# บทที่ 3
# การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ

ในบทที่ ๑ และ ๒ เราได้ศึกษาระบบต่างๆที่เป็นการเคลื่อนที่อย่างอิสระ ตั้งแต่ ๑,๒ ดีกรีออฟฟรีดอมจนถึง N ดีกรีออฟฟรีดอม และในตอนท้ายบทเราได้กล่าวถึงคลื่นนิ่งซึ่งคือ normal mode ในระบบปิดมาแล้ว ในบทนี้เราจะพิจารณาระบบเหล่านั้นอีกครั้งหนึ่งแต่เป็นการศึกษาระบบที่มีการเคลื่อนที่ด้วยแรงภายนอกกระทำต่ออนุภาคเคลื่อนที่ในบางทิศทางโดยไม่ทำให้ลักษณะทั่วไปเปลี่ยนแปลง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกด้วยแรงภายนอก และศึกษาการตอบสนองของระบบเป็นฟังก์ชันของความถี่ด้วย

## ๓.๑ Damped Driven One-dimensional Harmonic Oscillator

เราได้เคยพิจารณากรณีของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายมาแล้ว พลังงานทั้งหมดของระบบมีค่าคงที่เสมอและการขจัดแปรตามเส้นโค้งโคไซน์ซึ่งปรากฏเป็นเช่นนี้ตลอดเวลา แต่ในทางปฏิบัติพลังงานบางครั้งมีการสูญเสียไปบ้างโดยการต้านหรือวิธีความหนืด ตัวอย่างเช่น ลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งอย่างอิสระของลูกตุ้มจะลดลงตลอดเวลานั่นก็คือพลังงานได้สูญเสียไป การเกิดความต้านทานของการเคลื่อนที่หมายความว่ามีแรงชนิดอื่นกระทำต่อระบบซึ่งมีค่าแปรตามความเร็วเหมือนกับแรงดึงจากสปริงที่พยายามกระทำในทิศตรงข้ามกับความเร่ง เรียกแรงนี้ว่าแรงเสียดทานมีค่าเป็น $-M\Gamma\dot{x}(t)$ เมื่อ $\Gamma$ คือค่าคงที่เราเรียกว่า damping constant per unit mass หรือเรียกง่ายๆว่า damping constant พิจารณาจุดมวล M ออสซิลเลตในทิศทาง x การขจัดจากสมดุลย์ของมันคือ $x(t)$ โดยปกติมวลจะมีแรงคืนกลับ $-M\omega_o^2x(t)$ อันเนื่องมาจากสปริงของค่าคงที่สปริง $K = M\omega_o^2$ นั่นคือถ้าไม่มีแรงภายนอกอย่างอื่นมวลจะออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกตลอดไปเรื่อยๆด้วยความถี่เชิงมุม $\omega_o$ เมื่อไม่พิจารณามีแรงเสียดทาน เนื่องจากมีแรงเสียดทานและถ้าหากเราให้แรงภายนอกกระทำต่อระบบเป็นแบบฮาร์โมนิก $F(t)$ ดังนั้นจากกฎข้อที่ ๒ ของนิวตันจะได้สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_o^2x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t) \qquad (๓.๑)$$

สมการนี้เป็น inhomogeneous second-order linear differential equation

ในขั้นแรกเราจะพิจารณากรณีพิเศษเมื่อยังไม่มีแรงภายนอกเรียกว่า **Transient decay of free oscillations** จากสมการของการเคลื่อนที่ในสมการ (๓.๑) เปลี่ยนเป็น

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = 0 \qquad (๓.๒)$$

โดยกำหนดให้มีคำตอบเป็น $x_1(t)$ อยู่ในแบบ

$$x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})t/\tau}\cos(\omega_1 t+\theta) \qquad (๓.๓)$$

เมื่อ $\tau, \omega_1$ และ $\theta$ ต่างเป็นค่าที่ยังไม่ทราบ แทนค่า $x_1(t)$ ลงในสมการ (๓.๒) เราพบว่า สมการ (๓.๓) เป็นคำตอบของสมการ (๓.๒) อย่างแท้จริงสำหรับค่าใดๆของค่าคงที่เฟส ถ้าเราเลือกให้

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \qquad (๓.๔)$$

และ

$$\omega_1^2 = \omega_o^2 - \tfrac{1}{4}\Gamma^2 \qquad (๓.๕)$$

คำตอบทั่วไปของสมการ (๓.๒) เป็นการรวมกันได้ของสองคำตอบที่ไม่ขึ้นแก่กันโดยตรงด้วยค่าคงที่ใดๆสองค่าซึ่งอาจจะเลือกให้สอดคล้องกับสภาวะการขจัดเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นคือ $x_1(0)$ และ $\dot{x}_1(0)$ สองคำตอบที่ไม่ขึ้นแก่กันสามารถหาได้โดยกำหนดให้มุมเฟส $\theta$ เท่ากับศูนย์หรือเท่ากับ $-\frac{1}{2}\pi$ ดังนั้นคำตอบทั่วไปสามารถเขียนเป็นแบบ

$$x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\,(A_1\sin\omega_1 t + B_1\cos\omega_1 t) \qquad (๓.๖)$$

ค่าคงที่ $A_1$ และ $B_1$ เราสามารถหาได้ง่ายและมีค่ากำหนดเป็น $B_1 = x_1(0)$ และ $\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)$ ดังนั้นสมการ (๓.๖) กลายเป็น

$$(๓.๗) \qquad x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\left(x_1(0)\cos\omega_1 t + \left[\dot{x}_1(0)+\tfrac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right)$$

ถ้า $\frac{1}{2}\Gamma$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ $\omega_o$ การออสซิลเลตจะเป็นแบบที่เรียกว่า **weakly damped** เมื่อ $\frac{1}{2}\Gamma$ มีค่าเท่ากับ $\omega_o$ การเคลื่อนที่เป็นแบบที่เรียกว่า **critically damped** ในกรณีเช่นนี้

สมการ(๓.๕) ให้ค่า $\omega_1$ เป็นศูนย์ และคำตอบสมการ(๓.๗)เราแทนค่า $\cos\omega_1 t$ ด้วย ๑ และ $(1/\omega_1)\sin\omega_1 t$ เป็น $t$ เพราะว่าลิมิตขณะที่ $\omega_1$ เข้าสู่ศูนย์ของ $(1/\omega_1)\sin\omega_1 t$ กลายเป็น $t$ กรณีนี้ระบบไม่มีการออสซิลเลตเพียงแต่อัมปลิจูดมีค่าลดลงสู่ศูนย์ เราสามารถเห็นได้จากคำตอบ $x_1(t)$ ไม่ปรากฏมีพจน์ของความถี่อยู่เลย เมื่อ $\frac{1}{2}\Gamma$ มีค่ามากกว่า $\omega_o$ การออสซิลเลตเป็นแบบที่เรียกว่า over damped ในกรณีนี้สมการ(๓.๕) ให้ค่า $\omega_1^2$ เป็นค่าลบหมายความว่า $\omega_1$ เป็นค่าจินตภาพ กำหนดด้วย

$$\omega_1 = \pm i|\omega_1| , \qquad |\omega_1| = \tfrac{1}{2}\Gamma^2 - \omega_o^2 \qquad (๓.๘)$$

ในที่นี้ $i$ คือรากกำลังสองของ $-1$ คำตอบสมการ(๓.๗) ยังคงใช้ได้และสามารถเขียนเป็น

$$x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\{x_1(0)\cosh|\omega_1|t + |\dot{x}_1(0) + \tfrac{1}{2}\Gamma x_1(0)|\frac{\sinh|\omega_1|t}{\omega_1}\} \qquad (๓.๙)$$

ระบบนี้ไม่มีการออสซิลเลตและอัมปลิจูดมีค่าลดลงเร็วกว่ากรณี critically damped จากทั้งสามกรณีจะเห็นได้ว่า กรณีเมื่อ $\frac{1}{2}\Gamma$ มีค่าน้อยกว่า $\omega_o$ ซึ่งการออสซิลเลตเรียกว่า under damped เป็นกรณีน่าสนใจมากกว่า เพราะเป็นกรณีที่มีการออสซิลเลตเกือบสม่ำเสมอ และเราอาจจะพิจารณาพจน์ ร่วมเอกซ์โปเนนเชียล $e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}$ มีค่าคงที่ระหว่างหนึ่งรอบใดๆ ของการออสซิลเลต ดังนั้นความเร็วของอนุภาคถูกกำหนดด้วยการประมาณของค่าอนุพันธ์กับเวลาของสมการ(๓.๖) โดยถือว่า $e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}$ มีค่าคงที่ จึงเป็นการง่ายที่จะพิสูจน์ว่าพลังงานรวม (พลังงานจลน์บวกพลังงานศักย์) เป็นค่าคงที่ในระหว่างหนึ่งรอบใดๆ แต่มีค่าลดลงอย่างเอกซ์-โปเนนเชียลตลอดเวลาระหว่างหลายๆรอบ

$$E(t) = \tfrac{1}{2}M\dot{x}_1^2(t) + \tfrac{1}{2}M\omega_o^2 x_1^2(t)$$

$$= E_o e^{-\Gamma t} = E_o e^{-t/\tau} \qquad (๓.๑๐)$$

เมื่อ

$$E_o = \tfrac{1}{2}M(\omega_1^2 + \omega_o^2)(\tfrac{1}{2}A_1^2 + \tfrac{1}{2}B_1^2) \qquad (๓.๑๑)$$

ต่อไปให้กลับมาที่กรณีอนุภาคถูกกระทำด้วยแรงเคลื่อนภายนอกที่ไม่เป็นศูนย์ของกรณี under damped

**Steady-state oscillation under harmonic driving force**

กำหนดให้แรงเคลื่อนภายนอกมีลักษณะเป็นส่วนย่อยของอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$F(t) = F_0 \cos\omega t \qquad (๓.๑๒)$$

ดังนั้นเราต้องพิจารณาสมการที่เป็น inhomogeneous มีแรงภายนอกเป็นส่วนหนึ่งของฮาร์โมนิก เขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2 x(t) = F_0 \cos\omega t \qquad (๓.๑๓)$$

คำตอบของสมการนี้เรียกว่า steady-state solution ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคหลังจากมีแรงภายนอกกระทำต่อมันเป็นเวลานานกว่าเวลาการลดลง $\tau$ ดังนั้น transient oscillations (ซึ่งหมายถึงพฤติกรรมการออสซิลเลตของอนุภาคระหว่างช่วงเวลาการลดลงเฉลี่ยต้นๆ หลังจากมีแรงเคลื่อนภายนอกกระทำต่อมัน จะลดลงจนหายไปเมื่อห่างจากศูนย์ หลังจากนั้นการออสซิลเลตของอนุภาคจะเข้าสู่ ฮาร์โมนิกที่ความถี่ $\omega$ ความถี่เดียวกับแรงเคลื่อนภายนอก คำตอบของสมการ (๓.๑๓) นี้มีแอมปลิจูดแปรตามแอมปลิจูด $F_0$ ของแรงภายนอกและมีค่าคงที่เฟสซึ่งสัมพันธ์จำกัดกับค่าคงที่เฟสของแรงเคลื่อนภายนอก

**Absorptive and elastic amplitude**

แทนที่เราจะใช้พจน์ของแอมปลิจูดและค่าคงที่เฟสอธิบายการออสซิลเลตของระบบ เราสามารถอธิบายได้ด้วยพจน์ของสองแอมปลิจูด A และ B โดยกำหนดส่วนหนึ่งของการออสซิลเลตเป็น $A\sin\omega t$ ที่มีค่ามุมเฟสต่างกับแรงเคลื่อน $F_0\cos\omega t$ อยู่ ๙๐ องศา และอีกส่วนหนึ่งเป็น $B\cos\omega t$ ซึ่งมีค่ามุมเฟสตรงกับแรงเคลื่อน ดังนั้น steady-state solution เขียนเป็น

$$x_s(t) = A \sin\omega t + B \cos\omega t \qquad (๓.๑๔)$$

ด้วยการเลือก A และ B ให้เหมาะสม แทนค่า $x_s(t)$ ลงในสมการ (๓.๑๓) สามารถหาค่า A และ B ได้คือ

$$A = \frac{F_o}{M}\frac{\Gamma\omega}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2\right]} \equiv A_{ab} \qquad (ก.๓๔)$$

$$B = \frac{F_o}{M}\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2\right]} \equiv A_{el} \qquad (ก.๓๕)$$

