บทที่ 7
คลื่นในสองหรือสามมิติ

๗.๑ คลื่นระนาบฮาร์โมนิกและเวคเตอร์การเคลื่อนที่

คลื่นที่เราได้พิจารณามาแล้วตอนต้นทั้งหมดเป็นคลื่นในหนึ่งมิติ กล่าวคือ คลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรงซึ่งปกติเราเรียกเป็นแกน z ต่อไปเราจะพิจารณาคลื่นในสองและสามมิติ โดยอธิบายคลื่นเหล่านี้ด้วยระนาบการหมุนของแกนพิกัด (coordinate) ที่ใช้ในการอธิบายคลื่นระนาบเคลื่อนที่หนึ่งมิติมาก่อน

สมมติว่าเรามีคลื่นระนาบฮาร์โมนิกเคลื่อนที่ในตัวกลาง dispersive ชนิดเดียวกันในทิศทางของหน่วยเวคเตอร์ (unit vector) $\hat{z}'$ ตามแกน$+z'$ และสมมติว่าที่ระนาบ $z' = 0$ ฟังก์ชันคลื่นมีการขจัดเป็น

$$\psi(z',t) = A \cos\omega t \qquad (๗.๑)$$

ดังนั้น บนระนาบที่กำหนดด้วยค่าของ z' ใดๆ ฟังก์ชันคลื่นคือ

$$\psi(z',t) = A \cos(\omega t - kz') \qquad (๗.๒)$$

เราต้องการแสดงฟังก์ชันคลื่นนี้ในพจน์ของระบบ cartesian coordinate x, y, z แทนแกนพิกัด z' ตามทิศทางการเคลื่อนที่ ให้จุดกำเนิดของระบบ x,y,z อยู่บนระนาบ $z' = 0$ และ $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ใช้แทนจุดระยะทางวัดจากจุดกำเนิดของระบบ x,y,z ระนาบ z' = ค่าคงที่ ใช้อธิบายในระบบ x,y,z คือ ระนาบ $z' = \vec{r}\cdot\hat{z}'$ เท่ากับค่าคงที่ ดังนั้นปริมาณ kz' ในสมการ(๗.๒) สามารถเขียนเป็น

$$kz' = k(\hat{z}'\cdot\vec{r}) = (k\hat{z}')\cdot\vec{r} \equiv \vec{k}\cdot\vec{r} \qquad (๗.๓)$$

ปริมาณ $k\hat{z}'$ เรียกว่า propagation vector $\vec{k}$:

$$\vec{k} \equiv k\hat{z}' \qquad (๗.๔)$$

ขนาดของ $\vec{k}$ คือ k ทิศทางของ $\vec{k}$ คือ $\hat{z}'$ เป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น สมการ (๗.๓) กลายเป็น

$$kz' = \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \qquad (๗.๔)$$

ความหมายทางฟิสิกส์ของเวคเตอร์คลื่น k คือจำนวนของเรเดียนของเฟสต่อหน่วยการขจัดตามทิศทางการเคลื่อนที่ $\hat{z}'$ นั่นคือ kz' เป็นเฟสสะสมในระยะทาง z' (โดยปกติเราคิดว่าเฟสมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ ωt เพิ่มขึ้นสำหรับตำแหน่ง z' ที่แน่นอน) ดังนั้น ความหมายของ k_x คือจำนวนเรเดียนของเฟสต่อหน่วยการขจัดตามแกน $+x$ หรือตาม $\hat{x}$ และ k_y และ k_z มีความหมายในทำนองเดียวกัน ตัวอย่างเช่น สมมติว่า $\hat{x}$ ทำมุม θ กับ $\hat{z}'$ มีความยาวคลื่น λ ดังนั้นถ้าคลื่นเคลื่อนที่ไปตามทิศ $\hat{z}'$ เป็นระยะทาง λ เฟสมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย 2π แต่ถ้ามันเคลื่อนที่ไปทาง $\hat{x}$ มันจะต้องเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง $\lambda/\cos\theta$ ก่อนที่ z' มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยระยะความยาวคลื่น ดังนั้น เฟสมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย 2π ในระยะทางตาม $\hat{x}$ มากกว่า λ ด้วยแฟคเตอร์ $(\cos\ )^{-1}$ หรืออีกนัยหนึ่ง การเพิ่มของเฟสต่อหน่วยระยะทางตาม $\hat{x}$ มีค่าน้อยกว่า k ด้วยแฟคเตอร์ $\cos\theta$ นั่นคือ เราสมมติเวคเตอร์ให้มีการกระทำเช่นนั้น ถ้าจัดให้ $\vec{k}\cdot\hat{x} = k_x$ เป็นขนาดเงาของเวคเตอร์บนแกน $\hat{x}$ จะได้จำนวนน้อยกว่าขนาดของเวคเตอร์ด้วยแฟคเตอร์เท่ากับ cosine ของมุมที่เหมาะสม สภาวะเช่นนั้นทำให้ผลรวมของกำลังสองของส่วนย่อยเท่ากับกำลังสองของขนาด ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า k_x มีความสัมพันธ์กับ k เป็นส่วนประกอบ x ของเวคเตอร์ $\vec{k}$ ซึ่งมีขนาดเป็น k

<u>ระนาบของเฟสคงที่</u>

คลื่นเคลื่อนที่ตามสมการ (๗.๒) สามารถเขียนเป็นแบบ

$$\psi(x,y,z,t) = A\cos(\omega t - kz')$$

$$= A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

$$\phi(x,y,z,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \qquad (ฑ.๖)$$

argument ของฟังก์ชันคลื่นเรียกว่าเฟส $\phi(x,y,z,t)$

$$\phi(x,y,z,t) = \omega t - kz'$$

$$= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$$

$$= \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} \qquad (ฑ.๗)$$

เมื่อเวลาแน่นอน t ที่ซึ่งมี ϕ เท่ากันกำหนดเป็นระนาบที่เรียกว่า แนวหน้าคลื่น (wave front)

$$d\phi = \omega dt - \vec{k}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0 - \vec{k}\, d\vec{r} \qquad \text{ที่เวลาแน่นอน}$$

$$= 0 \qquad \text{ถ้า } d\vec{r} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{k} \qquad (ฑ.๘)$$

ดังนั้นที่เวลาแน่นอน t เฟสจะมีค่าเท่ากันบนพื้นที่ทั้งหมดที่การเพิ่มขึ้นของเวคเตอร์ $d\vec{r}$ ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ $\hat{k}$ คลื่นนั้นเรียกว่า ระนาบคลื่น

ความเร็วเฟสของคลื่นมีค่าเท่ากับ dz'/dt สำหรับ $d\phi = 0$

$$d\phi = \omega dt - kdz' = 0$$

$$v_\phi = \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k} \qquad (ฑ.๙)$$

ตัวอย่างความสัมพันธ์การกระจายของคลื่นแบบต่างๆในสามมิติ มีลักษณะคล้ายกับความสัมพันธ์การกระจายที่เราได้รู้จักมาแล้ว เช่น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ

$$\omega^2 = c^2k^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \qquad (ฑ.๑๐)$$

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลาง dispersive

$$\omega^2 = \frac{c^2k^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \qquad (ศ.๑๑)$$

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน ionosphere

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 = \omega_p^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \qquad (ศ.๑๒)$$

ความสัมพันธ์การกระจายไม่ขึ้นกับสภาวะขอบเขตเสมอ เพราะว่าสภาวะขอบเขตใช้เพื่อพิจารณาคลื่นว่าเป็นคลื่นนิ่ง หรือคลื่นเคลื่อนที่ หรือเป็นคลื่นแบบผสม

