บทที่ 6

Modulations, Pulse, and Wave Packets

๖.๑ คำนำ

ที่ผ่านมาแล้วเราได้ศึกษาคลื่นและการออสซิลเลตที่มีลักษณะเป็นฮาร์โมนิกขึ้นกับเวลาของ $\cos(\omega t + \phi)$ ด้วยความถี่ ω เดี่ยว และเราได้พบลักษณะที่น่าสนใจของบีต ซึ่งเกิดจากการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่มีความถี่ใกล้เคียงกันมาก ในบทนี้เราจะพิจารณาลักษณะของบีตทั้งในทางระยะทางที่ (space) และเวลา (time) และพิจารณาลักษณะที่เกิดจากการรวมกันได้ของหลายคลื่นหลายความถี่แบบเดียวกับที่เกิดจากสองคลื่น พร้อมทั้งศึกษาว่า บีต (ทั่วๆไป สำหรับคลื่นความถี่มากกว่าสองส่วนเป็น modulations) มีการเคลื่อนผ่านเหมือนคลื่นเคลื่อนที่อย่างไร? หรืออาจจะกล่าวว่า modulation หรือเรียกว่า กลุ่มคลื่น (wave groups) หรือระลอกคลื่น (wave packets) ได้พาพลังงานไปด้วยขณะที่เคลื่อนที่ผ่านด้วยความเร็วกลุ่ม (group velocity)

วิธีการสำหรับทดลองหาระลอกคลื่นได้ดีที่สุดคือ การโยนก้อนกรวดลงในสระน้ำและสังเกตการกระจายระลอกคลื่นออกเป็นวงกลม เราจะเห็นได้ง่ายว่าการกระจายออกเป็นวงกลมของระลอกคลื่นได้พาพลังงานไปด้วย โดยสังเกตที่ตำแหน่งห่างจากจุดที่ก้อนกรวดตกลงบนผิวน้ำมีการกระเพื่อมเมื่อระลอกคลื่นไปถึง ถ้าเรามองใกล้เข้าไปอีกจะเห็นได้ว่าคลื่นเล็กๆต่างๆที่เป็นส่วนย่อยของระลอกคลื่นมีตำแหน่งไม่คงที่เมื่อเทียบกับระลอกคลื่นเดิม สำหรับคลื่นน้ำ คลื่นเล็กๆมีความยาวคลื่นประมาณหนึ่งหรือสองเซนติเมตร เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงเป็นสองเท่าของความเร็วระลอกคลื่น มันเกิดในตำแหน่งตอนท้ายของระลอกคลื่นแต่เคลื่อนที่ไปข้างหน้าและหดเล็กลงจนหายไปในที่สุด คลื่นเล็กๆจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฟสขณะที่ระลอกคลื่นที่เป็นคลื่นทั้งหมดเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม

๖.๒ ความเร็วกลุ่ม

ในการส่งสัญญาณ เราพบว่าเราไม่อาจส่งด้วยคลื่นฮาร์โมนิกที่มีเพียงความถี่

เดียวได้ เพราะว่ามันเคลื่อนที่ไปเป็นลักษณะซ้ำๆกันไม่ได้ให้อะไรที่แตกต่างกัน ถ้าคลื่นเคลื่อนที่ไปด้วยอัมปลิจูดเท่ากันตลอดไม่เปลี่ยนแปลง ผู้รับไม่สามารถแยกแยะความแตกต่างออกมาได้ เช่นเดียวกับกรณีเปิดเครื่องรับวิทยุในขณะที่สถานีส่งยังไม่ได้กระจายเสียง เราจะได้ยินแต่เสียงสัญญาณอื่นๆเท่านั้น ดังนั้น ถ้าต้องการส่งข่าวสาร เราต้องผสม (modulate)คลื่นเพื่อให้พาข่าวสารไปด้วย เราหมายถึงต้องปรับปรุงบางสิ่งบางอย่างในทางที่ทำให้ผู้รับสามารถแยกแยะสัญญาณได้ เช่น เปลี่ยนแปลงอัมปลิจูดเรียกว่า การผสมอัมปลิจูด (amplitude modulation) ในการตกแต่งอัมปลิจูดเพื่อส่งกลุ่มของ dots และ dashes ในสัญญาณ Morse แต่ละแบบอย่างของ dots และ dashes ใช้แทนแต่ละตัวของอักษรในภาษา เช่นเดียวกัน เมื่อเปลี่ยนแปลงความถี่หรือค่าคงที่เฟสในทางที่สามารถส่งสัญญาณไป การผสมความถี่ (frequency modulation) หรือการผสมเฟส (phase modulation) ตามลำดับ ในกรณีเหล่านี้แรงเคลื่อนไม่ใช่เป็นแรงฮาร์โมนิก

เพื่อที่จะทราบว่าสัญญาณเคลื่อนที่ไปได้ในลักษณะใด เราต้องศึกษาคลื่นเคลื่อนที่จากเครื่องส่งผ่านเข้าไปในตัวกลางเปิดที่ $z = 0$ มีการขจัด $D(t)$ ไม่ใช่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายขึ้นกับเวลา $D(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ แต่เป็นตัวแปรที่มีความยุ่งยากมากกว่า คือ $D(t) = f(t)$ โดยที่ $f(t)$ มีฟังก์ชันที่สามารถเขียนเป็นการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกฟังก์ชันในแบบ $A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)]$ ในที่นี้อัมปลิจูด $A(\omega)$ และค่าคงที่เฟส $\phi(\omega)$ มีค่าต่างกันสำหรับความถี่ ω ใดๆ และสามารถหาค่าได้จากฟังก์ชัน $f(t)$ และในตอนท้ายบทเราจะหาค่า $A(\omega)$ และ $\phi(\omega)$ จากวิธีการของ Fourier analysis สำหรับขณะนี้ให้เรามาพิจารณาการรวมกันของสองคลื่นก่อนดังนี้

สมมติว่าเครื่องส่งที่ $z = 0$ ต่อกับเส้นเชือกที่ถูกขึงตึงแน่นจาก $z = 0$ ถึง $+\infty$ เครื่องส่งมีการออสซิลเลตในลักษณะของการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่มีความถี่ ω_1 และ ω_2 และสมมติว่าอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของคลื่นทั้งสองมีค่าเท่ากัน ดังนั้น สำหรับการขจัดของการออสซิลเลตที่ปลายออกจากเครื่องส่ง เป็น

$$D(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \qquad (๖.๑)$$

จากการศึกษาบีตในตอนต้น เราทราบว่าการรวมกันได้ของสมการ(๖.๑) สามารถเขียนใหม่ได้เป็นแบบของการออสซิลเลตผสมอัมปลิจูด (amplitude modulation oscillation)

$$D(t) = A_{mod}(t)\cos\omega_{av}t \qquad (๖.๒)$$

เมื่อ

$$A_{mod}(t) = 2A\cos\omega_{mod}t \qquad (๖.๓)$$

$$\omega_{mod} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\omega_{av} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad (๖.๔)$$

ถ้า ω_1 และ ω_2 มีขนาดใกล้เคียงกัน ความถี่ผสม (modulation frequency) ω_{mod} มีค่าน้อยกว่าความถี่เฉลี่ย ω_{av} มากมาย ดังนั้นสมการ(๖.๒) เป็นการออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิก ที่ความถี่เฉลี่ย ω_{av} และอัมปลิจูดมีค่าเกือบคงที่แต่ไม่คงที่ มันเป็นอัมปลิจูดผสมที่แปรค่าอย่างช้าๆด้วยความถี่ผสม ω_{mod} ในสมการ(๖.๒) และ(๖.๓) เป็นการออสซิลเลตผสมอัมปลิจูดอย่างง่าย เพราะว่ามันประกอบด้วยความถี่ผสม ω_{mod} เพียงค่าเดียว โดยทั่วไป การออสซิลเลตผสมอัมปลิจูดมีลักษณะเดียวกันกับสมการ(๖.๒) แต่ $A_{mod}(t)$ เกิดจากการรวมกันของหลายพจน์เหมือนกับแบบสมการ(๖.๓) โดยที่แต่ละพจน์มีความถี่ผสม อัมปลิจูดและค่าคงที่เป็นของตนเอง ตัวอย่างเช่น ในวิทยุ AM มีความถี่เฉลี่ย ν_{av} เป็นตัวพาความถี่ (carrier frequency) มีค่าประมาณ ๑๐๐๐ kc (กิโลรอบต่อวินาที) ส่วน ν_{mod} จะเป็นความถี่คลื่นเสียงในช่วงจาก ๒๐ cps ถึง ๒๐ kc

ต่อไปเราจะพิจารณาการรวมกันได้ของสองคลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์ ทำให้เกิดคลื่นเคลื่อนที่แบบผสมอัมปลิจูด โดยใช้คลื่นเคลื่อนที่ออกจากเครื่องส่งเป็นแบบเดียวกับสมการ (๖.๑) หรือ สมการ(๖.๒) ตัวกลางที่เชื่อมต่อกับเครื่องส่งที่ $z = 0$ ถูกทำให้มีการขจัด $\psi(z,t)$ เป็น

$$\psi(0,t) = D(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \qquad (๖.๕)$$

เป็นไปตามหลักการรวมกันได้ของคลื่น การขจัดจากเครื่องส่งจึงกำหนดด้วย linear

superposition ของสองคลื่นเคลื่อนที่ไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นคลื่นเคลื่อนที่ $\psi(z,t)$ จะเป็นการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่รูปไซน์ $\psi_1(z,t)$ และ $\psi_2(z,t)$ เรารู้ว่า $\psi_1(z,t)$ หาได้จาก $\psi_1(0,t)$ ที่เป็นส่วนของ $A \cos\omega_1 t$ โดยแทนค่า $\omega_1 t$ ด้วย $\omega_1 t - k_1 z$ ซึ่งอาศัยจากความจริงที่ว่า ความเร็วเฟสคือ ω_1/k_1 นั่นเอง ทำนองเดียวกัน $\psi_2(z,t)$ หาได้จาก $\psi_2(0,t)$ โดยแทนค่า $\omega_2 t$ ด้วย $\omega_2 t - k_2 z$ ดังนั้นคลื่นเคลื่อนที่ $\psi(z,t)$ เราได้จากทั้งสองคลื่นในสมการ(๖.๕)

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 z) + A\cos(\omega_2 t - k_2 z) \quad (๖.๖)$$

และจากสมการ(๖.๒), (๖.๓) และ (๖.๔) เราสามารถหาได้อย่างเดียวกันโดยแทนค่าของ $\omega_1 t - k_1 z$ สำหรับ $\omega_1 t$ และ $\omega_2 t - k_2 z$ สำหรับ $\omega_2 t$ จะได้คลื่นเคลื่อนที่แบบอัมปลิจูดผสมเกือบเป็นรูปไซน์

$$\psi(z,t) = A_{mod}(z,t)\cos(\omega_{av} t - k_{av} z) \qquad (๖.๗)$$

เมื่อ

$$A_{mod}(z,t) = 2A\cos(\omega_{mod} t - k_{mod} z) \qquad (๖.๘)$$

และ

$$\omega_{mod} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \qquad (๖.๙)$$

$$k_{mod} = \tfrac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\omega_{av} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k_{av} = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad (๖.๑๐)$$

ให้สังเกตว่า $\omega_{av} t - k_{av} z$ หาได้จาก $\omega_{av} t$ โดยการแทนค่า $\omega_1 t$ ด้วย $\omega_1 t - k_1 z$ และแทน $\omega_2 t$ ด้วย $\omega_2 t - k_2 z$ ทำนองเดียวกัน $\omega_{mod} t - k_{mod} z$ เราหาได้จาก $\omega_{mod} t$ โดยวิธีเดียวกัน

ความเร็วคลื่นผสม (Modulation velocity)

เราต้องการทราบว่า คลื่นผสมเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเป็นอย่างไร ? สมมติว่า ω_{mod} มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ ω_{av} ดังนั้นสัญญาณออกของเครื่องส่งที่ $z = 0$ มีลักษณะเป็นการออสซิลเลตผสมฮับปลิจูด การหาความเร็วของคลื่นผสมที่เคลื่อนที่ไปได้ให้สังเกตจากบริเวณสันคลื่น (crest) ที่ซึ่ง $A_{mod}(z,t) = +1$ หรืออีกนัยหนึ่งตำแหน่งที่ให้ค่าของอัมปลิจูดผสม $A_{mod}(z,t)$ คงที่ (เช่นที่สันคลื่น) นั่นคือเราต้องการให้ค่าของ argument $\omega_{mod}t - k_{mod}z$ คงที่ ดังนั้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย dt z ต้องเพิ่มขึ้นด้วย dz เพื่อทำให้การเพิ่มขึ้นของ $\omega_{mod}t - k_{mod}z$ คือ $\omega_{mod}dt - k_{mod}dz$ คงเป็นศูนย์

$$\omega_{mod}\,dt - k_{mod}\,dz = 0 \qquad (๖.๑๑)$$

เราได้ความเร็วคลื่นผสมเป็น

$$\frac{dz}{dt} = v_{mod} = \frac{\omega_{mod}}{k_{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \qquad (๖.๑๒)$$