ค่าคงที่ $A_{ab}$ เรียกว่า **absorptive amplitude** และ $A_{el}$ เรียกว่า **elastic amplitude** (บางที **elastic amplitude** เรียกแทนเป็น **dispersive amplitude** ) การที่เราเรียกชื่อค่าคงที่เป็นชื่อเหล่านี้ก็เพราะว่า การดูดกลืนกำลังเฉลี่ยตามเวลาที่ระบบได้รับเกือบทั้งหมดเกิดจากพจน์ $A_{ab}\sin\omega t$ ส่วนพจน์ $A_{el}\cos\omega t$ ให้การดูดกลืนกำลังขณะใดๆ $P(t)$ แต่ถ้าคิดเฉลี่ยตลอดหนึ่งรอบของการออสซิลเลต steady-state จะกลายเป็นศูนย์ ทั้งนี้เนื่องจากความจริงที่ว่า กำลังขณะใดๆ $P(t)$ คือแรง $F_o\cos\omega t$ คูณด้วยความเร็ว $\dot{x}(t)$ ความเร็วขณะใดๆ มีส่วนหนึ่งที่เฟสตรงกับแรงและส่วนหนึ่งมีเฟสต่างกับแรง ๙๐ องศา ส่วนของความเร็วที่มีเฟสตรงกับแรงเท่านั้นให้กำลังเฉลี่ยตามเวลา ส่วนของความเร็วที่มีเฟสตรงกันนี้มาจากส่วนของการขจัดที่มีเฟสต่างกันคือ $A_{ab}\sin\omega t$ เราจะเห็นได้จากความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$F(t) = F_o\cos\omega t$$

$$x_s(t) = A_{ab}\sin\omega t + A_{el}\cos\omega t$$

$$\dot{x}_s(t) = \omega A_{ab}\cos\omega t - \omega A_{el}\sin\omega t$$

ดังนั้น กำลังขณะใดๆที่ steady-state ให้แก่ระบบเป็น

$$P(t) = F(t)\dot{x}_s(t) = F_o\cos\omega t\left[\omega A_{ab}\cos\omega t - \omega A_{el}\sin\omega t\right] \quad (ก.๓๖)$$

กำหนดการเฉลี่ยตามเวลาตลอดหนึ่งรอบด้วยเครื่องหมาย < > brakets เราหาได้ว่า

$$P = F_o\omega A_{ab}\langle \cos^2\omega t \rangle - F_o\omega A_{el}\langle \cos\omega t \sin\omega t \rangle$$

แต่

$$< \cos^2\omega t > \equiv \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \cos^2\omega t \, dt = \tfrac{1}{2} \qquad (๓.๑๘)$$

เมื่อ T คือคาบการออสซิลเลต ทำนองเดียวกัน

$$< \cos\omega t \sin\omega t > = \tfrac{1}{2}< \sin 2\omega t > = 0 \qquad (๓.๑๙)$$

ดังนั้นเราจะได้กำลังเฉลี่ยตามเวลาตลอดหนึ่งรอบให้แก่ระบบที่ steady-state เป็น

$$\bar{P} = \tfrac{1}{2}F_o\omega A_{ab} \qquad (๓.๒๐)$$

ในสมการ (๓.๒๐) จะเห็นได้ว่ากำลังเฉลี่ยตามเวลาที่ให้แก่ระบบแปรตามอัมปลิจูด $A_{ab}$ เท่านั้น ที่ steady-state กำลังเฉลี่ยตามเวลาที่ให้แก่ระบบต้องเท่ากับกำลังเฉลี่ยตามเวลาที่เกิดจากความเสียดทาน แรงเสียดทานขณะใดๆคือ $-M\Gamma\dot{x}(t)$ กำลังเสียดทานขณะใดๆคือแรงเสียดทานคูณด้วยความเร็ว ดังนั้นกำลังเฉลี่ยตามเวลาที่สูญเสียไปเนื่องจากความเสียดทานกำหนดด้วย

$$\begin{aligned} P_{fr} &= M\Gamma< \dot{x}_s^2 > \\ &= \tfrac{1}{2}M\Gamma\omega^2\left[A_{ab}^2 + A_{el}^2\right] \qquad (๓.๒๑) \end{aligned}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงว่าความจริงสมการ (๓.๒๑) มีค่าเท่ากับ กำลังเฉลี่ยตามเวลาให้แก่ระบบ $\bar{P}$ ในสมการ (๓.๒๐) ที่ steady-state พลังงานสะสมอยู่ในอนุภาคไม่เป็นค่าคงที่อย่างแท้จริง เพราะว่ากำลังขณะใดๆที่ให้แก่ระบบ $F(t)\dot{x}_s(t)$ ตามสมการ (๓.๑๗) ไม่เท่ากับกำลังที่สูญเสียไปขณะใดๆ $M\Gamma\dot{x}_s^2(t)$ เพียงแต่มันจะมีค่าเท่ากันเมื่อเฉลี่ยตลอดหนึ่งรอบของทั้งกำลังที่ให้แก่ระบบและกำลังที่สูญเสียไปเนื่องจากความเสียดทาน เราจึงสนใจเฉพาะค่าเฉลี่ยของพลังงานสะสมเท่านั้น สำหรับ steady-state oscillation พลังงานเฉลี่ยสะสม E คือ

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}M< \dot{x}_s^2 > + \tfrac{1}{2}M\omega_o^2< x_s^2 > \\ &= \tfrac{1}{2}M(\omega^2 + \omega_o^2)(\tfrac{1}{2}A_{ab}^2 + \tfrac{1}{2}A_{el}^2) \qquad (๓.๒๒) \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าพจน์ที่มี $\omega^2$ คือพลังงานจลน์เฉลี่ยและพจน์ที่มี $\omega_o^2$ คือพลังงานศักย์เฉลี่ย พลังงานทั้งสองจะเท่ากันถ้าเราให้ $\omega = \omega_o$ (อาจจะกล่าวได้ใหม่ว่า สำหรับกรณี weakly damped การสั่นอย่างอิสระพลังงานจลน์เฉลี่ยและพลังงานศักย์เฉลี่ยมีค่าเท่ากัน) หรือเราอาจจะเข้าใจได้อย่างดีว่า ถ้า $\omega$ มีค่ามากเมื่อเทียบกับ $\omega_o$ ความเร็วของมวลมีทิศกลับคืนก่อนที่มันจะมีการขจัดมากหรือก่อนที่มันจะมีพลังงานศักย์สะสมในสปริงมาก ในทางตรงกันข้ามถ้า $\omega$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ $\omega_o$ ความเร็วของมวลไม่มากนักและพลังงานศักย์เฉลี่ยมีค่ามากกว่า

<u>อภินาท</u> (Resonance) ในขั้นต่อไปเรามาพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปของอนุภาคที่ออสซิลเลต โดยให้ความถี่ของแรงเคลื่อนเปลี่ยนไปทีละน้อยจนถึงความถี่หนึ่งมีช่วงเวลานานพอดีกับเวลาการลดลงเฉลี่ย $\tau$ และกำหนดความถี่ขณะเวลานั้นคงที่เสมอจะทำให้เกิด steady-state ได้อย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นกำลังเฉลี่ยตามเวลาที่ให้แก่ระบบจะเป็น

$$P = P_o \frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๓.๒๓)$$

เมื่อ $P_o$ คือค่าของ $P$ ที่ขณะเกิดอภินาทที่ $\omega = \omega_o$ ค่ามากที่สุดของ $P$ เกิดที่อภินาท จุดกำลังครึ่งหนึ่ง (half-power point ) กำหนดเป็นค่าของ $\omega$ สำหรับ $P$ เป็นครึ่งหนึ่งของค่ามากที่สุดซึ่งค่าจุดกำลังครึ่งหนึ่งเหล่านั้นกำหนดด้วย

$$\omega^2 = \omega_o^2 \pm \Gamma\omega \qquad (๓.๒๔)$$

ซึ่งเท่ากับ

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 + \tfrac{1}{4}\Gamma^2} \pm \tfrac{1}{2}\Gamma \qquad (๓.๒๕)$$

(ให้สังเกตว่าสมการ(๓.๒๔) แบ่งออกได้เป็นสองสมการ quadratic ใน $\omega$ แต่ละสมการมีคำตอบที่เป็นค่าบวกและค่าลบอยู่ด้วยกัน สำหรับสองคำตอบค่าบวกให้คำตอบตามสมการ(๓.๒๕)) ช่วงความถี่ระหว่างสองจุดกำลังครึ่งหนึ่งเรียกว่า full-frequency width at half-maximum power หรือเรียกเป็น resonance full width เขียนเป็น $(\Delta\omega)_{fwhm}$ หรือเขียนย่อเป็น $\Delta\omega$ จากสมการ(๓.๒๕)

$$(\Delta\omega)_{fwhm} = \Gamma \qquad (๓.๒๖)$$

เราเคยหาได้ว่า(ตามสมการ(๓.๔)) การออสซิลเลตอย่างอิสระมี mean decay lifetime $\tau$ กำหนดด้วย $\tau = 1/\Gamma$ ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง resonance full-width สำหรับการออสซิลเลตด้วยแรงและเวลาการลดลงเฉลี่ยสำหรับการออสซิลเลตอย่างอิสระ คือ

$$(\Delta\omega)_{res}\,\tau_{free} = 1 \qquad (๓.๒๗)$$

เขียนเป็นคำพูดได้ว่า ช่วงกว้างความถี่ของเส้นโค้งอภินาทสำหรับการออสซิลเลตเป็นส่วนกลับของเวลาการลดลงสำหรับการออสซิลเลตอย่างอิสระ ผลอันนี้เป็นความจริงเสมอไม่ว่าจะเป็นระบบของหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอมหรือหลายๆดีกรีออฟฟรีดอม ในกรณีของการออสซิลเลตอย่างอิสระ $\Gamma = 0$ การอภินาทเกิดที่ความถี่ของ normal modes $\omega_o$ ส่วนในกรณีของ damped free oscillation ความถี่อภินาทเกิดที่ $\omega_1$ เพราะว่าความถี่ถูกดึงจาก $\omega_o$ ลดลงเหลือ $\omega_1$ เนื่องจากมี damping factor $e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}$ ในกรณีของการออสซิลเลตด้วยแรงอัมปลิจูดมีค่าคงที่และความถี่อภินาทมีค่าเท่ากับความถี่ของการออสซิลเลตอย่างอิสระ $\omega_o$ อีกครั้งถ้าไม่มี damping

สมการ(๓.๒๗) มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งสำหรับการทดลอง เพราะว่าเราจะสังเกตเห็นอาการอภินาทของระบบได้ง่ายกว่าการสังเกตเวลาของอาการลดลงอย่างอิสระ ในกรณีเช่นนี้เราสามารถหาค่าเวลาการลดลงเฉลี่ยสำหรับการออสซิลเลตโดยศึกษาจากอาการอภินาทเพื่อหาค่า $\Delta\omega$ ดังนั้นเวลาการลดลงเราหาได้จากสมการ(๓.๒๗)

<u>Frequency dependence of elastic amplitude</u>

พจน์ $A_{el}\cos\omega t$ ในสภาวะการออสซิลเลตไม่เปลี่ยนแปลงเป็นส่วนหนึ่งของ $x_s(t)$ ซึ่งมีมุมเฟสตรงกับแรงเคลื่อน $F_o\cos\omega t$ ในการอธิบายอัมปลิจูดครั้งแรกเราได้กล่าวถึงพจน์ elastic ไม่มีส่วนทำให้เกิดการดูดกลืนพลังงานเฉลี่ยตามเวลาของระบบ และยิ่งกว่านั้นที่ความถี่อภินาท $\omega = \omega_o$ , $A_{el}$ มีค่าเป็นศูนย์ แต่นั้นไม่ได้หมายความว่า $A_{el}$ ไม่มีความสำคัญแต่อย่างไร ตรงกันข้ามที่ความถี่ห่างไกลจากอภินาทมากๆพจน์ elastic มีความหมายได้เช่นกัน ดังจะเห็นได้จาก

$$A_{el} = \frac{F_o}{M}\frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \qquad (๓.๒๘)$$

