดเป็นเท่าไรซึ่งคนๆ หนึ่งสามารถได้ยินความถี่ถึง 10,000 เฮิทซ์? ตอบ. 200 เฮิทซ์, โอเวอร์โทนที่ 49.

2.4 ลวดเหล็กยาว L = 1 เมตร, ความหนาแน่น 8×10^{-3} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร, ถูกขึงไว้ระหว่างเสา 2 ต้น. ลวดนี้สั่นด้วยความถี่หลักมูล 200 เฮิทซ์. (ก) ถามว่าอัตราเร็วของคลื่นตามขวางของลวดนี้เป็นเท่าไร? (ข) ถ้าความเร่งสูงสุดที่จุดกึ่งกลางของลวด = 800 $m.s^{-2}$, ถามว่าอัมปลิจูดที่จุดกึ่งกลางเท่ากับเท่าไร? ตอบ. 400$m.s^{-1}$, 5×10^{-4}m.

2.5 สายเชือกสั่นด้วยความถี่หลักมูล 30 เฮิทซ์เมื่อขึงยาว60 เซนติเมตร. อัมปลิจูดที่ antinode = 3 ซม. สายเชือกมีมวล 3×10^{-2} กก. (ก) อัตราเร็วของคลื่นตามขวางในสายเชือกเป็นเท่าไร? (ข) จงคำนวณหาความตึงในสายเชือก. ตอบ. 36 เมตร/วินาที, 64.8 นิวตัน.

2.6 Show that the potential energy of two identical simple pendulums coupled by a spring may be expressed as $aX^2 + bY^2$, where X and Y are normal co-ordinates and a and b are constant. Show that the kinetic energy may be expressed as $c\dot{X}^2 + d\dot{Y}^2$ where c and d are constants. Evaluate a, b, c and d in terms of K, l, m and g.

2.7 Express the total energy of problem 2.6 in terms of the pendulum displacements x and y as

$$E = (E_{kin} + E_{pot})_x + (E_{kin} + E_{pot})_y + (E_{pot})_{xy}$$

where the brakets give the energy of each pendulum expressed in its own co-ordinates and $(E_{pot})_{xy}$ is the coupling or interchange energy involving the product of these co-ordinates.

2.8 Consider the case when the number of masses on the loaded string of this chapter is n = 3 and show that the normal vibrations have frequencies given by $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})T/ma$, $\omega_2^2 = 2T/ma$ and $\omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})T/am$.

2.9 Taking the maximum value of

$$\omega_s^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{s\pi}{n + 1}\right)$$

at s = n as that produced by the strongest coupling, deduce the relative displacements of neighbouring masses and confirm your deduction by inserting your values in consecutive difference equations relating the displacements y_{r+1}, y_r, and y_{r-1}. Why is your solution unlikely to satisfy the displacements of those masses near the ends of the string?

2.10 Expand the value of

$$\omega_s^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{s\pi}{n + 1}\right)$$

where s <<n in powers of (s/n+1) to show that in the limit of very large values of n, a low frequency

$$\omega_s = \frac{\pi s}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

where $\rho = m/a$ and $\ell = (n + 1)a$.

2.11 Standing acoustic waves are formed in a tube of length ℓ with (a) both ends open and (b) one end open and the other closed. If the particle displacement

$$\psi = (A \cos kx + B \sin kx) \sin \omega t$$

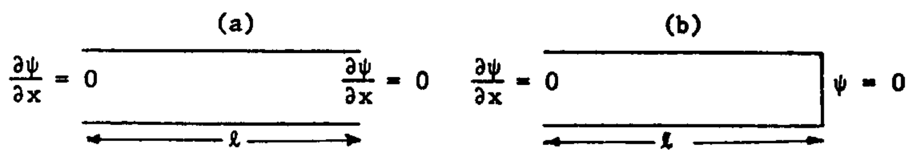
and the boundary conditions are as shown in the diagrams, show that for

$$\text{(a)} \quad \psi = A \cos kx \sin \omega t \quad \text{with} \quad \lambda = 2\ell/n$$

and for

$$\text{(b)} \quad \psi = A \cos kx \sin \omega t \quad \text{with} \quad \lambda = 4\ell/(2n + 1)$$

Sketch the first three harmonics for each case.



