บทที่ 9
การแทรกสอดและการเลี้ยวเบน
(Interference and Diffraction)

๙.๑ คำนำ

คลื่นส่วนมากที่เราได้ศึกษาในตอนต้นมีเพียงหนึ่งมิติ กล่าวคือในบัยที่มีหนึ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ (path) ซึ่งคลื่นสามารถแผ่กระจายจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งได้ ต่อไปเราจะพิจารณาสถานะการณ์เมื่อมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นไปได้ต่างๆกันจากเครื่องส่งไปยังเครื่องดักรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สิ่งเหล่านี้ทำให้เกิดเหตุการณ์ที่เรียกว่า ลักษณะอาการการแทรกสอดและการเลี้ยวเบนที่เป็นผลจากการรวมกันแบบเสริมกัน และแบบหักล้างกันของคลื่นที่มาจากตำแหน่งต่างกัน ที่แต่ละตำแหน่งในลวดลาย (pattern) การแทรกสอดหรือการเลี้ยวเบนมีเฟสต่างกันของคลื่นรวมที่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ต่างกันของคลื่น และผลลัพท์ขัมปลิจูดอาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่าขององค์ประกอบเดี่ยว

ความแตกต่างระหว่างการแทรกสอดและการเลี้ยวเบนคือ ในการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กๆ (slit) มีความกว้างขนาดของความยาวคลื่นของแสงเลี้ยวเบน อาศัยจากหลักของ Huygen ที่กล่าวว่า ทุกๆจุดบนแนวหน้าคลื่นในระนาบของช่องเปิดอาจถือได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ ซึ่งจะปล่อยคลื่นเล็กๆออกไปรอบๆและวิวัฒนาต่อไปเป็นระบบคลื่นเลี้ยวเบน ดังนั้นถ้าเราทราบรูปร่างของแนวหน้าคลื่นที่เวลาหนึ่ง เราอาจใช้วิธีเรขาคณิตหาหน้าคลื่นที่เวลาต่อไปได้ โดยการสร้างผิวซึ่งสัมผัสกับแนวหน้าคลื่นเล็กๆเหล่านั้น

ในลวดลายการแทรกสอดได้จากช่องเปิดเล็กๆจำนวนสองหรือมากกว่า แต่ละช่องเปิดอาจจะพิจารณาเป็นแหล่งกำเนิดของคลื่นเดี่ยว ดังนั้นจำนวนขององค์ประกอบรวมกันในลวดลายการแทรกสอดเท่ากับจำนวนของช่องเปิด สิ่งนี้ชี้ให้เห็นว่าลวดลายทั้งหมดจากช่องเปิดมากกว่าหนึ่งช่องจะแสดงทั้งผลการแทรกสอดและผลการเลี้ยวเบน

๙.๒ การแทรกสอดระหว่างสองจุดแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ (Coherent point source)

ปรากฏการณ์การแทรกสอดเกิดขึ้นเมื่อคลื่นหลายขบวนมาพบกัน ผลของการที่คลื่นมา

พบกันที่จุดนั้นไม่สามารถอธิบายได้ด้วยการเขียนเส้นรังสีธรรมดา แต่ต้องอาศัยคุณสมบัติการเป็นคลื่น หมายความว่ายอดลัพธ์จะเป็นเช่นไรขึ้นอยู่กับเฟสและอัมปลิจูดของคลื่นเหล่านั้น ปรากฏการณ์อื่นที่ต้องอธิบายโดยอาศัยคุณสมบัติการเป็นคลื่นได้แก่ การเลี้ยวเบนและโปลาไรเซชัน (ได้กล่าวในบทที่ ๔) เราจะเริ่มศึกษาการแทรกสอดจากแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์จำนวนหลายคลื่น คลื่นอาพันธ์หมายถึงคลื่นที่มีความถี่เท่ากัน และมีเฟสผลต่างระหว่างคลื่นทั้งสองคงที่ตลอดเวลาสัมพันธ์กับความถี่ของคลื่นเสมอ

<u>**ลวดลายการแทรกสอดที่สนามห่างไกล**</u>

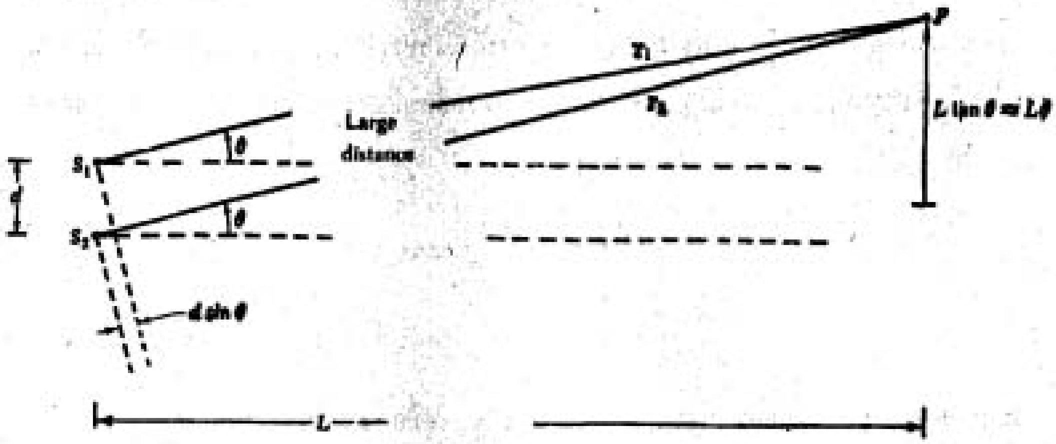
จากรูป ๔.๑ สองแหล่งกำเนิดคลื่น S_1 และ S_2 กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าไปยังสนามจุด P เป็นระยะ r_1 และ r_2 ตามลำดับ ดังนั้นรังสีทั้งสองตามเส้นทางจากแหล่งกำเนิดทั้งสองไปยังจุด P เกือบขนานกันและทำมุม θ เท่ากันกับแกน z ในที่นี้เส้นทางเคลื่อนที่ทั้งสองต่างกันมีค่าเท่ากับ d sinθ ที่จุด P เมื่อสันคลื่นจากแหล่งกำเนิดทั้งสองได้รวมกันไปตลอด ที่ตำแหน่งนั้นเรียกว่า บริเวณของการแทรกสอดแบบเสริมกัน หรือการแทรกสอดมากที่สุด ดังนั้นทั้งสองแหล่งกำเนิดจะต้องออสซิลเลตด้วยเฟสเดียวกัน และ P จะเป็นบริเวณของการแทรกสอดเสริมกันเมื่อ

$$d \sin\theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots \text{etc.} \qquad (๔.๑)$$

หรือ

$$= \pm n\lambda \; ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (๔.๒)$$

การแทรกสอดมากที่สุดที่ θ = 0 เรียกว่า principal maximum หรือ มากที่สุดอันดับศูนย์ (zero-order maximum) ค่ามากที่สุดครั้งแรกอยู่แต่ละข้างของ principal maximum ที่ $d \sin\theta = \pm\lambda$ เรียกว่า มากที่สุดอันดับหนึ่ง (first-order maximum) และที่บริเวณตำแหน่งอื่นซึ่งคลื่นได้มารวมโดยสันคลื่นจากแหล่งกำเนิดหนึ่งรวมกับท้องคลื่นจากแหล่งกำเนิดอื่นตลอดเวลา ที่ตำแหน่งนั้นเรียกว่า บริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้าง หรือการแทรกสอดน้อยที่สุด และบริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้างซึ่งคลื่นรวมทั้งหมดเป็นศูนย์เรียกว่าเป็นบัพ มันเกิดที่มุมเฟสเมื่อเส้นทางการเคลื่อนที่ต่างกันเป็น