คลื่นนิ่ง

สองคลื่นระนาบเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามและมีอัมปลิจูดเท่ากัน คลื่นทั้งสองอาจจะรวมกันเป็นคลื่นนิ่งระนาบมีลักษณะเป็น

$$\psi(x,y,z,t) = A\cos(\omega t + \phi)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha) \qquad (ศ.๑๓)$$

เขียน $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ และการเท่ากันทางตรีโกณมิติ เราอาจเขียนคลื่นนิ่งเป็นการรวมกันของแต่ละพจน์ซึ่งมีลักษณะทั่วไปคือ

$$\psi(x,y,z,t) = A\cos(\omega t + \phi)\cos(k_x x + \alpha_1)\cos(k_y y + \alpha_2)\cos(k_z z + \alpha_3) \qquad (ศ.๑๔)$$

เมื่อเราเขียนคลื่นฮาร์โมนิกในพจน์ของคลื่นนิ่งตามสมการ (ศ.๑๔) เราสามารถกำหนด k_x, k_y และ k_z เป็นปริมาณบวก เหตุผลก็คือ ในคลื่นนิ่ง คลื่นไม่ได้เคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวตลอด ขณะที่คลื่นกำลังเคลื่อนที่มันอาจจะเคลื่อนที่ไปทั้งสองทิศทางพร้อมกัน โดยการใช้พีชคณิตเราเห็นได้ว่า ถ้า k_x ในสมการ (ศ.๑๔) เป็นลบ เราสามารถแทน k_x ด้วย $-k_x$ และแทน α_1 ด้วย $-\alpha_1$ โดยไม่เป็นผลต่อ $\psi(x,y,z,t)$ ดังนั้น เราสามารถให้ค่าทั้งสามของ k_x, k_y และ k_z เป็นบวกและเปลี่ยนค่าคงที่เฟส α_1, α_2 และ α_3 ให้เท่ากัน

คลื่นผสมระหว่างคลื่นเคลื่อนที่และคลื่นนิ่ง

ในหนึ่งมิติ เราสามารถมีคลื่นเคลื่อนที่อย่างเดียว ซึ่งสามารถเขียนเป็นการรวม

กันของคลื่นนิ่ง หรือมีคลื่นนิ่งอย่างเดียวซึ่งสามารถเขียนเป็นการรวมกันของคลื่นเคลื่อนที่ หรือเป็นคลื่นซึ่งเกิดจากการรวมกันของคลื่นที่ไม่เป็นทั้งคลื่นเคลื่อนที่อย่างเดียวหรือคลื่นนิ่งอย่างเดียว ในทำนองเดียวกันมันยังคงเป็นจริงสำหรับคลื่นในสามมิติ แต่มีขอบเขตอิสระรวมกันของแต่ละสามมิติที่ไม่ขึ้นต่อกัน ตัวอย่างเช่น ได้จากคลื่นคงที่ตาม x คลื่นนิ่งตาม y และคลื่นเคลื่อนที่บริสุทธิ์ตาม z รวมกันเป็น

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(y,z,t) = A \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t) \quad (๗.๑๕)$$

<u>สมการคลื่นสามมิติและสมการคลื่นแบบฉบับ</u>

คลื่นฮาร์โมนิกรูปไซน์สามมิติใดๆที่เป็นทั้งคลื่นนิ่ง คลื่นเคลื่อนที่ หรือคลื่นแบบผสมต่างสอดคล้องตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi \quad (๗.๑๖)$$

สมการคลื่นที่มีความสัมพันธ์กับความสัมพันธ์การกระจายจากสมการ(๗.๑๐), (๗.๑๑) และ (๗.๑๒) ดังนี้

กรณี : คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ

โดยใช้สมการ(๗.๑๖) และ(๗.๑๐) เราพบว่าสำหรับส่วนย่อยฮาร์โมนิกเดี่ยวที่มีความถี่ ω และจำนวนคลื่น k ฟังก์ชันคลื่นจะสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (๗.๑๗)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นต่อความถี่ ω สมการคลื่น(๗.๑๗) สอดคล้องกับทุกส่วนย่อยฮาร์โมนิกและการรวมกันของคลื่นนิ่ง และคลื่นเคลื่อนที่แม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ สมการ(๗.๑๗) เป็นสมการแบบสามมิติของสมการคลื่นแบบฉบับสำหรับคลื่น nondispersive สมการคลื่น

nondispersive สามมิติที่มีลักษณะเหมือนกัน เช่น สมการคลื่นเสียงในอากาศ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \qquad (๗.๑๘)$$

ด้านขวามือของสมการ(๗.๑๘) คือ c^2 คูณกับ divergence ของ gradient ของ ψ เขียนเป็น div grad ψ หรือ $\nabla \cdot \nabla \psi$ บางครั้งเรียก $\nabla^2 \psi$ เป็น "del-squared psi"

กรณี : คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลาง dispersive ชนิดเดียวกัน

ความสัมพันธ์การกระจายในสมการ(๗.๑๑) ให้สมการคลื่นฮาร์โมนิกของความถี่ ω เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2(\omega)} \nabla^2 \psi \qquad (๗.๑๙)$$

เมื่อ n ขึ้นกับความถี่ ω

กรณี : คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน ionosphere

ใช้สมการ(๗.๑๒) และ(๗.๑๖) เราพบว่าสมการคลื่นสามมิติ Klein- Gordon คือ

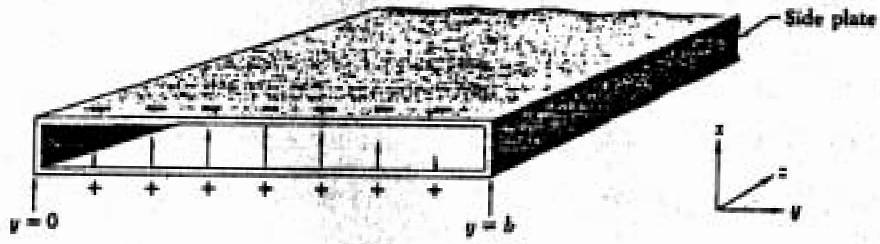
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \nabla^2 \psi \qquad (๗.๒๐)$$

ต่อไปเป็นตัวอย่างบางอันของคลื่นฮาร์โมนิกรูปไซน์ในสองมิติ

<u>ตัวอย่าง ๑</u> คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ท่อนำคลื่นทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถทำจากแผ่นตัวนำคู่ขนานสายอากาศนำมาประกบกันตามรูป ๗.๑ ช่องว่างภายในท่อนำคลื่นเป็นสุญญากาศ เราจะพิจารณาเฉพาะ modes ของคลื่น ซึ่งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กต่างไม่ขึ้นกับ x (สำหรับ y และ z ถูกจำกัดแน่นอน และ x อยู่ภายในท่อ) สมการคลื่นที่เหมาะสมคือ สมการคลื่นแบบฉบับในสองมิติ (สมการ(๗.๑๗)) ให้ ψ แทนสนามไฟฟ้า E_x เราได้

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \qquad (๗.๒๑)$$



รูป ๗.๑ ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าทำด้วยสายอากาศแผ่นคู่ขนานต่อกับแผ่นตัวนำที่ y = 0 และ y = b. ลูกศรใช้แทนสนามไฟฟ้าขณะใดๆที่ปลายด้านเข้าของท่อนำคลื่น

