บทที่ 1

การออสซิลเลตของระบบอย่างง่าย

(Free Oscillations of Simple System)

๑.๑ บทนำ

ในโลกของเรานี้เต็มไปด้วยสิ่งต่างๆมีการเคลื่อนที่หรือเคลื่อนไหวตลอดเวลา การเคลื่อนที่เหล่านี้เราสามารถจำแนกตามลักษณะของการเคลื่อนที่ได้เป็นสองลักษณะคือ ลักษณะแรกเป็นการเคลื่อนที่ในบริเวณจำกัดแห่งใดแห่งหนึ่งได้แก่ การออสซิลเลตหรือการสั่น *(oscillation or vibration)* อีกลักษณะหนึ่งคือ การเคลื่อนที่จากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง หรือโดยการส่งแรงสั่นสะเทือนต่อเนื่องกันไปเป็นระลอกๆจากบริเวณหนึ่งไปสู่บริเวณอื่น เรียกว่า displacement pulse ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบแรกได้แก่ การแกว่งของลูกตุ้ม *(pendulum)* การสั่นสะเทือนของสายไวโอลิน *(violin string)* น้ำกระเพื่อมขึ้นลงในถ้วยแก้ว อิเลกตรอนโคจรรอบนิวเคลียสในอะตอม แสงสะท้อนไปมาระหว่างกระจกในเครื่องมือเลเซอร์ *(laser)* เป็นต้น ส่วนตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบหลังคือ *pulse* เคลื่อนที่บนเส้นเชือก คลื่นในทะเลวิ่งเข้ากระทบหาด ลำอิเลกตรอนในหลอดภาพทีวี แสงที่เปล่งออกจากดวงดาวและเรามองเห็นได้ ในบางกรณี ตัวอย่างของระบบข้างต้นเหล่านี้อาจแสดงการเคลื่อนที่ในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง หรือแสดงทั้งสองลักษณะได้พร้อมกันขึ้นกับตำแหน่งของผู้สังเกต เช่น คลื่นในทะเลเคลื่อนเข้าหาฝั่ง แต่โมเลกุลของน้ำเพียงแต่สั่นสะเทือนขึ้นลงเท่านั้นโดยไม่ได้เคลื่อนที่เข้าหาฝั่งเลย หรือ *pulse* เคลื่อนที่ไปตามเส้นเชือกแต่มวลของเส้นเชือกเพียงแต่สั่นสะเทือนโดยไม่ได้เคลื่อนที่ไป

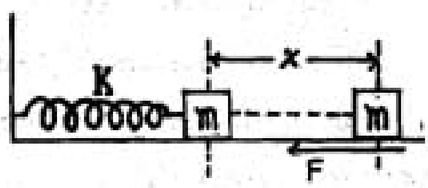
ในระบบต่างๆที่เราจะศึกษาต่อไปนี้จะเน้นถึงปริมาณทางฟิสิกส์ *(physical quantity)* คือ การขจัด *(displacement)* ห่างจากตำแหน่งสมดุลย์ของมันแปรตามตำแหน่งและเวลาในระบบ ในตัวอย่างกลไกข้างต้นปริมาณทางฟิสิกส์นี้คือ การขจัดของมวลที่จุด x,y,z แทนด้วยปริมาณเวคเตอร์ *(vector)* $\vec{\Psi}(x,y,z,t)$ บางครั้งเราเรียกว่า เวคเตอร์ฟังก์ชัน *(vector function)* ของ x,y,z,t เช่น ในระบบของไฟฟ้าปริมาณทางฟิสิกส์คือ กระแสในขดลวดหรือประจุในตัวเก็บประจุ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามันอาจเป็นสนามไฟฟ้า $\vec{E}(x,y,z,t)$ หรือสนามแม่เหล็ก $\vec{B}(x,y,z,t)$

๑.๒ Wave Motion in One Degree of Freedom

ในระบบต่างๆ วัตถุหรืออนุภาคสามารถสั่นสะเทือนได้หลายอาการและหลายทิศทาง ถ้าระบบถูกบังคับให้สามารถสั่นสะเทือนในอาการเดียวและทิศทางเดียวเท่านั้น หรือถ้ามีเพียงหนึ่งพิกัดอิสระ *(Independent coordinate)* สามารถอธิบายตำแหน่งทางเรขาคณิตของวัตถุในระบบได้อย่างสมบูรณ์ในระวางที่ *(space)* แล้ว ระบบนั้นเราเรียกว่า ระบบหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอม

ในหัวข้อนี้เราจะได้ศึกษาระบบที่มีการสั่นสะเทือนในพื้นที่เฉลี่ยบริเวณหนึ่งในลักษณะที่เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก *(simple harmonic motion)* เรียกย่อว่า SHM ซึ่งเป็นอาการสั่นสะเทือนขั้นมูลฐานที่สุด สำหรับตัวอย่างของระบบ SHM ที่เป็นหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอม ได้แก่ การแกว่งของลูกตุ้มบนระนาบหนึ่ง มวลและสปริง และวงจร LC เป็นต้น

<u>ระบบมวลและสปริง</u>



รูป ๑.๑ ระบบมวลและสปริงเคลื่อนที่บนพื้นราบปราศจากแรงเสียดทาน

เมื่ออนุภาคอยู่ห่างจากตำแหน่งสมดุลย์เป็นระยะทาง x สปริงจะมีแรงดึงกลับ *(return force)* F ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ ระยะทาง x แรงดึงกลับมีค่าเป็น

$$F = -Kx \qquad (๑.๑)$$

ในที่นี้ K เป็นค่าคงที่เรียกว่า ค่าคงที่ของสปริง *(spring's constant)* สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$m\ddot{x} = -Kx \qquad (๑.๒)$$

เครื่องหมายลบหมายถึงแรงมีทิศตรงกันข้ามกับการเพิ่มของ x และ $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

ให้ $\omega^2 = K/m$ เขียนสมการ (๑.๒) ใหม่เป็น

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (๑.๓)$$

ความหมายทางฟิสิกส์ของ ω^2 ที่สัมพันธ์กับระบบต่างๆคือ แรงดึงกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวล

สมการ(๑.๓) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองมีรากสมการคือ

$$x = a\cos\omega t$$

หรือ

$$x = b\sin\omega t$$

a และ b เป็นค่าคงที่ ω เรียกว่าความถี่เชิงมุมซึ่ง เท่ากับ $2\pi\nu$

เมื่อ ν คือความถี่ของการสั่นตามธรรมชาติ

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (๑.๔)$$

รวมค่าของ x เข้าด้วยกันจะได้

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad (๑.๕)$$

สำหรับค่าคงที่ a และ b เราอาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$a = A\cos\phi \quad \text{และ} \quad b = -A\sin\phi$$

A เป็นค่าคงที่ใหม่มีค่าเป็น $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ φ เป็นค่าคงที่ด้วย

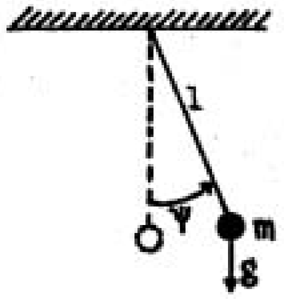
สมการ(๑.๕) กลายเป็น

$$x = A\cos\phi\cos\omega t - A\sin\phi\sin\omega t$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (๑.๖)$$