รูป ๘.๑ แสดงสองแหล่งกำเนิดคลื่นกระจายคลื่นไปยังตำแหน่ง P.

$$d \sin\theta = \pm\lambda/2,\ \pm 3\lambda/2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \qquad (๘.๓)$$

หรือ

$$= \pm(n+\tfrac{1}{2})\lambda \qquad \text{เมื่อ} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \qquad (๘.๔)$$

เมื่อทั้งสองแหล่งกำเนิดยังคงให้ความสัมพันธ์เฟสคงที่ บริเวณที่เป็นการแทรกสอดแบบเสริมกันที่เวลาหนึ่งยังคงเป็นบริเวณของการแทรกสอดแบบเสริมกันตลอดเวลา และในทำนองเดียวกัน บริเวณที่เป็นการแทรกสอดแบบหักล้างที่เวลาหนึ่ง ยังคงเป็นบริเวณของการแทรกสอดแบบหักล้างตลอดเวลา บริเวณที่มีการแทรกสอดแบบหักล้างและแบบเสริมกันเป็นหลายแบบรวมกันเรียกเป็นลวดลายการแทรกสอด ถึงแม้ว่าคลื่นเป็นคลื่นเคลื่อนที่แต่ลวดลายการแทรกสอดที่เกิดขึ้นหยุดนิ่งกับที่ และถ้าสัญญาณจากสองแหล่งกำเนิดถูกปิดและค่อยเปิด สัญญาณจากแหล่งกำเนิดทั้งสองยังคงมีความสัมพันธ์ทางเฟสคงที่ ดังนั้นลวดลายการแทรกสอดยังคงไม่เปลี่ยนแปลง

ต่อไปเราจะหาสมการสำหรับสนามทั้งหมดที่ P ภายใต้การสมมติให้แหล่งกำเนิดคลื่นทั้งสองมีการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกเหมือนกันยกเว้นค่าคงที่เฟสมีค่าต่างกัน เราพิจารณาเฉพาะ

องค์ประกอบเดียวซึ่งเราสามารถจัดให้คลื่นทั้งสองเป็นโปลาไรซ์เชิงเส้นมีทิศทางตามขวางกับเส้นตรงจากแหล่งกำเนิดไปยัง P เราจัดให้เป็นองค์ประกอบโปลาไรเซชันเชิงเส้นตาม $\hat{y}$ เมื่อ $\hat{y}$ ตั้งฉากกับระนาบของรูป๔.๑ ดังนั้นการเคลื่อนที่ของจุดประจุ ๑ และ ๒ มีองค์ประกอบ y เป็น

$$y_1(t) = y_o \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$y_2(t) = y_o \cos(\omega t + \phi_2) \qquad (๔.๕)$$

สนามจุด P อยู่ที่ตำแหน่งซึ่งทำมุม θ และระยะ r เมื่อ r เป็นค่าเฉลี่ยของ r_1 และ r_2 (กล่าวคือเราให้จุดกำเนิดของแกนพิกัดอยู่ที่ครึ่งทางระหว่างสองแหล่งกำเนิด) สนามรังสี $E_1(t)$ ที่สนามจุด P เกิดเนื่องจากการเคลื่อนที่เมื่อเวลาก่อน $y_1(t_1')$ กำหนดด้วย

$$E_1(t) = \frac{-q\ddot{y}_1(t_1')}{r_1c^2}$$

$$= \frac{\omega^2 q y_o \cos(\omega t_1' + \phi_1)}{r_1 c^2} \qquad (๔.๖)$$

และสนามรังสี $E_2(t)$ เกิดเนื่องจาก $y_2(t_2')$ กำหนดด้วยสมการที่คล้ายกับสมการ(๔.๖) ในสนามที่ห่างไกลจากแหล่งกำเนิดคลื่นพอสมควร เราจัดให้ r_1 และ r_2 มีค่าเกือบเท่ากับระยะทางเฉลี่ย r

$$r = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) \qquad (๔.๗)$$

$$E_1(t) = A(r) \cos(\omega t_1' + \phi_1)$$

$$E_2(t) = A(r) \cos(\omega t_2' + \phi_2) \qquad (๔.๘)$$

$$A(r) = \frac{\omega^2 q y_o}{rc^2} \qquad (๔.๙)$$

เวลาการกระจาย t_1' และ t_2' ของรังสีรับที่เวลาภายหลัง t กำหนดด้วย

$$\omega t_1' = \omega(t - \frac{r_1}{c}) = \omega t - kr_1$$

$$\omega t_2' = \omega(t - \frac{r_2}{c}) = \omega t - kr_2 \qquad (๔.๑๐)$$

เนื่องจากความแตกต่างเส้นทาง $r_2 - r_1$ ขึ้นกับมุม θ ดังนั้นความสัมพันธ์เฟสของสองคลื่นที่ตำแหน่ง P ขึ้นกับมุม θ ด้วย ความสัมพันธ์เฟสเนื่องจากความแตกต่างเส้นทางการเคลื่อนที่กำหนดด้วย

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \omega t_1' - \omega t_2' \\ &= k(r_2 - r_1) \\ &= k(d \sin\theta) \\ &= 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda}\end{aligned} \qquad (๔.๑๑)$$

เมื่อ $d \sin\theta$ เป็นความแตกต่างเส้นทางการเคลื่อนที่ตามรูป ๔.๑

สนามทั้งหมด E ที่ตำแหน่ง P เป็นการรวมกันของ E_1 และ E_2

$$\begin{aligned}E(r,\theta,t) &= E_1 + E_2 \\ &= A(r)\cos(\omega t_1' + \phi_1) + A(r)\cos(\omega t_2' + \phi_2)\end{aligned}$$

$$E(r,\theta,t) = A(r)\cos(\omega t + \phi_1 - kr_1) + A(r)\cos(\omega t + \phi_2 - kr_2) \qquad (๔.๑๒)$$

แทนที่เราจะเขียน E เป็นการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ทรงกลมแผ่ออกจากแหล่งกำเนิด ๑ และ ๒ เราสามารถเขียนเป็นคลื่นเฉลี่ยของคลื่นเคลื่อนที่ทรงกลมแผ่ออกด้วยอัมปลิจูดที่มีฟังก์ชันผสมของทิศทางการเคลื่อนที่ θ และด้วยค่าคงที่เฟสที่เป็นค่าเฉลี่ยของค่าคงที่เฟส ϕ_1 และ ϕ_2 ของทั้งสองคลื่นได้ดังนี้

จาก $$\cos a + \cos b = \cos\left[\tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b)\right] + \cos\left[\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(a-b)\right]$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$

ให้

$$a = \omega t + \phi_1 - kr_1$$

$$b = \omega t + \phi_2 - kr_2$$

ดังนั้น

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = \omega t + \tfrac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) - k\cdot\tfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

$$= \omega t + \phi_{av} - kr \qquad (๘.๑๓)$$

$$\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \tfrac{1}{2}k(r_1 - r_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\phi \qquad (๘.๑๔)$$