ในที่นี้ ω และ k สัมพันธ์กันด้วย ความสัมพันธ์การกระจาย

$$\omega = \omega(k) \qquad (๖.๑๓)$$

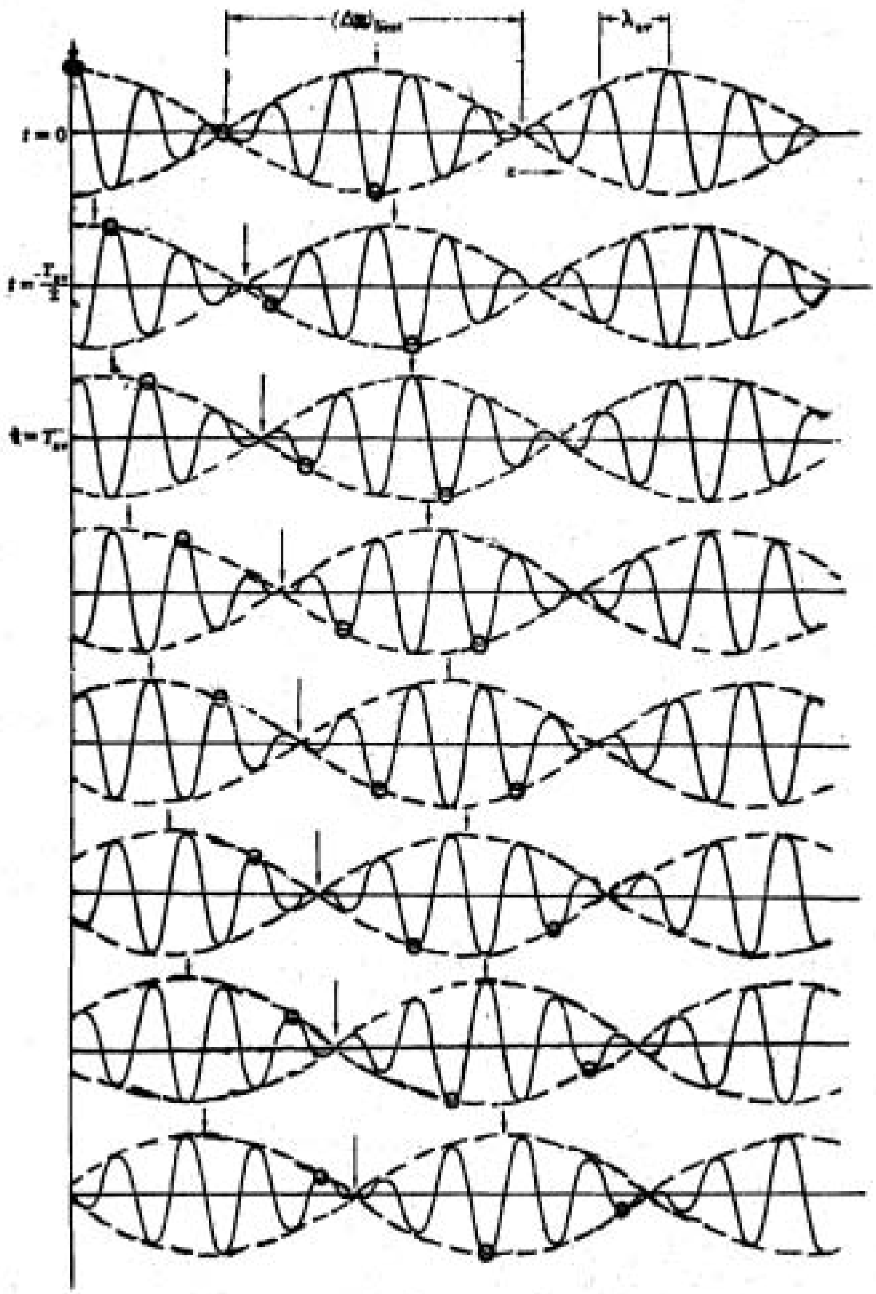
ความสัมพันธ์นี้ให้ค่า ω_1 เมื่อใช้กับ k_1 และให้ค่า ω_2 เมื่อใช้กับ k_2 คือ

$$\omega_1 = \omega(k_1)\,, \qquad \omega_2 = \omega(k_2) \qquad (๖.๑๔)$$

ดังนั้น ความเร็วคลื่นผสมจากสมการ(๖.๑๒) สามารถกระจายออก (โดยใช้การกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ ของ $\omega(k)$ ที่ $k = k_{av}$) เป็น

$$v_{mod} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} + \ldots\ldots \qquad (๖.๑๕)$$

เมื่ออนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\omega(k)$ คำนวณที่ค่าจำนวนคลื่นเฉลี่ย k_{av}



รูป ๖.๑ ความเร็วกลุ่ม ลูกศรชี้ตามบีตซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม v_g ส่วนคลื่นเส้นประเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฟสเฉลี่ย v_ϕ

<u>ความเร็วกลุ่ม</u> (GRoup velocity)

เนื่องจาก ω_1 และ ω_2 มีค่าต่างจากค่าเฉลี่ยของมันเพียงเล็กน้อย ดังนั้นเราสามารถละทิ้งพจน์ต่างๆทั้งหมดยกเว้นพจน์แรกในสมการ(๖.๑๕) และปริมาณ $d\omega/dk$ คำนวณที่ค่าเฉลี่ยเหมาะสมของ k เรียกว่าความเร็วกลุ่ม

$$\text{ความเร็วกลุ่ม} \equiv v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (๖.๑๖)$$

ดังนั้นเราเห็นได้ว่า สัญญาณที่ประกอบด้วยสันคลื่นของการผสมอัมปลิจูด เคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม $v_g = d\omega/dk$ มิใช่ความเร็วเฟสเฉลี่ย $v_{av} = \omega_{av}/k_{av}$

ในรูป ๖.๑ ได้แสดงการเคลื่อนที่ไปของคลื่น $\psi(z,t)$ กำหนดด้วยสมการ(๖.๗) หรือสมการ(๖.๖) มีความถี่เฉลี่ยเป็น ๔ เท่าของความถี่ผสม และความเร็วกลุ่ม $d\omega/dk$ เท่ากับครึ่งหนึ่งของความเร็วเฟส ω_{av}/k_{av}

อีกวิธีหนึ่งใช้คำนวณหาความเร็วของคลื่นผสม โดยใช้ผลต่างทางเฟสระหว่างคลื่น ๑ และ ๒ ของการรวมกันในสมการ(๖.๖) คือ

$$\begin{aligned} \zeta_1(z,t) - \zeta_2(z,t) &= (\omega_1 t - k_1 z + \phi_1) - (\omega_2 t - k_2 z + \phi_2) \\ &= (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z + (\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

ที่ค่าแน่นอนหนึ่งของผลต่างเฟส $\zeta_1(z,t) = \zeta_2(z,t)$ ทั้งสองส่วนมีเฟสเข้ากันได้ (in phase) ทำให้เกิดการแทรกสอดเสริมกัน และขนาดของอัมปลิจูดผสมมีค่ามากที่สุด ส่วนที่ค่าอื่นของผลต่างเฟส $\zeta_1(z,t) - \zeta_2(z,t)$ มีเฟสต่างกัน (out of phase) ทำให้เกิดการแทรกสอดหักล้างกัน (destructive interference) และมีอัมปลิจูดผสมเป็นศูนย์ ดังนั้นการทำให้คลื่นเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วของคลื่นผสม เราต้องให้มันเคลื่อนที่ไปด้วยอัตราเร็วสัมพันธ์กับผลต่างเฟส $\zeta_1(z,t) - \zeta_2(z,t)$ มีค่าคงที่เสมอ ดังนั้นเราหาอนุพันธ์ทั้งหมดของสมการข้างต้นและจัดให้เท่ากับศูนย์

$$(\omega_1 - \omega_2)\, dt - (k_1 - k_2)\, dz = 0$$

ได้ความเร็วคลื่นผสมเป็น dz/dt เช่นเดียวกับสมการ(๖.๑๒)

<u>ตัวอย่าง ๑</u> คลื่นวิทยุ AM

ระบบของตัวอย่างนี้ประกอบด้วย คลื่นเคลื่อนที่ผสมสามารถเป็นได้ทั้งแบบอัมปลิจูดผสมเกือบเป็นฮาร์โมนิก มีอัมปลิจูด $A_{mod}(z,t)$ เปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ และออสซิลเลตอย่างรวดเร็วด้วยความถี่เฉลี่ย ω_{av} และแบบการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกที่มีความถี่ต่างกันมาก ω_1 และ ω_2 อัมปลิจูดผสม $A_{mod}(z,t)$ มีค่าเกือบคงที่ในช่วงเวลาสั้นๆของการสั่นครบหนึ่งรอบด้วยความถี่ ω_{av} อันที่จริง $A_{mod}(z,t)$ แปรตามเวลา t (ที่ตำแหน่ง z) ด้วยความถี่ผสม ω_{mod} และแปรตามระยะทาง z (ที่เวลาแน่นอน t) ด้วยจำนวนคลื่นผสม k_{mod} ให้เราเริ่มต้นพิจารณาการรวมกันของสองคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกและพบว่ามันเป็นคลื่นเคลื่อนที่แบบอัมปลิจูดผสม มีความถี่ผสม ω_{mod} ค่าเดียวตามสมการ(๖.๒) ซึ่งเป็นการออสซิลเลตแบบอัมปลิจูดผสมจากเครื่องส่ง

$$D(t) = A_{mod}(t)\cos\omega_{av}t = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \qquad (๖.๓๓)$$

ในการอธิบายคลื่นวิทยุ AM ออกจากสถานีส่ง เราต้องกล่าวถึงช่วงความถี่ผสมทั้งหมดมิใช่เพียงความถี่ผสมค่าเดียว กระแสที่ไหลในเสาอากาศถูกขับด้วยแรงเคลื่อนศักดา ซึ่งออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิกที่ความถี่เฉลี่ย ω_{av} เรียกว่า ความถี่พาหะ (carrier frequency) (ในแต่ละสถานีจะส่งเพียงความถี่เดียวอยู่ในช่วงระหว่าง ๕๐๐-๑๖๐๐ kc) แรงเคลื่อนศักดาที่ให้แก่เสาอากาศของสถานีส่งมีอัมปลิจูดไม่คงที่ เป็นอัมปลิจูดผสมสามารถเขียนเป็นแบบอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$A_{mod}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{mod}} A(\omega_{mod})\cos\left[\omega_{mod}t + \phi(\omega_{mod})\right] \qquad (๖.๓๔)$$

ในที่นี้ $A_{mod}(t) - A_0$ เป็นส่วนที่แปรตามความดันเพิ่มขึ้นในสัญญาณคลื่นเสียง ซึ่งก็คือข่าวสารที่จะส่งออกไป ค่าคงที่ A_0 ในอัมปลิจูดของแรงเคลื่อนศักดาเป็นส่วนที่มีอยู่ในเสาอากาศเดิมเมื่อยังไม่มีเสียงพูดหรือเสียงเพลงเข้าไปในไมโครโฟน (microphone) พจน์ที่เหลือ

เกิดจากคลื่นเสียงที่ไมโครโฟนรับได้ ดังนั้นความถี่ผสมในสมการ(๖.๑๘) เป็นความถี่ของคลื่นเสียงมีช่วงความถี่ระหว่าง ๒๐ ถึง ๒๐,๐๐๐ cps และเรียกว่า ความถี่คลื่นเสียง (audio frequencies) ความถี่คลื่นเสียงนี้มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความถี่พาหะ และแรงเคลื่อนศักดา V(t) กำหนดด้วยการออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิก ที่ความถี่ ω_{av} คือ

$$V(t) = A_{mod}(t) \cos\omega_{av} t$$

$$= A_o \cos\omega_{av} t + \sum_{\omega_{mod}} A(\omega_{mod}) \cos\left[\omega_{mod} t + \phi(\omega_{mod})\right] \cos\omega_{av} t \qquad (๖.๑๙)$$

สมการนี้อาจจะเขียนได้เป็นการรวมกันของการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก

$$V(t) = A_o \cos\omega_{av} t + \Sigma\, \tfrac{1}{2} A(\omega_{mod}) \cos\left[(\omega_{av} + \omega_{mod})t + \phi(\omega_{mod})\right]$$
$$+ \Sigma\, \tfrac{1}{2} A(\omega_{mod}) \cos\left[(\omega_{av} - \omega_{mod})t - \phi(\omega_{mod})\right] \qquad (๖.๒๐)$$

ฮัมปลิจูดผสมของศักดา V(t) ประกอบด้วยความถี่ ω_{av} เรียกว่า ความถี่ของการออสซิลเลตพาหะ (carrier oscillation) ผลรวมของคลื่นความถี่ฮาร์โมนิกทั้งหลายด้วยความถี่จาก $\omega_{av} + \omega_{mod}$ เรียกว่า upper sideband และ ความถี่ $\omega_{av} - \omega_{mod}$ เรียกว่า lower sideband ดังนั้นในการส่งคลื่นเคลื่อนที่เป็นตัวพาข่าวสารต่างๆในสัญญาณ ช่วงความถี่เสียงจากศูนย์ถึง ๒๐ kc ศักดา V(t) ต้องประกอบด้วยการรวมกันของคลื่นฮาร์โมนิกทั้งหลายด้วยความถี่เชิงมุม ω อยู่ในช่วงความถี่จาก ความถี่ต่ำสุดของ lower sideband