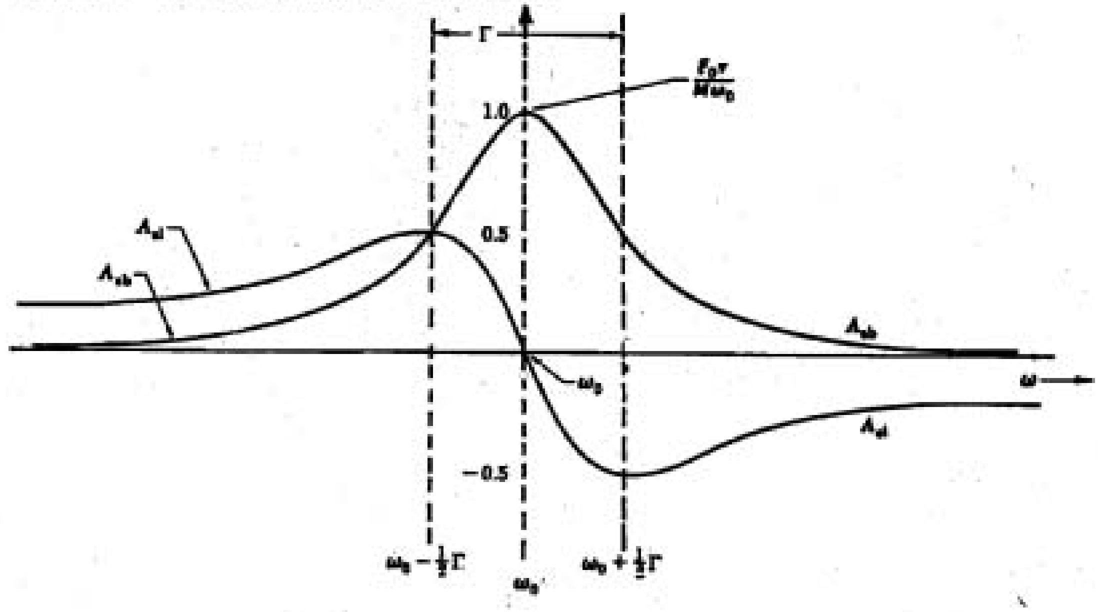
อัตราส่วนระหว่าง **elastic** ต่อ **absorptive amplitude** คือ

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\Gamma\omega} \qquad (๓.๒๙)$$

สำหรับ $\omega$ มีค่าน้อยกว่า $\omega_o$ พจน์ $A_{el}/A_{ab}$ เป็นค่าบวกและสามารถจะทำให้มีค่ามากเท่าไรก็ได้ โดยเลือกให้ $\omega$ มีค่าเล็กๆให้เหมาะสม สำหรับ $\omega$ มีค่ามากกว่า $\omega_o$ พจน์ $A_{el}/A_{ab}$ เป็นค่าลบและสามารถทำให้มีขนาดมากเท่าไรก็ได้ โดยเลือกให้ $\omega$ เป็นค่าใหญ่ที่เหมาะสม จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า $\Gamma\omega << | \omega_o^2 - \omega^2 |$ และอาจจะละทิ้งส่วน $A_{ab}\sin\omega t$ จาก $x_s(t)$ โดยคิดว่ากำลังดูดกลืนเฉลี่ยที่ความถี่ห่างไกลจากอภินาทมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับกำลังดูดกลืนเฉลี่ยที่อภินาท ดังนั้นที่ห่างไกลจากอภินาท **steady-state solution** ถูกกำหนดด้วย $A_{el}\cos\omega t$ และ $A_{el}$ กำหนดด้วยสมการ(๓.๒๘) แต่ละทิ้งพจน์ $\omega^2\Gamma^2$

$$x_s(t) = A_{el}\cos\omega t = \frac{F_o\cos\omega t}{M(\omega_o^2 - \omega^2)} \qquad (๓.๓๐)$$

ให้สังเกตว่า **damping constant** $\Gamma$ ไม่ปรากฏในสมการ(๓.๓๐) นั่นคือสมการ(๓.๓๐)ให้คำตอบ **steady-state** อย่างแท้จริงแก่สมการของการเคลื่อนที่(๓.๑๓) ถ้าเราให้ $\Gamma = 0$ ในสมการนั้น ในรูป ๓.๔ ได้แสดงความสัมพันธ์ของ **absorptive** และ **elastic amplitude** ที่ความถี่อภินาทและบริเวณข้างเคียง



**Transient forced oscillations**

โดยการกำหนดสภาวะเริ่มต้นใดๆ $x(0)$ และ $\dot{x}(0)$ เราสามารถหาคำตอบของสมการ(๓.๑๔) ได้ซึ่งเป็นคำตอบทั่วไปที่เกิดจากการรวมกันได้ของคำตอบ steady-state $x_s(t)$ และคำตอบทั่วไป $x_1(t)$ ของสมการของการเคลื่อนที่แบบ homogeneous

$$x(t) = x_s(t) + x_1(t)$$

$$= A_{ab}\sin\omega t + A_{el}\cos\omega t + e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\left[A_1\sin\omega_1 t + B_1\cos\omega_1 t\right] \qquad (๓.๓๑)$$

เมื่อ $A_1$ และ $B_1$ ต่างก็เป็นค่าคงที่ใดๆที่สามารถเลือกให้สอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้นของการขจัดและความเร็ว ลองพิจารณาคำตอบทั่วไปจากสภาวะเริ่มต้นโดยการกำหนดให้สภาวะเริ่มต้นอนุภาคไม่ได้ถูกรบกวนแต่อย่างไร หมายความว่าเมื่อเวลา $t = 0$ อนุภาคหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุลย์ดังนั้นเราเลือก $B_1 = -A_{el}$ ซึ่งให้สภาวะเริ่มต้นเป็น $x(0) = 0$ ต่อไปเราเลือก $A_1$ เพื่อให้ความเร็วเริ่มต้น $\dot{x}(0)$ มีค่าเกือบเป็นศูนย์ เราเพียงสนใจเฉพาะกรณี weakly damped ดังนั้นเราสามารถให้ $e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}$ มีค่าเกือบคงที่ในระหว่างหนึ่งรอบของการออสซิลเลต จากการประมาณเช่นนี้ทำให้สามารถแสดงได้ว่า $\dot{x}(0) = \omega A_{ab} + \omega_1 A_1$ เมื่อความถี่ของแรงเคลื่อนไม่ห่างไกลจากอภินาทเท่าไรนัก เราสามารถเลือกให้ $A_1 = -A_{ab}$ หรือ

$$\dot{x}(0) = (\omega - \omega_1)A_{ab} \qquad (๓.๓๒)$$

ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์สำหรับ $\omega = \omega_1$ หรือ $A_{ab} = 0$ (หมายถึง $\Gamma = 0$ ) เมื่อเลือกดังนี้แล้วเราได้ $x(0) = 0$ และ $\dot{x}(0) = 0$ ดังนั้นสมการ(๓.๓๑)กลายเป็น

$$x(t) = A_{ab}\left[\sin\omega t - e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\sin\omega_1 t\right] + A_{el}\left[\cos\omega t - e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\cos\omega_1 t\right] \quad (๓.๓๓)$$

มี บางกรณีพิเศษที่น่าสนใจดังนี้

กรณีที่ ๑ ความถี่ของแรงเคลื่อนเท่ากับความถี่การออสซิลเลตตามธรรมชาติ

กำหนดให้ $\omega = \omega_1$ ในสมการ(๓.๓๓) เราได้

$$x(t) = \{1 - e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\}(A_{ab}\sin\omega t + A_{el}\cos\omega t) = \{1 - e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\}x_s(t) \quad (๓.๓๔)$$

เมื่อ $x_s(t)$ เป็นคำตอบ steady-state ดังนั้นถ้าเราให้ความถี่ของแรงเคลื่อนเท่ากับความถี่ การออสซิลเลตตามธรรมชาติ $\omega_1$ เราได้คำตอบเป็นแบบ steady-state ตั้งแต่แรกเริ่มโดยมีอัมปลิจูดเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจากศูนย์จนถึงค่า steady-state สุดท้ายของมัน

กรณีที่ ๒ ไม่มี damping

กำหนด $\Gamma = 0$ ทำให้ $A_{ab} = 0$ และ

$$A_{el} = \frac{F_o/M}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

ดังนั้นสมการ (๓.๓๓) ให้

$$x(t) = \frac{F_o}{M}\frac{\{\cos\omega t - \cos\omega_o t\}}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} \quad (๓.๓๕)$$

สมการ (๓.๓๕) นี้เข้าทำนองเดียวกับการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่เราได้ศึกษาลักษณะอาการของมันมาแล้วในตอน ๑.๕ หรือกล่าวได้ใหม่ว่า เราสามารถเขียน x(t) เป็นการรวมกันได้โดยตรงของสองคลื่นฮาร์โมนิกอย่างแท้จริงดังในสมการ (๓.๓๕) เหมือนกับการออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิกที่ออสซิลเลตอย่างรวดเร็วด้วยความถี่เฉลี่ย $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_o + \omega)$ และมีอัมปลิจูดเปลี่ยนแปลงอย่างช้าด้วยความถี่ผสม( modulation ) $\omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_o - \omega)$ ดังนั้นคำตอบเปลี่ยนเป็น

$$x(t) = A_{mod}(t)\sin\omega_{av}t \quad (๓.๓๖)$$

เมื่อ

$$A_{mod}(t) = \frac{F_o}{M}\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega_o-\omega)t}{(\omega_o^2 - \omega^2)} \quad (๓.๓๗)$$

อัมปลิจูดของการออสซิลเลตจะสั่นด้วยความถี่ผสม $\frac{1}{2}(\omega_o - \omega)$ ตลอดเวลา พลังงานสะสมภายในจะมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ระหว่างค่าเฉลี่ยของมัน กล่าวคือมีค่าเริ่มต้นจากศูนย์เปลี่ยนแปลงไปจนถึงค่าสูงสุด $E_o$ ตามความสัมพันธ์

$$E(t) = E_o\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_o - \omega)t$$

$$= \tfrac{1}{2}E_o\{1 - \cos(\omega_o - \omega)t\} \quad (๓.๓๘)$$

สมการ(๓.๓๘) มีความหมายว่า พลังงานของการออสซิลเลตมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาด้วยความถี่บีตระหว่างความถี่แรงเคลื่อนและความถี่ของการออสซิลเลตตามธรรมชาติ

สำหรับกรณีพิเศษ $\omega = \omega_o$ จากสมการ (๓.๓๗)

$$A_{mod}(t) = \frac{F_o}{M}\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega_o - \omega)t}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{F_o t}{M\omega_o}$$

กล่าวได้ว่าอัมปลิจูดของการออสซิลเลตมีค่าเพิ่มขึ้นตลอดเวลาสัมพันธ์กับคาบของบีตอย่างไม่สิ้นสุด

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\frac{F_o t}{M\omega_o}\right)\sin\omega_o t \qquad (๓.๓๙)$$