เลือกค่าความถี่อนันต์ ω ทำให้สมการ (๗.๒๑) กลายเป็น

$$-\omega^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \qquad (๗.๒๒)$$

แรงเหนี่ยวนำข้างแผ่นสนามไฟฟ้า E_x เป็นศูนย์ที่ $y = 0$ และ $y = b$ ดังนั้น $\psi(y,z,t)$ ต้องเป็นคลื่นนิ่งเมื่อเทียบกับแกน y มีบัพอยู่ที่ $y = 0$ และ b เราสมมติว่ามีแรงเคลื่อนหักคาที่ $z = 0$ ดังนั้นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ไปตามทิศ $+z$ เข้าไปในท่อ และคลื่นต้องเป็นคลื่นเคลื่อนที่เมื่อเทียบกับแกน z สมการ (๗.๒๒) สอดคล้องกับคลื่นผสมของคลื่นนิ่งและคลื่นเคลื่อนที่

$$\psi(y,z,t) = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \qquad (๗.๒๓)$$

มีความสัมพันธ์การกระจาย

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + c^2 k_z^2 \qquad (๗.๒๔)$$

การเลือกค่า $\sin k_y y$ เราต้องเลือกให้สอดคล้องกับสภาวะ $E_x = 0$ ที่ $y = 0$ และ

เลือก $\sin k_y y$ เป็นศูนย์ที่ $y = b$ คือ

$$k_y b = \pi, 2\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots, m\pi, \ldots\ldots \qquad (๗.๒๕)$$

คลื่นเหล่านี้เราเรียกว่า TE mode (mode ของสนามไฟฟ้าตามขวาง) เราไม่จำเป็นต้องศึกษาสนามแม่เหล็กต่างหากอีกครั้งหนึ่ง เพราะว่าเราพิจารณามันได้จากสนามไฟฟ้าในลักษณะเดียวกัน

<u>ความถี่ต่ำสุดหรือความถี่ cutoff</u>

ให้เราพิจารณา mode ต่ำสุดคือเมื่อ $m = 1$ ในสมการ (๗.๒๕) เป็น mode ที่แสดงในรูป ๗.๑ ซึ่งได้แสดงเพียงครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นจาก $y = 0$ ถึง b แทนค่าสมการ (๗.๒๕) ลงในสมการ (๗.๒๔) สำหรับ $m = 1$ เราได้

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{b^2} + c^2 k_z^2 \qquad (๗.๒๖)$$

ดังนั้นความสัมพันธ์การกระจายระหว่าง ω และ k_z (สำหรับ mode ที่มี $k_y b = \pi$) ปรากฏเป็นเช่นเดียวกันกับความสัมพันธ์การกระจายสำหรับคลื่นระนาบเคลื่อนที่ในทิศ z ใน ionosphere คือ

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \qquad (๗.๒๗)$$

หรือเป็นเช่นเดียวกับความสัมพันธ์การกระจายสำหรับระบบลูกตุ้มควบคู่กัน คือ

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{Ka^2}{M} k^2 \qquad (๗.๒๘)$$

ดังนั้นเราคาดคะเนได้ว่าปริมาณ $c^2\pi^2/b^2$ แสดงเป็นความถี่ low-cutoff และสำหรับความถี่แรงเคลื่อน ω ต่ำกว่า cutoff นี้ ความสัมพันธ์การกระจายตามสมการ (๗.๒๖) เปลี่ยนไปเป็น

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{b^2} - c^2 \kappa_z^2 \qquad (๗.๒๙)$$

สำหรับความถี่ $\omega < \pi c/b$ สมการคลื่น(๗.๒๐) มีรากสมการเป็น

$$\psi(y,z,t) = A \sin k_y y \cos\omega t \; e^{-\kappa_z z} \qquad (๗.๓๐)$$

ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง ω, k_y และ k_z ด้วย

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 - c^2 \kappa_z^2 \qquad (๗.๓๑)$$

เมื่อสมการ(๗.๒๘) ถูกต้องและ ω^2 มีค่าน้อยกว่า $c^2\pi^2/b^2$ (จัดให้ $m = 1$) ดังนั้น สมการ(๗.๒๙) ถูกต้องและ κ_z^2 เป็นบวก

<u>คลื่นเคลื่อนที่เส้นขวาง</u> (crisscross traveling waves)

คลื่นผสมระหว่างคลื่นนิ่งและคลื่นเคลื่อนที่ตามสมการ(๗.๒๒) เทียบได้เป็นการรวมกันของคลื่นเคลื่อนที่เส้นขวางเข้าไปในท่อนำคลื่น ดังจะเห็นได้จาก

$$\psi = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t)$$

$$= \tfrac{1}{2}A \sin(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega t) - \tfrac{1}{2}A \sin(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (๗.๓๒)$$

$$\vec{k}_1 = \hat{z}k_z + \hat{y}k_y , \qquad \vec{k}_2 = \hat{z}k_z - \hat{y}k_y$$

เส้นขวางนี้ความจริงก็คือเส้นที่ $\vec{k}_1$ และ $\vec{k}_2$ มีเครื่องหมายของส่วนประกอบ y ตรงกันข้ามนั่นเอง

<u>ความเร็วเฟส ความเร็วกลุ่ม และ c</u>

จากรูปภาพของคลื่นเคลื่อนที่เส้นขวาง เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเฟสและความเร็วกลุ่มได้ง่าย โดยพิจารณาการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ในสมการ(๗.๓๒) ที่ได้แสดงในรูป ๗.๒ พิจารณาแนวหน้าคลื่นจำนวนเล็กน้อยของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ขวางผ่านเข้าไปในท่อเป็นระยะทาง ct ในเวลา t ตามรูป ๗.๒ ได้แสดงเป็นลำแสง $\vec{k}_1$ ขณะที่ลำแสงเคลื่อนที่เป็นระยะทาง ct แนวหน้าคลื่นที่ตัดกับค่าคงที่ใดๆของ y (เช่น y = b)

เคลื่อนที่ด้วยระยะทางแสดงเป็น $v_\phi t$ ตามรูป ซึ่งให้ความเร็วเฟสไปตาม z นั่นคือความเร็วที่สันคลื่นเคลื่อนที่ไปตาม z ให้สังเกตว่า เมื่อมุม θ เพิ่มขึ้นเป็น ๙๐ องศา ความเร็วเฟสกลายเป็นค่าอนันต์ โดยทั่วไปดูจากรูปเราจะได้

$$v_\phi = \frac{c}{\cos\theta} \qquad (๗.๓๓)$$

ความเร็วกลุ่มคือความเร็วซึ่งพลังงานเคลื่อนที่ไปตามทิศ z ถ้าเราสับคลื่น ห่อคลื่นจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วกลุ่ม ลำแสง $\vec{k}_1$ จะพาห่อคลื่นเคลื่อนที่ขวางเข้าไปในท่อนำคลื่นด้วยความเร็ว c คลื่น $\vec{k}_2$ จะให้ห่อคลื่นตัดกับส่วน y ของคลื่น $\vec{k}_1$ ทั้ง $\vec{k}_1$ และ $\vec{k}_2$ ห่อคลื่นเคลื่อนที่เป็นระยะทาง $v_g t$ ตาม z ในเวลา t ตามรูป ๗.๒ เราเห็นได้ว่า

$$v_g = c\cos\theta \qquad (๗.๓๔)$$

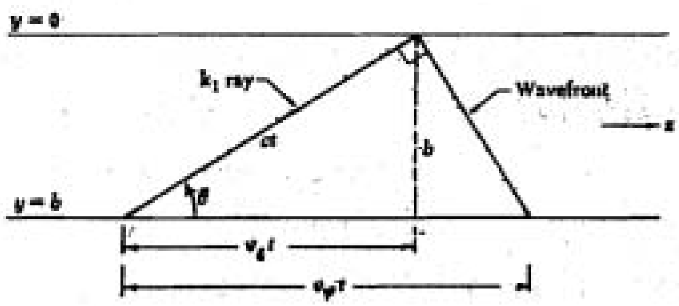
เราสามารถพิสูจน์ว่า v_ϕ และ v_g ในสมการ (๗.๓๓) และ (๗.๓๔) ถูกต้อง โดยใช้ความสัมพันธ์การกระจาย ดังนี้