สมการ(๑.๖) เป็นสมการทั่วไปของ SHM, x เป็นการขจัด ค่ามากที่สุดของ $\cos(\omega t + \phi)$ เป็น 1 ดังนั้นขนาดของ A เป็นค่ามากที่สุดของการขจัดเรียกว่า อัมปลิจูด (amplitude) ระบบจึงสั่นกลับไปกลับมาระหว่าง $x = \pm A$

<u>ระบบลูกตุ้ม</u>



รูป ๑.๒ ระบบลูกตุ้มธรรมดา

ระบบลูกตุ้มทั่วไปประกอบด้วยเส้นเชือกเบายาว l ผูกติดกับเพดานและมีวัตถุมวล m แขวนห้อยอยู่ ให้ ψ เป็นมุม(เรเดียน) เล็กๆที่เส้นเชือกทำมุมกับแนวดิ่งซึ่งเป็นตำแหน่งสมดุลย์ของมวล m การขจัดวัดตามส่วนโค้งของวงกลมคือ $l\psi$ ความเร็วขณะใดๆ เป็น $l\,d\psi/dt$ และความเร่งขณะใดๆเป็น $l\,d^2\psi/dt^2$ แรงคืนกลับในแนวเส้นสัมผัสคือ $-mg\sin\psi$

อาศัยจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจะได้

$$ml\frac{d^2\psi}{dt^2} = -mg\sin\psi \qquad (๑.๗)$$

กระจาย $\sin\psi$ เป็นแบบอนุกรมของเทเลอร์ *(Taylor's series)*

$$\sin\psi = \psi - \frac{\psi^3}{3} + \frac{\psi^5}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (๑.๘)$$

เนื่องจาก ψ มีค่าน้อย ดังนั้นเราสามารถกำจัดพจน์กำลังสูงๆ ทิ้งได้เหลือแต่พจน์แรกเท่านั้น จะได้ $\sin\psi = \psi$ แทนลงในสมการ(๑.๗)ได้

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{-g\psi}{l} \qquad (๑.๙)$$

ให้ $\omega^2 = \frac{g}{l}$ จะได้สมการเช่นเดียวกับสมการ(๑.๓) มีรากสมการเป็น

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (๑.๑๐)$$

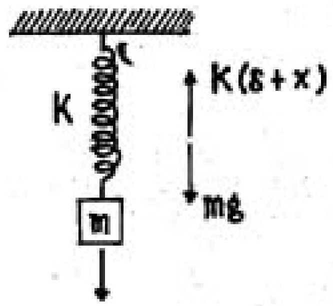
ให้สังเกตว่าความถี่เชิงมุมของการสั่นเราสามารถหาได้จาก

$$\omega^2 = \text{แรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวล}$$

$$\omega^2 = mg\psi/(l\psi)m = g/l$$

สำหรับค่า A และ ϕ หาได้จากสภาวะเริ่มต้น สรุปได้ว่า ในกรณีของลูกตุ้มจะสั่นแบบ SHM ได้ต่อเมื่อการขจัดเชิงมุม $\psi(t)$ มีค่าน้อยเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง ๑</u> มวลแขวนกับสปริง



รูป ๑.๓ ระบบมวลและสปริงแขวนในแนวดิ่ง เมื่อแขวนมวล m สปริงมีการยืดออก

สำหรับการออสซิลเลตตามแนวดิ่ง แรงที่กระทำต่อมวล m มีสองแรงคือ แรงเนื่องจากสปริง $K(\delta + x)$ และเนื่องจากน้ำหนัก mg ของมวล ดังนั้นสมการของการเคลื่อนที่คือ

$$m\ddot{x} = -K(\delta + x) + mg \qquad (๑.๑๑)$$

δ เป็นส่วนที่สปริงยืดออกเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุกระทำต่อสปริง ดังนั้น $mg = \delta K$ และสมการของการเคลื่อนที่กลายเป็น

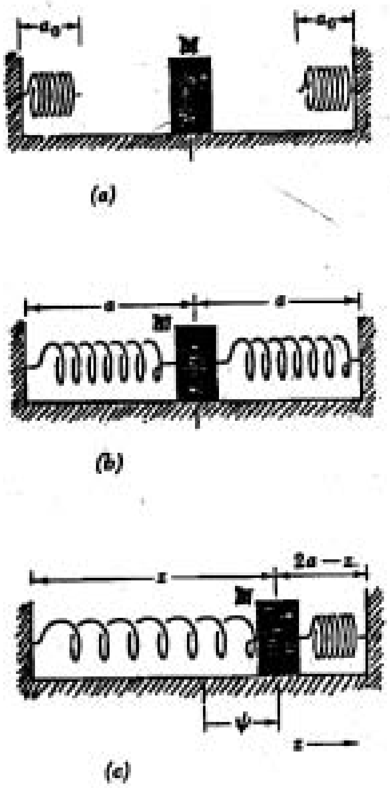
$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับ SHM เหมือนกับสมการ(๑.๓) มีรากสมการเป็น

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

โดยที่ $\omega = \sqrt{K/m}$, A และ ϕ เป็นค่าคงที่ใดๆขึ้นกับค่าสภาวะเริ่มต้น $x(0)$ และ $x(0)$

<u>ตัวอย่าง ๒</u> มวลและสปริงสั่นตามยาวในแนวราบ



ให้มวล m เคลื่อนที่ไปมาบนพื้นราบปราศจากความเสียดทาน สปริงเบาทั้งสองมีค่าคงที่สปริงเป็น K ตามรูป ๑.๔ (a) เมื่อสปริงยังไม่ได้ผูกกับมวล มีความยาวระยะพัก *(relaxed length)* a_o (b) ที่ตำแหน่งสมดุลย์แต่ละสปริงมีความยาว a และแรงตึงสปริงเป็น $T_o = K(a-a_o)$ (c) เมื่อทำให้มวล m มีการขจัด $\psi(t)$ และ Z เป็นระยะห่างของมวล m จากผนังข้างซ้าย ดังนั้น ระยะห่างจากผนังข้างขวาจะเป็น $2a-Z$ คิดแรงที่กระทำต่อมวล m เนื่องจากสปริงได้ดังนี้ สปริงข้างซ้ายมีแรงดึงเป็น $K(Z-a_o)$ ในทิศ $-Z$ และสปริงข้างขวามีแรงดึงเป็น $K(2a-Z-a_o)$ ในทิศ $+Z$ แรงรวมทั้งหมด F_z ในทิศ $+Z$ คือผลรวมของแรงทั้งสอง

$$F_z = -K(Z-a_o) + K(2a-Z-a_o)$$

รูป ๑.๔ การออสซิลเลตตามยาวของระบบมวลสปริง

$$F_z = -2K(Z-a)$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตันได้

$$\frac{md^2Z}{dt^2} = F_z = -2K(Z-a) \qquad (๑.๑๒)$$

การขจัดของมวลจากจุดสมดุลย์คือ $Z-a$ ให้เป็น $\psi(t)$

$$\phi(t) \equiv Z(t)-a$$

หรือ $$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = \frac{d^2Z(t)}{dt^2}$$