ถึงความถี่สูงสุดของ upper sideband ดังนั้นความถี่ทั้งหมดเรียกเป็น แถบความถี่ (frequency band)

$$\omega_{av} - \omega_{mod}(max) \leq \omega \leq \omega_{av} + \omega_{mod}(max)$$

หรือ

$$\nu_{av} - \nu_{mod}(max) \leq \nu \leq \nu_{av} + \nu_{mod}(max) \qquad (๖.๒๑)$$

ความถี่มากที่สุดลบด้วยความถี่น้อยที่เรียกว่า แถบกว้าง (band width)

$$\text{แถบกว้าง} \equiv \Delta\nu = \nu(\max) - \nu(\min) = 2\nu_{mod}(\max) \qquad (๖.๒๒)$$

ดังนั้น การส่งคลื่นพาหะด้วย ๒ แถบความถี่ในคลื่นอัมปลิจูดผสมที่รวมช่วงความถี่คลื่นเสียงไว้ทั้งหมด ต้องการแถบกว้างที่เป็นสองเท่าของช่วงความถี่ ๒๐ kc หรือ ๔๐ kc

<u>ตัวอย่าง ๒</u> การส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ

ความสัมพันธ์การกระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากำหนดด้วย

$$\omega = ck \qquad (๖.๒๓)$$

ดังนั้น ความเร็วเฟสและความเร็วกลุ่ม คือ

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c, \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \qquad (๖.๒๔)$$

จะเห็นได้ว่า ความเร็วเฟสและความเร็วกลุ่มต่างมีค่าเท่ากับ c สำหรับแสง (หรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่นๆ) ในสุญญากาศ คลื่นผสมเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว c

<u>ตัวอย่าง ๓</u> คลื่น nondispersive อื่นๆ

คลื่นแสงเคลื่อนที่ในสุญญากาศเป็น nondispersive กล่าวคือ ความเร็วเฟสไม่ขึ้นกับความถี่หรือไม่ขึ้นกับจำนวนคลื่น เมื่อเป็นเช่นนี้ความเร็วกลุ่มมีค่าเท่ากับความเร็วเฟส แต่โดยทั่วไปเราเขียนเป็น

$$\omega = v_\phi k \qquad (๖.๒๕)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k\frac{dv_\phi}{dk} \qquad (๖.๒๖)$$

ดังนั้น ความเร็วกลุ่มและความเร็วเฟสจะเท่ากันได้ต่อเมื่อ $dv_\phi/dk = 0$ ตัวอย่างอื่นที่เป็นคลื่น nondispersive คือคลื่นเสียง เรามี

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}\, k \qquad (๖.๒๗)$$

และคลื่นตามขวางบนเส้นเชือกต่อเนื่อง เรามี

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k \qquad (๖.๒๘)$$

ซึ่งสมการ (๖.๒๗) และ (๖.๒๘) ให้ค่าความเร็วกลุ่มเท่ากับความเร็วเฟส

<u>ตัวอย่าง ๔</u> คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในชั้น ionosphere

ความสัมพันธ์การกระจายสำหรับคลื่นรูปไซน์ในชั้น ionosphere คือ

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \qquad (๖.๒๙)$$

สำหรับความถี่สูงกว่า cut off frequency ν_p = ๒๐ Mc หาอนุพันธ์สมการ (๖.๒๙) เทียบกับ k จะได้

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2k \qquad (๖.๓๐)$$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_\phi v_g = c^2 \qquad (๖.๓๑)$$

ดังนั้นความเร็วเฟสและความเร็วกลุ่ม คือ

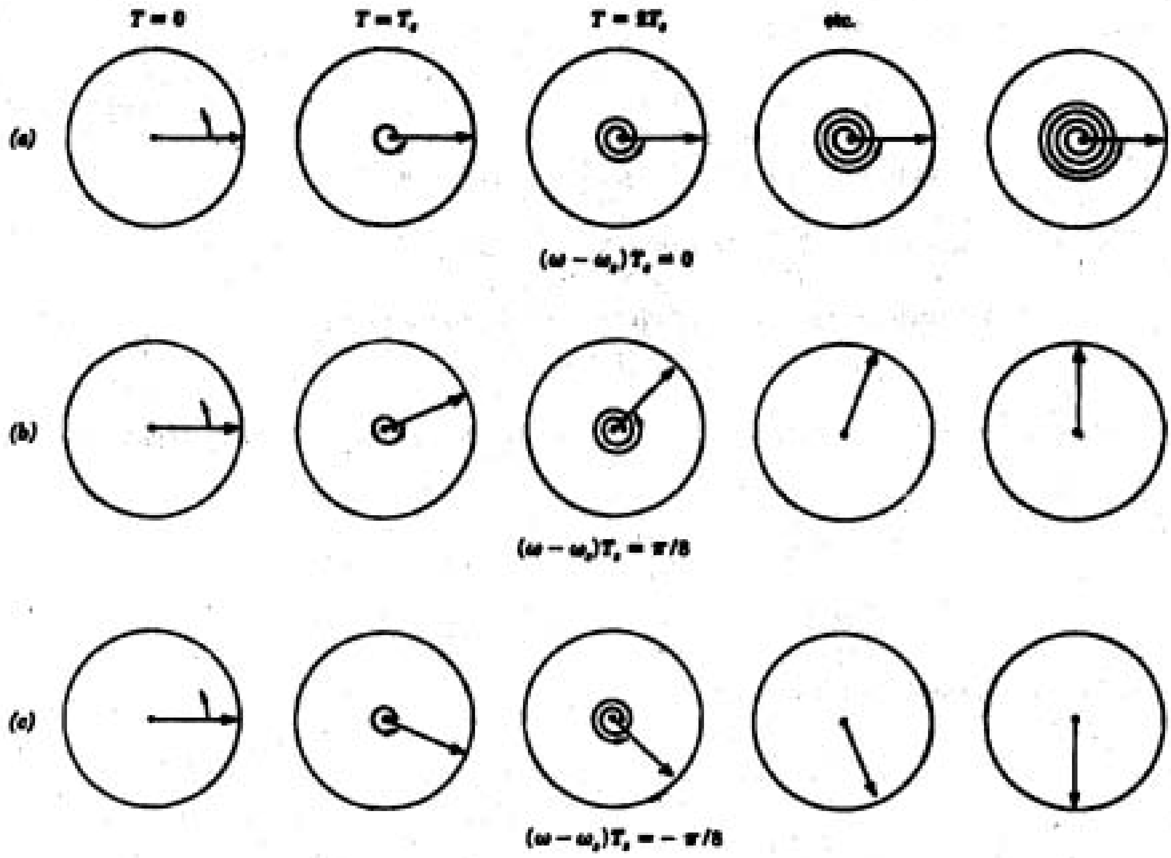
$$v_\phi = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geq c \qquad (๖.๓๒)$$

$$v_g = c\left(\frac{c}{v_\phi}\right) \leq c \qquad (๖.๓๓)$$

เราจะเห็นได้ว่า ถึงแม้ความเร็วเฟสมีค่ามากกว่า c แต่ความเร็วกลุ่มมีค่าน้อยกว่า c เสมอ ดังนั้นสัญญาณต่างๆไม่สามารถเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วสูงกว่า c ได้

๖.๓ ห่อคลื่น (Pulses)

เราต้องการพิจารณาการรวมกันของหลายๆคลื่นฮาร์โมนิก ซึ่งออกจากเครื่องส่งที่ตำแหน่ง z = 0 ซึ่งฮาร์โมนิกทั้งหมดมีแอมปลิจูดเท่ากัน และมีความถี่ใกล้เคียงกันมากในช่วงแคบระหว่างความถี่ต่ำสุด ω_1 และความถี่สูงสุด ω_2 สำหรับกรณีของการรวมกันของสองความถี่เราได้พิจารณาแล้ว และได้คลื่นผสมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม



รูป ข.๒ แสดง stroboscopic snapshots ของการหมุน complex vector $e^{i\omega t}$ ช่วงเวลาระหว่างการหมุน snapshots คือ $T_s = 2\pi/\omega_s$.

Rotating-vector diagram

สำหรับกรณีการรวมกันของหลายๆฮาร์โมนิกที่มีความถี่ต่างกันมีความยุ่งยากมาก การอธิบายลักษณะที่เกิดขึ้นเราต้องเริ่มต้นจากกรณีของสองความถี่และใช้หลักวิธีของ rotating-vector diagram ให้การออสซิลเลตเป็นแบบฮาร์โมนิกคือ

$$\psi(t) = A\cos\omega t \qquad (๖.๓๔)$$

เป็นส่วนที่เป็นจริง (real part) ของ complex harmonic oscillation

$$\psi_c(t) = A\,e^{i\omega t} \qquad (๖.๓๕)$$

เมื่ออักษรกำกับ c หมายถึง complex แผนภาพที่ใช้แทน $\psi_c(t)$ กำหนดด้วย vector ของความยาว A ในระนาบ complex หมุนทวนเข็มนาฬิกาด้วยความถี่เชิงมุม ω ภาพเงาที่ตกบนแกนราบ(หรือแกนจริง) ของ rotating vector นี้ ก็คือฮาร์โมนิกในสมการ (๖.๓๓) เพื่อให้เห็นภาพของ rotating vector นี้หมุนไปหนึ่งรอบ ให้เรานึกถึงเครื่องมือ stroboscopic snapshots ดังนั้นถ้า stroboscope มีความถี่เดียวกับ rotating vector ปริมาณเวคเตอร์จะปรากฏอยู่ที่เดิม กล่าวคือทุกๆ snapshot จับกับเวคเตอร์ในตำแหน่งเดิม (ดูภาพ ๖.๒a) ถ้าความถี่เชิงมุม ω ของ rotating vector มีค่ามากกว่าของ stroboscope ω_s เวคเตอร์จะปรากฏหมุนไปข้างหน้าอย่างช้าๆ (ทวนเข็มนาฬิกา) ด้วยความถี่เชิงมุมเป็นผลต่างของ $\omega-\omega_s$ (ดูภาพ ๖.๒ b) ในทางตรงกันข้ามถ้า $\omega-\omega_s$ เป็นลบ เวคเตอร์ปรากฏหมุนไปตามเข็มนาฬิกาอย่างช้าๆด้วยความเร็วเท่ากับตอนหมุนทวนเข็มนาฬิกา อักษรกำกับ s ใช้แทน stroboscope

ต่อไปเราพิจารณาการรวมกันของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่มีแอมปลิจูดเท่ากันแต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

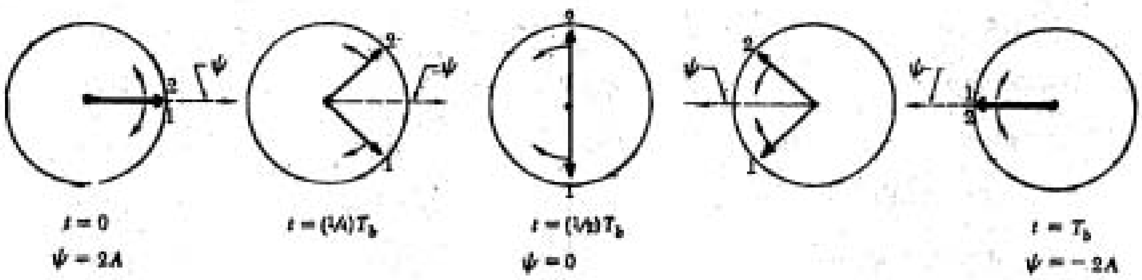
$$\psi(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \qquad (๖.๓๖)$$

เราให้ stroboscope หมุนด้วยความถี่เฉลี่ยของ rotating vectors $A\,e^{i\omega_1 t}$ และ

$A\,e^{i\omega_2 t}$

$$\omega_s = \omega_{av} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad (๖.๓๓)$$

(ให้ $\omega_2-\omega_1$ เป็นบวก) ดังนั้น $\omega_2-\omega_{av}$ เป็นบวก และ $\omega_1-\omega_{av}$ เป็นลบ หรืออาจกล่าวว่า $\psi(t)$ สามารถเขียนเป็นผลคูณของอัมปลิจูด $A(t)$ ที่เปลี่ยนแปลงค่าอย่างช้าๆและพจน์ออสซิลเลตอย่างรวดเร็วของความถี่เฉลี่ย ω_{av} ความถี่ของ strobe เป็น ω_{av} ทำให้การออสซิลเลตอย่างเร็วเหมือนอยู่กับที่ เพียงแต่ $A(t)$ เปลี่ยนแปลงค่าระหว่าง snap-shots (ดูตามภาพ ๖.๓)



รูป ๖.๓ แสดงการรวมกันได้ของ $\psi(t) = Ae^{i\omega_1 t} + Ae^{i\omega_2 t}$ stroboscopic snapshot เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\omega_s = \omega_{av}$ และมีคาบเวลา T_b