จาก $$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos\theta}$$

และ $$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c\cos\theta$$

$$v_\phi v_g = \frac{\omega}{k}\left(\frac{d\omega}{dk_z}\right) = c^2$$

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2$$



รูป ๗.๒ แสดงคลื่น crisscross ในท่อนำคลื่น

ดังนั้น
$$v_p v_g = \frac{\omega}{k_z}\left(\frac{d\omega}{dk_z}\right) = c^2 \qquad (๗.๓๔)$$

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2$$

$$d(\omega^2) = c^2 d(k_z^2)$$

อินติเกรตอีกครั้งจะได้
$$\omega^2 = c^2k_z^2 + \text{ค่าคงที่} \qquad (๗.๓๕)$$

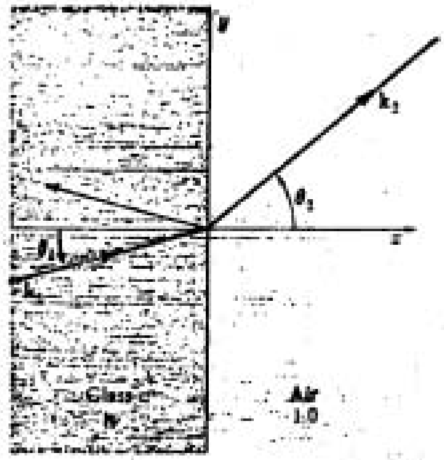
ค่าคงที่นี้เราสามารถพิจารณาได้โดยให้ $k_z = 0$ ดังนั้น $\omega = \omega_{c.o.}$ และต้องการคาบเวลา $T_{c.o.}$ เป็น $\frac{2b}{c}$ ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์การกระจายตามสมการ (๗.๒๖) mode สูงๆเราหาได้โดยให้ความถี่ cutoff เป็นฮาร์โมนิกของความถี่ต่ำสุดที่เป็นไปได้ สำหรับกรณีทั่วไปได้ [สมการ (๖.๒๔) และ (๖.๒๕)]

$$\omega^2 = c^2k_z^2 + \frac{c^2\pi^2m^2}{b^2} \qquad (๗.๓๖)$$

<u>ตัวอย่าง ๒</u> การสะท้อนและการส่งผ่านของแสงตกกระทบจากแก้วไปยังอากาศ

เป็นตัวอย่างของคลื่นสองมิติอีกแบบหนึ่ง สมมติว่าเรามีแผ่นแก้วหนาจาก $z = -\infty$ ถึง $z = 0$ ที่ปลายผิวแก้วระนาบ $z = 0$ เป็นสุญญากาศจนถึง $z = +\infty$ เราอาจคิดว่าสุญญากาศแสดงเป็นตัวกลาง dispersive เหมือนกับที่มันแสดงเป็นคลื่นระนาบ แต่เราพบในตัวอย่าง ๑ มาแล้วว่าเมื่อคลื่นไม่เป็นคลื่นระนาบเคลื่อนที่อยู่ในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ท่อนำคลื่นกลายเป็น reactive ภายใต้สภาวะที่เหมาะสม (เช่น ความกว้างของท่อแคบมากหรือความถี่น้อย) ถึงแม้จะไม่มีอะไรเลยอยู่ภายในคือเป็นสุญญากาศก็ตาม ต่อไปเรามาดูการทำงานของมัน คลื่นแสงจะสอดคล้องกับสมการคลื่นในแต่ละตัวกลาง แก้วและสุญญากาศ (พิจารณาเฉพาะความถี่เดียว ω) ขอบเขตระหว่างแก้วและสุญญากาศคือ $z = 0$ เวคเตอร์การเคลื่อนที่ $\vec{k}_1$ ของคลื่นตกกระทบมีส่วนย่อย k_z ตาม $\hat{z}$ และส่วนย่อย k_y ตาม $\hat{y}$ ตามรูป ๗.๓

ภายในบริเวณแก้ว ขนาด k_1 ของเวคเตอร์การเคลื่อนที่ $\vec{k}_1$ เท่ากับผลคูณของดัชนีหักเหและขนาด ω/c ของเวคเตอร์การเคลื่อนที่ และขนาดของ $\vec{k}_2$ ก็คือ ω/c



รูป ๗.๓ แสดงคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านจากแก้วไปยังสุญญากาศ

$$k_2 = \frac{\omega}{c}, \qquad k_1 = n\frac{\omega}{c} \qquad (๗.๓๘)$$

ความสัมพันธ์การกระจายในตัวกลาง ๒ คือ

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2 \qquad (๗.๓๙)$$

ต่อไปเราให้ k_{2y} เท่ากับ k_{1y} ทั้งนี้เพราะว่า k_{1y} เท่ากับ 2π คูณกับจำนวนของสันคลื่นต่อหน่วยความยาวตาม $\hat{y}$ ในตัวกลาง ๑ ทำนองเดียวกัน k_{2y} เท่ากับ 2π คูณด้วยจำนวนสันคลื่นต่อหน่วยความยาวตาม $\hat{y}$ ในตัวกลาง ๒ แต่ขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามแกน y ที่ $z = 0$ จำนวนสันคลื่นที่ผ่านเข้าไปในแก้วต้องเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนสันคลื่นที่ผ่านออกจากแก้วในสุญญากาศ เพราะว่าไม่มีการสูญเสียสันคลื่นต่อหน่วยความยาวตาม $\hat{y}$ ในการเคลื่อนที่ผ่านจากแก้วไปยังสุญญากาศ ดังนั้น

$$\begin{aligned} k_{2y} &= k_{1y} \\ &= k_1 \sin\theta_1 \\ &= n\frac{\omega}{c}\sin\theta_1 \end{aligned} \qquad (๗.๔๐)$$

แทนค่าสมการ (๗.๔๐) ลงในสมการ (๗.๓๔) เราได้

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{n^2\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1 + k_{2z}^2 \qquad (๗.๔๑)$$

หรือเราได้ความสัมพันธ์การกระจาย

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2\sin^2\theta_1) \qquad (๗.๔๒)$$

<u>มุมวิกฤตสำหรับการสะท้อนภายในทั้งหมด</u> (critical angle for total internal reflection)

ถ้าเราให้มุมของการตกกระทบเป็น θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ส่วนย่อย z ของเวคเตอร์เคลื่อนที่ k_2 มีค่าน้อยลง จนกระทั่งมุม θ_1 เพิ่มขึ้นถึงมุมตกกระทบค่าหนึ่งที่ทำให้ k_{2z} มีค่าเป็นศูนย์ (เราสมมติว่า n มีค่ามากกว่าหนึ่ง เช่น คลื่นแสงในแก้วหรือในน้ำ) ซึ่งให้มุม cut off หรือเรียกว่ามุมวิกฤตของการตกกระทบสำหรับการสะท้อนภายในทั้งหมด หรือเรียกสั้นๆว่า มุมวิกฤต $\theta_{\text{วิกฤต}}$ จากสมการ (๗.๔๔) มุมวิกฤตกำหนดด้วย

$$n\sin\theta_{\text{วิกฤต}} = 1 \qquad (๗.๔๓)$$

(สำหรับแก้ว ดัชนีหักเห n = ๑.๕๒ ให้ $\theta_{\text{วิกฤต}}$ = ๔๑.๒องศา) ที่มุมวิกฤตของการตกกระทบลำแสงผ่านเข้าไปในสูญญากาศจะสัมผัสกับผิวของแก้ว

<u>กฎของสเนลล์</u> (Snell's law)