ดังนั้นสมการ(๑.๑๒) กลายเป็น

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\omega^2\phi(t) \qquad (๑.๑๓)$$

ด้วย $$\omega^2 = \frac{2K}{m} \qquad (๑.๑๔)$$

จากสมการทั่วไปเป็นแบบฮาร์โมนิกเช่นกันคือ $\phi(t) = A\cos(\omega t+\phi)$

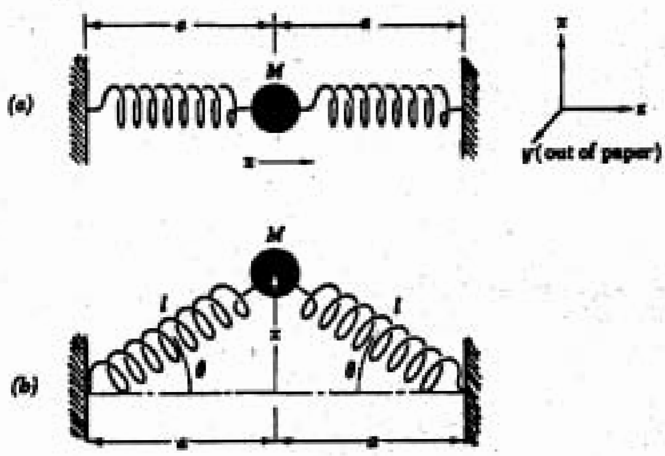
นอกจาก ω^2 มีค่าดังสมการ(๑.๑๔)แล้วเรายังหาได้จาก

$$\omega^2 = \frac{\text{แรงดึงกลับ}}{\text{การขจัดมวล}} = \frac{2K\phi(t)}{\phi(t)m} = \frac{2K}{m}$$ ให้ผลเช่นเดียวกัน

ข้อสังเกต ถ้าเราเลื่อนมวล m ไปจนกระทั่ง $2a-Z < a_o$ แรงเนื่องจากสปริงกระทำต่อมวล m เป็น

$$\begin{aligned} F &= -K(Z-a_o) - K(a_o-2a+Z) \\ &= -K(Z-a_o+a_o-2a+Z) = -2K(Z-a) \\ &= -2K\phi(t) \end{aligned}$$ ยังคงเป็น SHM เช่นกัน

<u>ตัวอย่าง ๓</u> มวลและสปริงสั่นตามขวางในแนวดิ่ง



รูป ๑.๔ การออสซิเลตตามขวาง

(a) ขณะสมดุลย์

(b) การขจัดขณะใดๆ

แขวนลอยวัตถุมวล m ด้วยสปริงเบาสองตัวที่มีค่าคงที่สปริง K เท่ากัน มีความยาวระยะพักเป็น a_o เมื่อมวล m อยู่ในสภาวะสมดุลย์ตามรูป ๑.๔(a) ความตึงในสปริงเป็น $T_o = K(a-a_o)$ ในที่นี้มวล m สามารถสั่นในแนวแกน x และยังสามารถสั่นในแนวแกน y ด้วยทำให้เกิดการสั่นตามขวางได้ เพื่อความสะดวกเราสมมติให้มวล m มีการสั่นในแนวแกน x เท่านั้นและละทิ้งผลของแรงโน้มถ่วง จากรูป ๑.๔(b) สปริงแต่ละตัวมีความยาวเพิ่มขึ้นเป็น L และแรงตึงเป็น T เมื่อมวลมีการขจัด x

$$T = K(L-a_o) \qquad (๑.๑๕)$$

แรงตึงนี้อยู่ในแนวของสปริงซึ่งขณะนี้ทำมุม θ กับแนวระดับ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าแรงดึงกลับเนื่องจากสปริงหรือแรงที่พยายามดึงมวลให้กลับสู่ตำแหน่งสมดุลย์อีกคือ

$$F_x = -2T\sin\theta$$

ได้สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -2T\sin\theta$$

$$= -2K(L-a_o)\frac{x}{L}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2Kx(1-\frac{a_o}{L}) \qquad (๑.๑๖)$$

เนื่องจากสปริงยาว L ที่ปรากฏทางขวามือของสมการ(๑.๑๖)ยังเป็นฟังก์ชันของ x อยู่ ดังนั้นสมการ (๑.๑๖) จึงไม่ใช่สมการที่เป็นการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกอย่างแท้จริง แต่เราต้องการสมการที่เป็น *SHM* เท่านั้น เราอาจจะทำได้โดยใช้วิธีการประมาณค่ามีสองวิธีคือ

<u>การประมาณแบบสลิงกี</u> *(Slinky approximation)* โดยการสมมติว่า $a_o \ll a$ หรือ $\frac{a_o}{a} \ll 1$ แต่ L ใหญ่กว่า a เสมอ เพราะฉะนั้นเราสามารถละทิ้งพจน์ $\frac{a_o}{L}$ ได้เมื่อเทียบกับ 1

สมการ(๑.๑๖) กลายเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2Kx}{m} \qquad (๑.๑๗)$$

เทียบกับสมการ(๑.๓)จะได้

$$\omega^2 = \frac{2K}{m} = \frac{2T_o}{ma} \qquad (\text{สำหรับ } a_o = 0) \quad (๑.๑๘)$$

และได้รากสมการเป็นแบบ *SHM*

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$

สปริงที่ใช้ได้ดีกับวิธีการประมาณแบบนี้มีชื่อเรียกว่า สลิงกี ซึ่งเป็นสปริงที่มีความยาวระยะพักสั้นประมาณครึ่งนิ้วฟุต แต่ยืดออกได้ถึง๑๕ฟุตโดยยังคงคุณสมบัติเดิมทุกประการ ในที่นี้เทียบได้กับ $\frac{a_o}{a}$ หรือ $\frac{a_o}{L}$

มีค่าเกือบเท่ากับ $\frac{๓}{๑๕\times๑๒} = \frac{๑}{๖๐}$ ถือได้ว่าค่าน้อยเมื่อเทียบกับ ๑

<u>การประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อย</u> *(Small-oscillations approximation)*

ถ้าเราไม่สามารถให้ a_o มีค่าน้อยกว่าน้อย a ได้แล้ว วิธีการประมาณแบบสลิงก็ไม่อาจใช้ได้ดี อย่างไรก็ตามเราอาจให้ x มีค่าน้อยๆเมื่อเทียบกับค่า a หรือ L เมื่อ L มีค่าต่างจาก a ด้วยปริมาณของขนาด $a(x/a)^2$ ในการประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อยเราจะทิ้งพจน์ใน F_x ซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นใน x/a เราต้องการเขียน L ในสมการ(๑.๑๖) เป็น $L = a +$ บางอย่าง ในที่นี้ บางอย่างเป็นศูนย์เมื่อ $x = 0$ เนื่องจาก L ใหญ่กว่า a ไม่ว่า x เป็นค่าบวกหรือค่าลบ บางอย่างนี้ต้องเป็นฟังก์ชันคู่ *(even function)* ของ x ตามรูป๑.๔ เราได้

$$L^2 = a^2 + x^2$$

$$= a^2(1+\epsilon) \qquad \epsilon \equiv \frac{x^2}{a^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a}(1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a}\{1 - (\tfrac{1}{2}\epsilon) + (\frac{3\epsilon^2}{8}) - \ldots\ldots\} \qquad (๑.๑๙)$$