สมการ (๘.๑๒) กลายเป็น

$$E(r,\theta,t) = \left\{2A(r)\cos\left[\tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\phi\right]\right\}\cos(\omega t + \phi_{av} - kr)$$

$$= A(r,\theta)\cos(\omega t + \phi_{av} - kr) \qquad (๘.๑๕)$$

ซึ่งแอมปลิจูด $A(r,\theta)$ คือ

$$A(r,\theta) = 2A(r)\cos\left[\tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\phi\right]$$

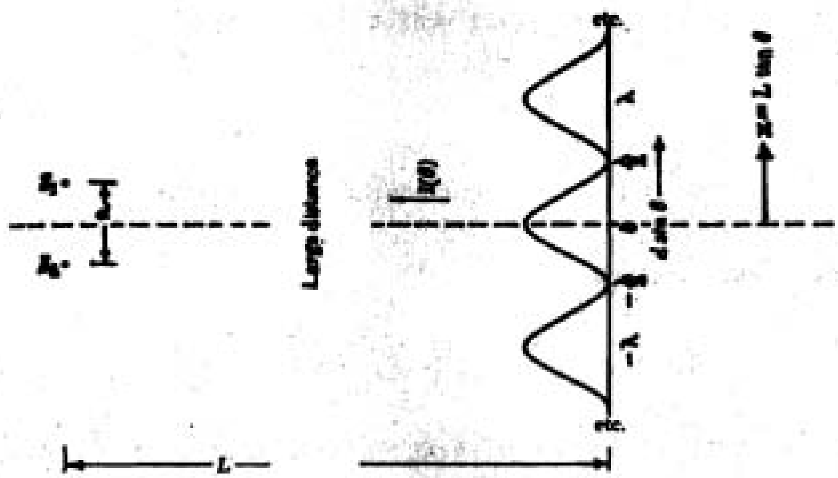
$$\Delta\phi = k(r_2 - r_1) = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda} \qquad (๘.๑๖)$$

ฟลักซ์โฟตอนที่สนามจุด P แปรตามฟลักซ์พลังงานเฉลี่ยตามเวลา $\langle S\rangle$ ถ้าเราพิจารณาเพียงองค์ประกอบโพลาไรซ์ตาม $\hat{y}$ อย่างเดียว ฟลักซ์พลังงานเป็น

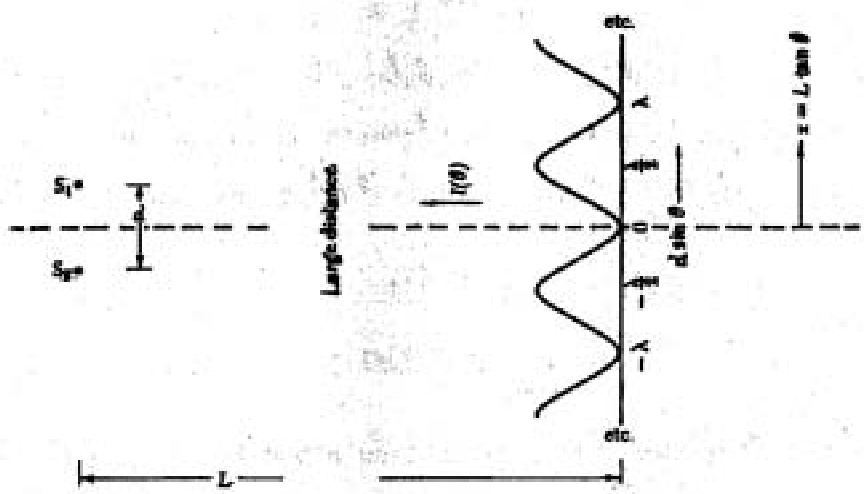
$$\langle S\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle \vec{E}^2\rangle \qquad (๘.๑๗)$$

ด้วย

$$\vec{E} = \hat{y}E(r,\theta,t) \qquad (๘.๑๘)$$



รูป ๔.๒ แสดงความเข้มของการรวมกันจากสองแหล่งกำเนิดคลื่นมีเฟสเสริมกัน



รูป ๔.๓ แสดงความเข้มของการรวมกันของคลื่นจากสองแหล่งกำเนิดคลื่นที่มีเฟสต่างกัน ๑๘๐ องศาหักล้างกัน

ดังนั้น
$$<E^2> = <[A(r,\theta)\cos(\omega t + \phi_{av} - kr)]^2>$$
$$= \tfrac{1}{2}A^2(r,\theta) \qquad (๔.๑๙)$$

และ
$$A^2(r,\theta) = (2A(r)\cos[\tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\phi])^2 \qquad (๔.๒๐)$$

ดังนั้นฟลักซ์โฟตอนเปลี่ยนแปลงตามมุม

$$I(\theta) = I_{max}\cos^2[\tfrac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \tfrac{1}{2}\Delta\phi] \qquad (๔.๒๑)$$

สมการ (๔.๒๑) เป็นความเข้มแปรตามโคไซน์กำลังสองของครึ่งความสัมพันธ์เฟสที่มีส่วนหนึ่งของแหล่งกำเนิดออสซิลเลต และอีกส่วนหนึ่งเป็นความแตกต่างเส้นทางการเคลื่อนที่ขึ้นกับมุม

ถ้า ϕ_1 และ ϕ_2 เท่ากัน ลวดลายการแทรกสอดของสองช่องเปิดเล็กเป็น

$$I(\theta) = I_{max}\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta\phi$$
$$= I_{max}\cos^2\left[\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right] \qquad (๔.๒๒)$$

เห็นได้ว่าความเข้มมากที่สุดเกิดที่ $\theta = 0$ ในกรณีเมื่อ d มีค่ามากกว่าความยาวคลื่นหลายเท่า ($d >> \lambda$) ตามรูป ๔.๒ ได้แสดงความเข้มมากที่สุดและความเข้มน้อยที่สุดหลายๆค่าตามมุม θ และถ้า ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นเฟสต่างกันด้วย $\pm\pi$ ดังนั้นครึ่งหนึ่งของความแตกต่างเฟสเป็น $\pm\frac{1}{2}\pi$

$$I(\theta) = I_{max}\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\phi$$
$$= I_{max}\sin^2\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \qquad (๔.๒๓)$$

สำหรับกรณีเมื่อ d มีค่าเป็นหลายเท่าของความยาวคลื่น ค่ามากที่สุดของ $I(\theta)$ เกิดที่ใกล้กับบริเวณ $\theta = 0$ ตามรูป ๔.๓ ได้แสดงความเข้มของการรวมกันของสองคลื่นที่มีเฟสต่างกัน ๑๘๐ องศา

จากรูป ๔.๒ และ ๔.๓ ค่ามากที่สุดต่อเนื่องกันของความเข้มสอดคล้องกับการเพิ่มขึ้นของความแตกต่างเส้นทางการเคลื่อนที่ของหนึ่งช่วงความยาวคลื่น กล่าวคือ การเพิ่มขึ้น