สำหรับมุม θ_1 มีค่าระหว่างศูนย์และ $\theta_{\text{วิกฤต}}$ ลำแสงมีส่วนหนึ่งสะท้อนและอีกส่วนหนึ่งหักเหเข้าไปในสูญญากาศ ดังนั้น ปรากฏมีมุม θ_2 ตามรูป ๗.๓ และความสัมพันธ์ $k_{2y} = k_{1y}$ สอดคล้องกับกฎของสเนลล์ คือ

$$k_{2y} = k_2\sin\theta_2 = n_2\frac{\omega}{c}\sin\theta_2$$

$$k_{1y} = k_1 \sin\theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin\theta_1$$

เมื่อ $k_{1y} = k_{2y}$ จะได้

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (๗.๔๔)$$

<u>การสะท้อนภายในทั้งหมด</u>

สำหรับมุมของการตกกระทบโตกว่ามุมวิกฤต ความสัมพันธ์การกระจายหาได้จาก สมการ(๗.๕๒) โดยแทนค่า k_{2z}^2 ด้วย $-\kappa_{2z}^2 \equiv -\kappa^2$

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[n^2 \sin^2\theta_1 - 1\right] \qquad (๗.๔๕)$$

และ $$n^2 \sin^2\theta_1 > 1$$

ดังนั้นฟังก์ชันคลื่น (สนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็ก) ในตัวกลาง ๒ (สุญญากาศ) กำหนดด้วยคลื่นเคลื่อนที่ตาม y และคลื่นเอกซ์โปเนนเชียลตาม z

$$\psi(y,z,t) = A \cos(\omega t - k_y y) e^{-\kappa z} \qquad (๗.๔๖)$$

เมื่อ κ เป็นไปตามสมการ(๗.๔๕) และ k_y คือ $k_1 \sin\theta_1 = n(\omega/c)\sin\theta_1$ ความเข้มพลังงานเฉลี่ยตามเวลาเป็นปฏิภาคตรงกับเวลาเฉลี่ยกำลังสองของ $\psi(y,z,t)$ คือ

$$\text{ความเข้ม พลังงาน} \propto e^{-2\kappa z} \qquad (๗.๔๗)$$

สมการ(๗.๔๕) สามารถประยุกต์ใช้ได้กับปริซึมที่มีมุมยอดตั้งฉาก แสงตกกระทบภายในจากแก้วไปยังอากาศด้วยมุมตกกระทบ ๔๕ องศา มุมนี้โตกว่ามุมวิกฤต ($\theta_{\text{วิกฤต}}$ = ๔๑.๒ องศา สำหรับแก้วมีดัชนีหักเห n = ๑.๕๒) ดังนั้น ถ้าแสงถูกสะท้อนทั้งหมด ระยะทางลดลงอย่างเอกซ์โปเนนเชียลเฉลี่ยกำหนดด้วย (สำหรับ θ_1 = ๔๕ องศา)

$$\delta = \kappa^{-1} = \frac{c}{\omega}\left[n^2 \sin^2\theta_1 - 1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{(1.52)^2}{2} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} = 0.4\,\lambda$$

เป็นระยะทางของความยาวคลื่นต่างๆที่เข้าไปในสูญญากาศได้โดยไม่ต้องคำนึงถึงสนาม

๗.๒ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ในตอนนี้เราจะใช้สมการของ Maxwell พิสูจน์บางสิ่งบางอย่างที่เราได้ทราบจากการศึกษาสายอากาศชนิดแผ่นคู่ขนานมาแล้ว ขณะเดียวกันได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับความรู้ขั้นมูลฐานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้ดีขึ้น และเข้าใจคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสามมิติ

จากสมการของ Maxwell สำหรับสูญญากาศกำหนดเป็น

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\vec{\nabla} \times \vec{B} \qquad (๗.๔๘ก)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \qquad (๗.๔๘ข)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad (๗.๔๘ค)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (๗.๔๘ง)$$

<u>สมการคลื่นแบบฉบับสำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสูญญากาศ</u>

เราหาสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับ $\vec{E}$ ได้โดยกำจัด $\vec{B}$ จากสมการ(๗.๔๘ก)ถึง(๗.๔๘ง) เริ่มต้นโดยหาอนุพันธ์สมการ(๗.๔๘ก) เทียบกับ t และใช้สมการ(๗.๔๘ข)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$= c\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= c\vec{\nabla} \times (-c\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$= -c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \qquad (๗.๔๙)$$

จากการเท่ากันทางเวคเตอร์สำหรับเวคเตอร์ $\vec{C}$ ใดๆ

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{C} \qquad (๗.๕๐)$$

แทนค่า $\vec{E}$ สำหรับ $\vec{C}$ ในสมการ(๗.๕๐) และใช้สมการ(๗.๔๘ก) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ หาจากสมการ(๗.๔๔)

$$\frac{\partial^2\vec{E}(x,y,z,t)}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{E}(x,y,z,t) \qquad (๗.๕๑ก)$$

สมการเวคเตอร์นี้ประกอบด้วยสามสมการอนุพันธ์ย่อยแยกออกจากกันได้คือ

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_x \ ; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_y \ ; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 E_z \qquad (๗.๕๑ข)$$

ดังนั้นแต่ละส่วนประกอบ E_x, E_y และ E_z เป็นไปตามสมการคลื่นแบบฉบับสำหรับคลื่น nondispersive และเราสามารถหาสมการคลื่นแบบฉบับสำหรับสามส่วนประกอบย่อยของ $\vec{B}$ โดยการกำจัด $\vec{E}$ จากสมการของ Maxwell ได้ในทำนองเดียวกัน

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศประกอบด้วยสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ขึ้นกับระยะทางและเวลา $\vec{E}(x,y,z,t)$ และ $\vec{B}(x,y,z,t)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

๑. มีทิศทางการเคลื่อนที่ไปทางเดียว ซึ่งเราจัดให้ไปตาม $\hat{z}$ (คลื่นสามารถเป็นผลรวมใดๆ ของคลื่นเคลื่อนที่หรือคลื่นนิ่ง)

๒. ไม่มีส่วนประกอบย่อยของ $\vec{E}$ หรือ $\vec{B}$ ขึ้นกับทั้งแกนพิกัดตามขวางของ x และ y ดังนั้นเรามีคลื่นระนาบเป็น

$$\vec{E} = \hat{x}E_x(z,t) + \hat{y}E_y(z,t) + \hat{z}E_z(z,t) \qquad (๗.๕๒)$$

$$\vec{B} = \hat{x}B_x(z,t) + \hat{y}B_y(z,t) + \hat{z}B_z(z,t) \qquad (๗.๕๓)$$

เราไม่สนใจว่าคลื่นมาจากที่ใดหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เราไม่สนใจแหล่งกำเนิดคลื่น เพียงแต่สมมติว่าคลื่นมาจากที่ใดที่หนึ่งและมีรูปร่างเป็นไปตามสมการ(๗.๕๒) และ(๗.๕๓)

ต่อไปเราจะใช้สมการของ Maxwell ประยุกต์ใช้กับสมการ(๗.๕๒) และ(๗.๕๓)

เพื่อพิสูจน์ว่าคลื่นระนาบเป็นคลื่นตามขวาง ขั้นแรกเราใช้กฎของเกาส์ (Gauss's law) ซึ่งกล่าวว่า div $\vec{E}$ เท่ากับ $4\pi p$ สำหรับสุญญากาศ ρ เป็นศูนย์ และเมื่อไม่มีส่วนประกอบย่อยใดๆขึ้นกับ x หรือ y ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y เป็นศูนย์ เราได้