เนื่องจาก $\epsilon \ll 1$ เราสามารถละทิ้งพจน์ยกกำลังสูงๆได้

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a}(1-\tfrac{1}{2}\epsilon)$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a}(1-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}) \qquad (๑.๒๐)$$

แทนค่าสมการ(๑.๒๐)ลงในสมกาส(๑.๑๖)ได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-2Kx}{m}(1-\frac{a_o}{L})$$

$$= \frac{-2Kx}{m}\{1-\frac{a_o}{a}(1-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2})\}$$

$$= \frac{-2K}{ma}(a-a_o)x + \frac{Ka_o}{m}(\frac{x}{a})^3 \qquad (๑.๒๑)$$

ตัดพจน์ยกกำลังสูงๆจะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-2K(a-a_o)x}{ma} = \frac{-2T_o x}{ma} \qquad (๑.๒๒)$$

ได้สมการของการเคลื่อนที่เป็นเช่นเดียวกับสมการ(๑.๓) เมื่อ $\omega^2 = \frac{2T_o}{ma}$

ดังนั้น $$x(t) = A\cos(\omega t+\phi)$$

ให้สังเกตว่า ω^2 ก็คือแรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวลหาได้จาก สำหรับการออสซิลเลตเล็กน้อย แรงคืนกลับคือ $2T_o \sin\theta = 2T_o \frac{x}{a}$ การขจัดเป็น x และมวลคือ m

$$\omega^2 = \frac{2T_o x/a}{x \cdot m} = \frac{2T_o}{ma}$$

จะเห็นได้ว่าทั้งการประมาณแบบสลิงกี้($a_o = 0$) และการประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อย($\frac{x}{a} \ll 1$) การออสซิลเลตตามขวางและตามยาวมีความถี่เท่ากัน

ถ้าเราไม่ใช้การประมาณแบบสลิงกี้แล้ว การออสซิลเลตตามขวางจะมีความถี่ไม่เท่ากับการออสซิลเลตตามยาว $(\omega^2)_{long} > (\omega^2)_{tr}$ เห็นได้จาก

$$(\omega^2)_{long} = \frac{2K}{m} = \frac{2Ka}{ma} \qquad (๑.๒๓)$$

และ

$$(\omega^2)_{tr} = \frac{2T_o}{ma} = \frac{2K(a-a_o)}{ma}, \quad T_o = K(a-a_o) \qquad (๑.๒๔)$$

$$= \frac{2Ka}{ma} - \frac{2Ka_o}{ma}$$

แสดงว่า $(\omega^2)_{long}$ มีค่ามากกว่า $(\omega^2)_{tr}$ เป็นจำนวน $\frac{2Ka_o}{ma}$ และ

$$\frac{\omega^2_{long}}{\omega^2_{tr}} = \frac{a}{a-a_o}$$

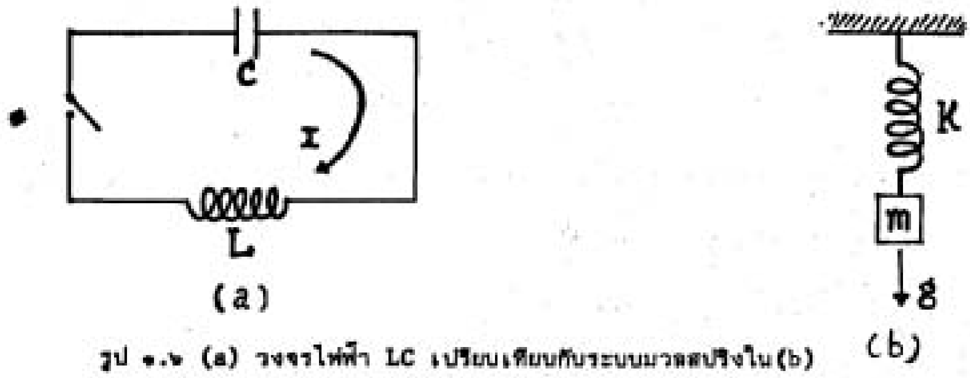
หรือ

$$\frac{\omega_{long}}{\omega_{tr}} = \frac{1}{(1-a/a_o)^{1/2}}$$

<u>ตัวอย่าง ๔</u> วงจรไฟฟ้าประกอบด้วย ตัวเก็บประจุ C ขดเหนี่ยวนำ L และสวิตช์ต่ออนุกรมกันตามรูป ๑.๖(a) เริ่มแรกตัวเก็บประจุมีประจุ Q และสวิตช์เปิดเมื่อเวลา $t < 0$ ถ้าเราสับสวิตช์เมื่อเวลา $t = 0$ ให้หาประจุในเวลาต่อมาบนตัวเก็บประจุ

โดยใช้กฎโวลเตจของเคอร์ชอฟฟ์ (*Kirchhoff's voltage law*) เขียนสมการได้เป็น

$$C^{-1}Q + L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (๑.๒๕)$$



รูป ๑.๖ (a) วงจรไฟฟ้า LC เปรียบเทียบกับระบบมวลสปริงใน (b)

ในที่นี้ Q คือประจุบนตัวเก็บประจุ C และ $\frac{dQ}{dt} = I$ สมการ (๑.๒๕) กลายเป็น

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

ได้รากสมการทั่วไปเป็น $Q(t) = A\sin\sqrt{1/LC}\,t + B\cos\sqrt{1/LC}\,t$ (๑.๒๖)

ที่ $t = 0,\ Q = Q_0$ ดังนั้น $B = Q_0$

และที่ $t = 0$ เริ่มสับสวิตช์กระแสไฟฟ้ายังคงเป็นศูนย์ หรือ $\frac{dQ}{dt} = I = 0$

ทำให้ได้

$$A = 0$$

$$Q(t) = Q_0\cos\sqrt{1/LC}\,t = Q_0\cos\omega t \quad (๑.๒๗)$$

เมื่อ $\omega^2 = 1/LC$ เป็นความถี่ตามธรรมชาติของระบบ

เมื่อเปรียบเทียบวงจรไฟฟ้านี้กับระบบอย่างง่ายของมวลและสปริงตามรูป ๑.๖(b) ซึ่งมีสมการเป็น

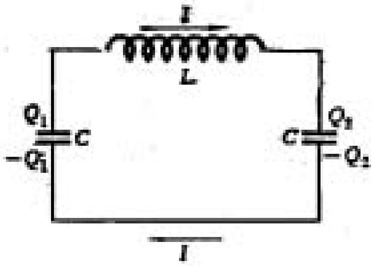
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

ให้รากสมการคือ $x(t) = x_0\cos\sqrt{K/m}\,t = x_0\cos\omega t$

เมื่อ x_0 คือการขจัดเริ่มต้นของมวล m จากตำแหน่งสมดุลย์

ดังนั้นทั้งสองระบบจะคล้ายคลึงกันด้วยปริมาณทางฟิสิกส์ที่สอดคล้องกันคือ L เทียบได้กับ m Q เทียบกับ x $1/C$ เทียบกับ K และ $\omega^2 = 1/LC$ เทียบกับ $\omega^2 = K/m$