การสร้างห่อคลื่น

พิจารณาเมื่อ $\psi(t)$ เป็นการรวมกันของคลื่นมากมาย อัมปลิจูดของคลื่นทั้งหมดเป็น A ค่าคงที่เฟสเป็นศูนย์ และความถี่กระจายออกอย่างสม่ำเสมอในแถบความถี่ระหว่าง ω_1 และ ω_2 นั่นคือการออสซิลเลตอยู่ในแถบกว้าง $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ stroboscopic vector diagram สัมพันธ์กับการออสซิลเลตได้แสดงในภาพ ๖.๔

ที่ $t = 0$ อัมปลิจูดทั้งหมด $A(t)$ ของการรวมกัน ψ เป็น NA ที่เวลา t ก่อน $2\pi/\Delta\omega$ เล็กน้อย (ซึ่งเป็นคาบของบีตระหว่างปลายแถบความถี่ ω_2 และ ω_2 มีอัมปลิจูดทั้งหมด $A(t)$ เป็นศูนย์) ทุกๆส่วนมีการกระจายเฟสออกอย่างสม่ำเสมอ เมื่อ $N \to \infty$ อัมปลิจูดมีค่าเป็นศูนย์ครั้งแรกที่ $t = 2\pi/\Delta\omega$ สำหรับเวลาที่นานกว่า

$t = 2\pi/\Delta\omega$ เวคเตอร์ทุกส่วนยังคงกระจายเฟสออกไปอีก ถึงแม้ไม่สม่ำเสมอแอมปลิจูดทั้งหมดยังคงมีค่าน้อย เวคเตอร์ทั้งหมดจะกระจายจนกระทั่งมีเฟสเหมือนเดิมอีกครั้ง (และ $A(t)$ มีค่าเท่ากับครั้งแรก NA) ต่อเมื่อบีตระหว่างแต่ละส่วนที่มีความถี่ใกล้เคียงกันมีค่ามากที่สุดอีกครั้ง เมื่อส่วนที่อยู่ใกล้กันมีความถี่ต่างกันเท่ากับ $\Delta\omega/(N - 1)$ คาบสำหรับบีตที่อยู่ระหว่างความถี่ใกล้เคียงกันเป็น $(N - 1)$คูณกับคาบของบีตที่มีความสัมพันธ์กับยอดต่างของความถี่ $\Delta\omega$ ดังนั้น ถ้า $N \to \infty$ แอมปลิจูดทั้งหมดยังคงมีค่าน้อยและจะไม่เท่ากับค่าตอนครั้งแรกได้อีก ดังนั้นเราจะได้ที่เรียกว่า ห่อคลื่น(pulse)

<u>ระยะเวลานานของห่อคลื่น</u> (time duration of pulse)

เรา แทนระยะเวลานานของห่อคลื่นด้วยสัญลักษณ์ Δt เป็นช่วงเวลาทั้งหมดที่ใช้ไปอย่างประมาณจาก $t = 0$ เมื่อความถี่ทั้งหมดอยู่ระหว่าง ω_1 และ ω_2 มีเฟสเสริมกันถึงเวลา t_1 เมื่อความถี่ทั้งหมดกระจายเฟสออกอย่างสม่ำเสมอตลอดช่วงเฟสทั้งหมดของ 2π เรเดียน

$$\Delta t = t_1 \qquad (๖.๓๘)$$

เมื่อ

$$(\omega_2 - \omega_1)t_1 = 2\pi \qquad (๖.๓๙)$$

ดังนั้นแถบกว้าง $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ และช่วงเวลา Δt มีความสัมพันธ์กันด้วย

$$\Delta\omega\, \Delta t = 2\pi \qquad (๖.๔๐)$$

หรือ

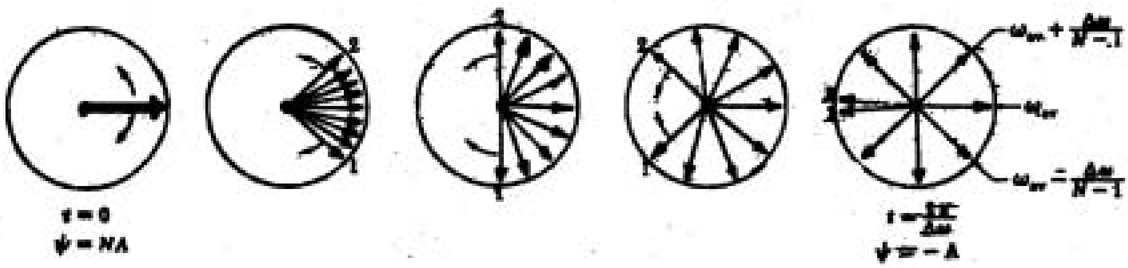
$$\Delta\nu\, \Delta t = 1 \qquad (๖.๔๑)$$

สมการ(๖.๔๑) เป็นตัวอย่างของความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ทั่วไป (และสำคัญมาก) ระหว่างระยะเวลา Δt ของห่อคลื่น $\psi(t)$ และแถบกว้าง $\Delta\nu$ ของความถี่ spectrum ของฮาร์โมนิกซึ่งรวมกันให้เป็นรูปห่อคลื่น ความสัมพันธ์ได้ถูกนำไปใช้ในวิชาฟิสิกส์ทั้งหมดเมื่อพูดถึงลักษณะของรูปห่อคลื่นในเวลาหรือตัวแปรอื่นๆ คำตอบแท้จริงสำหรับห่อคลื่น $\psi(t)$

ต่อไปเราจะหาสมการสำหรับห่อคลื่น $\psi(t)$ ที่เกิดจากการรวมกันของฮาร์โมนิกต่างกัน N คลื่น มีอัมปลิจูดเท่ากันหมด ค่าคงที่เฟสเท่ากัน (ให้เป็นศูนย์) และความถี่กระจายอย่างสม่ำเสมอระหว่างความถี่ต่ำสุด ω_1 และความถี่สูงสุด ω_2 การรวมกันนี้ได้แสดงเป็น stroboscopic snapshots ตามรูป ๖.๔

$$\psi(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos(\omega_1 + \delta\omega)t + A\cos(\omega_1 + 2\delta\omega)t$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + A\cos\omega_2 t \qquad (๖.๔๒)$$



รูป ๖.๔ แสดง stroboscopic snapshots ของ N คลื่น (ในที่นี้ N = 9) กระจายสม่ำเสมอในช่วงความถี่ $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

เมื่อ $\delta\omega$ เป็นผลต่างของความถี่ระหว่างฮาร์โมนิกข้างเคียงกัน

$$\delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{N - 1} = \frac{\Delta\omega}{N - 1} \qquad (๖.๔๓)$$

สมการ (๖.๔๒) ได้แสดง $\psi(t)$ เป็นการรวมกันของฮาร์โมนิกทั้งหมด แต่เราต้องการเขียนสมการนี้ให้อยู่ในแบบของการออสซิเลตที่เกือบเป็นฮาร์โมนิก มีความถี่ของการออสซิเลตอย่างเร็วคือ ω_{av} เพียงความถี่เดียว

$$\omega_{av} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad (๖.๔๔)$$

และมีอัมปลิจูด $A(t)$ ที่มีค่าเกือบคงที่ นั่นคือเราต้องการเขียน $\psi(t)$ อยู่ในแบบ

$$\phi(t) = A(t)\cos\omega_{av}t \qquad (๖.๔๔)$$

แทนที่เราจะรวมค่าทั้งหมดในสมการ(๖.๔๒) โดยตรงซึ่งมีความยุ่งยากมาก เราจะใช้วิธีทาง complex number แทน เราให้การรวมกันได้ในสมการ (๖.๔๒) มีค่าเท่ากับค่าคงที่คูณกับส่วนที่เป็นจริงของ complex function f(t) เมื่อ

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i(\omega_1 + \delta\omega)t} + e^{i(\omega_1 + 2\delta\omega)t} + \ldots\ldots + e^{i(\omega_1 + \Delta\omega)t}$$

$$= e^{i\omega_1 t}\, S \qquad (๖.๔๕)$$

ในที่นี้ $\left[\text{ให้ } a = e^{i\delta\omega t} \text{ และใช้ } \Delta\omega = (N - 1)\delta\omega\right]$ ผลบวก S คือ อนุกรมทางเรขาคณิต (geometric series)

$$S = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{N-1}$$

ดังนั้น $$aS = a + a^2 + \ldots\ldots + a^{N-1} + a^N$$

$$(a - 1)S = a^N - 1$$

$$S = \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\delta\omega t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1}$$

$$= \frac{e^{(\frac{1}{2})(iN\delta\omega t)}}{e^{(\frac{1}{2})(i\delta\omega t)}} \cdot \left[\frac{e^{(\frac{1}{2})(iN\delta\omega t)} - e^{-(\frac{1}{2})(iN\delta\omega t)}}{e^{(\frac{1}{2})(i\delta\omega t)} - e^{-(\frac{1}{2})(i\delta\omega t)}}\right]$$

$$= e^{(\frac{1}{2})(N-1)i\delta\omega t} \cdot \left[\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}\right]$$

$$= e^{(\frac{1}{2})(i\Delta\omega)t} \cdot \left[\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}\right]$$

ดังนั้น $$f(t) = e^{i\omega_1 t} S = e^{i\left[\omega_1 + (\frac{1}{2})\Delta\omega\right]t} \frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}$$

$$= e^{i\omega_{av}t} \frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}$$

สุดท้าย $\Psi(t)$ เป็นค่าคงที่ A คูณกับส่วนที่เป็นจริงของ $f(t)$

$$\psi(t) = A\cos\omega_{av}t \frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}$$

หรือ $$\psi(t) = A(t)\cos\omega_{av}t \qquad (๖.๔๓)$$

โดยมี $$A(t) = A\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t} \qquad (๖.๔๔)$$

สมการ(๖.๔๔) นี้เราสามารถตรวจสอบความจริงได้โดยใช้เทียบกับกรณีสำหรับบีต เมื่อมีเพียงสองหาขน์ปรากฏอยู่ เราให้ $N = 2$ ในสมการ(๖.๔๔) และใช้

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

เมื่อให้ $x = \frac{1}{2}\delta\omega t$ เราได้

$$N = 2 \qquad \psi(t) = (2A\cos\tfrac{1}{2}\delta\omega t)\cos\omega_{av}t$$

$$= 2A\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\cos\omega_{av}t$$

เหมือนกับที่เราหาได้สำหรับบีตในตอน ๖.๔

จากสมการ(๖.๔๔) เราพิจารณาสภาวะเริ่มต้นของ $A(t)$ ที่ $t = 0$ เพราะว่าทั้งเศษและส่วนต่างมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น การคำนวณค่า $A(t)$ ที่ $t = 0$ เราต้องกระจายทั้งเศษและส่วนด้วยอนุกรมของเทเลอร์ ที่ $t = 0$ และให้ $\theta = \frac{1}{2}\delta\omega t$ จะได้

$$\frac{\sin N\theta}{\sin\theta} = \frac{N\theta - \frac{1}{6}(N\theta)^3 + \dots\dots}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots\dots} \qquad (๖.๔๕)$$

สำหรับ θ เป็นค่าเล็กๆเราสามารถละทิ้งพจน์ทั้งหมดทางด้านขวามือได้ยกเว้นพจน์แรกของเศษและส่วน ดังนั้นเราได้

$$\lim_{\theta \to 0} \left\{ \frac{\sin N\theta}{\sin\theta} \right\} = N \qquad (๖.๕๐)$$

และสมการ(๖.๔๘) ให้ $A(0) = NA \,, \qquad A = \frac{A(0)}{N} \qquad (๖.๕๑)$

หรือ

$$A(t) = A(0)\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{N\,\sin\frac{1}{2}\delta\omega t} \qquad (๖.๕๒)$$

ต่อไปเรามาพิจารณากรณีเมื่อ N มีค่ามากพอที่จะให้ระยะห่างความถี่ $\delta\omega$ ระหว่างฮาร์โมนิกข้างเคียงมีค่าน้อยเข้าใกล้ศูนย์ สำหรับ กรณี N มีค่าเป็นอนันต์ เราสามารถละทิ้งความแตกต่างระหว่าง N และ $N - 1$ ดังนั้น

$$\Delta\omega = (N - 1)\delta\omega = N\delta\omega \qquad (๖.๕๓)$$

เราให้ N มีค่าเข้าใกล้อนันต์ และ $\delta\omega$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ผลคูณของมันเท่ากับแถบกว้าง $\Delta\omega$ เสมอ ในสมการ(๖.๕๒)เหมอส่วน $\sin\frac{1}{2}\delta\omega$ สามารถกระจายแบบอนุกรมของเทเลอร์ หรือเราสมมติว่า $\delta\omega$ เข้าใกล้ศูนย์ แต่ t ไม่เป็นค่าอนันต์ ดังนั้นเราสามารถละทิ้งพจน์ทั้งหมดยกเว้นพจน์แรก จะได้

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0)\,\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta\omega t}{N\,\sin\frac{1}{2}\delta\omega t} \\ &= A(0)\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega t}{N.\frac{1}{2}\delta\omega t} \\ &= A(0)\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \qquad (๖.๕๕) \end{aligned}$$

และ

$$\psi(t) = A(0)\,\frac{\sin\frac{1}{2}\delta\omega t}{\frac{1}{2}\delta\omega t}\,\cos\omega_{av}t \qquad (๖.๕๕)$$