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z} = 0 \qquad (๗.๔๓)$$

เห็นได้ว่า E_z ไม่ขึ้นกับ z และ E_z ไม่ขึ้นกับ t ด้วย ดังเห็นได้จากการพิจารณาสมการ "การขจัดกระแส" (displacement current) ของ Maxwell คือ

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = c\vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad (๗.๔๔)$$

คิดเฉพาะส่วนประกอบ z ของสมการ(๗.๔๔) ข้างขวามือของสมการมี $\partial B_y/\partial x$ และ $\partial B_x/\partial y$ ซึ่งทั้งสองต่างเป็นศูนย์ ดังนั้น $\partial E_z/\partial t$ เป็นศูนย์ เราสรุปได้ว่า E_z เป็นค่าคงที่ เพื่อความสะดวกเราเลือกค่าคงที่เป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกันเรามี $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ บอกให้เราทราบว่า $B_z(z,t)$ ไม่ขึ้นกับ z และมันยังไม่ขึ้นกับเวลาด้วย ดังเห็นได้จากการพิจารณาส่วนประกอบ z ของกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law)

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad (๗.๔๖)$$

ซึ่งให้ $\partial B_z/\partial t$ เป็นศูนย์ ดังนั้น B_z ไม่ขึ้นกับระยะทางและเวลา เราจัดให้ B_z เป็นศูนย์

จากทั้งหมดที่กล่าวมานี้เราสรุปได้ว่า คลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นตามขวาง ดังนั้น สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กต่างตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่ $\hat{z}$

<u>การควบคู่ของ E_x และ B_y</u>

พิจารณาส่วนประกอบ x และ y ของ F_x, E_y, B_x และ B_y ในสมการ(๗.๔๔) และ(๗.๔๖) ซึ่งส่วนประกอบ x ของสมการ(๗.๔๔) และส่วนประกอบ y ของสมการ(๗.๔๖) คือ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (๗.๔๗)$$

ทำนองเดียวกัน ส่วนประกอบ y ของสมการ(๗.๕๕) และส่วนประกอบ x ของสมการ(๗.๕๖) คือ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad (๗.๕๘)$$

จากสมการ(๗.๕๗) E_x และ B_y ไม่ขึ้นต่อกัน แต่มันเป็นควบคู่ โดยทั้งสองสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ทั้งสอง E_x และ B_y สามารถสลับตำแหน่งกันได้ ดังนั้นถ้า E_x เป็นค่าคงที่ในทั้งระยะทางและเวลา B_y เป็นค่าคงที่ด้วยเช่นกัน หรืออีกนัยหนึ่งถ้าเราทราบว่า E_x เป็นฟังก์ชันของทั้ง z และ t เราทราบได้ทันทีว่า B_y เป็นเช่นเดียวกัน ทำนองเดียวกันจากสมการ(๗.๕๘) E_y และ B_x ควบคู่กัน ถ้าทราบค่า E_y เราจะทราบ B_x ได้ทันที เช่นถ้า E_y เป็นศูนย์ B_x เป็นศูนย์เช่นกัน (หรือค่าคงที่)

<u>โปลาไรเซชันเชิงเส้นและเชิงรูปไข่</u> (Linear and elliptical polarization)

สนาม E_x และ E_y ไม่เป็นควบคู่กันด้วยสมการของ Maxwell แต่มันไม่ขึ้นต่อกัน หมายความว่ามันเป็นไปได้ที่สร้างคลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าด้วย E_x มีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่ E_y มีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับ z และ t ทุกค่า ในกรณีนั้นคลื่นเรียกเป็น โปลาไรซ์เชิงเส้นตาม x ดังนั้นสนามไฟฟ้า E_x และสนามแม่เหล็ก B_y ไม่เป็นศูนย์ ทำนองเดียวกันเราสามารถมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นโปลาไรซ์เชิงเส้นตาม y และ E_y และ B_x ไม่เป็นศูนย์ และเรายังสามารถมีผลรวมใดๆของ E_x และ E_y ที่มีเฟสต่างกัน ดังนั้น เราได้สภาวะทั่วไปของโปลาไรเซชัน เรียกเป็น โปลาไรเซชันเชิงรูปไข่ เราจะศึกษารายละเอียดของโปลาไรเซชันในบทที่ ๘

ให้สังเกตว่าในสมการ(๗.๕๗) E_x สัมพันธ์กับลบ B_y ในขณะที่สมการ(๗.๕๘) E_y สัมพันธ์กับ B_x เครื่องหมายลบทำให้เราประหลาดใจแต่แรก อย่างไรก็ตามเราสามารถเข้าใจได้ง่ายโดยคิดว่า ถ้ามีคลื่นโปลาไรเซชันเชิงเส้นด้วยสนาม E_y และ B_x ต่างเป็นบวก และถ้าเราหมุนแกนพิกัดไป ๙๐ องศา ทำให้แกน x ใหม่อยู่ตามสนามไฟฟ้า ดังนั้นแกน y ใหม่จะต้องอยู่ตามแนวลบของสนามแม่เหล็ก ดังนั้นสมการ(๗.๕๘) สมมูลย์กับสมการ(๗.๕๗)

<u>คลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิก</u>

สมมติว่า E_x กำหนดด้วย

$$E_x = A\cos(\omega t - kz) \qquad (๗.๕๙)$$

จากสมการ (๗.๕๙) และความสัมพันธ์ $\omega = ck$ ทำให้

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c} A\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (๗.๖๐)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ckA\sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (๗.๖๑)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (๗.๖๐) และ (๗.๖๑) มีการแปรค่าของ B_y ที่เทียบกับ z และ t เหมือนกับของ E_x ดังนั้นในคลื่นระนาบฮาร์โมนิกเมื่อเคลื่อนที่ในทิศ $+z$ B_y และ E_x มีค่าเท่ากัน คิดจากการบวกค่าคงที่ซึ่งรวมกันได้เป็นศูนย์

ถ้าเราพิจารณาคลื่นฮาร์โมนิกที่เคลื่อนไปในทิศ $-z$ เราพบว่า B_y เป็นค่าลบของ E_x ซึ่งสามารถเห็นได้ง่ายเมื่อเราแทน k ด้วย $-k$ ในสมการข้างบน สรุปการเคลื่อนที่ไปในทิศทางทั้งสองรวมได้เป็น

$$\underline{\text{คลื่นเคลื่อนที่}}\begin{cases} |\vec{E}(z,t)| = |\vec{B}(z,t)| \\ \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \\ \hat{E}\times\hat{B} = \hat{v} \end{cases} \qquad (๗.๖๒)$$

<u>คลื่นนิ่งฮาร์โมนิก</u>

สมมติว่า กำหนดค่า E_x ด้วย

$$E_x(z,t) = A\cos\omega t\cos kz \qquad (๗.๖๓)$$

ดังนั้นได้

$$B_y(z,t) = A\sin\omega t\sin kz = E_x\left(z - \frac{\lambda}{4},\ t - \tfrac{1}{4}T\right) \qquad (๗.๖๔)$$

เราเห็นได้จากสมการ(๗.๖๓) และ(๗.๖๔)ว่า ในคลื่นนิ่งระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ $\vec{E}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากซึ่งกันและตั้งฉากกับ $\hat{z}$ มีอัมปลิจูดเท่ากันและมีเฟสต่างกัน ๙๐ องศา ทั้งในระวางที่และเวลา เป็นเช่นเดียวกับของความดันและความเร็วในคลื่นนิ่งเสียง หรือเป็นเช่นเดียวกับของแรงดึงขวางและความเร็วในคลื่นนิ่งบนเส้นเชือก

<u>พลังงานฟลักซ์ในคลื่นระนาบ</u>

จากความหนาแน่นพลังงานของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศกำหนดเป็น

$$\text{ความหนาแน่นพลังงาน} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \qquad (๗.๖๕)$$