ตัวอย่าง ๔ วงจรไฟฟ้า LC



รูป ๑.๗ วงจรไฟฟ้า LC

พิจารณาการต่ออุปกรณ์ของวงจร LC ประจุจากแผ่นบนของตัวเก็บประจุข้างซ้ายมือ Q_1 ถ่ายเทประจุไปยังแผ่น บนของตัวเก็บประจุทางขวามือ Q_2 ผ่านลวดตัวนำ L แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

(emf) ผ่านลวดตัวนำ $= \frac{LdI}{dt}$

แรงเคลื่อนไฟฟ้าผ่านประจุ Q_1 $= C^{-1}Q_1$

แรงเคลื่อนไฟฟ้าผ่านประจุ Q_2 $= C^{-1}Q_2$

จากรูปจะเห็นได้ว่าประจุบวก Q_1 ทำให้กระแสเคลื่อนที่ไปในทิศทางตามลูกศร ดังนั้นค่าบวก Q_1 ให้ค่าบวก $\frac{LdI}{dt}$ ทำนองเดียวกันค่าบวก Q_2 ให้ค่าลบ $\frac{LdI}{dt}$ เราจะได้

$$\frac{LdI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 \qquad (๑.๒๘)$$

ที่สภาวะสมดุลย์จะไม่มีประจุอยู่บนตัวเก็บประจุทั้งสอง ประจุ Q_2 เกิดขึ้นเนื่องจากกระแส I ที่ได้จากการถ่ายเทประจุ Q_1 ดังนั้นโดยใช้กฎการถาวรของประจุและเครื่องหมายตามรูป ๑.๖ เราได้

$$Q_1 = -Q_2$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = I$$

จากสมการ (๑.๒๘) โดยการกำจัด Q_1 จะได้

$$\frac{LdI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 = -2C^{-1}Q_2$$

$$\frac{Ld^2I}{dt^2} = -2C^{-1}\frac{dQ_2}{dt} = -2C^{-1}I$$

ดังนั้นกระแส $I(t)$ เป็นไปตามสมการ

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I$$

ด้วย

$$\omega^2 = \frac{2C^{-1}}{L} \qquad (๑.๒๙)$$

และ $I(t)$ เป็นการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก มีรากสมการเป็น

$$I(t) = A\cos(\omega t+\phi)$$

ความหมายของ ω^2 ตามสมการ(๑.๒๙) ยังคงเป็นแรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยความเฉื่อย *(inertia)* โดยที่แรงคืนกลับคือแรงเคลื่อนไฟฟ้า $2C^{-1}Q$ ในที่นี้ Q คือการขจัดประจุ Q_2 และ L คือความเฉื่อยประจุ ดังนั้น $\omega^2 = 2C^{-1}Q/QL$

๑.๓ ลิเนียริติ และหลักการรวมกันได้ *(Linearity and the Superposition Principle)*

คุณสมบัติบางประการของสมการอนุพันธ์คือ

ก. ถ้าสมการอนุพันธ์ใดๆมีแต่พจน์กำลังหนึ่งของ $\psi, \dot\psi, \ddot\psi$, ... เราพูดได้ว่าเป็นสมการลิเนียร์ใน ψ เช่นสมการอนุพันธ์อันดับสองของการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก $\ddot\psi = -\omega^2\psi$ เมื่อเรา เขียนกราฟระหว่าง $\ddot\psi$ และ ψ จะได้ความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง

ข. ถ้าในสมการนั้นปราศจากพจน์ซึ่งไม่ขึ้นกับ ψ รวมอยู่ด้วยแล้วสมการนั้นเป็น *homogeneous* ในทางตรงกันข้ามถ้ามีพจน์ซึ่งไม่ขึ้นกับ ψ รวมอยู่เรียกสมการนั้นเป็น *inhomogeneous* เช่น

$$f(x) = a\dot{x} + bx \qquad \textit{homogeneous}$$
$$f(x) = a\dot{x} + bx + c \qquad \textit{inhomogeneous}$$

ถ้าสมการอนุพันธ์มีพจน์กำลังสูงตั้งแต่สองขึ้นไปของ ψ ปนอยู่ด้วย สมการนั้นเรียกว่า*nonlinear* ตัวอย่าง เช่นสมการ(๑.๗) เป็น *nonlinear* เพราะว่าเราสามารถกระจาย $\sin\psi$ เป็นอนุกรมเทเลอร์ด้วยสมการ(๑.๘) เพียงแต่เราละทิ้งพจน์กำลังสูงของ ψ ทิ้ง เราจะได้สมการลิเนียร์

๑.๓.๑ *Linear homogeneous equations*

สมการอนุพันธ์ *linear homogeneous* มีคุณสมบัติที่น่าสนใจและสำคัญมากอยู่ข้อหนึ่งซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวคือ ถ้า ψ_1 และ ψ_2 เป็นรากสมการของสมการอนุพันธ์อันดับสอง $\ddot\psi = -\omega^2\psi$ แล้ว $\psi_1 + \psi_2$ ก็เป็นรากสมการของสมการนั้นด้วย ส่วนสมการ *nonlinear* ไม่มีคุณสมบัตินี้คือ ผลรวมของสองรากสมการ *nonlinear* ไม่เป็นรากสมการของสมการตัวมันเอง

เราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นไปพร้อมกันทั้งสองกรณี *(linear and nonlinear)* สมมติว่าเรามีสมการอนุพันธ์การเคลื่อนที่ของระบบที่เป็นหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอม มีลักษณะเป็น

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \cdots \qquad (๑.๓๐)$$

เป็นสมการที่เราเคยพบจากกรณีของระบบลูกตุ้ม (สมการ(๑.๗) และสมการ(๑.๘)) ถ้าค่าคงที่สัมประสิทธิ์ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ต่างมีค่าเป็นศูนย์สมการ(๑.๓๐)เป็น *linear* และ *homogeneous* แต่ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์สมการ(๑.๓๐)เป็น *nonlinear* ต่อไปสมมติว่า $\psi_1(t)$ เป็นรากสมการและ $\psi_2(t)$ ซึ่งต่างจาก $\psi_1(t)$ ก็เป็นรากของสมการ(๑.๓๐)ด้วย ดังนั้น

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \ldots\ldots \qquad (๑.๓๑)$$

และ

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \qquad (๑.๓๒)$$

สมการที่เราสนใจคือสมการที่เป็นการรวมกันของ $\psi_1(t)$ และ $\psi_2(t)$ ซึ่งกำหนดให้เป็น $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ และต้องเป็นไปตามสมการ(๑.๓๐) เราได้

$$\frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2} = -C(\psi_1+\psi_2) + \alpha(\psi_1+\psi_2)^2 + \beta(\psi_1+\psi_2)^3 + \ldots \qquad (๑.๓๓)$$