ของ $d\sin\theta$ ด้วยปริมาณ λ สำหรับ θ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ของศาเราสามารถใช้การประมาณมุมเล็กๆของ $\sin\theta = \theta$ ดังนั้นช่วงกว้างเชิงมุมระหว่างค่ามุมมากที่สุดต่อเนื่องเป็น λ/d เรเดียน เรียกค่าช่วงกว้างเชิงมุมนี้เป็น θ_o

$$\theta_o = \lambda/d \qquad (๕.๒๕)$$

ให้ช่วงห่างระยะทางที่สัมพันธ์กับช่วงห่างระหว่างค่ามากที่สุดต่อเนื่องกันเป็น x_o ดังนั้น x_o มีค่าเท่ากับระยะทาง L คูณด้วย θ_o

$$x_o = L\theta_o = \frac{L\lambda}{d} \qquad (๕.๒๖)$$

๕.๓ การเลี้ยวเบนและหลักของ Huygen's principle

ตามปกติลวดลายการแทรกสอดและลวดลายการเลี้ยวเบนไม่แตกต่างกัน เพียงแต่การเกิดลวดลายทั้งสองมีความแตกต่างกันที่แหล่งกำเนิดคลื่น กล่าวคือ ลวดลายอัมปลิจูดหรือลวดลายความเข้มที่เกิดจากส่วนรวมกันได้ของจำนวนแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ไม่ต่อเนื่อง เรียกว่า ลวดลายการแทรกสอด และลวดลายอัมปลิจูดหรือความเข้มที่เกิดจากส่วนรวมกันได้ของการกระจายต่อเนื่องของแหล่งกำเนิดคลื่นอาพันธ์ทั้งหลาย เรียกว่าลวดลายการเลี้ยวเบน

การเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อคลื่นตกกระทบสิ่งกีดขวาง ปรากฏการณ์นี้เห็นได้อย่างชัดเจนเมื่อสิ่งกีดขวางมีขนาดใกล้เคียงกับความยาวคลื่นของคลื่นนั้น สิ่งกีดขวางอาจจะเป็นช่องเปิดเล็กซึ่งแนวหน้าคลื่นส่วนหนึ่งผ่านไปได้ หรืออาจจะเป็นเส้นลวดหรือแผ่นกลมที่กั้นส่วนหนึ่งของแนวหน้าคลื่นได้ การเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นและฉากที่รับอยู่ห่างจากสิ่งกีดขวางเป็นระยะพอสมควรมีชื่อว่า การเลี้ยวเบนแบบเฟรสเนล (Fresnel diffraction) ถ้าต้นกำเนิดคลื่นอยู่ไกลจากสิ่งกีดขวางมากๆ จนถือได้ว่าคลื่นที่ไปกระทบสิ่งกีดขวางเป็นคลื่นระนาบ หรือถ้าใช้เลนซ์ช่วยย่นระยะทางโดยที่แหล่งกำเนิดคลื่นและฉากไม่จำเป็นต้องอยู่ไกลมาก การเลี้ยวเบนแบบนี้เรียกว่า การเลี้ยวเบนแบบฟราวน์โฮเฟอร์ (Fraunhofer diffraction) ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการเลี้ยวเบนแบบหลังนี้ การคำนวณการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กเดี่ยวโดยใช้การสร้างแบบของฮอยเกน (Huygen's construction)

พิจารณาช่องเปิดเล็กเดี่ยวซึ่งแคบและยาวมากจนไม่ต้องคิดถึงผลที่เกิดจากปลายทั้งสองข้าง ให้ลำแสงตกกระทบเป็นแสงขนาน หรือระนาบคลื่นเป็นจำนวนทั้งหมด N คลื่นบนช่องเปิดเล็ก แต่ละลำแสงห่างกันเป็นระยะ d ถ้า N มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ เราจะได้การกระจายต่อเนื่องของรังสีจากแหล่งกำเนิด ถ้าให้ความกว้างทั้งหมดของช่องเปิดเล็กเดี่ยวเป็น D ดังนั้น D เป็นบริเวณที่มีจำนวนรังสีขนาน N คลื่น $D = (N - 1)d$ สมมติว่าคลื่นระนาบตกกระทบอยู่ในทิศ +z และ N ช่องเปิดเล็กย่อยทั้งหมดอยู่ตาม x ตามรูป ๔.๔

ที่สนามห่างไกลจากจุด P แต่ละลำแสงให้ส่วนที่มีอัมปลิจูดเดียวกัน A(r) และถ้าลำแสงทั้งหมดมีเฟสเดียวกัน ดังนั้นสนามไฟฟ้า E ที่จุด P กำหนดด้วยการรวมกันได้

$$E = A(r)\cos(kr_1 - \omega t) + A(r)\cos(kr_2 - \omega t) + \ldots$$

$$\ldots + A(r)\cos(kr_N - \omega t) \qquad (๔.๒๖)$$

เราต้องการเขียนการรวมกันได้ของ N คลื่นเคลื่อนที่แบ่งออกด้วยคลื่นเคลื่อนที่แบ่งออกเฉลี่ยเพียงคลื่นเดียวที่มีอัมปลิจูดผสมเป็นฟังก์ชันของมุมการกระจาย เราสามารถย่อทางคณิตศาสตร์ให้ง่ายขึ้นโดยใช้ complex number ซึ่งสนาม E เป็นส่วนที่เป็นจริงของปริมาณ complex E_c เมื่อ

$$E_c = A(r)\, e^{-i\omega t}\left(e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{ikr_N}\right) \qquad (๔.๒๗)$$

แต่จากรูป ๔.๔

$$r_2 = r_1 + d\sin\theta$$

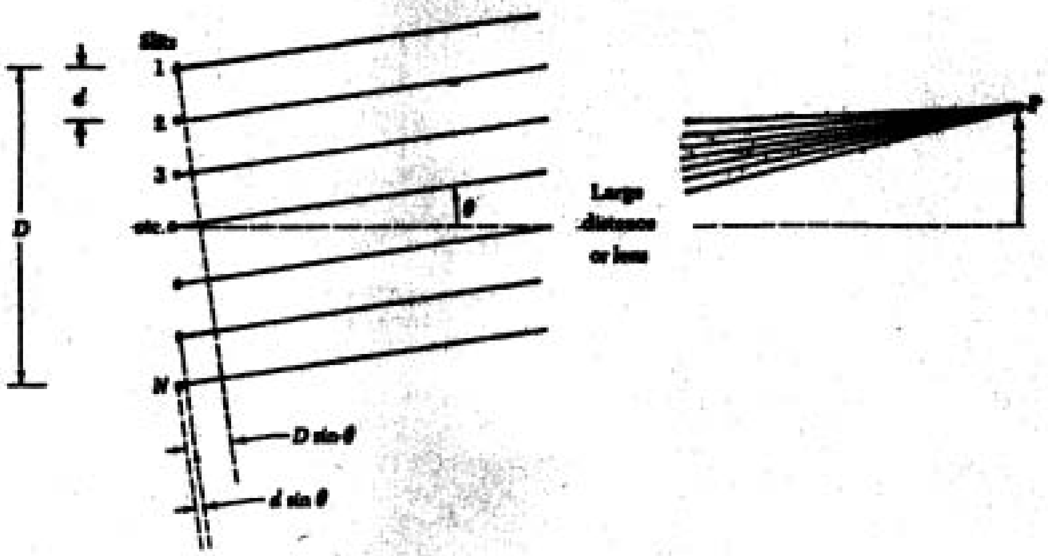
$$r_3 = r_1 + 2d\sin\theta$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_4 = r_N + (N - 1)d\sin\theta \qquad (๔.๒๘)$$