เมื่อเวลาผ่านไปเป็นอนันต์อัมปลิจูดมีค่าเป็นอนันต์เช่นกัน

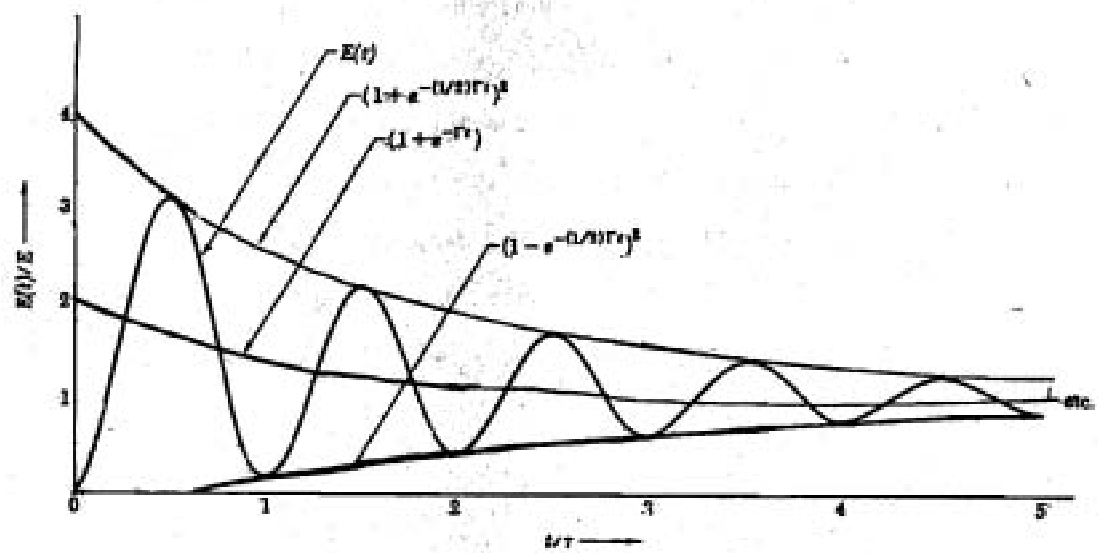
กรณีที่ ๓ **Transient beats**

เป็นกรณีใกล้เคียงทั้งกรณี $\omega = \omega_1$ และ $\Gamma = 0$ โดยรวมทั้งสองกรณีไว้ด้วยกัน สำหรับกรณี weakly damped และ $\omega = \omega_1$ เราอาจพิสูจน์ได้ไม่ยากนัก(แต่ยาวจนน่าเบื่อ)ว่า พลังงานสะสมภายในอย่างประมาณเป็น

$$E(t) = E\,(1 + e^{-\Gamma t} - 2e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\cos(\omega - \omega_1)t) \qquad (๓.๔๐)$$

เมื่อ $E$ เป็นพลังงานที่ steady-state (ถ้าให้ $\omega = \omega_1$ จะหาได้เป็นเช่นเดียวกับกรณีที่ ๑ และถ้าให้ $\Gamma = 0$ เราหาได้เป็นเช่นเดียวกับกรณีที่ ๒ ข้างต้น) ดังนั้นเราเห็นได้ว่า ถ้าเริ่มต้น $t = 0$ ทำให้ $E(0) = 0$ แสดงว่าเวลาเริ่มต้นไม่มีพลังงานสะสมอยู่ในตัวออสซิลเลเตอร์ จึงไม่มีการออสซิลเลตจนกว่าจะมีแรงเคลื่อนเข้าไปซึ่งมีความถี่ $\omega$ พลังงาน $E(t)$ จึงเพิ่มขึ้นจนถึง steady-state อย่างไม่สม่ำเสมอเนื่องจากพลังงานมีการเปลี่ยนแปลงตามความถี่บีต $\omega - \omega_1$ ทั้งนี้เพราะว่าตัวออสซิลเลเตอร์ชอบที่จะออสซิลเลตด้วยความถี่ตามธรรมชาติ $\omega_1$ แต่กลับถูกผลักด้วยความถี่ $\omega$ ดังนั้น แรงเคลื่อนบางครั้งผลักด้วยเฟสที่ช่วยให้มีอัมปลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อ

ถูกจังหวะ แต่บางครั้งผลักด้วยเฟสต่างกันทำให้การออสซิลเลตหารไปแบบเดียวกับลักษณะของบีตนั่นเอง ถ้าไม่มี damping บีตจะเกิดติดต่อกันไปเรื่อยๆไม่สิ้นสุดเหมือนกรณีที่ ๒ แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากมี damping ตัวออสซิลเลเตอร์จะค่อยปรับเฟสตัวเองจนในที่สุดมีเฟสตรงกับแรงเคลื่อน หลังจากออสซิลเลตเป็นเวลาอย่างเหมาะสมแล้วจะเข้าสู่สภาวะ steady-state นั่นโดยไม่มีบีตด้วยความถี่ $\omega$ และมีเฟสเป็นผลต่างระหว่างเฟสของตัวออสซิลเลเตอร์และของแรงเคลื่อน ในสภาวะนี้เองพลังงานที่ตัวออสซิลเลเตอร์ได้รับในหนึ่งรอบจากแรงเคลื่อนมีค่าเท่ากับพลังงานที่สูญหายไปเนื่องจากความเสียดทานในหนึ่งรอบ ทำให้พลังงานสะสมในตัวออสซิลเลเตอร์มีค่าคงที่ และเฟสผลต่างของตัวออสซิลเลเตอร์และแรงเคลื่อนยังคงที่ พลังงานเนื่องจาก transient beat ได้แสดงในรูป ๓.๒




ต่อไปพิจารณาอัมปลิจูดของการออสซิลเลตจากการศึกษา transient ของตัวออสซิลเลเตอร์โดยการเปรียบเทียบอัมปลิจูดที่ steady-state จากการคาดคะเนและจากที่ได้ค่าตอบจริงๆที่ความถี่อภินาทและที่ความถี่อื่นๆ เราเริ่มต้นด้วยตัวออสซิลเลเตอร์หยุดนิ่งและผลักด้วยแรงเคลื่อนที่มีความถี่เท่ากับความถี่อภินาทของมัน ถ้าไม่มี damping อัมปลิจูดของการออสซิลเลตมีค่าเพิ่มขึ้นตามเวลา (ดูสมการ(๓.๓๔)) เมื่อตอนเริ่มต้นอัมปลิจูดมีค่าเพิ่มขึ้นใน

ระยะแรกๆ ความเร็วเฉลี่ยมีค่าน้อย damping สามารถละทิ้งได้ อย่างไรก็ตามเมื่อเวลามากขึ้นอัมปลิจูดมีค่ามากทำให้ความเร็วมากขึ้นตาม damping คราวนี้ไม่สามารถละทิ้งเหมือนตอนแรกได้ เนื่องจากมี damping มันจึงรักษาระดับการเคลื่อนที่เหมือนเดิมได้ภายในเวลา $\tau$ เท่านั้น ดังนั้นเราสามารถคาดคะเนอัมปลิจูดนี้ได้โดยคิดจากแรงเคลื่อนที่มากที่สุด $F_o$ กระทำในเวลา $\tau$ ทำให้มวลมีโมเมนตัมมากที่สุด $F_o\tau$ แต่โมเมนตัมมากที่สุดของมวลออสซิลเลตคือ $M$ คูณด้วยความเร็วมากที่สุดซึ่งคือ $\omega_o A(\omega_o)$ ดังนั้น $F_o\tau = M\omega_o A(\omega_o)$ และเราได้

$$A(\omega_o) = \frac{F_o\tau}{M\omega_o} \qquad (๓.๔๐)$$

เป็นอัมปลิจูดที่ steady-state จากการคาดคะเนที่ $\omega = \omega_o$

ต่อไปผลักตัวออสซิลเลเตอร์ด้วยความถี่ที่ต่างจากความถี่ธรรมชาติ $\omega_o$ มากๆ ถ้าไม่มี damping อัมปลิจูดจะออสซิลเลตตลอดเวลาด้วยความถี่ผสม $\frac{1}{2}(\omega_o - \omega)$ และพลังงานในตัวออสซิลเลเตอร์มีการเปลี่ยนแปลงตามความถี่บีต $\omega_o - \omega$ เมื่อมี damping เข้าไปพลังงานสูญเสียไปเนื่องจาก damping มีค่าเป็นกำลังสองของความเร็ว ดังนั้นที่เวลานี้ถ้าพลังงานมีค่ามากที่สุดทำให้ damping มีค่ามากที่สุด เมื่อพลังงานเป็นศูนย์จะไม่มี damping ในลักษณะเช่นนี้จะพบว่า damping ทำให้บีตหายไป เราสามารถคาดคะเนได้ว่าขณะที่มีบีตอยู่ อัมปลิจูดมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของอัมปลิจูดมากที่สุดครั้งแรก ดังนั้นเราแทน $\sin\frac{1}{2}(\omega_o - \omega)$ ในสมการ (๓.๓๙) ด้วย $\frac{1}{2}$ สำหรับ $\omega$ ห่างไกลจาก $\omega_o$ สมการ (๓.๓๙) กลายเป็น

$$A(\omega) = \frac{F_o}{M}\frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad (๓.๔๑)$$

จากความแตกต่างนี้เราสามารถคาดคะเนได้ว่า $A(\omega)$ สัมพันธ์กับค่าโมเมนตัมมากที่สุดที่สามารถหาได้โดยผลักด้วยแรงมากที่สุด $F_o$ สำหรับสัดส่วนที่แน่นอน $f$ ของหนึ่งคาบบีต โมเมนตัมนี้คือ $M$ คูณด้วยอัมปลิจูด $A(\omega)$ คูณค่าเฉลี่ยความถี่เชิงมุม $\frac{1}{2}(\omega_o + \omega)$ หนึ่งคาบบีต $T_{บีต}$ เท่ากับ $2\pi/(\omega_o - \omega)$ ดังนั้นเราสามารถคาดคะเนได้ว่า

$$\frac{F_o f 2\pi}{(\omega_o - \omega)} = MA(\omega)\,\tfrac{1}{2}(\omega_o + \omega)$$

สมการนี้จะเท่ากับสมการ (๓.๔๒) ถ้าเราให้ค่า $\varepsilon = \frac{1}{4\pi}$

เรารู้จากคำตอบว่าที่อภินาทอัมปลิจูดของการออสซิลเลตคือ $A_{ab}(\omega_o)$ เมื่อ $A_{el}$ มีค่าเป็นศูนย์ที่อภินาท ความจริงอัมปลิจูดที่เราคาดคะเนได้ $A(\omega_o)$ มีค่าเท่ากับ $A_{ab}(\omega_o)$ เราพิสูจน์ได้โดยเปรียบเทียบสมการ (๓.๔๑) และ (๓.๑๖) ทำนองเดียวกันเรารู้ว่าที่ห่างไกลจากอภินาทมากๆ คำตอบจริงให้อัมปลิจูดของการออสซิลเลตคือ $A_{el}(\omega)$ อัมปลิจูดที่เราคาดคะเนได้ $A(\omega)$ สำหรับ $\omega$ ห่างไกลจาก $\omega_o$ มีค่าเท่ากับ $A_{el}(\omega)$ ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้โดยเปรียบเทียบจากสมการ (๓.๔๒) และ (๓.๑๗)

๓.๒ การอภินาทในระบบสองดีกรีออฟฟรีดอม

ในบทที่ ๑ เราพบว่าแต่ละ mode ของระบบออสซิลเลตอย่างอิสระที่มีดีกรีออฟฟรี-ดอมมากกว่าหนึ่งมีอาการเหมือนกับเป็นฮาร์โมนิกอย่างง่าย และเราได้ละทิ้ง damping ในการศึกษา modes เหล่านั้น เมื่อเรานำ damping เข้ามาคิดด้วยจะพบว่าแต่ละ mode ก็จะเหมือนกับ damp one-dimensional oscillator ดังนั้นแต่ละ mode จะมีลักษณะอาการออสซิลเลต และมี damping constant $\Gamma$ เป็นของตัวมันเอง ทำให้มีลักษณะ decay time $\tau$ เป็นของตัวมันเองด้วย สำหรับบางระบบลักษณะการเกิด damping อาจจะสัมพันธ์กับมวลเคลื่อนที่ตัวใดตัวหนึ่ง ทำให้ mode ทั้งหมดอาจจะมี damping constant และ decay times เท่ากันได้ ดังเช่นตัวอย่างของระบบสองลูกตุ้มเหมือนควบคู่กันด้วยสปริงเบา เมื่อลูกตุ้มทั้งสองต่างถูกทำให้เคลื่อนที่เท่ากันในแต่ละ mode ดังนั้น mode ทั้งสองจะมี decay time เท่ากัน สำหรับระบบอื่นๆการเกิด damping สัมพันธ์กับ modes ตัวอย่างเช่น ถ้าสปริงที่ควบคู่กับลูกตุ้มทั้งสองมีเทปบางปะติดอยู่ ทำให้ขณะที่สปริงถูกกดหรือยืดออกเกิดมี frictional damping ถ้าหากว่าเกิด damping เพียงข้างเดียว ดังนั้น mode 2 (คือ mode ที่สปริงถูกยืดหรือกด) มี damping constant มากกว่า mode 1 นั่นคือ $\Gamma_2 >> \Gamma_1$ และทำให้ mode 2 มีเวลาการลดลงสั้นกว่า mode 1 ด้วย $\tau_2 << \tau_1$ เมื่อทำให้ระบบมีหลายๆ modes เราพบว่าอภินาทจะเกิดเมื่อความถี่ของแรงเคลื่อนใกล้เคียงกับความถี่ mode และผลปรากฏว่า absorptive และ elastic amplitude ของมวลเคลื่อนที่ตัวหนึ่งตัวใดก็คือส่วนที่เกิดจากการรวมกันได้ของอัมปลิจูดของอภินาทแต่ละครั้ง