เปรียบเทียบสมการ(๑.๓๓)กับผลรวมของสมการ(๑.๓๑)และสมการ(๑.๓๒) ซึ่งผลบวกของสมการ(๑.๓๑) และ(๑.๓๒)จะเท่ากับสมการ(๑.๓๓)ได้ต่อเมื่อ

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dt^2} \qquad (๑.๓๔)$$

$$-C\psi_1 - C\psi_2 = -C(\psi_1+\psi_2) \qquad (๑.๓๕)$$

$$\alpha\psi_1^2 + \alpha\psi_2^2 = \alpha(\psi_1+\psi_2)^2 \qquad (๑.๓๖)$$

$$\beta\psi_1^3 + \beta\psi_2^3 = \beta(\psi_1+\psi_2)^3, \ \ldots\ldots \text{etc.} \qquad (๑.๓๗)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ(๑.๓๔)และ(๑.๓๕) เป็นจริงส่วนสมการ(๑.๓๖)และ(๑.๓๗)ไม่เป็นจริง แต่จะเป็นจริงได้ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ α และ β มีค่าเป็นศูนย์เท่านั้นหรือเมื่อสมการ(๑.๓๐)เป็นสมการ *linear* สรุปได้ว่าคลื่นใดๆสองคลื่นจะรวมกันได้ต่อเมื่อคลื่นเหล่านั้นเป็นไปตามสมการ *linear homogeneous* และสามารถนำมาใช้กับสมการของการออสซิลเลตใดๆที่เป็นสมการอนุพันธ์ *linear homogeneous* จะได้คำตอบแบบเดียวกับข้างต้น ซึ่งกล่าวได้ว่าเป็นไปตามหลักของการรวมกันได้

เพื่อความสะดวกเราจะใช้ตัวอย่างของระบบลูกตุ้มอย่างง่ายภายใต้เงื่อนไขการออสซิลเลต

เล็กน้อย สมมติว่าเราได้ ψ_1 เป็นคำตอบของสมการของการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้นชุดหนึ่ง (การขจัดและความเร็ว) และได้ ψ_2 เป็นคำตอบของสมการของการเคลื่อนที่เดียวกันสอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้นอีกชุดหนึ่ง คราวนี้ถ้าสภาวะเริ่มต้นของระบบเป็นผลรวมของสภาวะเริ่มต้นที่สอดคล้องกับ ψ_1 และ ψ_2 นั่นหมายความว่าเราให้ลูกตุ้มมีการขจัดเริ่มต้นเป็นผลรวมของการขจัดเริ่มต้นที่สอดคล้องกับ ψ_1 และ ψ_2 และเริ่มต้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากับผลรวมของความเร็วเริ่มต้นที่สอดคล้องกับ ψ_1 และ ψ_2 ด้วย ดังนั้นเราจึงไม่จำเป็นต้องหาคำตอบสำหรับสภาวะเริ่มต้นชุดใหม่อีก เพราะว่าคำตอบนี้จะได้จากการรวมกันของคำตอบที่สอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้นทั้งสองนั่นเองคือ

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

๔.๓.๒ *Linear inhomogeneous equation*

เป็นสมการที่มีพจน์ซึ่งไม่ขึ้นกับ ψ ปนอยู่ด้วย เช่นสมการของระบบที่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบและแรงนี้ไม่เป็นฟังก์ชันของ ψ เรียกว่า *force harmonic oscillation* คือ

$$m\ddot{\psi}(t) = -C\psi(t) + F(t) \qquad (๔.๓๔)$$

ในที่นี้ $F(t)$ เป็นแรงภายนอกที่ไม่ขึ้นกับ $\psi(t)$ พิจารณาหลักการรวมกันได้ที่สอดคล้องกับสมการ(๔.๓๔) ได้ดังต่อไปนี้ สมมติว่าเราให้แรงภายนอกกระทำต่อระบบด้วยแรงเป็น $F_1(t)$ หรือ $F(t) = F_1(t)$ ทำให้สมการ(๔.๓๔) มีรากสมการเป็น $\psi_1(t)$ เมื่อแรงภายนอกเปลี่ยนไปกระทำต่อระบบด้วยแรง $F_2(t)$ หรือ $F(t) = F_2(t)$ และทำให้สมการ(๔.๓๔) มีรากสมการเป็น $\psi_2(t)$ ถ้าเราใช้แรง $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ กระทำต่อระบบพร้อมกัน ดังนั้นระบบจะมีการออสซิลเลตที่สอดคล้องกับการรวมกันได้คือ $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ วิธีการรวมกันได้นี้ยังใช้ได้กับระบบที่มีหลายดีกรีออฟฟรีดอมอีกด้วยไม่ว่าจะมีกี่ดีกรีออฟฟรีดอมก็ตาม

<u>ตัวอย่าง ๖</u> *Spherical pendulum*

เป็นระบบการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มที่สามารถแกว่งได้ทุกทิศทางบนระนาบหนึ่ง (เป็นแบบหนึ่งของระบบสองดีกรีออฟฟรีดอม) ที่สมดุลย์เส้นเชือกจะอยู่ในแนวดิ่งตามแกน z และมวลอยู่ที่ตำแหน่ง $x = y = 0$ เมื่อลูกตุ้มมีการแกว่งทำให้เกิดการขจัดเล็กน้อย สมการของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มคือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x \qquad (๔.๓๕)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{mg}{l} y \qquad (๑.๔๐)$$

สมการทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน กล่าวคือ สมการ(๑.๓๙) มีเพียง x เป็นตัวแปรอย่างเดียว และสมการ(๑.๔๐) มีเพียง y เป็นตัวแปรเท่านั้น เราสามารถหาคำตอบของสมการทั้งสองเป็นอิสระต่อกันคือ

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t+\phi_1) \qquad (๑.๔๑)$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega t+\phi_2) \qquad (๑.๔๒)$$

ด้วย $\omega^2 = g/l$

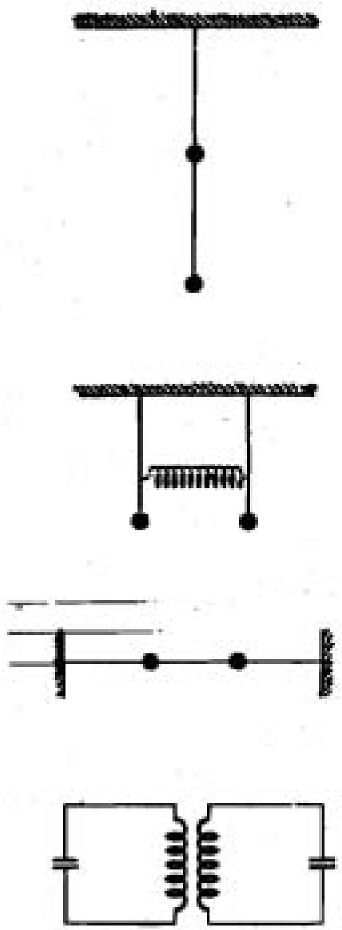
เมื่อค่าคงที่ A_1, A_2, ϕ_1 และ ϕ_2 เราหาได้จากสภาวะเริ่มต้นของการขจัดและความเร็วในทิศทางของ x และy คำตอบที่สมบูรณ์สามารถคิดจากการรวมกันได้ของการเคลื่อนที่ในทาง $\hat{x}x(t)$ และ$\hat{y}y(t)$ เมื่อ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ เป็นหน่วยเวคเตอร์