ดังนั้นสมการ(๔.๒๗) กลายเป็น

$$(๔.๒๙) \qquad E_c = A(r)\, e^{-i\omega t}\, e^{ikr_1}\left(1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \ldots\right)$$



รูป ๔.๔ แสดง N ต้นแสงหรือ N ช่องเปิดเล็ก ซึ่งต่างมีเฟสเสริมกันเคลื่อนที่ไป P.

$$E_c = A(r)\, e^{-i\omega t}\, e^{ikr_1}\, S$$

เมื่อ $$S = 1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots\dots\dots\dots$$

$$= 1 + a + a^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + a^{N-1} \qquad (๔.๓๐)$$

ด้วย $$a \equiv e^{ik(r_2-r_1)} = e^{ik(d\sin\theta)} = e^{i\Delta\phi} \qquad (๔.๓๑)$$

ในที่นี้ $$\Delta\phi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta \qquad (๔.๓๒)$$

เป็นความสัมพันธ์ทางเฟสของคลื่น (ที่ P) จากต้นแสงใกล้เคียงกัน

นำสมการ(๔.๓๐) คูณด้วยสมการ(๔.๓๑) และลบด้วยสมการ(๔.๓๐) จะได้

$$aS - S = a^N - 1$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} \\ &= \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} \\ &= \frac{e^{i(\frac{1}{2})N\Delta\phi}\left[e^{i(\frac{1}{2})N\Delta\phi} - e^{-i(\frac{1}{2})N\Delta\phi}\right]}{e^{i(\frac{1}{2})\Delta\phi}\left[e^{i(\frac{1}{2})\Delta\phi} - e^{-i(\frac{1}{2})\Delta\phi}\right]} \\ &= e^{i(\frac{1}{2})(N-1)\Delta\phi}\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi} \end{aligned} \qquad (๔.๓๓)$$

ดังนั้นสมการ(๔.๒๔) กลายเป็น

$$\begin{aligned} E_c &= A(r)\,e^{-i\omega t}\,e^{ik\left[r_1 + (\frac{1}{2})(N-1)d\sin\theta\right]}\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi} \\ &= A(r)\,e^{-i\omega t}\,e^{ikr}\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi} \end{aligned} \qquad (๔.๓๔)$$

ในเมื่อปริมาณ

$$\begin{aligned} r &\equiv r_1 + \tfrac{1}{2}(N - 1)d\sin\theta \\ &= r_1 + \tfrac{1}{2}D\sin\theta \end{aligned} \qquad (๔.๓๕)$$

คิดเฉพาะส่วนเป็นจริงของสมการ(๔.๓๔) เราหาสนามที่ P เป็น

$$\begin{aligned} E(r,\theta,t) &= \left[\frac{A(r)\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi}\right]\cos(kr - \omega t) \\ &\equiv A(r,\theta)\cos(kr - \omega t) \end{aligned} \qquad (๔.๓๖)$$

ตรวจสอบสมการ(๔.๓๖) เทียบกับผลลัพธ์จากตอน ๔.๒ สมการ(๔.๑๕)และ(๔.๑๖) สำหรับ $N = 2$ โดยใช้ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ด้วย $x = \frac{1}{2}\Delta\phi$

$$\begin{aligned} E(r,\theta,t) &= \frac{A(r)2\sin\frac{1}{2}\Delta\phi\,\cos\frac{1}{2}\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi}\cos(kr - \omega t) \\ &= \left[2A\cos\tfrac{1}{2}\Delta\phi\right]\cos(kr - \omega t) \end{aligned}$$

ซึ่งให้ผลเช่นเดียวกัน

<u>ลวดลายการเลี้ยวเบนจากช่องเปิดเล็กเดี่ยว</u>

เราให้ N มีค่าเข้าใกล้อนันต์ และ D เป็นค่าคงที่ทำให้ระยะห่าง d มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ให้ความสัมพันธ์เฟสเลื่อนไปเป็น $\Delta\phi$ ระหว่างคลื่นที่ใกล้กันเข้าใกล้ศูนย์ เฟสเลื่อนไปทั้งหมดเป็น ϕ ระหว่างส่วนของลำแสงที่หนึ่งและลำแสงที่ N ที่จุด P มีค่าเท่ากับ $(N - 1)\Delta\phi$

$$\phi = (N - 1)\Delta\phi = kD\sin\theta \qquad (๔.๓๗)$$

$$\phi = N\Delta\phi \qquad N >> 1 \qquad (๔.๓๘)$$

ดังนั้นอัมปลิจูดผสมในสมการ(๔.๓๖) กลายเป็น

$$A(r,\theta) = A(r)\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi} = A(r)\frac{\sin\frac{1}{2}\phi}{[\sin\frac{1}{2}\phi/N]} \qquad (๔.๓๙)$$

เมื่อจำกัดให้ N เป็นค่าใหญ่มาก เราสามารถละทิ้งพจน์ทั้งหมดยกเว้นพจน์แรกของการกระจายแบบเทเลอร์สำหรับ $\sin[\frac{1}{2}\phi/N]$ ในสมการ(๔.๓๙)

$$\sin\tfrac{1}{2}\phi/N = \tfrac{1}{2}\phi/N \qquad (๔.๔๐)$$

$$A(r,\theta) = NA(r)\frac{\sin\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \qquad (๔.๔๑)$$

ขณะที่ N เข้าใกล้อนันต์ เราต้องให้ $A(r)$ เข้าใกล้ศูนย์ ทำให้ $NA(r)$ เป็นค่าคงที่ จากสมการ(๔.๔๑) ให้สังเกตว่า ขณะที่ θ เข้าใกล้ศูนย์ ϕ เข้าใกล้ศูนย์ด้วย และอัตราส่วน $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ มีค่าเข้าใกล้หนึ่ง คือ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \ldots$$

$$= 1 \qquad \text{สำหรับ } x = 0$$

ดังนั้น $A(r,\theta)$ เท่ากับ $NA(r)$ คูณด้วยหนึ่ง สุดท้ายเราได้

$$E(r,\theta,t) = A(r,\theta)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right]\cos(kr - \omega t) \qquad (๔.๔๒)$$