ถ้าเราเปลี่ยนความถี่ของแรงเคลื่อนอย่างช้าๆ และเขียนเส้นโค้งของอัตราการดูดกลืนพลังงานจากมวลเคลื่อนที่เป็นฟังก์ชันของความถี่แรงเคลื่อน $\omega$ เราพบว่าเกิดอภินาทแต่ละครั้ง $\omega$ จะมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ mode และช่วงกว้างความถี่ถูกกำหนดด้วย

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

เมื่อ $\Delta\omega$ คือช่วงกว้างความถี่ที่จุดกึ่งกลางของการดูดกลืนกำลังมากที่สุด และ $\Gamma$ และ $\tau$ คือ damping constant และเวลาการลดลงสำหรับการออสซิลเลตอย่างอิสระของ mode ใดๆ

ตัวอย่าง การออสซิลเลตด้วยแรงของระบบสองลูกตุ้มควบคู่

ดูระบบได้ตามรูป ๓.๓ สมมติให้ a และ b มีมวล M เท่ากัน สปริงที่ใช้ควบคู่กับลูกตุ้มเป็นแบบสลิงกี และกำหนดให้แต่ละลูกตุ้มมี damping constant $\Gamma$ เท่ากัน
สมการของการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้ง่ายดังนี้

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{\ell}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_a + F_o\cos\omega t \qquad (๓.๔๓)$$

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{\ell}\psi_b - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_b \qquad (๓.๔๔)$$

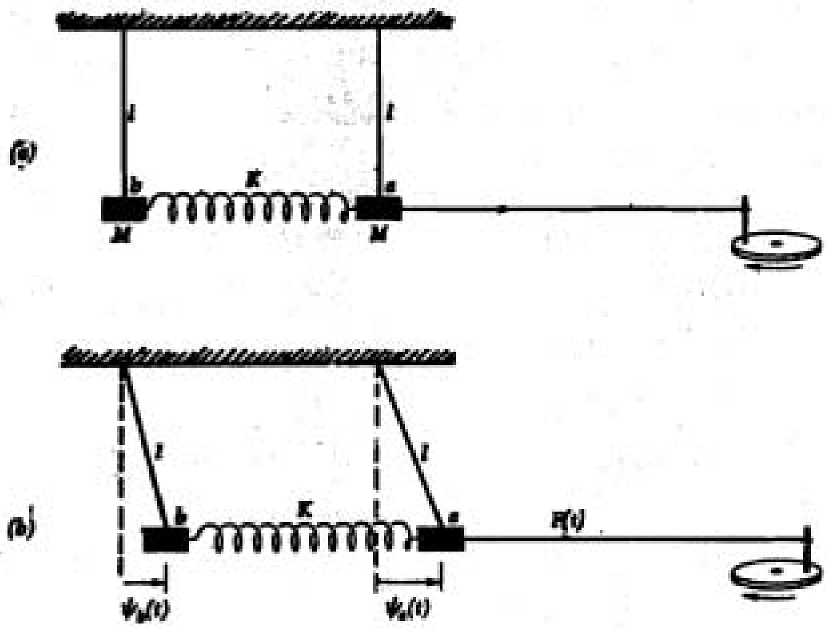
เราได้เคยศึกษาการออสซิลเลตอย่างอิสระของระบบนี้มาแล้วเมื่อตอนไม่มี damping ดังนั้นเรารู้ว่า ถ้า $F_o$ และ $\Gamma$ ต่างก็เป็นศูนย์จะมี mode เป็น

$$\text{Mode 1} : \quad \psi_a = \psi_b \quad \omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \qquad \psi_1 = \tfrac{1}{2}(\psi_a + \psi_b) \qquad (๓.๔๕)$$

$$\text{Mode 2} : \quad \psi_a = -\psi_b \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2K}{M} \quad \psi_2 = \tfrac{1}{2}(\psi_a - \psi_b) \qquad (๓.๔๖)$$

ในที่นี้ $\psi_1$ และ $\psi_2$ เป็น normal coordinates
ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา normal coordinates $\psi_1$ และ $\psi_2$ ของสมการ (๓.๔๓) และ (๓.๔๔) ได้โดยบวกสมการ (๓.๔๓) และ (๓.๔๔) เข้าด้วยกัน เราได้

$$M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{\ell}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}F_o\cos\omega t \qquad (๓.๔๗)$$




รูป ๓.๓ การออสซิลเลตของระบบลูกตุ้มควบคู่

(a) ขณะสมดุลย์

(b) การขจัดขณะใดๆ

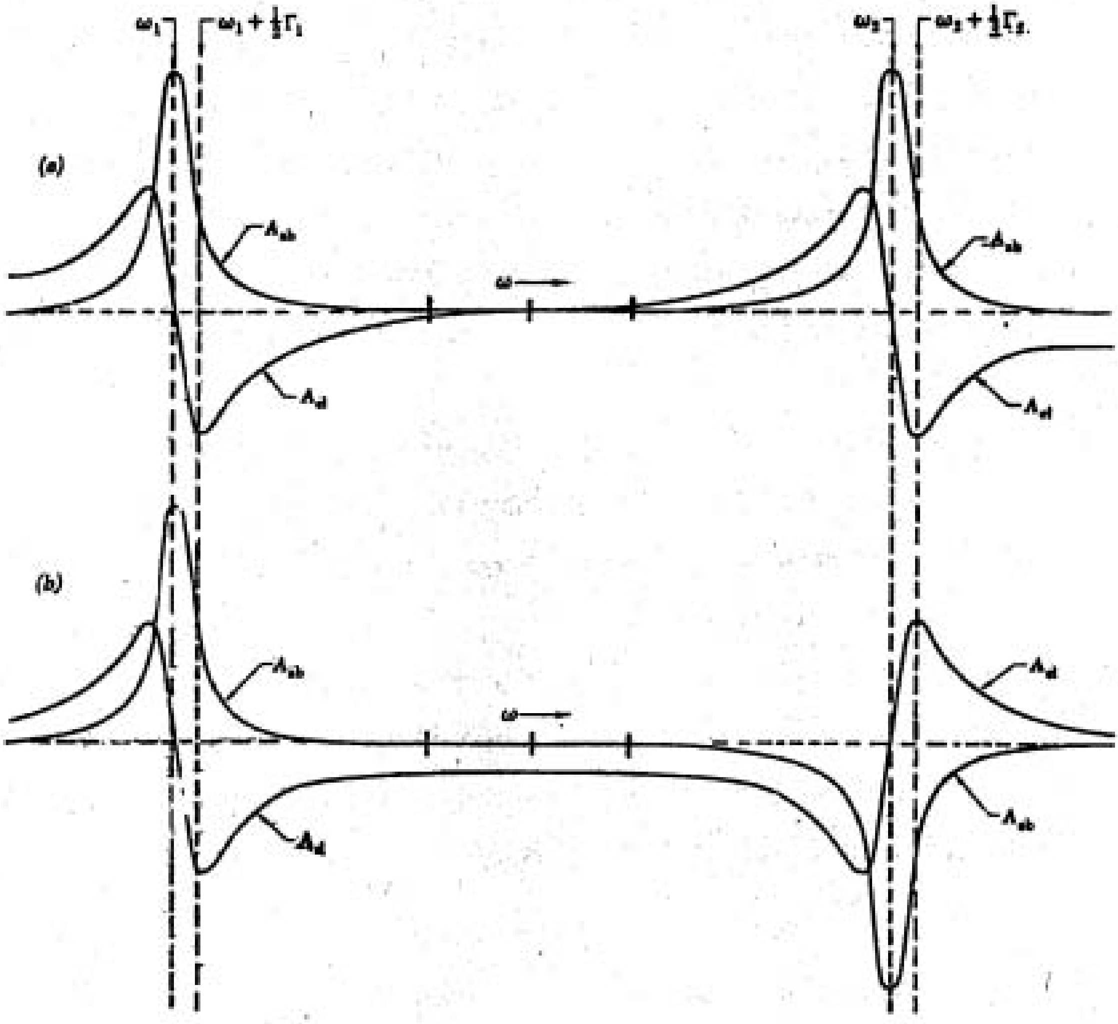
และโดยลบสมการ(ค.๕๓) ด้วยสมการ(ค.๕๕) เราได้

$$M\ddot{\psi}_2 = -M\left(\frac{g}{l} + \frac{2K}{M}\right)\psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \tfrac{1}{2}F_0\cos\omega t \qquad (ค.๕๘)$$

ให้สังเกตว่าสมการ(ค.๕๗) และ(ค.๕๘)ไม่เป็นสมการควบคู่กัน และเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับสมการ(ค.๑) เราจะเห็นได้ว่าสมการ(ค.๕๗) และ(ค.๕๘) ต่างมีรูปแบบเป็น driven damped harmonic oscillator ที่พอเหมาะ ดังนั้น normal coordinate $\psi_1$ ประพฤติเหมือนกับเป็นการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกอย่างง่ายที่มีมวล M ค่าคงที่สปริง $M\omega_1^2$, damping constant $\Gamma$ และมีแรงเคลื่อนเป็น $\tfrac{1}{2}F_0\cos\omega t$ และ normal coordinate $\psi_2$ ประพฤติในทำนองเดียวกันด้วย มวล M ค่าคงที่สปริง $M\omega_2^2$ , damping constant $\Gamma$ และมีแรงเคลื่อน $\tfrac{1}{2}F_0\cos\omega t$ การออสซิลเลตทั้งสองต่างไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นเราสามารถเขียนคำตอบที่สภาวะไม่เปลี่ยนแปลงสำหรับ $\psi_1$ และ $\psi_2$ แยกออกจากกันได้ โดยเมื่อแต่ละ mode กระทำตัวเหมือนกับ one-dimensional forced oscillator ดังนั้นแต่ละ mode จะมี absorptive amplitude และ elastic amplitude เป็นของตัวมันเอง และมีความถี่ถึกนาพสัมพันธ์กับความถี่ mode เช่นเดียวกับการออสซิลเลตใน ระบบการออสซิลเลตหนึ่งมิติ ต่อไปให้มาพิจารณาการเคลื่อนที่ของสองลูกตุ้ม a และ b เนื่องจากสมการ(ค.๕๕) และ(ค.๕๖) เราได้

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 \qquad และ \qquad \psi_b = \psi_1 - \psi_2 \qquad (ค.๕๙)$$

ดังนั้น absorptive amplitude ของลูกตุ้ม a จะเป็นผลรวมของ absorptive amplitude ที่มาจากทั้งสอง modes ส่วน absorptive amplitude ของลูกตุ้ม b จะเป็นผลต่างของ absorptive amplitude ของสอง modes ทำนองเดียวกัน elastic amplitude ของลูกตุ้ม a เป็นผลรวมของ elastic amplitude ที่ได้จาก modes ทั้งสอง และส่วนของลูกตุ้ม b เป็นส่วนผลต่างของ modes ทั้งสองด้วย เมื่อความถี่แรงเคลื่อนเท่ากับความถี่ mode หนึ่ง mode ใดทำให้การเคลื่อนที่ของ a และ b เป็นไปตามลักษณะของ mode นั้น(สำหรับการออสซิลเลตอย่างอิสระ)




รูป ค.๔ แสดงการเกิดอภินาทในระบบสองดีกรีออฟฟรีดอม plot อัมปลิจูด absorptive และ elastic กับ ความถี่