แต่เราสนใจพลังงานที่เกิดจากการรวมกันโดยตรงของคลื่นเคลื่อนที่ระนาบและคลื่นนิ่งระนาบ ซึ่งก็คือ เราสนใจการไหลของพลังงานนั่นเอง ต่อไปเราต้องการหาสมการสำหรับการไหลของพลังงานผ่านปริมาตรเล็กๆที่มีพื้นที่ภาคตัด A ตั้งฉากกับแกน z และมีความหนาเพียงเล็กน้อย Δz ตามแกน z (คือศึกษาอัตราของการเปลี่ยนแปลงพลังงานต่อหน่วยเวลา) กำหนดให้ $W(z,t)$ เป็นปริมาณพลังงานที่ไหลผ่านเข้าไปในปริมาตรเล็กๆนี้ มีค่าเท่ากับความหนาแน่นพลังงานคูณด้วยปริมาตร $A\Delta z$

$$W(z,t) = A\frac{\Delta z}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2) \qquad (๗.๖๖)$$

หาอนุพันธ์พลังงาน $W(z,t)$ เทียบกับ t ได้

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = A\frac{\Delta z}{4\pi}\left(E_x\frac{\partial E_x}{\partial t} + B_y\frac{\partial B_y}{\partial t}\right) \qquad (๗.๖๗)$$

ใช้สมการ(๗.๕๗) เพื่อกำจัด $\frac{\partial E_x}{\partial t}$ และ $\frac{\partial B_y}{\partial t}$

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = -Ac\frac{\Delta z}{4\pi}\left(E_x\frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= -Ac\frac{\Delta z}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(E_x B_y)$$

$$= -Ac\frac{\Delta z}{4\pi}\left[\frac{(E_xB_y)_{z+\Delta z} - (E_xB_y)_z}{\Delta z}\right] \qquad (๗.๒๘)$$

ตอนท้ายใช้คำกำจัดความของอนุพันธ์ย่อยของ E_xB_y ที่เปรียบเทียบกับ z กล่าวคือเราคำนวณปริมาณ E_xB_y ที่ตำแหน่ง z และ $z + \Delta z$ ผลลัพธ์ได้จากตำแหน่งหนึ่งลบด้วยอีกตำแหน่งหนึ่งหารด้วย Δz และจำกัดให้ Δz มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นเราพบว่าอัตราของการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตร $A\Delta z$ เป็น

$$\frac{1}{A}\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}E_x(z,t)B_y(z,t) - \frac{c}{4\pi}E_x(z+\Delta z,t)B_y(z+\Delta z,t)$$

$$= S_z(z,t) - S_z(z+\Delta z,t) \qquad (๗.๒๙)$$

เมื่อ

$$S_z(z,t) = \frac{c}{4\pi}E_x(z,t)B_y(z,t)$$

$$= \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_z \qquad (๗.๓๐)$$

ดังนั้นอัตราของการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตรเล็กๆ $A\Delta z$ คือค่าของปริมาณ $AS_z(z,t)$ เมื่อคำนวณที่ z ตรงขอบข้างซ้ายของช่วงหนาลบด้วยค่าของปริมาณเดียวกันคำนวณที่ $z+\Delta z$ ตรงขอบข้างขวามือของช่วงหนา ดังนั้นปริมาณ $S_z(z,t)$ ต้องเป็นอัตราของการไหลของพลังงานต่อหน่วยพื้นที่ขณะใดๆในทิศ $+z$ ที่จุด z การเพิ่มของพลังงานในปริมาตรเล็กๆเกิดจากผลต่างของปริมาณไหลเข้าลบด้วยปริมาณไหลออก ส่วนประกอบ z $S_z(z,t)$ ของ flux vector S กำหนดเป็นอัตราของการไหลพลังงานในทิศ $+z$ ต่อหน่วยพื้นที่ (ในหน่วย erg/cm^2.sec) ที่ z,t (เป็นเพียงทิศทางเดียวของพลังงานพลักซ์และเราเลือกเป็น $\hat{z}$ สำหรับทิศทางการเคลื่อนที่)

<u>พอยน์ติงเวคเตอร์</u> (Poynting vector)

สมการทั่วไปของฟลักซ์ คือ

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \qquad (๗.๓๑)$$

ซึ่งไม่ขึ้นกับการเลือกแกนพิกัด ฟลักซ์เวกเตอร์ $\vec{S}$ บางครั้งเรียกเป็น พอยน์ติงเวกเตอร์ ความหนาแน่นพลังงานและฟลักซ์ในคลื่นเคลื่อนที่ สำหรับคลื่นโปลาไรซ์เชิงเส้นเคลื่อนที่ในทิศ $+z$ เราสามารถจัดให้ $\vec{E} = \hat{x}E_x$ และ $\vec{B} = \hat{y}B_y$ ซึ่ง $B_y = E_x$ สำหรับทุกๆ z,t และให้

$$E_x = E_o\cos(\omega t - kz)$$

$$B_y = E_o\cos(\omega t - kz) \qquad (๗.๗๒)$$

ความหนาแน่นพลังงาน $= \frac{1}{8\pi}(E_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{4\pi} E_o^2\cos^2(\omega t - kz)$ (๗.๗๓)

ฟลักซ์พลังงาน $= S_z = \frac{c}{4\pi} E_x B_y = \frac{c}{4\pi} E_o^2 \cos^2(\omega t - kz)$ (๗.๗๔)

ให้สังเกตว่า ฟลักซ์พลังงาน S_z สำหรับคลื่นเคลื่อนที่ก็คือ ความหนาแน่นพลังงานคูณด้วยความเร็วของแสง

ฟลักซ์พลังงานเฉลี่ยตามเวลา (ที่ตำแหน่งแน่นอนหนึ่ง) มีค่าเท่ากับฟลักซ์พลังงานเฉลี่ยตามระวางที่ (ที่เวลา t แน่นอน) และทั้งสองอย่างต่างไม่ขึ้นกับ z และ t เราหาได้จากสมการ (๗.๗๔) โดยแทน $\cos^2(\omega t - kz)$ ด้วยค่าเฉลี่ยของมันเป็น ½

<u>ความหนาแน่นพลังงานและฟลักซ์ในคลื่นนิ่ง</u>

สำหรับคลื่นนิ่งเรามี

$$E_x = E_o \cos\omega t \cos kz$$

$$B_y = E_o \sin\omega t \sin kz \qquad (๗.๗๕)$$

ความหนาแน่นพลังงานไฟฟ้าและความหนาแน่นพลังงานแม่เหล็กมีค่ามากที่สุด เมื่อเวลาต่างกันด้วย ¼ คาบเวลา และที่ตำแหน่งต่างกันด้วย ¼ ความยาวคลื่น พลังงานในสนามไฟฟ้าออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกประมาณค่าเฉลี่ยของมันที่ความถี่ 2ω ระหว่างค่าศูนย์และค่าสองเท่าของค่าเฉลี่ย และพลังงานแม่เหล็กก็เป็นเช่นเดียวกัน ดังนั้นพลังงานจะออสซิลเลตกลับไปกลับ