$$\psi(t) = \hat{x}x(t) + \hat{y}y(t) \qquad (๑.๔๓)$$

๑.๔ การเคลื่อนที่อย่างอิสระของระบบสองดีกรีออฟฟรีดอม

ตัวอย่างสำหรับระบบสองดีกรีออฟฟรีดอมในธรรมชาติมีมากมาย ที่เห็นได้ชัดได้แก่ระบบของโมเลกุลและหว่างอนุภาคชั้นมูลฐาน การที่จะศึกษาระบบทั้งสองนี้จำเป็นต้องใช้ความรู้ทางวิชาควานตัมเมแคนิคส์ (quantum mechanics) (ซึ่งเป็นวิชาในชั้นปีที่ ๔ ยากแก่การเข้าใจสำหรับนักศึกษาที่ยังไม่ได้เรียน) ส่วนตัวอย่างที่ง่ายๆก็มี ระบบสองลูกตุ้ม (double pendulum) ซึ่งมีเส้นเชือกผูกร้อยกับลูกตุ้มหนึ่งและผูกติดกับเพดาน ส่วนอีกลูกตุ้มหนึ่งผูกติดกับลูกตุ้มแรก , ระบบสองลูกตุ้มเหมือนเชื่อมกันด้วยสปริงเบาตัวหนึ่ง, ระบบเส้นเชือกร้อยกับลูกปัด และระบบสองวงจร LC เชื่อมต่อกันตามรูป ๑.๔ ระบบที่กล่าวมานี้เราต้องใช้ตัวแปร ๒ ตัวเพื่ออธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ของระบบ เช่น ψ_a และψ_b

ตัวอย่างเช่น ในกรณีของระบบลูกตุ้มที่สามารถแกว่งได้ทุกทิศทาง ส่วนเคลื่อนที่ (moving part)



รูป ๑.๔ ระบบสองดีกรีออฟฟรีดอมต่างๆ

ϕ_a และ ϕ_b แทนค่าแหน่งของลูกตุ้มทั้งสองในทิศทางตั้งฉากกับแนวราบ สำหรับระบบลูกตุ้มควบคู่ (coupled pendulums) การขจัด ϕ_b และ ϕ_a ใช้แทนค่าแหน่งของสองลูกตุ้มขณะใดๆ ส่วนในกรณีระบบวงจร LC เชื่อมต่อกัน การขจัด ϕ_a และ ϕ_b ใช้แทนประจุบนตัวเก็บประจุทั้งสองหรือแทนกระแสในวงจร

การเคลื่อนที่ทั่วไปของระบบที่เป็นสองดีกรีออฟฟรีดอม เกิดจากการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน และปรากฏลักษณะที่ยุ่งยากไม่มีส่วนใดแสดงเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างชัดเจน การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกของมวลทั้งสองไปพร้อมกันนี้เราเรียกว่า normal modes หรือ modes โดยการเลือกสภาวะเริ่มต้นที่เหมาะสม เราสามารถได้ระบบที่มีการออสซิลเลตเพียงหนึ่ง mode หรือมากกว่า ดังนั้นแต่ละ mode จะไม่เกี่ยวข้องต่อกันถึงแม้มวลเหล่านั้นจะเกี่ยวข้องต่อกันก็ตาม

๑.๔.๑ คุณสมบัติของ mode

คลื่นแต่ละคลื่นที่เป็น SHM มารวมกันได้มีความถี่เดียวกัน และผ่านจุดสมดุลย์พร้อมกัน คลื่นที่เกิดขึ้นจะมีเพียง mode เดียวเท่านั้น และจะไม่ปรากฏเป็นลักษณะดังต่อไปนี้

$$\phi_a(t) = A\cos\omega t \qquad \phi_b(t) = B\sin\omega t \text{ (มีเฟสต่างกัน)}$$

หรือ $\psi_a(t) = A\cos\omega_1 t \qquad \psi_b(t) = B\cos\omega_2 t$ (มีความถี่ต่างกัน)

แต่โดยทั่วไปการรวมกันได้ของคลื่นตั้งแต่สองคลื่นขึ้นไปไม่จำเป็นต้องมีความถี่เท่ากัน ทำให้เกิด mode ได้หลาย mode เช่น mode 1

$$\psi_a(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)$$

$$\psi_b(t) = B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) = \frac{B_1}{A_1}\psi_a(t) \qquad (๑.๔๔)$$

ซึ่งมีความถี่และค่าคงที่เฟสเดียวกันสำหรับดีกรีออฟฟรีดอมทั้งสอง

ทำนองเดียวกันใน mode 2

$$\psi_a(t) = A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$\psi_b(t) = B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) = \frac{B_2}{A_2}\psi_a(t) \qquad (๑.๔๔)$$

แต่ละ mode จะมีความถี่เป็นของตัวมันเอง กล่าวคือ ω_1 สำหรับ mode 1 และ ω_2 สำหรับ mode 2 และในแต่ละ mode ระบบจะมี characteristic "ลักษณะ" หรือรูปร่างซึ่งถูกกำหนดด้วยอัตราส่วนของแอมปลิจูดของส่วนเคลื่อนที่ทั้งสอง คือ A_1/B_1 สำหรับ mode 1 และ A_2/B_2 สำหรับ mode 2 ให้สังเกตว่าในหนึ่ง mode อัตราส่วน $\psi_a(t)/\psi_b(t)$ เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา พอดีมีค่าเท่ากับอัตราส่วน A_1/B_1 หรือ A_2/B_2 ซึ่งอาจเป็นไปได้ทั้งเป็นค่าบวกและเป็นค่าลบ การเคลื่อนที่ทั่วไปของระบบจะเป็นการรวมกันได้ของสอง mode ออสซิลเลตในขณะใดๆ

$$\psi_a(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$\psi_b(t) = B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๔๕)$$

จากตัวอย่างของระบบ spherical pendulum จะเห็นได้ว่าทั้งสอง mode สอดคล้องกับการออสซิลเลตตามแกน x และแกน y ตามลำดับ และมีความถี่เดียวกันด้วย $\omega = \sqrt{g/l}$ แทนที่เราจะได้คำตอบทั่วไปเป็นเช่นเดียวกับสมการ (๑.๔๕) ซึ่งสอดคล้องกับทั้งสองความถี่ที่ต่างกัน เราได้