## ๓.๓ การตอบสนองต่อแรงของระบบมีหลายดีกรีออฟฟรีดอม

ในตอนนี้เราจะศึกษาลักษณะอาการของระบบลูกตุ้มควบคู่กันด้วยสปริงหลายๆตัวเป็นเส้นตรงยาว ถ้าเราให้แรงเคลื่อนแก่ระบบและแปรค่าความถี่แรงเคลื่อนอย่างช้าๆพอที่จะเป็น **steady-state** ตลอดเวลาเราจะได้อภินาทพันทีเมื่อความถี่แรงเคลื่อนเข้าใกล้ความถี่ **mode** เช่นเดียวกับระบบสองดีกรีออฟฟรีดอมที่เราได้ศึกษาแล้ว และเราพบว่าที่ **steady-state** ขันปลัฐคของแต่ละลูกตุ้มเป็นการรวมกันได้ของส่วนที่มาจากแต่ละ **mode** ต่อไปเรามาพิจารณาระบบอยู่ในสภาวะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้แรงเคลื่อนที่มีความถี่ $\omega$ ใดๆ ขั้นแรกเราจะไม่กำหนดสภาวะขอบเขต และไม่กำหนดว่ามีแรงเคลื่อนกระทำต่อลูกตุ้มตรงตัวไหนบ้าง การกระทำเช่นนี้ทำให้สมการของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มหนึ่งลูกตุ้มใดจะไม่มีแรงเคลื่อนปรากฏอยู่ ทำให้เราสามารถหาคำตอบทั่วไปสำหรับการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มใดๆได้

ถ้าเรากำหนดให้ $\Gamma = 0$ ในสมการของการเคลื่อนที่ เราจะพบว่าขณะเมื่อ $\omega$ ยังห่างไกลจากอภินาทมาก การขจัดของแต่ละลูกตุ้มเป็นการรวมกันได้ของส่วนที่เป็น **elastic** เพียงอย่างเดียวของแต่ละ **mode** แต่ **absorptive amplitude** ไม่มีส่วนเกี่ยวข้องเลย ทั้งนี้เพราะว่า **absorptive amplitude** หายไปอย่างรวดเร็ว แต่ **elastic amplitude** ลดลงช้ากว่าขณะที่ความถี่เปลี่ยนแปลง เรารู้อยู่แล้วว่าถ้าหากไม่มี **damping** จริงๆแล้วระบบจะไม่มีโอกาสเป็นสภาวะไม่เปลี่ยนแปลง แต่มันจะแสดงลักษณะบีตติดต่อกันไปอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นเรายังคงสมมติว่ามี **damping** แต่ไปกำหนดให้ $\Gamma = 0$ แทน และพยายามหลีกเลี่ยงอธิบายลักษณะอาการของมันเมื่อ $\omega$ เข้าใกล้อภินาท (ซึ่งเรารู้ลักษณะอาการของระบบแล้วในตอน ๓.๒)

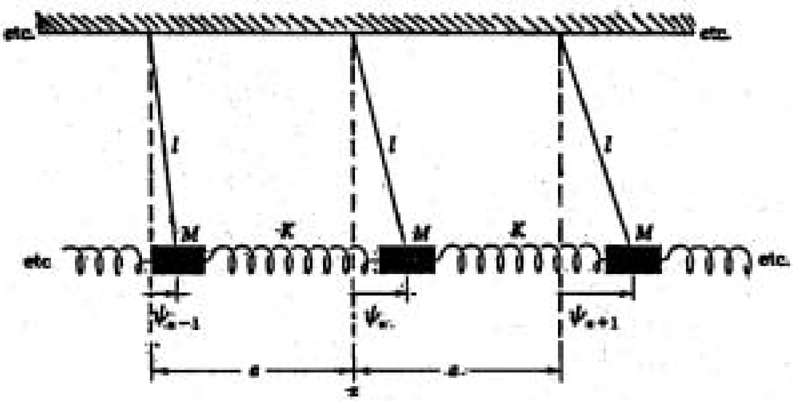
ตัวอย่าง ๒ ระบบลูกตุ้มควบคู่

พิจารณาลูกตุ้มใดๆสามจุดที่ควบคู่กันในระบบลูกตุ้มหลายๆตัวควบคู่กันด้วยสปริงเป็นจุดยาวๆ( **linear array** ) โดยไม่เจาะจงเป็นจุดหนึ่งจุดใด และไม่กำหนดสภาวะขอบเขตดังได้แสดงไว้ในรูป ๓.๔ สมการของการเคลื่อนที่สำหรับการขจัด $\psi_n(t)$ ของลูกตุ้มตัวที่ $n$ ใดๆคือ

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_o^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \qquad (๓.๔๐)$$

เมื่อ

$$\omega_o^2 = \frac{g}{\ell}$$




รูป ค.๔ แสดงระบบลูกตุ้มควบคู่ด้วยไม่มีสภาวะขอบเขต

ก่อนที่เราจะหาคำตอบที่แท้จริงของสมการ (๓.๕๐) เราต้องศึกษาคำตอบของมันโดยใช้การประมาณแบบต่อเนื่อง (continuous approximation)

<u>การประมาณแบบต่อเนื่อง</u>

เราสมมติว่า $\phi_n(t)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น หมายความว่าลูกตุ้มทั้งหมดที่อยู่ใกล้ๆบริเวณของลูกตุ้ม n ซึ่งมีตำแหน่งสมดุลย์ที่ z มีการเคลื่อนที่เป็นเช่นเดียวกับลูกตุ้ม n ดังนั้นการเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม n ที่ z เราสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันต่อเนื่อง $\phi(z,t)$ กระจายพจน์ต่างๆในสมการ (๓.๕๐) แบบอนุกรมเทเลอร์ดังนี้

$$\phi_n(t) = \phi(z,t)$$

$$\phi_{n+1}(t) = \phi(z+a,\ t) = \phi(z,t) + a\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial z^2} + \ldots$$

$$\phi_{n-1}(t) = \phi(z-a,\ t) = \phi(z,t) - a\frac{\partial\phi(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial z^2} + \ldots$$

ดังนั้น

$$\phi_{n+1} - \phi_n = a\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \ldots\ \ldots$$

$$\phi_n - \phi_{n-1} = a\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \ldots\ldots$$

แทนค่าสมการเหล่านี้ (รวมทั้งแทน $\phi_n(t) = \partial^2\phi(z,t)/\partial t^2$) ในสมการ (๓.๕๐) เราได้

$$\frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega_o^2\,\phi(z,t) + \frac{Ka^2}{M}\frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial z^2} \qquad (๓.๕๑)$$

สมการ (๓.๕๑) เรียกว่า Klein-Gordon wave equation สมการนี้ต่างจาก classical wave equation แต่จะเท่ากันได้ถ้าหากว่า $\omega_o$ เป็นศูนย์

เราสมมติว่าลูกตุ้มทุกตัวเคลื่อนที่อยู่ในสภาวะไม่เปลี่ยนแปลง ออสซิลเลตด้วยความถี่แรงเคลื่อน $\omega$ ซึ่งไม่ได้ทำให้มี work done เพิ่มขึ้น และลูกตุ้มทุกตัวมีค่าคงที่เฟสเท่ากัน ดังนั้น

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \phi) \qquad (๓.๔๒)$$

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z)\cos(\omega t + \phi) \qquad (๓.๔๓)$$

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{d^2A(z)}{dz^2}\cos(\omega t + \phi) \qquad (๓.๔๔)$$

แทนค่าสมการ(๓.๔๒), (๓.๔๓) และ(๓.๔๔) ลงในสมการ(๓.๔๐) และละทิ้งเทอมร่วมเหมือน $\cos(\omega t + \phi)$เราได้สมการอนุพันธ์ของลูกตุ้มเหล่านั้นที่ถูกแรงเคลื่อนกระทำด้วยความถี่ $\omega$ ที่สภาวะไม่เปลี่ยนแปลงคือ

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2}(\omega_o^2 - \omega^2)A(z) \qquad (๓.๔๕)$$

รากของสมการ(๓.๔๕) มีค่าแตกต่างกันสองกรณีคือ $\omega^2 > \omega_o^2$ และ $\omega^2 < \omega_o^2$ เมื่อ $\omega^2$ มีค่ามากกว่า $\omega_o^2$ เราได้คลื่นเป็นคลื่นรูปไซน์แบบเดียวกับที่เราได้ศึกษาตอน๓.๒ มาก่อนสำหรับเส้นลวดต่อเนื่อง เมื่อ $\omega^2$ มีค่าน้อยกว่า $\omega_o^2$ ได้คลื่นเป็นแบบ exponential

$\omega^2 > \omega_o^2$ : คลื่นรูปไซน์ สมการ(๓.๔๕)มีลักษณะเป็น

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -k^2A(z) \qquad (๓.๔๖)$$

เมื่อ $k^2$ เป็นค่าคงที่บวก

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_o^2)\frac{M}{Ka^2} \qquad (๓.๔๗)$$

สมการ(๓.๔๗) แสดงความสัมพันธ์การกระจายของคลื่นที่มีค่า $\omega^2 > \omega_o^2$ ส่วนสมการ(๓.๔๖) ให้รากของสมการทั่วไปคือ

$$A(z) = A\sin kz + B\cos kz \qquad (๓.๔๘)$$

ทั้ง A และ B เป็นค่าคงที่หาได้จากสภาวะขอบเขต คลื่นที่เกิดขึ้นยังมีความยาวคลื่นที่แน่นอนสัมพันธ์กับอภินาท และความถี่อภินาทก็คือความถี่ mode นั่นเอง

$\omega^2 < \omega_0^2$. คลื่นแบบเอกซ์โปเนนเชียล ถ้า $\omega^2$ มีค่าน้อยกว่า $\omega_0^2$ เรากำหนดค่าคงที่ $\kappa$ (kappa)

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)\frac{M}{Ka^2} \qquad (๓.๕๙)$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์การกระจายสำหรับคลื่นที่มีค่า $\omega^2 < \omega_0^2$ ดังนั้นสมการ (๓.๕๕) มีลักษณะเป็น

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \kappa^2 A(z) \qquad (๓.๖๐)$$

รากของสมการ (๓.๖๐) เป็นการรวมกันได้ของสองฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

$$A(z) = A\,e^{-\kappa z} + B\,e^{+\kappa z} \qquad (๓.๖๑)$$

เพื่อเป็นการยืนยันว่าสมการ (๓.๖๑) เป็นรากสมการโดยหาอนุพันธ์ของมันเทียบกับ $z$

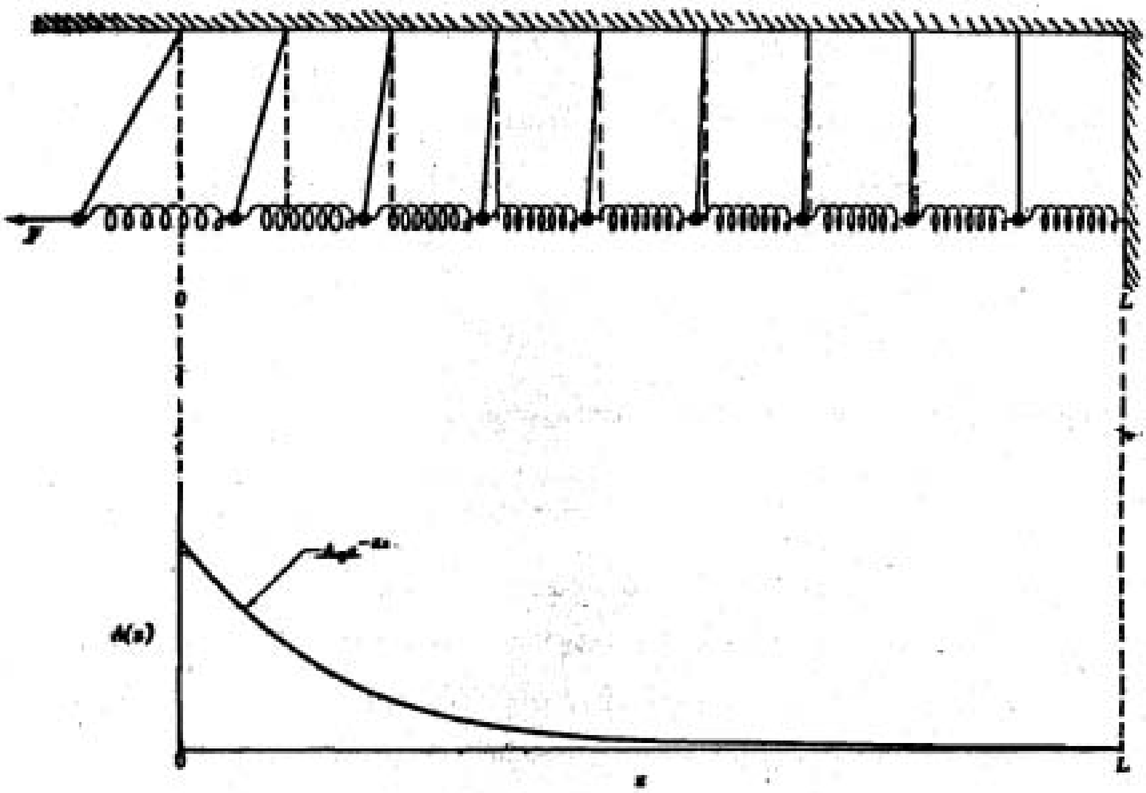
$$\frac{dA(z)}{dz} = -A\,e^{-\kappa z} + B\,e^{\kappa z}$$