ให้เราย้อนกลับไปดูสมการ(๖.๕๕) เราสามารถเขียนใหม่ให้สัมพันธ์กับกรณี $\delta\omega \to 0$ โดยใช้สมการ(๖.๕๐) และ(๖.๕๓) คือ

$$A = \frac{A(0)}{N} = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\,\delta\omega \qquad (๖.๕๖)$$

สมการ(๖.๕๕)เขียนใหม่เป็น

$$(๖.๕๗) \qquad \psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\left[\delta\omega \cos\omega_1 t + \delta\omega \cos(\omega_1 + \delta\omega)t + \ldots + \delta\omega \cos\omega_2 t\right]$$

แต่ในการจำกัด $\delta\omega \to 0$ ปริมาณในวงเล็บก็คือ อินติกราลของ $\cos\omega t\, d\omega$ (เราแทนอักษร δ ด้วย d) อินติเกรทจาก $\omega = \omega_1$ ถึง ω_2 ดังนั้นสมการ(๖.๕๖) กลายเป็น

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega t\, d\omega \qquad (๖.๕๘)$$

ฟูเรียร์อินติกราล

สมการ(๖.๕๘) เป็นตัวอย่างของการรวมกันของฮาร์โมนิกต่อเนื่อง หรือเป็นฟูเรียร์อินติกราล กล่าวคือ ฟังก์ชันใด $\psi(t)$ ที่ไม่เป็น periodic เมื่อรวมกันสามารถเขียนเป็น การรวมกันต่อเนื่องแบบฟูเรียร์ มี ลักษณะทั่วไปคือ

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin\omega t\, d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos\omega t\, d\omega \qquad (๖.๕๙)$$

ฟังก์ชันต่อเนื่อง $A(\omega)$ และ $B(\omega)$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ของ $\psi(t)$ มีชื่อเรียกเหมือนกับค่าคงที่ในอนุกรมฟูเรียร์

โดยการเปรียบเทียบสมการ(๖.๕๘) และ(๖.๕๙) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชัน $\psi(t)$ กำหนดด้วยสมการ(๖.๕๔) และ(๖.๕๕) มีสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์คือ

$A(\omega) = 0$ สำหรับทุกค่า ω

$B(\omega) = 0$ สำหรับ ω ที่ไม่อยู่ระหว่าง ω_1 และ ω_2

$$= \frac{A(0)}{\Delta\omega} \quad \text{สำหรับ } \omega \text{ ที่อยู่ระหว่าง } \omega_1 \text{ และ } \omega_2 \qquad (๒.๖๐)$$

การเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์และ ω เรียกว่า frequency spectrum ของการรวมกันต่อเนื่องฟูเรียร์ spectrum ของสมการ(๒.๕๗) เป็นตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของ spectrum ที่มี กล่าวคือ $B(\omega)$ มีค่าคงที่ตลอดแถบความถี่จำกัดของช่วงกว้าง $\Delta\omega$ และมีค่าเป็นนอกเหนือจากค่าเหล่านี้ spectrum นี้บางครั้งเรียกว่า square spectrum ตามรูป ๒.๕b ในรูป ๒.๕ เราเขียนภาพของห่อคลื่น $\psi(t)$ และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $B(\omega)$ ให้สังเกตว่า $A(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ครั้งแรกที่เวลา t_1 โดยที่ $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$ ซึ่งเป็นเวลานานที่ความถี่ทั้งหมดใช้ในการกระจายเฟสออกไปอย่างสม่ำเสมอตลอดช่วง 2π เรเดียน เหมือนกับที่เราได้กล่าวไว้ใน stroboscopic snapshots สำหรับช่วงเวลา Δt ระหว่างเวลาซึ่งอัมปลิจูด $A(t)$ ของ $\psi(t)$ มีค่ามาก เราสามารถจัดให้อยู่ช่วงระหว่างอัมปลิจูด $A(t)$ เป็นศูนย์สองครั้ง ที่ $t = -t_1$ และ $t = +t_1$ ดังนั้น full width t เป็นเพียงครึ่งหนึ่งของช่วงเวลาระหว่างเป็นศูนย์สองครั้งของ $A(t)$ ที่ $t = \pm t_1$ นั่นคือเราสามารถกำหนดช่วงเวลาของห่อคลื่นเป็น

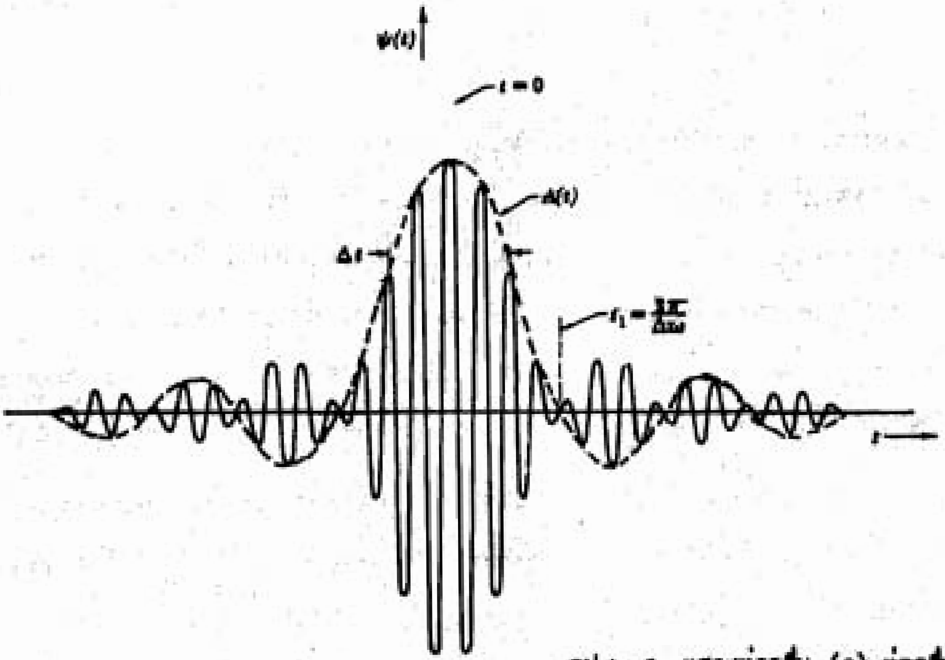
$$\Delta t = t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\nu\Delta t = 1 \qquad (๒.๖๑)$$

สมการ(๒.๖๑) มีเครื่องหมายเท่ากับมากกว่ามีเครื่องหมายเกือบเท่ากับ เพราะว่า เราหมายถึงช่วงเวลา Δt สำหรับห่อคลื่นนี้ จากค่าจำกัดความข้างต้น $A(t)$ ที่ปลายของช่วง Δt กำหนดด้วย

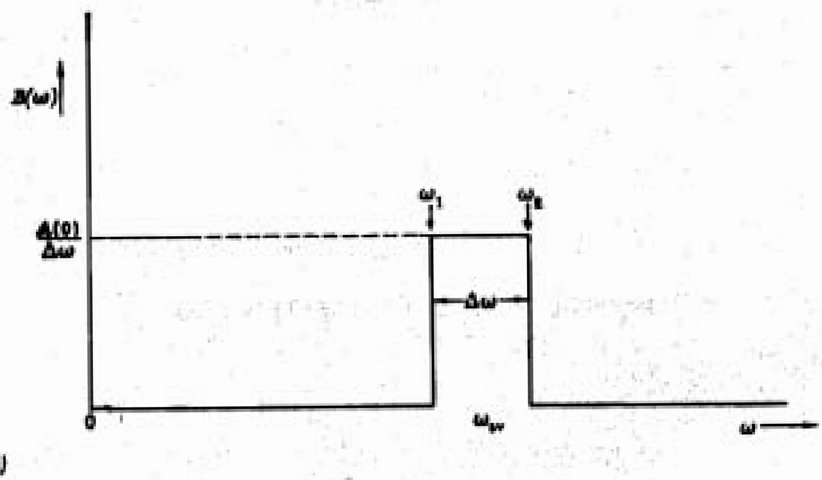
$$A\left(\frac{t_1}{2}\right) = A(0)\,\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\,A(0) \qquad (๒.๖๒)$$

ดังนั้นตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงปลายของช่วง Δt อัมปลิจูด $A(t)$ มีค่าลดลงด้วยแฟคเตอร์ $2/\pi$



(a)

รูป ๖.๙ แสดงห่อคลื่น (a) ห่อคลื่น Ψ(t) ตามสมการ (๖.๙๙) (b) frequency spectrum ของ B(ω) ตามสมการ (๖.๖๐)



(b)

จากค่ามากที่สุดของมัน การออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิกด้วยการขจัด

$$\psi(t) = A(t) \cos\omega_{av} t$$

มีพลังงานสะสมแปรตาม $A^2(t)$ ดังนั้น พลังงานมีค่ามากที่สุดที่ศูนย์กลางของห่อคลื่น (ที่ $t = 0$) และมีค่าลดลงจากจุดเริ่มต้นเป็น $(2/\pi)^2 = 0.406$ ที่ปลายของช่วงเวลา Δt นั่นคือตัวออสซิลเลตมีพลังงานสะสม 40% เปอร์เซ็นต์ของพลังงานสะสมมากที่สุดที่ปลายช่วงเวลา Δt

<u>ระลอกคลื่นเคลื่อนที่</u>

สมมติว่าเครื่องส่งที่ตำแหน่ง $z = 0$ มีการเคลื่อนที่ในลักษณะของห่อคลื่น เหมือนรูป ๖.๕ เมื่อเครื่องส่งให้คลื่นเข้าไปในตัวกลางสำหรับช่วงเวลาจำกัด Δt และเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ห่างจากเครื่องส่งมันจะผสมเป็นห่อคลื่นมีความยาวจำกัดอันหนึ่ง ห่อคลื่นนี้เรียกว่าระลอกคลื่นหรือกลุ่มคลื่น และมันจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วกลุ่ม เพราะว่า ω และ k สัมพันธ์กันด้วยความสัมพันธ์การกระจาย $k(\omega)$ ดังนั้นแถบ $\Delta\omega$ ของความถี่ที่เครื่องส่งกระจายออกมาสัมพันธ์กับแถบกว้าง Δk ของจำนวนคลื่นในระลอกคลื่น แถบ Δk มีศูนย์กลางที่ k_o และหาได้จากอนุพันธ์ของความสัมพันธ์การกระจาย และให้ $\omega = \omega_o$

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} \qquad (๖.๖๓)$$

เราใช้ $v_g = (d\omega/dk)_o$ (เลขกำกับศูนย์ หมายถึงอนุพันธ์เราคำนวณที่ศูนย์กลางของแถบกว้าง) ระลอกคลื่นของความยาว Δz เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_g ผ่านจุด z ที่กำหนดแน่นอนในช่วง เวลา Δt เป็น

$$\Delta z = v_g \Delta t \qquad (๖.๖๔)$$

คูณสมการ(๖.๖๓) และ(๖.๖๔) เราได้

$$\Delta k \, \Delta z = \Delta\omega \, \Delta t \qquad (๖.๖๕)$$

แต่ $\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi$ เราได้ $\Delta k\Delta x \geq 2\pi$ และใช้จำนวนคลื่น $\sigma = k/2\pi = \lambda^{-1}$ เราจะได้

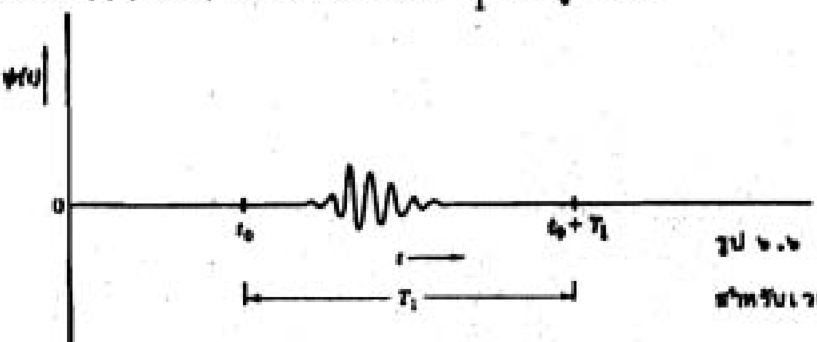
$$\Delta\sigma\,\Delta x \;\geq\; 1 \qquad (๖.๖๖)$$

ความสัมพันธ์นี้เหมือนกับความสัมพันธ์ทั่วไป $\Delta\nu\Delta t = 1$ แต่ใช้สำหรับห่อคลื่นในระยะทางแทนที่จะเป็นเวลา