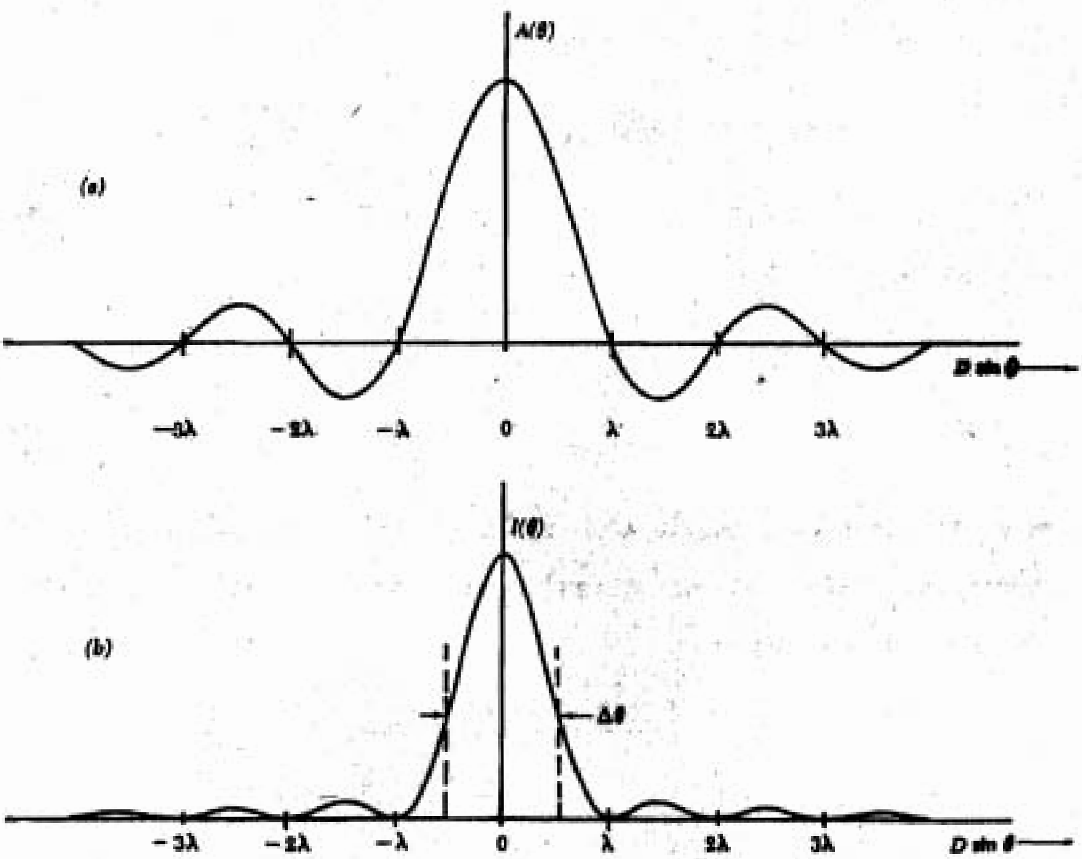
และ

$$= 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda} \qquad (๔.๔๓)$$

ฟลักซ์พลังงานเฉลี่ยตามเวลา (สำหรับ r คงที่) คือ

$$I(r,\theta) = I_{max}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\phi}{(\frac{1}{2}\phi)^2} \qquad (๔.๔๔)$$

ลวดลายอัมปลิจูดและความเข้มของสมการ (๔.๔๒) และ (๔.๔๔) ได้แสดงในรูป ๔.๔



รูป ๔.๔ แสดงลวดลายการเลี้ยวเบนของช่องเปิดเล็กเดี่ยว (a) อัมปลิจูด (b) ความเข้ม

ลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับสองช่องเปิดเล็กขนานกัน

ถ้ามีช่องเปิดเล็กยาวสองช่องขนานกัน แต่ละช่องกว้าง D และวางห่างกัน d ถ้าความกว้าง D ของช่องเปิดไม่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างช่องเปิดทั้งสอง ภาพที่ได้จะเป็นลวดลายการแทรกสอดซ้อนอยู่บนลวดลายการเลี้ยวเบน ลวดลายการเลี้ยวเบนเกิดจากการผสมของลวดลายการเลี้ยวเบนที่ได้จากแต่ละช่องเปิดเล็กเดี่ยว เพราะว่าแต่ละช่องเปิดเล็กจะให้สนามไฟฟ้าที่มีอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสแน่นอนอันหนึ่ง ค่าคงที่เฟสของส่วนที่มาจากช่องเปิดเล็กเหมือนกับค่าคงที่เฟสที่ได้จากส่วนย่อยที่ศูนย์กลางของช่องเปิดเล็ก และอัมปลิจูดแปรตาม $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ ในเมื่อ ϕ คือความแตกต่างทางเฟสของส่วนที่มาจากขอบตรงกันข้ามของช่องเปิดเล็ก เมื่อมีสองช่องเปิดเล็กห่างกันด้วยระยะ d ทำให้แต่ละช่องเปิดเล็กให้ส่วนซึ่งเหมือนกับส่วนที่ได้จากช่องเปิดเล็กแคบเดี่ยวที่อยู่ตรงศูนย์กลางของช่องเปิดเล็ก และมีอัมปลิจูดเป็นไปตามทำนองเดียวกันคือมีแฟคเตอร์ $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ ดังนั้นลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับสองช่องเปิดเล็กเป็นเช่นเดียวกับที่เราหาได้ตอนต้น ยกเว้นค่าคงที่อัมปลิจูด $A(r)$ ที่ได้จากแต่ละช่องเปิดเล็กมีการเปลี่ยนแปลงไปโดยมีแฟคเตอร์ $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ คูณเพิ่มขึ้นจากเดิม ดังนั้นเรากล่าวได้ว่าลวดลายของสองช่องเปิดเล็กหาได้จากสองช่องเปิดเล็กแคบที่ผสมกันโดยคูณด้วย $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ และเราพบว่า ถ้าสองช่องเปิดเล็กถูกกระตุ้นด้วยเฟสเดียวกัน ลวดลายการแผ่รังสีกำหนดด้วย

$$E(\theta,t) = A(\theta)\cos(kr - \omega t) \qquad (๔.๔๔)$$

$$A(\theta) = A(0)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right]\cos\tfrac{1}{2}\Delta\phi \qquad (๔.๔๕)$$

$$\phi = kD\sin\theta = 2\pi\frac{D\sin\theta}{\lambda} \qquad (๔.๔๖)$$

$$\Delta\phi = kd\sin\theta = 2\pi\frac{d\sin\theta}{\lambda} \qquad (๔.๔๗)$$

เมื่อ r เป็นระยะจากจุดสังเกต P ถึงจุดกึ่งกลางระยะศูนย์กลางของสองช่องเปิดเล็ก ลวดลายความเข้ม $I(\theta)$ เป็นปฏิภาคกับค่าเฉลี่ยตามเวลาของกำลังสองของสนามไฟฟ้า

$$I(\theta) \quad I(0)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}\right]^2 (\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta\phi) \qquad (๔.๔๘)$$

แฟคเตอร์ $\cos^2 \frac{1}{2}\Delta\phi$ ให้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของลวดลายสองช่องเปิดเล็ก ด้วยระยะห่างกันมากที่สุดตามมุมเป็น λ/d และแฟคเตอร์ $(\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi)^2$ ให้การผสมของช่องเปิดเล็กเดี่ยวด้วยความกว้างเชิงมุมเต็มประมาณเป็นความเข้มครึ่งหนึ่งของ λ/D หรือความกว้างเชิงมุมเต็มระหว่างระดับที่ศูนย์บนแต่ละด้านของศูนย์กลางมากที่สุดของ $2\lambda/D$ โดยการนับจำนวนของริ้วสองช่องเปิดเล็กในศูนย์กลางมากที่สุดของการผสมช่องเปิดเล็กเดี่ยว(single-slit modulation) ลวดลายความเข้มที่สอดคล้องกับสมการ(๔.๔๔) ได้แสดงในรูป ๔.๖