มาจากค่าสนามไฟฟ้าชนิดเดียวที่มีความหนาแน่นพลังงานมากที่สุดที่ตำแหน่งหนึ่ง ไปเป็นค่าสนามแม่เหล็กชนิดเดียวที่มีความหนาแน่นพลังงานมากที่สุดที่อีกตำแหน่งหนึ่งห่างออกไป $\frac{1}{4}\lambda$ ลักษณะนี้คล้ายกับพฤติกรรมของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ กล่าวคือ พลังงานทั้งหมดของออสซิลเลเตอร์เป็นค่าคงที่แต่ออสซิลเลตกลับไปกลับมาระหว่างเมื่อเป็นพลังงานศักย์อย่างเดียวด้วยมวลอยู่ที่ตำแหน่งหนึ่ง และเมื่อเป็นพลังงานจลน์อย่างเดียวด้วยมวลอยู่อีกตำแหน่งหนึ่ง ทั้งพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ต่างออสซิลเลตประมาณค่าเฉลี่ยของมันด้วยความถี่ 2ω เมื่อแฟคเตอร์ 2 คิดจากความจริงที่ว่า พลังงานจลน์มีค่ามากเป็นสองเท่า และเป็นบวกต่อการออสซิลเลตครบรอบ สนามไฟฟ้า E_x ในคลื่นนี้มีส่วนคล้ายกับการขจัดจากตำแหน่งสมดุลย์ของมวลที่ออสซิลเลต ขณะที่สนามแม่เหล็ก B_y มีส่วนคล้ายกับความเร็วของมวล

แบบฝึกหัดบทที่ ๗

7.1 Show that

$$z = A e^{i(\omega t - (k_1 x + k_2 y))}$$

where $k^2 = \omega^2/c^2 = k_1^2 + k_2^2$ is a solution of the two-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

7.2 An electromagnetic wave $(\vec{E},\vec{B})$ Propagates in the x-direction down a perfectly conducting hollow tube of arbitrary cross section. The tangential component of $\vec{E}$ at the conducting walls must be zero at all times

Show that the solution $\vec{E} = E(y,z)\cos(\omega t - k_x x)$ substituted in the wave equation yields

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E}$$

where $k^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$ and k_x is the wave number appropriate to the x-direction.

7.3 If the waveguide of problem 7.2 is of rectangular cross-section of width a in the y-direction and height b in the z-direction, show that the boundary conditions $E_x = 0$ at $y = 0$ and a and at $z = 0$ and b in the wave equation of problem 7.2 gives

$$E_x = A \sin\frac{m\pi y}{a} \sin\frac{n\pi z}{b} \cos(\omega t - k_x x)$$

where

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

7.4 Show, from problems 7.2 abd 7.3, that the lowest possible value of ω (the cutoff frequency) for k_x to be real is given by $m = n = 1$.

7.5 Show that the identity given in Eq.(7.32) holds. This identity is the basis of the "crisscross traveling wave" description of waves in a waveguide. It is an ilustration of the fact that three-dimension traveling harmonic waves form a "complete set" of functions for describing three-dimensional waves. Of course three-dimensional standing waves also form a complete set.

7.6 (a) Show that for glass of index 1.52 the critical angle for internal reflection is about 41.2 deg.

(b) What is the critical angle for water of index 1.33? Will a water prism in the shape of an isoscales right triangle give retrodirection of light without any loss (by refraction into air). First assume that the water extends right up to the air. Then worry about the glass microscope slides that form the sides of your water prism.

7.7
Show that the retrodirective glass glass prism works at other angles of incidence than the normal incidence shown, in the sense that it directs the light back in the opposite direction from the incident direction.

7.8 Calculate the mean penetration distance (the mean amplitude attenuation distance $\kappa^{-1} = \delta$) for visible light of wavelength 5500 Å retrodirected by the glass prism.(We mean the distance normal to the rear glass-to-air surface.) Assume the incident light beam is at normal incidence. Take the index of refraction to be 1.52. Ans. $\delta = 2.2 \times 10^{-5}$ cm.

7.9 For light (or microwaves) in a waveguide we found that, if the frequency is below cutoff, the z direction (along the guide) is "reactive." The other two directions were not reactive. Is it possible in principle by some ingenious method to construct a "generalized waveguide" in which the waves will be reactive in all three directions x, y, and z?

7.10 Critical angle for reflection from the ionosphere. Replace the glass to the left of $z = 0$ in Fig.7.3 by vacuum. Replace the air to the right of $z = 0$ by a plasma-the ionosphere, idealized so as to have a sharp boundary (and a uniform composition). Show that for every angle of incidence θ_1 there is a cutoff frequency $\omega_{c.o.}$ which depends on θ_1 and that at normal incidence this cutoff frequency is the plasma oscillation frequency ω_p. Show that for every frequency ω above the plasma oscillation frequency ω there is a critical angle for total reflection such that for angles of incidence greater than the critical the wave is exponential in the ionosphere. as an example, take the plasma oscillation frequency to be $\nu_p = 25$ MHz (megahertz) and find the critical angle for microwaves of frequency $\nu = 100$ MHz. Ans. For fixed θ_1, $\omega_{c.o.} = \omega_p/\cos\theta_1$. For fixed frequency ω above ω_p, $\cos\theta_{crit} = \omega_p/\omega$.

7.11 Obtain the classical wave equation for $\vec{B}$, as suggested following Eq. (7.51v), Sec. 7.2.

7.12 Radiation pressure of the sun. Given that the solar constant (outside the earth's atmosphere) is 1.94 small calories per square centimeter per minute (which is 1.35×10^6 erg/cm^{2}sec), calculate in dyne/cm^2 the radiation pressure on the earth (at normal incidence) under the two assumptions (a) and (b). Then compare the result to atmospheric pressure of air at sea level.

(a) The earth is black and absorbs all the light.

(b) The earth is a perfect mirror and reflects all the light.

7.13 Plane electromagnetic waves. Show that, for electromagnetic plane waves in vacuum, those Maxwell's equations that give the relation between E_y and B_x are "equivalent" to the Maxwell equations relating E_x and B_y, in the sense that one set of equations can be obtained from the other merely by rotating the coordinate system by 90 deg about the z axis (which is the propagation axis). Make a sketch showing the orientations of $\vec{E}$, $\vec{B}$, and the x and y axes.

7.14 Standing electromagnetic waves in vacuum. Show that if $E_x(z,t)$ is the standing wave $E_x = A \cos\omega t \cos kz$, then $B_y(z,t)$ is the standing wave $A \sin\omega t \sin kz$.

7.15 Energy relations in electromagnetic standing waves. Assume a standing wave of the form given in prob. 7.14. Find the electric and magnetic energy densities and the Poynting vector as function of space and time. Consider a region of length $\frac{1}{4}\lambda$ extending from a node in E_x to an antinode in E_x. Sketch a plot of E_x and B_y versus z over that region at the times $t = 0$, $T/8$, and $T/4$. Sketch a plot of the electric energy density, the magnetic energy density, and the total energy density over that region for the same times. Give the direction and magnitude of the Poynting vector $\vec{S}_z$ for those same times.

7.16 First-order coupled linear differential equations for waves on a string. Consider a continuous homogeneous string of linear mass density ρ_0 and eqilibrium tension T_0. As you know, such a string can carry nondispersive waves with velocity $v = \sqrt{T_0/\rho_0}$. Define the wave quantities $F_1(z,t)$ and $F_2(z,t)$ as follows:

$$F_1(z,t) \equiv -\frac{T_0}{v}\frac{\partial\psi}{\partial z}x\,, \qquad F_2(z,t) \equiv \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}x$$

Thus F_1 is 1/v times the transverse return force exerted on the portion of the string to the right of z by that to the left of z, and F_2 is the transverse momentum per unit length. Show that F_1 and F_2 satisfy the first-order coupled equations

$$\frac{1}{v}\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial z}\,, \qquad \frac{1}{v}\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Show that one of these equations is "trivial", i.e., is essentially an identity. Show that the other is equivalent to Newton's second low. Notice that these equations are similar in form to Maxwell's two equations relating E_x and B_y, with E_x analogous to F_1 and B_y to F_2. Similarly, one of the two Maxwell equations can be regarded as a "trivial identity," if one knows the special theory of relativity.