2-12 Find the three mode configurations and frequencies for transverse vibrations of a uniformly beaded string having three beads and four string segments, given the boundary conditions that both ends are free. (the end string segments have massless rings at their ends and slide on frictionless rods.)

2.13 Derive the classical wave equation (Eq.2.14) in the following way: Start with the exact Eq.(2.62). Now go to the continuous approximation. Replace subscript n by location z, taking into account the bead separation is length a. Use the Taylor's series expansions of the right side of Eq. (2.62). Include one more term than is necessary to obtain the classical wave equation. Give a criterion for neglecting this and higher-order terms.

2.14 Find the mode configurations and frequencies for transverse oscillations of a beaded string of 5 beads with one end fixed and one free. Plot the five corresponding points on the dispersion relation $\omega(k)$ of these 5 beads.

2.15 Show that, for the system of coupled pendulums shown in Fig. 2.13, the equation of motion for the nth pendulum bob is given (for small oscillations) by

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\psi_n + \frac{aK}{M}\left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a}\right) - \frac{aK}{M}\left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}\right)$$

Show that the general solution for a mode, without regard to boundary conditions, is

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \phi)\left[A \sin nka + B \cos nka\right].$$

Show that the dispersion relation is

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}$$

Show that, for the boundary conditions shown in Fig. 2.13 (i.e; no spring coupling the end bobs to the wall), the above solution relation reduces to

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \phi)B \cos nka,$$

with the nth bob located at $z = (n - \frac{1}{2})a$. Show that the lowest mode has $k = 0$. Sketch its configuration. What would be the behavior of the system in this configuration if the gravitational constant were gradually reduced to zero? Sketch the configurations for $N = 3$ and give the frequencies for the three modes.

2.16 Go to the continuous limit in the coupled-pendulum problem (Prob.2.15)

Show that the equation of motion becomes a wave equation of the form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_o^2 + v_o^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

2-17 A half-wave rectifier removes the negative half-cycles of a pure sinusoidal wave $y = h \sin x$. Show that the Fourier series is given by

$$y = \frac{h}{\pi}(1 + \frac{\pi}{1.2}\sin x - \frac{2}{1.3}\cos 2x - \frac{2}{3.5}\cos 4x - \frac{2}{5.7}\cos 6x \ldots)$$

2.18 Show that $f(x) = x^2$ may be represented in the interval $\pm\pi$ by

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \Sigma(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$

2.19 Use the square wave sine series of unit height $f(x) = 4/\pi(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x)$ to show that

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

2.20 Prove each of the following numbered statements using two methods: (a) the "physical" method that makes use of the normal modes of a continuous string with appropriate boundary conditions, and (b) the method of Fourier analysis of a periodic function of z.

(i) Any (reasonable) function f(z) defined between z = 0 and z = L and having value zero at z = 0 and slope zero at z = L can be expanded in a Fourier series of the form

$$f(z) = \sum_n A_n \sin nk_1 z; \qquad n = 1, 3, 5, 7, \ldots; \; k_1 l = \frac{\pi}{2}$$

(Note: In using the method of Fourier analysis you must first construct a periodic function from f(z) so that you can use the formulas of Fourier analysis.)

(ii) Any (reasonable) function $f(z)$ defined between $z = 0$ and $z = L$ and having zero slope at $z = 0$ and zero slope at $z = L$ can be expanded in a Fourier series of the form

$$f(z) = B_o + \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1,2,3,4.... \quad k_1 L = \pi.$$

(iii) Any (reasonable) function $f(z)$ defined between $z = 0$ and $z = L$ and having zero slope at $z = 0$ and value zero at $z = L$ can be expanded in a Fourier series of the form

$$f(z) = \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1,3,5,7.... \quad k_1 L = \frac{\pi}{2}$$