<u>ลวดลายการเลี้ยวเบนและการแทรกสอดสำหรับช่องเปิดเล็กขนานกันจำนวนมาก</u>

จากการศึกษากรณีของสองช่องเปิดเล็กทำให้เราสามารถหาลวดลายการเลี้ยวเบนสำหรับช่องเปิดเล็กจำนวนมากได้ง่าย โดยสมมติให้ช่องเปิดเล็กเป็นช่องเปิดเล็กแคบและลูกยอดลัพท์ด้วยแฟคเตอร์การผสมอัมปลิจูดสำหรับช่องเล็กเดี่ยว $\sin\frac{1}{2}\phi/\frac{1}{2}\phi$ ต่อไปพิจารณาลวดลายการแทรกสอดสำหรับ N ลำแสงของรูป ๔.๘ อัมปลิจูดสำหรับช่องเปิดเล็กจำนวน N ช่อง กำหนดด้วยสมการ(๔.๓๖)เขียนใหม่เป็น

$$E(r,\theta,t) = A(r,\theta)\cos(kr - \omega t) \qquad (๔.๔๐)$$

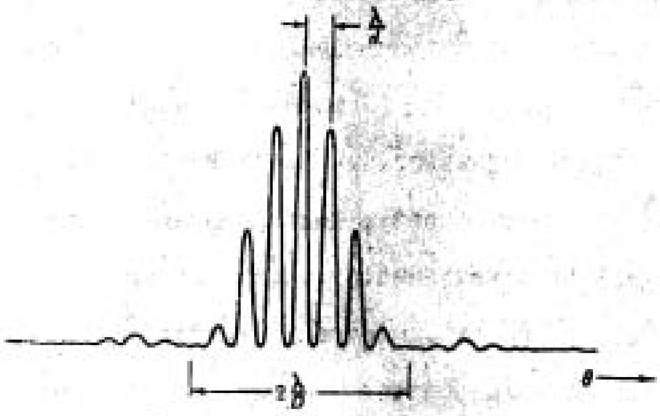
$$A(r,\theta) = A(r)\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\Delta\phi}{\sin\frac{1}{2}\Delta\phi} \qquad (๔.๔๑)$$

$$\Delta\phi = 2\pi\,\frac{d\sin\theta}{\lambda} \qquad (๔.๔๒)$$

มุมที่ทำให้พจน์เศษบนของสมการ(๔.๔๑) เป็นศูนย์กำหนดด้วย $\frac{1}{2}\Delta\phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, ..etc. ซึ่งมุมเหล่านี้ให้ความยาวของเส้นทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นเป็น $d \sin\theta$ เป็นศูนย์ หรือ ,etc. และสอดคล้องกับการแทรกสอดแบบเสริมกันระหว่างลำแสงจำนวน N ทั้งหมด เรียกว่า principal maxima

$$d\sin\theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots\ldots\ldots m, \quad m = 0, 1, 2, \qquad (๔.๔๓)$$

มีค่ามากที่สุดที่ $\theta = 0$ เรียกว่าศูนย์กลางมากที่สุด หรือมากที่สุดอันดับที่ศูนย์ ค่าที่ $m = 1$ เรียกว่ามากที่สุดอันดับหนึ่ง .... etc.



รูป ๔.๖ แสดงลวดลายของสองช่องเปิดเล็ก ช่องเปิดเล็กห่างกันเป็น d เป็นสี่เท่าของความกว้าง D ของแต่ละช่องเปิด

ที่ principal maximum ค่าหนึ่งอัมปลิจูดของการรวมกันเป็น N คูณด้วยอัมปลิจูดของแต่ละช่องเล็ก เห็นได้จากสมการ (๔.๕๑) สำหรับศูนย์กลางมากที่สุด ซึ่ง $\Delta\phi = 0$ เราได้

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - \frac{1}{6}(Nx)^3 + \ldots\ldots}{x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots} = N\,\frac{1 - \frac{1}{6}(Nx)^2 + \ldots\ldots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \ldots\ldots\ldots}$$

$$= N \qquad \text{สำหรับ} \qquad x \to 0$$

สำหรับค่ามากที่สุดอันดับหนึ่ง เมื่อ $m = +1$ ทำนองเดียวกันเราสามารถเขียนได้ว่า ขณะที่ x เข้าใกล้ π การจำกัดพจน์ $\sin Nx/\sin x$ เป็น $\pm N$ โดยการกระจายในพจน์ของมุมอีกๆ ε ซึ่งต่างจาก x ด้วย π

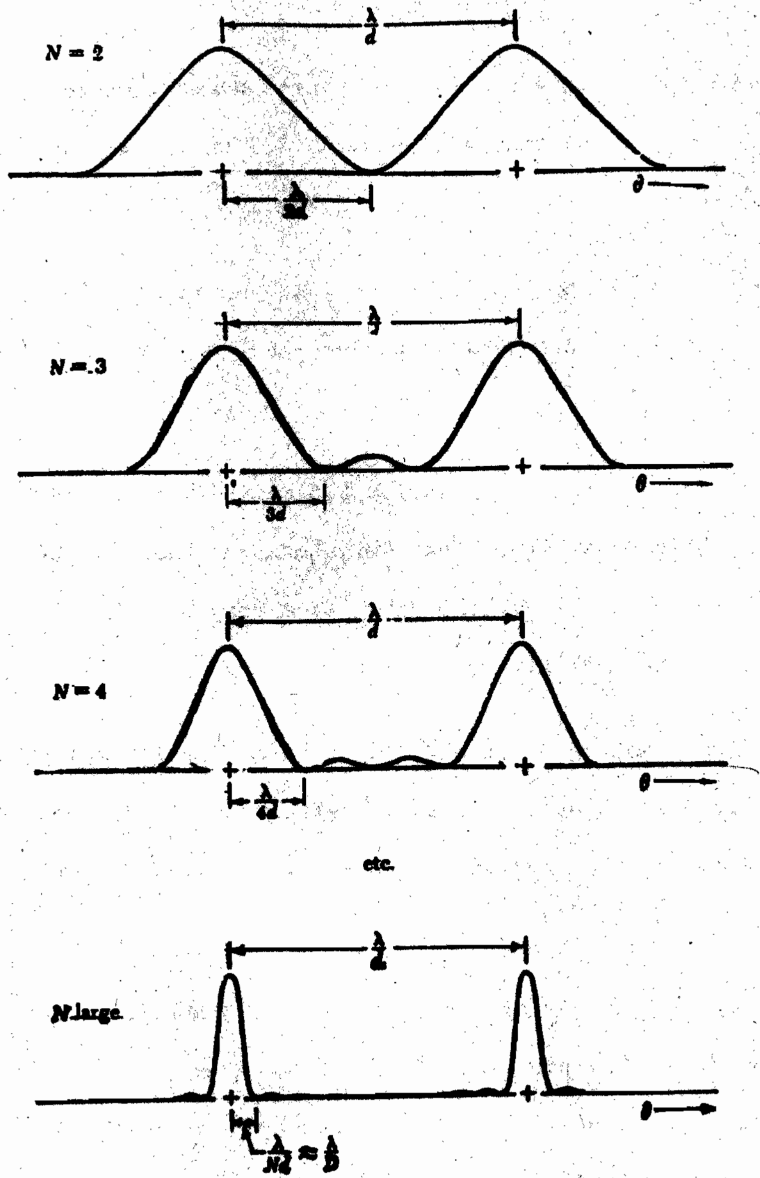
$$x = \pi - \varepsilon$$

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\varepsilon)}{\sin(\pi - \varepsilon)} = (-1)^{N+1}\frac{\sin N\varepsilon}{\sin\varepsilon} \qquad (๔.๕๔)$$