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = (-\kappa)^2 A\,e^{-\kappa z} + (\kappa)^2 B\,e^{\kappa z} = \kappa^2 A(z)$$

ดังนั้นสมการ (๓.๖๑) เป็นรากของสมการ (๓.๖๐) ค่าคงที่ A และ B หาจากสภาวะขอบเขตเช่นเดียวกัน ดังนั้นสำหรับ $\omega^2 < \omega_0^2$ รากสมการทั่วไป $\psi(z,t)$ คือ

$$\psi(z,t) = (A\,e^{-\kappa z} + B\,e^{\kappa z})\cos(\omega t + \phi) \qquad (๓.๖๒)$$

สมมติว่าระบบถูกแรงเคลื่อนกระทำที่ตำแหน่ง $z = 0$ สปริงที่ตำแหน่งนี้มีการยืดออกมากที่สุด และขยายไปจาก $z = 0$ ถึง $z = L$ ซึ่งที่ $z = L$ มีสปริงยึดติดกับผนัง ดังนั้นถ้าเราให้แรงเคลื่อนกระทำต่อระบบด้วยความถี่ต่ำกว่า cutoff อัมปลิจูด $A(z)$ จะมีค่าลดลงเมื่อระยะ $z$ เพิ่มขึ้น ถ้าระบบมีความยาวมาก กล่าวคือ $L$ มีค่ามากอัมปลิจูดมีค่าน้อยจนเกือบเป็นศูนย์ที่ $z = L$ ถ้าความยาวเป็นอนันต์ อัมปลิจูดต้องเป็นศูนย์ที่ $z = L$ นั่นคือพจน์ $Be^{+\kappa z}$ ใน




รูป ๓.๖ ระบบลูกตุ้มควบคู่ถูกแรงภายนอกผลักทางซ้ายมือด้วยความถี่ต่ำกว่า cutoff $\omega_0$.

(a) ลักษณะขณะใดๆของระบบ (b) แสดงความสัมพันธ์ของ A(z).

สมการ (๓.๖๒) ต้องไม่มี หรือ B ต้องเป็นศูนย์ เขียนอัมปลิจูดใหม่เป็น

$$A(z) = A e^{-\kappa z} \qquad (๓.๖๓)$$

ดังนั้นสมการ (๓.๖๒) กลายเป็น

$$\psi(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \phi) \qquad (๓.๖๔)$$

ค่าคงที่ $\kappa$ เรียกว่า amplitude attenuation constant หรือเรียกสั้นๆเป็น attenuation constant มีค่าเท่ากับอัตราส่วน amplitude attenuation ต่อหน่วยความยาวของ $A(z)$ กำหนดเป็น

$$-\frac{1}{A(z)}\frac{dA(z)}{dz} = \kappa \qquad \text{เมื่อ } A(z) \text{ ถูกกำหนดด้วยสมการ } (๓.๖๓)$$

ส่วนกลับของ $\kappa$ เป็นความยาว $\delta$ เรียกว่า attenuation length

$$\frac{1}{\kappa} = \delta = \text{attenuation length} \qquad (๓.๖๕)$$

มีบางสิ่งบางอย่างที่มีส่วนคล้ายกันระหว่าง attenuation constant $\kappa$ สำหรับคลื่นเอกซ์โปเนนเชียล และจำนวนคลื่น ( wave number ) $k$ สำหรับคลื่นรูปไซน์คือ $\kappa$ เป็นอัตราส่วน attenuation ต่อหน่วยระยะทาง $k$ เป็นจำนวนเรเดียนต่อหน่วยระยะทาง ทำนองเดียวกัน attenuation length $\delta$ และความยาวคลื่น $\lambda$ มีบางอย่างคล้ายกันคือ $\delta$ เป็นระยะทางสำหรับ attenuation ด้วยแฟคเตอร์ $e^{-1}$ และ $\lambda$ เป็นระยะทางสำหรับการเพิ่มขึ้นของเฟสด้วยปริมาณ $2\pi$

ต่อไปเราหาคำตอบที่แท้จริงของสมการของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเหล่านั้น โดยเริ่มต้นจากสมการ (๓.๔๐) เขียนใหม่เป็น

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_o^2 \psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \qquad (๓.๖๖)$$

เราสมมติว่าลูกตุ้มทั้งหมดออสซิลเลตเป็นแบบฮาร์โมนิกด้วยความถี่และค่าคงที่เฟสเท่ากัน

ดังนั้น $$\psi_n = A_n \cos(\omega t + \phi) \qquad (\text{๓.๖๗})$$

แทนค่าสมการ(๓.๖๗) ลงในสมการ(๓.๖๖) และตัดพจน์เหมือน $\cos(\omega t + \phi)$ออกเราจะได้

$$-\omega^2 A_n = -\omega_o^2 A_n - \frac{2K}{M} A_n + \frac{2K}{M} \frac{(A_{n+1} + A_{n-1})}{2}$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{2K}{M} \left( 1 - \frac{1}{2}\frac{(A_{n+1} + A_{n-1})}{A_n} \right) \qquad (\text{๓.๖๘})$$

ในช่วงความถี่ dispersive การออสซิลเลตเป็นแบบรูปไซน์ ให้เราสมมติคำตอบเป็น

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna$$

ดังนั้น $$A_{n+1} = A \sin(kna + ka) + B \cos(kna + ka)$$

$$A_{n-1} = A \sin(kna - ka) + B \cos(kna - ka)$$

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin kna \cos ka + 2B \cos kna \cos ka$$

$$= 2 \cos ka(A \sin kna + B \cos kna) = 2 \cos ka\, A_n$$

แทนค่าลงในสมการ(๓.๖๘) ได้

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{2K}{M} (1 - \cos ka) \qquad (\text{๓.๖๙})$$

หรือ $$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \qquad (\text{๓.๗๐})$$

ในช่วงความถี่ต่ำกว่า cutoff $\omega_o$ เราคาดคะเนคำตอบเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียลเหมือนกับกรณีของการประมาณแบบต่อเนื่อง

$$A_n = A e^{-\kappa na} + B e^{+\kappa na}$$

ดังนั้น

$$A_{n+1} + A_{n-1} = (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) A_n$$

จากสมการ(ค.๒๘)ให้ความสัมพันธ์การกระจายเป็น

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{2K}{M}\left(1 - \tfrac{1}{2}(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})\right) \qquad (ค.๓๑)$$

สมการ(ค.๓๑) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายเหมือนอย่างสมการ(ค.๒๙)และ(ค.๓๐) โดยใช้คำจำกัดความของ hyperbolic cosine จะได้

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{2K}{M}(1 - \cosh \kappa a) \qquad (ค.๓๒)$$

หรือ

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{4K}{M}\sinh^2\frac{\kappa a}{2} \qquad (ค.๓๓)$$

ที่ $\omega = \omega_o$ คำตอบสมการ(ค.๓๐)ให้ค่า $k = 0$ และคำตอบสมการ(ค.๓๓)ให้ค่า $\kappa = 0$ ในช่วงความถี่สูงกว่า high-frequency cutoff $\omega_{max}$ เมื่อ $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{M}}$ จากกรณีของการประมาณต่อเนื่อง เราหาได้ว่ามันมีรูปร่างเป็นแบบ zigzag เหมือนกับ mode สูงสุด ดังนั้นเราจะคาดคะเนว่า รูปร่างของ $A_n$ เป็นแบบ exponential zigzag คือ

$$A_n = (-1)^n(Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na})$$

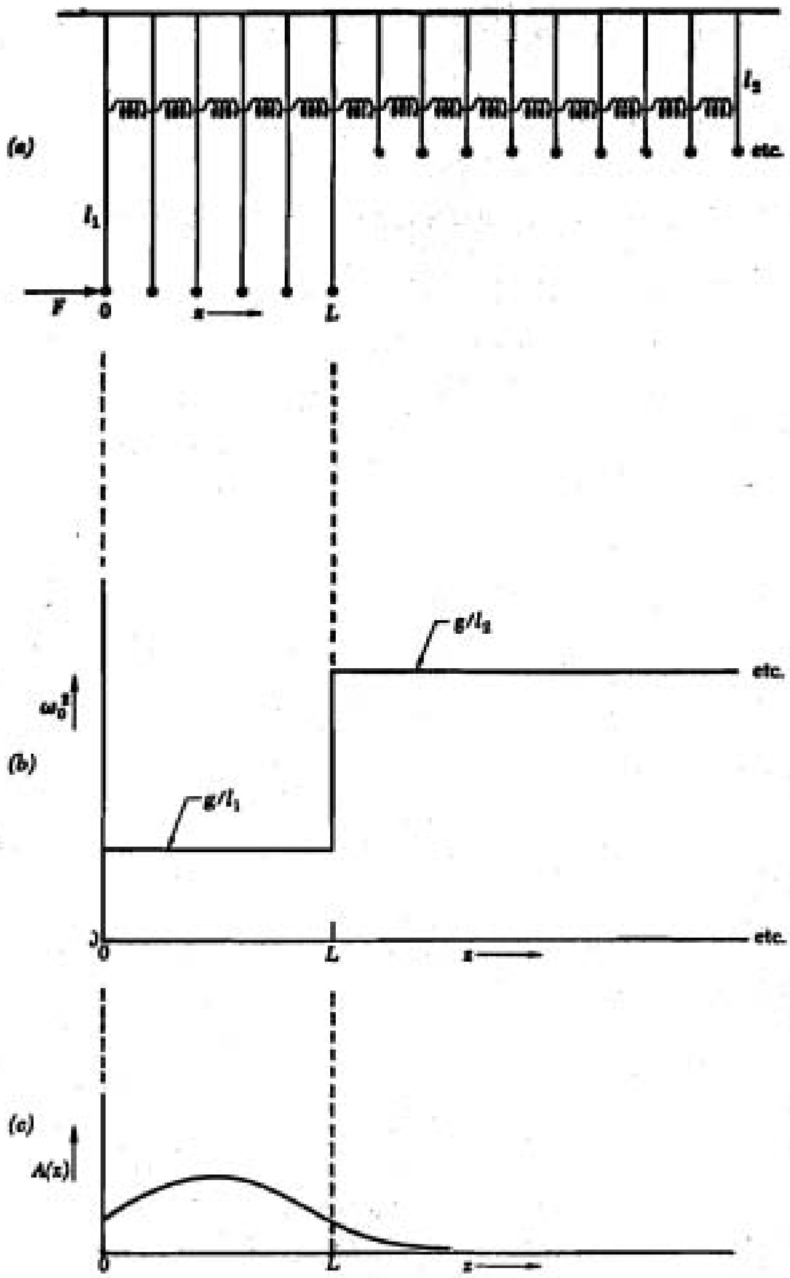
เราได้

$$A_{n+1} + A_{n-1} = -A_n(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \qquad (ค.๓๔)$$