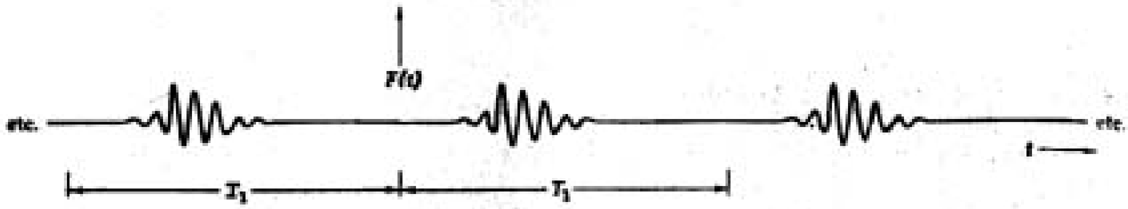
๖.๔ การวิเคราะห์ฟูเรียร์ของห่อคลื่น

สมมติว่า $\psi(t)$ มีลักษณะเป็นห่อคลื่นของช่วง เวลาจำกัดตามรูป ๖.๔ ซึ่ง $\psi(t)$ เป็นศูนย์เมื่อเวลาก่อน t_o และหลังเวลา t_o+T_1 ดังนั้นภายในช่วงเวลา T_1 $\psi(t)$ มีการออสซิลเลต นอกจากช่วงเวลานี้ $\psi(t)$ ต้องเป็นศูนย์ เราจึงสามารถให้ T_1 เป็นค่าใหญ่แต่ไม่เป็นค่าอนันต์ โดยการเลือก $1/T_1 = \nu_1$ หน่วยของความถี่ให้เล็กเท่าไรก็ได้ตามต้องการ

ในตอน ๒.๓ เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ฟูเรียร์ของ periodic function $F(t)$ ที่ได้กำหนดสำหรับเวลาทั้งหมดและมีคาบเวลาเป็น T_1 ทำให้ $F(t + T_1) = F(t)$ มาแล้ว ในตอนนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่กำหนดจากช่วงเวลาจำกัดของ t โดยสร้าง periodic function $F(t)$ ที่ได้กำหนดสำหรับเวลาทั้งหมด t และเหมือนกับฟังก์ชันของช่วงเวลาที่กำหนด ซึ่งฟังก์ชัน $F(t)$ มีคาบเวลา T_1 และ T_1 เป็นช่วงเวลาที่ได้แสดงในรูป ๖.๖ ดังนั้นฟังก์ชัน $F(t)$ มีลักษณะของห่อคลื่น $\psi(t)$ ซ้ำๆกันในแต่ละช่วงเวลา T_1 ตามรูป ๖.๗



รูป ๖.๖ แสดง pulse $\psi(t)$ สำหรับเวลาก่อน t_o และหลัง t_o+T_1 ฟังก์ชัน $\psi(t)$ เป็นศูนย์



รูป ๒.๗ ฟังก์ชันระยะชั่ว F(t) มีคาบเวลาเป็น T_1

จากอนุกรมฟูเรียร์สำหรับ periodic function F(t) ในตอน ๒.๓ สมการ(๒.๔๙)ถึง (๒.๕๒) คือ

$$F(t) = B_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t \qquad (๖.๖๗)$$

เมื่อ
$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1} \qquad (๖.๖๘)$$

และ
$$B_o = \frac{1}{T_1} \int_{t_o}^{t_o+T_1} F(t)\, dt \qquad (๖.๖๙)$$

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_o}^{t_o+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t\, dt \qquad (๖.๗๐)$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_o}^{t_o+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t\, dt \qquad (๖.๗๑)$$

ในที่นี้ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$

เราจะปรับปรุงสมการ(๖.๖๗) ถึง(๖.๗๑) ให้ใช้ได้กับปัญหาของห่อคลื่น $\psi(t)$ ในขั้นแรก ให้สังเกตว่า ค่าคงที่ B_o ในสมการ(๖.๖๗) ต้องเป็นศูนย์ สำหรับเวลาก่อนและหลังของช่วงเวลาแน่นอนหนึ่ง จึงไม่มีค่าการขจัดคงที่อยู่ใน $\psi(t)$ ต่อไปพิจารณาพจน์ต้นๆ ของผลบวกอนันต์ในสมการ(๖.๖๗) พจน์ต้นเหล่านี้คือส่วนของ $A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t$,

$A_2 \sin 2\omega_1 t + B_2 \cos 2\omega_1 t$, etc.

พจน์เหล่านี้มีค่าน้อยละทิ้งได้ เราเห็นได้จากรูป ๖.๖ ซึ่งไม่มีส่วนของ $\psi(t)$ ออสซิลเลต อย่างช้าๆด้วยคาบเวลา T_1 ในการสร้างฟังก์ชัน $F(t)$ จำเป็นต้องมีส่วนของความถี่ที่มีคาบเวลา T_1 แต่ T_1 เป็นค่าคงที่ใดๆเราสามารถให้เป็น ๒ เท่า กล่าวคือ เราต้องการแทนค่า T_1 ใหม่ให้มีค่าใหญ่ขึ้นด้วยการให้เป็น ๒ เท่าเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ เราเห็นได้ว่าเมื่อ T_1 สามารถทำให้ใหญ่ขึ้นตามต้องการแล้ว ความถี่เชิงมุม $\omega_1 = 2\pi/T_1$ สามารถมีค่าเล็กลงได้ตามต้องการ ดังนั้นค่าคงที่ A_1 และ B_1 มีค่าน้อย ถึงแม้ไม่เป็นศูนย์แต่ก็น้อยจนไม่มีความสำคัญอย่างไร (เหมือน B_o) ค่าคงที่ A_2 และ B_2 มีค่าเป็นศูนย์ (สำหรับ T_1 มีค่าใหญ่พอ) สำหรับ T_1 มีค่าใหญ่มากๆพจน์ต้นๆทั้งหมดของค่าคงที่ A_n และ B_n สามารถละทิ้งได้ ถ้า n เป็นค่าใหญ่พอสามารถให้ A_n และ B_n มีความหมายได้ พิจารณาเฉพาะสองพจน์แรกในสมการ(๖.๒๙) ที่กำหนดด้วย n และ $n + 1$

$$F(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n \sin n\omega_1 t + A_{n+1} \sin(n\omega_1 + \omega_1)t + \ldots \qquad (๖.๓๒)$$

ถ้า T_1 มีค่าใหญ่มาก เราสามารถสมมติให้ ω_1 มีค่าน้อยและ n มีค่ามากจนกระทั่ง A_{n+1} มีค่าต่างจาก A_n เพียงเล็กน้อย ดังนั้น $n\omega_1$ เป็นตัวแปรต่อเนื่อง ω และ A_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ ω

$$\omega = n\omega_1 \qquad (๖.๓๓)$$

ให้ $\delta\omega$ คือส่วนที่เพิ่มขึ้นของ ω เมื่อ n เพิ่มขึ้นด้วย δn จาก n ไปยัง $n + \delta n$

$$\delta\omega = \omega_1 \,\delta n \,, \qquad \delta n = \frac{\delta\omega}{\omega_1} \qquad (๖.๓๔)$$

ต่อไปให้ δn เป็นค่าเล็กๆที่ทำให้สัมประสิทธิ์ A_n ในแถบกว้างจาก n ถึง $n+\delta n$ มีค่าเท่ากับตัวอื่นๆ ดังนั้นเราอาจจัดพจน์ทั้งหมดในสมการ(๖.๓๒) ที่มีความถี่ ω เดียวกันเข้าด้วยกันในแถบกว้าง δn เมื่อพจน์ทั้งหมดมีค่าเท่ากันและมี δn พจน์ เราอาจเขียนสมการ(๖.๓๒) ให้อยู่ในแบบ

$$F(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta n\, A_n \sin n\omega_1 t + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta\omega \frac{A_n}{\omega_1} \sin\omega t + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \delta\omega\, A(\omega) \sin\omega t + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \int_0^\infty A(\omega) \sin\omega t \, d\omega + \ldots\ldots \qquad (๖.๓๔)$$

สมการสุดท้ายได้จากการแปลงผลบวกของช่วงกว้าง $\delta\omega$ เป็นอินติกราลโดยแทน $\delta\omega$ ด้วย $d\omega$ ส่วนจุดๆ (...............) ใช้แทนพจน์ที่เหลือในสมการ(๖.๒๓) ซึ่งเดิมเป็นผลบวก $\Sigma B_n \cos n\omega_1 t$ ผลบวกนี้ยังคงกลายเป็นรูปอินติกราล ดังนั้นสมการทั้งหมดหาได้เป็น

$$F(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin\omega t \, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos\omega t \, d\omega \qquad (๖.๓๕)$$

$$A(\omega) = A(n\omega_1) = \frac{A_n}{\omega_1}$$

$$B(\omega) = B(n\omega_1) = \frac{B_n}{\omega_1} \qquad (๖.๓๖)$$

ให้สังเกตว่า เราให้ตัวแปรต่อเนื่อง ω เริ่มที่ศูนย์ เพราะว่าเรารู้ค่า A_n และ B_n เป็นค่าศูนย์ที่ใกล้ $n = 0$ ดังนั้น $A(\omega)$ และ $B(\omega)$ ต้องเป็นศูนย์ที่ใกล้ $\omega = 0$

จากสมการ(๖.๓๓) และ(๖.๓๖) $A(\omega)$ เขียนได้เป็น

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \sin\omega t \, dt$$

และเมื่อ $\omega_1 T_1 = 2\pi$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \sin\omega t \, dt$$

ในที่สุดเราสามารถสร้าง periodic function $F(t)$ ด้วยสมการ(๖.๓๖) และเขียนเป็นฟูเรียร์อินติกราล

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\,d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (๖.๓๘)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\sin\omega t\,dt \qquad (๖.๓๙)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\cos\omega t\,dt \qquad (๖.๔๐)$$

<u>ตัวอย่าง ๔</u> square frequency spectrum

สมมติว่า $A(\omega)$ มีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกๆค่าของ ω และ B เป็นค่าคงที่สำหรับค่าของ ω อยู่ในช่วงจาก ω_1 ถึง ω_2 และเป็นศูนย์สำหรับค่า ω นอกจากนี้ทั้งหมด ให้เราเลือกค่าคงที่ของ B ในช่วงนี้ที่ทำให้พื้นที่ข้างใต้ของการเขียน $B(\omega)$ กับ ω เป็นหนึ่ง คือ

$$B(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \quad \text{สำหรับ } \omega_1 \le \omega \le \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \qquad (๖.๔๑)$$

$$B(\omega) = 0 \quad \text{สำหรับค่า } \omega \text{ อื่นๆ}$$

ดังนั้นห่อคลื่น $\psi(t)$ คือ

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t\,d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

$$= 0 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\Delta\omega}\cos\omega t\,d\omega = \frac{1}{\Delta\omega}\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\Big|_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_2}$$

$$\psi(t) = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\Delta\omega t} = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{(\omega_2 - \omega_1)t} \qquad (๖.๔๒)$$

ส่วนบนของสมการ (๖.๔๒) เป็นการรวมกันแบบอสมที่ความถี่อสม $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ ส่วนล่าง

ประกอบด้วยแฟคเตอร์ t ที่ทำให้ $\phi(t)$ มีค่ามากที่สุดที่ $t = 0$

เขียนสมการ (๖.๔๖) เป็นการออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิกด้วยความถี่เฉลี่ย ω_o และมีอัมปลิจูดเปลี่ยนแปลงค่าอย่างช้า

$$\omega_o = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \qquad \tfrac{1}{2}\Delta\omega = \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$$
$$\omega_2 = \omega_o + \tfrac{1}{2}\Delta\omega, \qquad \omega_1 = \omega_o - \tfrac{1}{2}\Delta\omega \tag{๖.๔๗}$$

$$\phi(t) = \frac{\sin(\omega_o + \tfrac{1}{2}\Delta\omega)t - \sin(\omega_o - \tfrac{1}{2}\Delta\omega)t}{\Delta\omega t} = \left[\frac{\sin\tfrac{1}{2}\Delta\omega t}{\tfrac{1}{2}\Delta\omega t}\right]\cos\omega_o t \tag{๖.๔๘}$$

ดังนั้น $\phi(t)$ เป็นการออสซิลเลตอย่างเร็ว มีอัมปลิจูดเปลี่ยนแปลงอย่างช้าคือ

$$\phi(t) = A(t)\cos\omega_o t$$
$$A(t) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\Delta\omega t}{\tfrac{1}{2}\Delta\omega t} \tag{๖.๔๙}$$

ผลลัพธ์สมการ (๖.๔๙) เหมือนกับที่เราหาได้ในตอน ๖.๓ ที่หาจากการรวมกันของการออสซิลเลตฮาร์โมนิก N คลื่น มีความถี่ต่างๆกัน N ค่า กระจายออกอย่างสม่ำเสมอระหว่าง ω_1 และ ω_2 เมื่อจัดให้ $N \to \infty$ เราจะได้สมการ (๖.๔๙) พล็อตคลื่น $\phi(t)$ และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $B(\omega)$ เขียนได้ตามรูป ๖.๕

__ตัวอย่าง ๖__ **Square pulse in time**

สมมติว่า $\phi(t)$ เป็นศูนย์สำหรับทุกค่าของเวลา t ยกเว้นระหว่างช่วงเวลา Δt มีศูนย์กลางที่ t_o และกระจายออกระหว่าง t_1 และ t_2 ในช่วงเวลานั้น $\phi(t)$ มีค่าคงที่และเราจัดให้ค่าคงที่นั้นทำให้อินทิกรัลของ $\phi(t)$ ตลอดช่วงระยะเวลา Δt เป็นหนึ่ง

$$\phi(t) = \frac{1}{\Delta t} \qquad t_1 \le t \le t_2 = t_1 + \Delta t \tag{๖.๕๐}$$