ในขณะที่ ε มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราได้การจำกัดของอัตราส่วนเป็น $(-1)^{N+1}N = \pm N$

ในขณะที่ N มีค่าเพิ่มขึ้น ช่วงกว้างเชิงมุมของ principal maximum จะลดลง

ครึ่งช่วงกว้างเชิงมุมจาก principal maximum ไปยังศูนย์กลางครั้งแรกบนด้านใดด้านหนึ่งของค่ามากที่สุดกำหนดด้วยสมการ (๘.๕๐) ที่ค่า principal maximum ค่าหนึ่งทั้งพจน์เศษบนและส่วนล่างต่างเป็นศูนย์ เมื่อ argument $\frac{1}{2}N\Delta\phi$ ของฟังก์ชันไซน์ในพจน์เศษบนของสมการ (๘.๕๐) เพิ่มขึ้นด้วย π พจน์เศษบนเป็นศูนย์อีกครั้งหนึ่ง (แต่พจน์ส่วนล่างไม่เป็นศูนย์) ดังนั้นส่วนเพิ่มของเฟส $\Delta\phi$ เพิ่มขึ้นด้วย $2\pi/N$ จากค่า principal maximum ค่าหนึ่งไปยังค่าศูนย์ครั้งแรกของอัมปลิจูด และความยาวของเส้นทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นระหว่างสองค่าของ principal maximum เป็น λ ดังนั้น เราเห็นได้ว่าอัมปลิจูดมีค่าลดลงจากค่ามากที่สุดไปเป็นศูนย์ในช่วง $\sin\theta$ เป็น N เท่าที่แคบกว่าช่วง λ/d ใน $\sin\theta$ ระหว่างค่า principal maximum สำหรับ N เป็นค่าใหญ่หรือสำหรับ N เป็นเลขคู่ เราเห็นได้ง่ายว่าค่าศูนย์ครั้งแรก (ต่อจาก principal maximum) เกิดเมื่อความยาวของเส้นทางการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้น $d\sin\theta$ เป็น λ/N ในรูป ๘.๗ ได้แสดงลวดลายการแทรกสอดที่ขึ้นกับ N อย่างไร เมื่อช่องเปิดเล็กห่างกันเป็นระยะ d



รูป ๘.๗ แสดงลวดลายการแทรกสอดจากช่องเปิดหลายช่อง

แบบฝึกหัดบทที่ ๙

9.1 ให้แสงสีเขียวที่มีความยาวคลื่น 5.9×10^{-7} เมตร ผ่านช่องเล็กสองช่องซึ่งห่างกัน 0.8 มิลลิเมตร (8×10^{-4} เมตร) ฉากอยู่ห่างจากช่องเล็ก 0.5 เมตร จงหาระยะระหว่างริ้วมืดและริ้วสว่างที่อยู่ติดกัน (ตอบ 3.7×10^{-4} เมตร)

9.2 แสงความยาวคลื่น λ และ λ' ผ่านช่องเล็กช่องหนึ่งจากลวดลายการเลี้ยวเบนพบว่า ตำแหน่งมืดลำดับแรกของแสง λ อยู่ที่เดียวกับตำแหน่งมืดอันดับที่สองของ λ' จงหาความสัมพันธ์ของ λ และ λ' (ตอบ $\lambda' = \lambda/2$)

9.3 A double slit of slit separation 0.5 mm is illuminated by a parallel beam from a helium-neon laser that emits monochromatic light of wavelength 6328 A^{o} Five meters beyond the slits is a screen. What is the separation of the interference fringes on the screen?

9.4 If a "line" source of visible light is not really a line but has width 1 mm, how far must it be from a double slit which it illuminates in order for the two slits to be reasonably coherent? Assume the slit separation is ½ mm.

9.5 Venus has a diameter of about 800 miles. When it is visible at a "morning star" (or "evening star"), it is about as far away as the sun, i.e., about 93 million miles. It looks "larger than a point" to the unaided eye. Are you seeing the true size of Venus?

9.6 A plane slab of glass of thickness t and index n is inserted between an observer's eye and a point source. Show that the point source appears to be displaced to a point closer to the observer by approximately $[(n-1)/n]t$. Use small-angle approximations.

9.7 A "corner reflector" consists of three plane mirrors joined so as to form an inside corner of a rectangular box. Sow that a light beam that stikes a corner reflector is directed back at 180 deg to its original direction, independent of the angle of incidence, as long as it hits all three surfaces.

9.8 Show that a plane wave normally incident on one face of a wedge-shaped prism of angle A is deviated by an amout θ_{dev}, where

$$n \sin A = \sin(A + \theta_{dev}).$$

9.9 A diffraction-limited laser beam of diameter 1 cm is pointed at the moon. What is the diameter of the area illuminated on the moon? (The moon is 240,000 miles away.) Take the light wavelength to be 6328 A^o. Neglect scattering in the earth's atmosphere.

9.10 (a) Two equal sources radiate a wavelength λ and are separated a distance $\lambda/2$. There is a phase diference $\delta_o = \pi$ between the signals at source. If the intensity of each source is I_s show that the intensity of the radiation pattren is given by

$$I = 4I_s \sin^2(\frac{\pi}{2} \sin\theta)$$

where the sources lie on the axis $\pm\pi/2$. Plot I versus θ.

(b) If the source in (a) are now $\lambda/4$ apart and $\delta_o = \pi/2$ show that

$$I = 4I_s \left[\cos^2 \frac{\pi}{4}(1 + \sin\theta)\right]$$

Plot I versus θ.

9.11 (a) A large number of identical radiators is arranged in rows and columns to form a lattice which the unit cell is a square of side d. Show that all the radiation from the lattice in the direction θ will be in phase at a large distance if $\tan\theta = m/n$, where m and n are integers.

(b) If the lattice of section (a) consists of atoms in a crystal where the rows are parallel to the crystal face, show that radiation of wavelength λ incident on the crystal face at a grazing angle of θ is scattered to give interfernce maxima when $2d \sin\theta = n\lambda$ (Bragg reflexion).

9.12 Show that the separation of equal sources in a linear array producing a principal maximum along the line of the sources ($\theta = \pm\pi/2$) is equal to the wavelength being radiated. Such a pattern is called 'end fire'. Determine the positions (values of θ) of the secondary maxima for $N = 4$ and plot the angular distribution of the intensity.

9.13 The condition for the maxima of the intensity of light of wavelength λ diffracted by a single slit of width d is given by $\alpha = \tan\alpha$, where $\alpha = \pi d \sin\theta/\lambda$. The approximate values of α which satisfy this equation are $\alpha = 0, +3\pi/2, +5\pi/2$, etc. Writing $\alpha = 3\pi/2 - \delta$, $5\pi/2 - \delta$, etc., where δ is small, show that the real solutions for α are $\alpha = 0, \pm 1.43\pi, \pm 2.459\pi, \pm 3.471\pi$, etc.