จากสมการ(ค.๒๘) ได้ความสัมพันธ์การกระจายคือ

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left(1 + \tfrac{1}{2}(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})\right)$$

$$= \omega_o^2 + \frac{2K}{M}(1 + \cosh \kappa a)$$

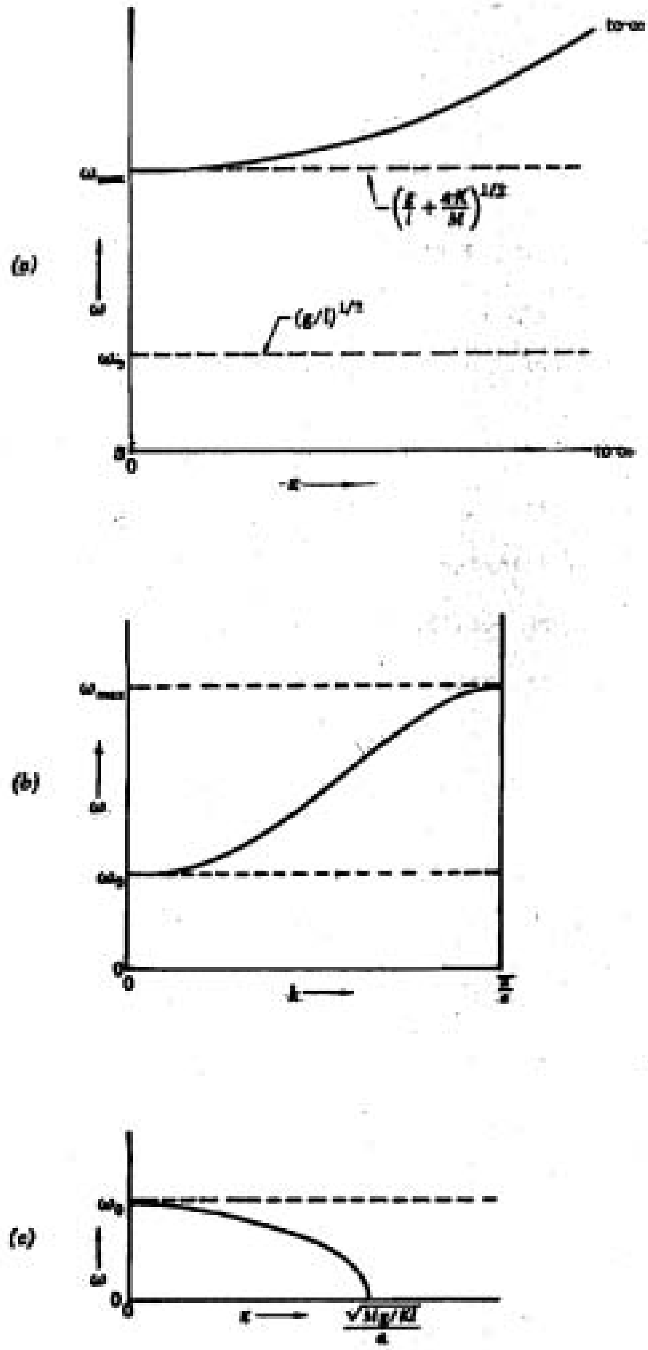



รูป ๓.๗ แสดงระบบลูกตุ้มควบคู่ด้วยความถี่เปลี่ยนแปลงกระทันหัน $\omega_o^2$ ที่ $z = L$ (a) ลูกตุ้มที่ $z = 0$ ถูกกระทำด้วยแรงเคลื่อนภายนอก (b) ความสัมพันธ์ของ $\omega_o^2$ กับ z. (c) ความสัมพันธ์ระหว่างอัมปลิจูด A(z) และ z สำหรับแรงเคลื่อนความถี่ ω ใกล้กับความถี่อภินาทต่ำสุดของระบบ

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{4K}{M}\cosh^2\frac{\kappa a}{2} \qquad (๓.๑๕)$$

ที่ $\kappa = 0$ $\quad \omega^2 = \omega_o^2 + \frac{4K}{M} = \omega_{max}^2$

ในรูป ๓. ๔ เราเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์การกระจายที่แท้จริงสำหรับทุกความถี่ตามสมการ(๓.๑๐), (๓.๑๓), และ(๓.๑๕)




รูป ค.๘ แสดงความสัมพันธ์การกระจายทุกช่วงความถี่
(a) ความถี่สูงกว่า high-frequency cutoff คลื่นปรากฏเป็นลักษณะซิกเซก
(b) ช่วงความถี่dispersive คลื่นเป็นรูปไซน์
(c) ความถี่ต่ำกว่า low-frequency cutoff: exponentail waves.

## แบบฝึกหัดบทที่ ๓

3.1 Plot a diagram of a damped oscillation whose equation is given in the form $x = e^{-0.1t}\sin\frac{\pi}{4}t$ m.

3.2 The equation of damped oscillations is given in the form

$$x = 5\,e^{-0.25t}\sin\frac{\pi}{2}t \qquad \text{m.}$$

Find the velocity of an oscillating point at the moments of time: 0, T, 2T, 3T, and 4T.

3.3 An equation of undamped oscillations is $x = \sin 2.5\pi t$ cm. Find the displacement from the position of equilibrium, the velocity and the acceleration of a point 20 m away from the source of oscillations for a moment of $t = 1$ s after the oscillations begin. The oscillatios propagate with a velocity of 100 m/s.

3.4 Verify that the solution

$$x = (A + Bt)e^{-rt/2m}$$

satisfies the equation

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 0$$

when $$r^2/4m^2 = K/m.$$

3.5 Show that the boundary condition $x = A\cos\phi$ at $t = 0$ imposed upon the general solution

$$x = e^{-rt/2m}(C_1e^{i\omega' t} + C_2e^{-i\omega' t})$$

for damped simple harmonic moyion, requires

$$C_1 = \frac{A}{2}e^{i\phi} \qquad \text{and} \qquad C_2 = \frac{A}{2}e^{-i\phi}$$

3.6 A capacitance C with a charge $q_o$ at $t = 0$ discharges through a resistance R. Use the voltage equation $q/C + IR = 0$ to show that the relaxation time of this process is RC seconds, that is,

$$q = q_o\, e^{-t/RC}$$

(Note that t/RC is non-dimensional.)

3.7 The equation $m\ddot{x} + Kx = F_o \sin\omega t$ describes the motion of an undamped simple harmonic oscillator driven by a force of frequency $\omega$. Show, by solving the equation in vector form, that the steady state solution is given by

$$x = \frac{F_o}{m}\frac{\sin\omega t}{(\omega_o^2 - \omega^2)} \quad \text{where} \quad \omega_o^2 = \frac{K}{m}$$

Sketch the behaviour of x versus $\omega$ and note that the change of sign as passes through $\omega_o$ defines a phase change of $\pi$ radians in the displacement. Now show that the general solution for the displacement is given by

$$x = \frac{F_o \sin\omega t}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} + A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$$

where A and B are constant.

3.8 In problem 3.7, if $x = \dot{x} = 0$ at $t = 0$ show that

$$x = \frac{F_o}{m}\frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t\right)$$

and by writing $\omega = \omega_o + \Delta\omega$ where $\Delta\omega$ is small, show that, near resonance,

$$x = \frac{F_o}{2m\omega_o^2}\left(\sin\omega_o t - \omega_o t\cos\omega_o t\right)$$

Sketch this behaviour, noting that the second term increases with time, allowing the oscillations of grow (resonance between free and forced oscillation).

3.9 An alternating voltage, amplitude $V_o$ is applied across an LCR series circuit. Show that the voltage at current resonance across either the inductance or condenser is $QV_o$.

3.10 Show that in resonant LCR series circuit the maximum potential across the condenser occurs at a frequency $\omega = \omega_0(1 - 1/2Q_o^2)^{\frac{1}{2}}$ where $\omega_o^2 = (LC)^{-1}$ and $Q_o = \omega_o L/R$.

3.11 See Eq. (3.10) and fill in the algebraic step omitted in obtaining the result $E = E_o e^{-t/\tau}$.

3.12 Show by direct substitution that $x_1(t)$ as given by Eq. (3.3) is a solution of the damped harmonic oscillator equation of motion, Eq. (3.2).

3.13 Show that if $x_1(t)$ is a solution of Eq. (3.1) for a driving force $F_1(t)$, and if $x_2(t)$ is the solution for a different driving force $F_2(t)$, then the force $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ gives the solution $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, provided that the initial conditions $x(0)$ and $x(0)$ for the superposition are also the corresponding sums of the initial conditions, i.e., provided $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)$.

3.14 Show by substitution that Eq. (3.14), (3.15), and (3.16), give a solution to Eq. (3.13).

3.15 Verify Eq. (3.21) for the power loss due to friction. Verify that it is equal to the input power as given by Eq. (3.20).

3.16 Verify that the time-averaged stored energy E for steady-state oscillation is given by Eq. (3.22).

3.17 Verify that the half-power points for the steady-state resonance curve are given by Eqs.(3.24) and (3.25).

3.18 Show that Eq.(3.30) give the exact steady-state solution to the driven oscillator equation (3.13), for the case where the damping constant $\Gamma$ is zero.

3.19 Show that if the pendulums of Fig. 3.4 are coupled by slinkies, they have the same equations of motion for transverse horizontal oscillation as they do for the longitudinal motion shown.

3.20 Sketch a system of inductances and capacitance that has equations of motion similar in form to Eq.(3.50), and derive their equations of motion.

3.21 Assume the ionosphere starts suddenly at a boundary, at which the cutoff frequency $\nu_p$ suddenly increases from zero to 20 Mc. Find the amplitude attenuation distance $\delta$ for AM radio waves of frequency 1000 Kc.

Ans. About 2.5 meters, independent of frequency, as long as the frequency is far below cutoff.

3.22 Using the coupled pendulums as a guide, write down the complete dispersion relation for analogous system of coupled inductance and capacitances. We want the dispersion law in the pass band and in the two cutoff regions of frequency.

3.23 Show that, if we use the weak-damping approximation and if we stay resonably near a resonance, the absorptive and elastic amplitudes can be written (with a suitable choice of units) in the form

$$A_{ab} = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad A_{el} = \frac{-x}{x^2 + 1}.$$

where $x = (\omega - \omega_o)/\frac{1}{2}\Gamma$ .

3.24 Suppose we have a system with two resonances at frequencies $\omega_1$ and $\omega_2$ which make equal contributions to the elastic amplitude of some moving part. For $\omega$ far from both $\omega_1$ and $\omega_2$, we can write (in some units or other)

$$A_{el} = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}.$$

Show that, if $\omega$ differs from $\omega_1$ and $\omega_2$ by much more than their difference $\omega_2 - \omega_1$, then $A_{el}$ is (to a good approximation) just twice as large as either of the two contributions. That is, show that

$$A_{el} = \left(\frac{2}{\omega_{av}^2 - \omega^2}\right)(1 + \epsilon^2 + \ldots.),$$

where

$$\omega_{av}^2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \epsilon = \tfrac{1}{2}\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_{av}^2 - \omega^2}.$$

3-25 Critical damping. Starting with the equation for the underdamped free oscillations, Eq. (3.7), show that for critical damping the solution becomes

$$x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})\Gamma t}\{x_1(0) + |\dot{x}_1(0) + \tfrac{1}{2}\Gamma x_1(0)|t\}.$$

Show that this same result is obtained if you start instead with the equation for overdamped oscillations, Eq (3.9).

3.26 Coupled pendulums. Consider a linear array of coupled pendulums driven below cutoff at $z = 0$ and attached to a rigid wall at $z = L$, as shown in Fig.3.5. Show that if $\psi(z,t)$ equals $A_o \cos\omega t$ as $z = 0$, then $\psi(z,t)$

$= A(z)\cos\omega t$, where

$$A(z) = A_o \frac{\left[e^{-\kappa z} - e^{-\kappa L}e^{-\kappa(L-z)}\right]}{1 - e^{-2\kappa L}}$$

Notice that for $L \to \infty$ this becomes simply $A_o e^{-\kappa z}$.