ให้หาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $A(\omega)$ และ $B(\omega)$ โดยสังเกตว่า ถ้า t_o เป็นศูนย์ $\psi(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ (even function) ของ t และ $A(\omega)$ ต้องเป็นศูนย์ [เพราะว่า $\sin\omega t$ เป็นฟังก์ชันคี่ (odd function)] สำหรับค่าคงที่ใดๆ t_o เราจะได้ทั้ง $A(\omega)$ และ $B(\omega)$ กล่าวคือ เรามีทั้งฟังก์ชันคี่ $\sin\omega t$ และฟังก์ชันคู่ $\cos\omega t$ พร้อมกัน เพื่อความสะดวกให้เราแทนค่า t ด้วย $t-t_o$ ในสมการ(๖.๔๒) และ(๖.๔๐) ดังนั้นเมื่อ $\psi(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ของ $t-t_o$ เราได้

$$\psi(t) = \int_0^\infty B(\omega)\cos\omega(t-t_o)\,d\omega \qquad (๖.๔๗)$$

และ

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cos\omega(t-t_o)\,dt \qquad (๖.๔๘)$$

ได้ผลลัพธ์

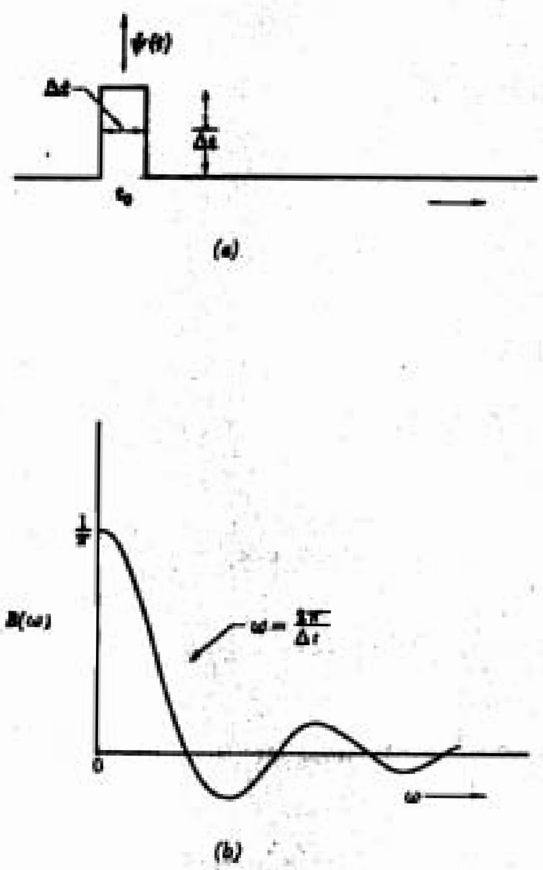
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta t\omega}{\frac{1}{2}\Delta t\omega} \qquad (๖.๔๙)$$

Square pulse ของสมการ(๖.๔๖) และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $B(\omega)$ ได้เขียนในรูป ๖.๑๐ ให้สังเกตว่า ถ้าเรากำหนด $\Delta\omega$ เป็นช่วงเวลาจากความถี่ต่ำสุดซึ่งเป็นศูนย์ถึงตำแหน่งสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $B(\omega)$ เป็นศูนย์ครั้งแรก เราจะได้ความสัมพันธ์ทั่วไปคือ

$$\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi, \qquad \Delta\nu\,\Delta t = 1 \qquad (๖.๕๐)$$

<u>ตัวอย่าง ๓</u> Damped harmonic oscillator-natural line width

เราต้องการหา frequency spectrum ของแสงที่พุ่งออกจากอะตอม มี mean decay life time $\tau = 10^{-8}$ วินาที ถ้าเราต้องการเพียงเฉพาะแถบกว้าง $\Delta\nu$ แถบกว้างต้องมีขนาด 10^{8} cps เมื่อช่วงระยะเวลาของห่อคลื่นเป็น 10^{-8} วินาที แต่เราต้องการรายละเอียดของรูปลักษณะ spectrum ที่ให้การทดลองมีการออสซิลเลตเป็น damped harmonic ขึ้นกับเวลา ดังนั้นเราสมมติว่า $\psi(t)$ มีค่าเป็นศูนย์สำหรับเวลาก่อน $t = 0$ และที่ $t = 0$ มันถูกกระตุ้นทันทีทันใด หลังจากนั้นมันจะมีการออสซิลเลตเป็น damped harmonic



รูป ๖.๔ Square pulse $\psi(t)$ and its Fourier coefficient $B(\omega)$

$$\psi(t) = e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\cos\omega_1 t \qquad (๖.๔๑)$$

damping constant เป็นส่วนกลับของ mean decay lifetime

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} \qquad (๖.๔๒)$$

ค่าคงที่สปริงมีความสัมพันธ์กับมวล M และความถี่ตามธรรมชาติ ω_o ด้วย [ดูสมการ(๓.๔)

ตอน ๓.๒]

$$K = M\omega_o^2 \qquad (๖.๕๓)$$

ความถี่ ω_1 สัมพันธ์กับ ω_o และ Γ ด้วย

$$\omega_1^2 = \omega_o^2 - \tfrac{1}{4}\Gamma^2 \qquad (๖.๕๔)$$

กระจายสมการ(๖.๕๐) เป็น F

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\, d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\, d\omega \qquad (๖.๕๕)$$

ดังนั้น

$$2\pi A(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\sin\omega t\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\, 2\cos\omega_1 t\sin\omega t\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\left[\sin(\omega + \omega_1)t + \sin(\omega - \omega_1)t\right] dt \qquad (๖.๕๖)$$

$$2\pi B(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cos\omega t\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\, 2\cos\omega_1 t\cos\omega t\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\left[\cos(\omega + \omega_1)t + \cos(\omega - \omega_1)t\right] dt \qquad (๖.๕๗)$$

จากตารางสูตรอินทิกราล

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx = \frac{b}{b^2 + a^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{a}{b^2 + a^2} \qquad (๖.๕๘)$$

ดังนั้นสมการ(๖.๕๖) และ(๖.๕๗) ให้

$$2\pi A(\omega) = \frac{(\omega + \omega_1)}{(\omega + \omega_1)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma)^2} \qquad (๖.๙๙)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\tfrac{1}{2}\Gamma}{(\omega + \omega_1)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{\tfrac{1}{2}\Gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma)^2} \qquad (๖.๑๐๐)$$

เราสามารถใช้สมการ(๖.๙๘) เพื่อกำจัด ω_1^2 ให้เหลือเป็น ω_o^2 หลังจากทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์ เราจะได้

$$2\pi A(\omega) = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_o^2) + \omega\Gamma^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๑)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\Gamma(\omega^2 + \omega_o^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๒)$$

ความเข้มแสง

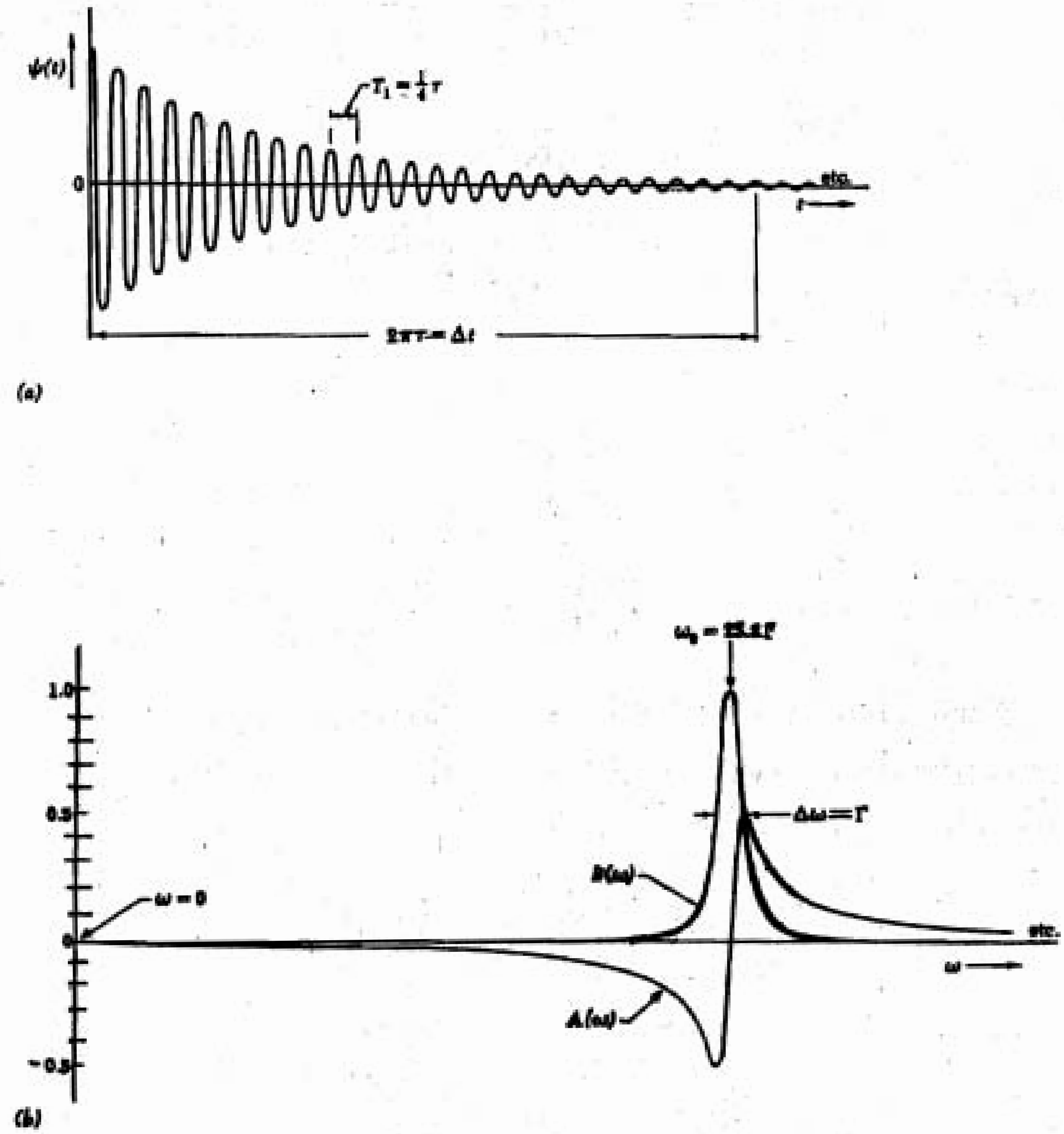
$$I(\omega) \equiv \left[2\pi A(\omega)\right]^2 + \left[2\pi B(\omega)\right]^2 = \frac{4\omega^2 + \Gamma^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๓)$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้นี้กับอัมปลิจูดและความเข้มที่หาได้จากระบบเดียวกันภายใต้การออสซิลเลตด้วยแรง steady-state ที่ความถี่ ω ในตอน ๓.๒ ให้ผลลัพธ์ตามสมการ (๓.๑๗) และ(๓.๓๕) ถึง(๓.๓๕) คือ

$$A_{el}(\omega) = \frac{F_o}{M}\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๔)$$

$$A_{ab}(\omega) = \frac{F_o}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๕)$$

$$|A|^2 \equiv \left[A_{el}(\omega)\right]^2 + \left[A_{ab}(\omega)\right]^2 = \frac{F_o^2}{M}\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๖.๑๐๖)$$



รูป ๒.๔ Weakly damped harmonic oscillator. (a) $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t/\tau}\cos\omega t$ (b) Fourier coefficients in the continuous superposition of harmonic terms $\int_0^\infty \left[A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t\right] d\omega$.

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\frac{F_o^2}{M}\frac{\Gamma\omega^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2} \qquad (๒.๑๐๗)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2}\frac{F_o^2}{M}\frac{\frac{1}{2}(\omega^2+\omega_o^2)}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2} \qquad (๒.๑๐๘)$$

เราเห็นได้ว่า ขั้นปริซูดฟูเรียร์ $B(\omega)$ สำหรับการสกลองอย่างอิสระเป็นปฏิภาคตรงกับพลังงานสะสม $E(\omega)$ สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรง และ $A(\omega)$ สำหรับการสกลองอย่างอิสระมีส่วนหนึ่งเป็นปฏิภาคตรงกับ $\omega A_{el}(\omega)$ และอีกส่วนหนึ่งเป็นปฏิภาคตรงกับ $A_{ab}(\omega)$ สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรง สำหรับกรณี weakly damped ส่วนที่แปรตาม $A_{ab}(\omega)$ สามารถละทิ้งได้ยกเว้นเมื่อ ω มีค่าเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติ ω_o ดังนั้น $A(\omega)$ จึงเป็นปฏิภาคตรงกับ $A_{el}(\omega)$ เท่านั้น ส่วนความเข้มฟูเรียร์ $I(\omega)$ มีส่วนหนึ่งเป็นปฏิภาคตรงกับกำลังการดูดกลืน $P(\omega)$ สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรง และอีกส่วนหนึ่งอาจละทิ้งได้สำหรับกรณี weak damping หรือสำหรับ $\Gamma^2 << \omega^2$ ดังนั้น $I(\omega)$ สำหรับการสกลองอย่างอิสระเป็นปฏิภาคตรงกับกำลังดูดกลืน $P(\omega)$ สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรงเท่านั้น

๒.๔ การวิเคราะห์แบบฟูเรียร์ของกระแสคลื่น เคลื่อนที่

(Fourier analysis of a traveling wave packet)

สมมติว่าเครื่องส่งที่ตำแหน่ง $z = 0$ ส่งคลื่นเคลื่อนที่ขึ้นกับเวลาให้แก่ระบบเปิดต่อเนื่องหนึ่งมิติ มีการขจัด $\psi(z,t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา $f(t)$

$$\psi(0,t) = f(t) \qquad (๒.๑๐๙)$$

ฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถกระจายเป็นการรวมกันของการออสซิลเลตฮาร์โมนิก ถ้า $f(t)$ ไม่เป็น periodic function ของเวลา การรวมกันเป็นลักษณะต่อเนื่องทางความถี่และให้ฟูเรียร์อินทิกรัลเป็น

$$f(t) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t\right] d\omega \qquad (๒.๑๑๐)$$

คลื่นเคลื่อนที่ในตัวกลาง dispersive ชนิดเดียวกัน

แต่ละส่วนฮาร์โมนิกของสมการ (๖.๑๑๐) ต่างเป็นคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิก มีจำนวนคลื่นเชิงมุมเป็นไปตามความสัมพันธ์การกระจาย

$$k = k(\omega) \qquad (๖.๑๑๑)$$

แต่ละความถี่ของคลื่นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฟสเป็นของตัวมันเอง

$$v_\phi = \frac{\omega}{k(\omega)} \qquad (๖.๑๑๒)$$

คลื่นเคลื่อนที่ทั้งหมด $\psi(z,t)$ ก็คือคลื่นรวมทั้งหมดของคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกเหล่านี้ หมายความว่า เราหาค่า $\psi(z,t)$ ได้จาก $\psi(0,t)$ โดยแทน ωt ด้วย $\omega t - kz = t-k(\omega)z$ ในแต่ละพจน์ฮาร์โมนิกของสมการ (๖.๑๑๐)

$$\psi(0,t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \left[A(\omega)\sin\omega t + B(\omega)\cos\omega t\right] d\omega \qquad (๖.๑๑๓)$$

$$(๖.๑๑๔) \quad \psi(z,t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \{A(\omega)\sin\left[\omega t - k(\omega)z\right] + B(\omega)\cos\left[\omega t - k(\omega)z\right]\} d\omega$$

สำหรับกรณีทั่วไปของคลื่น dispersive ความเร็วเฟส v_ϕ ขึ้นกับความถี่ ω ดังนั้นรูปร่างของ $\psi(z,t)$ สำหรับเวลาแน่นอน t ไม่เป็นค่าคงที่ขึ้นกับเวลา

สำหรับกรณีพิเศษของคลื่น nondispersive ความเร็วเฟส v_ϕ ไม่ขึ้นกับความถี่ ฟังก์ชันคลื่น $\psi(z,t)$ มีรูปร่างเหมือนกันหมดสำหรับแต่ละเวลาแน่นอน t และเราสามารถเขียนได้โดยอาศัยจากสมการ (๖.๑๑๔) ดังนี้ ให้ v เป็นความเร็วเฟสร่วมของทุกคลื่นฮาร์โมนิก

$$v = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad \text{หรือ} \quad k(\omega) = \frac{\omega}{v} \qquad (๖.๑๑๕)$$

ดังนั้นสมการ (๖.๑๑๔) กลายเป็น

$$\psi(z,t) = \int_0^{\infty} \{A(\omega)\sin\omega(t - \frac{z}{v}) + B(\omega)\cos\omega(t - \frac{z}{v})\} d\omega \qquad (๖.๑๑๖)$$

v เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับความถี่ ω เราจะเห็นได้ว่า แต่ละพจน์ของการรวมกันในสมการ (๖.๑๑๖) หาได้จากการรวมกันในสมการ(๖.๑๑๓) โดยแทนค่า t ใน $\psi(0,t)$ เป็น $t - (z/v)$ ดังนั้นเราจะได้คลื่น nondispersive คือ

$$\psi(z,t) = \psi(0,t') , \qquad t' = t - \frac{z}{v} \qquad (๖.๑๑๗)$$

ให้สังเกตว่า สำหรับคลื่น nondispersive เราไม่จำเป็นต้องเขียน Fourier superposition ลงไป กล่าวคือ เมื่อกำหนด $\psi(0,t)$ มาให้เราสามารถหา $\psi(z,t)$ ได้ทันทีจากสมการ(๖.๑๑๗) โดยไม่ต้องทำตามขั้นตอนของการวิเคราะห์ฟูเรียร์

ตัวอย่างของคลื่น nondispersive ซึ่งเราไม่ต้องทำการวิเคราะห์ฟูเรียร์ เช่น สมมติว่า เรามีคลื่น nondispersive (คลื่นเสียงหรือคลื่นแสงในสุญญากาศ) ที่ $z = 0$ มีการขจัด

$$\psi(0,t) = Ae^{-(\frac{1}{2})t^2/\tau^2} \qquad (๖.๑๑๘)$$

สมการ(๖.๑๑๘) เป็น Gaussian-shaped pulse มันมีค่ามากที่สุดที่ $t = 0$ และมีค่าน้อยเมื่อเวลาก่อนหรือหลังจาก $t = 0$ เราสามารถทำการวิเคราะห์ฟูเรียร์สมการ(๖.๑๑๘) แต่เราไม่ต้องทำ เพราะว่า เมื่อตัวกลางกำหนดเป็น nondispersive เราสามารถเขียนรูปของคลื่นเคลื่อนที่ได้ทันที

$$\psi(z,t) = \psi(0,t') = Ae^{-(\frac{1}{2})(t')^2/\tau^2}$$

$$= Ae^{-(\frac{1}{2}\tau^2)[t - (z/v)^2]} \qquad (๖.๑๑๙)$$

สมการคลื่นแบบฉบับ (classical wave equation) สำหรับคลื่น nondispersive

ชุดคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกมีการขจัดเป็น

$$\psi(z,t) = A\cos[\omega t - k(\omega)z] \qquad (๖.๑๒๐)$$

สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = v_\phi^2(\omega)\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๖.๔๒๔)$$

สำหรับกรณีพิเศษซึ่งคลื่นเป็น nondispersive มี $v_\phi = v$ เป็นความเร็วคงที่ไม่ขึ้นกับ ω ทุกพจน์ในการรวมกันของคลื่นเคลื่อนที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์เดียวกัน คือ

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = v_\phi^2 \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๖.๔๒๕)$$

เมื่อ $\psi(z,t)$ ใช้แทนแต่ละคลื่นเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกในการรวมกัน สมการอนุพันธ์ย่อยนี้เรียกว่า สมการคลื่นแบบฉบับ สำหรับคลื่น nondispersive หรือเรียกอย่างง่ายว่า สมการคลื่นแบบฉบับ

แบบฝึกหัดบทที่ ๖

6.1 Prove That the product of the phase and group velocity ω/k_x, $\partial\omega/\partial k_x$ of the wave is c^2, where c is the velocity of light.

6.2 Show that the equation for group velocity, $v_g = d\omega/dk$, can be written as $v_g = c - \lambda(dc/d\lambda)$. Note that it is evident at once from this form of the equation that the group speed is less than the phase speed if longer waves travel more rapidly than shorter waves, and that the group speed is greater than the phase speed if the shorter waves travel more rapidly than the longer waves.

6.3 Show that the sum of two traveling harmonic waves $A_1\cos(\omega t - kz + \phi_1)$ and $A_2\cos(\omega t - kz + \phi_2)$ traveling in the +z direction and having the same frequency is itself a harmonic traveling wave of the same kind. That is, the sum can be written in the form $A\cos(\omega t - kz + \phi)$. Find out how A and ϕ are related to A_1, A_2, ϕ_1, and ϕ_2. (Hint: the use of complex numbers or rotating vector diagram helps immensely.)

6.4 Show that for light of index $n(\lambda)$,

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\phi} - \frac{1}{c}\lambda\frac{dn(\lambda)}{d\lambda},$$

where λ is the vacuum wavelength of the light.

6.5 Show that for a system of coupled pendulums the group velocity is zero at both the lower and upper cutoff frequencies (minimum and maximum frequencies foe sinusoidal waves). What is the phase velocity at these two frequencies? Make a sketch of the dispersion relation, i.e., a plot of ω versus k.

Show how one can read at a glance the group and the phase velocities from such a diagram.

6.6 Derive an expression for the group velocity of traveling waves on a beaded string. Plot (roughly) the dispersion relation for the beaded string from $k = 0$ to the maximum value. Plot (roughly) the group velocity versus k and the phase velocity versus k from $k = o$ to k_{max}.

6.7 Fourier analysis of exponential function. Consider a function $f(t)$ that is zero for negative t and equals $\exp(-t/2\tau)$ for $t \geq 0$. Find its Fourier coefficients $A(\omega)$ and $B(\omega)$ in the continuous superposition

$$f(t) = \int_0^\infty \left[A(\omega) \sin\omega t + B(\omega) \cos\omega t\right] d\omega.$$

6-8 Suppose $f(t)$ is zero except in the interval from $t = t_1$ to $t = t_2$ of duration $\Delta t = t_2 - t_1$ and centered at $t_o = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Suppose that in this interval $f(t)$ makes exactly one sinusoidal oscillation at angular frequency ω_o, starting and ending with value zero at t_1 and t_2 (i.e., $\Delta t = T_o = 2\pi/\omega_o$). Find the Fourier coefficients $A(\omega)$ and $B(\omega)$ in the continuous superposition

$$f(t) = \int_0^\infty \left[A(\omega) \sin\omega(t - t_o) + B(\omega) \cos\omega(t - t_o)\right] d\omega.$$

Make a rough plot the Fourier coefficients versus ω and a sketch of $f(t)$.

6.9 Fourier analysis of a single square pulse in time. Consider a square pulse $\psi(t)$ which is zero for all t not in the interval t_1 to t_2. Within that interval, $\psi(t)$ has the constant value $1/\Delta t$, where $\Delta t = t_2 - t_1$. Let t_o be the time at the center of the interval. Show that $\psi(t)$ can be Fourier-analyzed as follows:

$$\psi(t) = \int_0^\infty A(\omega) \sin\omega(t - t_o)\, d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \cos\omega(t - t_o) d\omega,$$

with the solution

$$A(\omega) = 0, \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta t\omega}{\frac{1}{2}\Delta t\omega}$$

Sketch $B(\omega)$ versus ω. In the limit where Δt goes to zero, $\psi(t)$ is called a "delta function" of time, written $\rho(t - t_o)$. What is $B(\omega)$ for this delta function of time?

6.10 The pulse of length t given by $\psi = A \cos\omega_o t$.
Show that the frequency representation

$$\psi(\omega) = a\cos\omega_1 t + a\cos(\omega_1 + \delta\omega)t \ldots + a\cos\left[\omega_1 + (n - 1)(\delta\omega)\right]t$$

is centered on the average frequency ω_o and that the range of frequencies making significant contributions to the pulse satisfy the criterion

$$\Delta\omega\ \Delta t = 2\pi$$

Repeat this process for a pulse of length Δx with $\psi = A \cos k_o x$ to show that in k space the pulse is centered at k_o with the significant range of wave numbers Δk satisfying the criterion $\Delta x\ \Delta k = 2\pi$.

6.11 Nondispersive waves. Show that any differentiable function $f(t')$ of $t' = t - (z/v)$ satisfies the classical wave equation, i.e., show

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t')}{\partial z^2}.$$

Show also that any differentiable function $g(t'')$ of $t'' = t + (z/v)$ satisfies the classical wave equation. Make up an example of a function $f(t')$ and show explicitly that it satisfies the classical wave equation.

6.12 Amplitude demodulation and nonlinearity. Suppose that your receiving antenna picks up an amplitude-modulated carrier wave with voltage given by

$$V = V_o(\cos\omega_o t)(1 + a_m \cos\omega_{mod} t).$$

How can you recover the modulation voltage, $a_m \cos\omega_{mod} t$? Assume that you have at your disposal whatever bandpass filters you wish, and that you also have at your disposal a nonlinear amplifier of the type such that

$$V_{out} = A_1 V_{in} + A_2 V_{in}^2 .$$

(Hint: Express the amplitude-modulated carrier wave as a superposition, pass it through the nonlinear amplifier, and then filter it.)

6.13
Frequency modulation (FM). Afrequency-modulated voltage can be written in the form (for example)

$$V = V_o \cos\left[\omega_o(1 + a_m \cos\omega_{mod} t)t\right] = V_o \cos\omega t,$$

with

$$\omega = \omega_o + \omega_o a_m \cos\omega_{mod} t.$$

One way of producing a frequency-modulated carrier wave to transmit music is by use of a "capacitative microphone." The sound waves move a diaphragm which moves one plate of a capacitor. The capacitor then has capacitance (for example)

$$C = C_o(1 + c_m \cos\omega_{mod} t).$$

Suppose this capacitance is part of an LC circuit with natural oscillation frequency $\omega = \sqrt{1/LC}$. The voltage across the capacitor is, for example, $V = V_o \cos\omega t$. Show that for c_m small in magnitude compared with unity, one obtains a frequency-modulated voltage with amplitude a_m proportional to c_m. Find the proportionality constant between c_m and a_m.