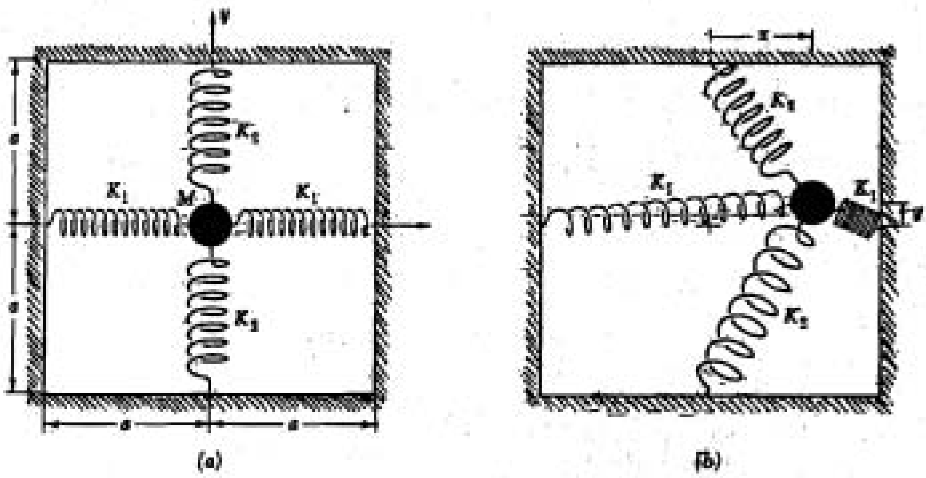
ผลลัพธ์เพียงความถี่เดียว ดังนั้นได้คำตอบเป็นเช่นเดียวกับสมการ(๑.๔๒) และ(๑.๔๓)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \psi_a(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) \quad \omega_1 = \omega \\
y(t) &= \psi_b(t) = B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \quad \omega_2 = \omega
\end{aligned}
\qquad (๑.๔๗)
$$

ทั้งสอง modes มี ω เพียงค่าเดียว กรณีนี้เราเรียกว่าเกิด degenerate

<u>ตัวอย่าง ๗</u> การออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกใน ๒ มิติ

กำหนดให้มวล m ออสซิลเลตอย่างอิสระบนระนาบ xy เป็นการออสซิลเลตเล็กน้อย ยึดด้วยสปริงเบา ๔ ตัวกับผนัง สปริง ๒ ตัวที่มีค่าคงที่สปริง K_1 อยู่ในแนวแกน x และสปริงอีก ๒ ตัวมีค่าคงที่สปริง K_2 อยู่ตามแนวแกน y ตามรูป ๑.๔ ใช้การประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อยเราสามารถละทิ้งพจน์ที่มีกำลังมากกว่าหนึ่ง x^2/a^2, y^2/a^2 และ xy/a^2 ได้



รูป ๑.๔ การออสซิลเลตในสองมิติ (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

พิจารณาการขจัดทางแกน x อย่างเดียว เราได้

$$F_x = -2K_1 x \qquad (F_y = 0)$$

แต่ถ้ามีการขจัดทางแกน y เพิ่มขึ้นอีก แต่ยังคงเป็นการออสซิลเลตเล็กน้อย

$$F_y = -2K_2 y$$

เราจะได้สมการของการเคลื่อนที่เป็นสมการลิเนียร์สองสมการคือ

$$m\ddot{x} = -2K_1 x$$

$$m\ddot{y} = -2K_2 y \qquad (๑.๔๓)$$

ซึ่งมีคำตอบเป็น

$$x = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) \qquad \omega_1^2 = \frac{2K_1}{m}$$

$$y = A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad \omega_2^2 = \frac{2K_2}{m} \qquad (๑.๔๔)$$

จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่ตามแกน x และ แกน y ไม่ควบคู่กัน แยกต่างหากจากกันได้ และต่างก็เป็นการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกที่มีอัมปลิจูด, ความถี่ และค่าคงที่เฟสเป็นของตัวเองทั้งแกน x และแกน y เราเรียกว่า พิกัดปกติ (normal coordinate)

๑.๔.๒ Systematic solution for mode

สมมติว่าเรามีสองสมการควบคู่กันที่เป็นสมการลิเนียร์เอกพันธ์อันดับแรกในพิกัด x และ y คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x - a_{12}y \qquad (๑.๔๕)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{21}x - a_{22}y \qquad (๑.๔๖)$$

ครั้งแรกเราสมมติว่า การออสซิลเลตมีเพียง mode เดียว กล่าวคือเราสมมติว่าทั้งสองดีกรีออฟฟรีดอม x และ y ออสซิลเลตเป็นแบบฮาร์โมนิกด้วยความถี่เดียวกันและค่าคงที่เฟสเท่ากัน เราได้

$$x = A\cos(\omega t+\phi)\ ; \qquad y = B\cos(\omega t+\phi) \qquad (๑.๔๗)$$

เราต้องการทราบค่า ω และ B/A ซึ่งเป็นตัวบอกรูปร่างของการออสซิลเลต จากสมการ(๑.๔๒) เราได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \qquad (๑.๔๓)$$

แทนค่าสมการ(๑.๔๓) ลงในสมการ(๑.๔๒) และจัดเรียงพจน์ใหม่ เราจะได้สมการลิเนียร์เอกพันธ์ ใน x และ y คือ

$$(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0 \qquad (๑.๔๔)$$

$$a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0 \qquad (๑.๔๕)$$

กำจัด x และ y โดยการหาอัตราส่วนของ y/x ของสมการ(๑.๔๔) และ(๑.๔๕)

$$y/x = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (๑.๔๖)$$

$$y/x = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \qquad (๑.๔๗)$$

เปรียบเทียบสมการ(๑.๔๖) และ(๑.๔๗) ซึ่งให้ผลเหมือนกัน เราได้

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}$$

หรือ

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_2 = 0 \qquad (๑.๔๘)$$

วิธีอื่นที่หาจากสมการ(๑.๔๘)ได้โดยหาจากดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของสัมประสิทธิ์ของสมการ(๑.๔๔) และ(๑.๔๕) เป็น 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} \equiv (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_2 = 0 \qquad (๑.๔๘)$$

สมการ(๑.๕๘)และสมการ(๑.๕๙) เป็นสมการ quadratic ของตัวแปร ω^2 มีรากสมการคือ ω_1^2 และ ω_2^2 ตอนต้นเราสมมติว่ามีเพียงความถี่เดียว แต่จากรากสมการเราพบว่ามีสองความถี่ ความถี่ ω_1 เป็นความถี่ของ mode 1 และ ω_2 เป็นความถี่ของ mode 2 รูปร่างหรือลักษณะของ x และ y ใน mode 1 หาได้โดยแทน $\omega^2 = \omega_1^2$ กลับเข้าไปในสมการ(๑.๕๖)และ (๑.๕๗) ดังนั้น

$$(y/x)_{\text{mode }1} = (B/A)_{\text{mode }1} = B_1/A_1 = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (๑.๖๐\ ก)$$

ทำนองเดียวกัน

$$(y/x)_{\text{mode }2} = (B/A)_{\text{mode }2} = B_2/A_2 = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (๑.๖๐\ ข)$$

คำตอบทั่วไปที่ได้จากการรวมกันได้ของทั้งสอง mode ดังนี้

$$x(t) = x_1(t)+x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๖๑)$$

$$y(t) = (B_1/A_1)A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + (B_2/A_2)A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

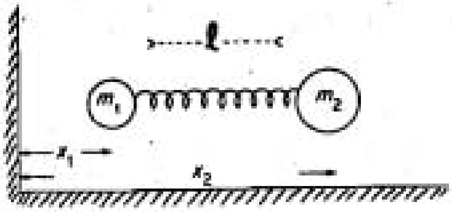
$$= B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) + B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๖๒)$$

ให้สังเกตว่าถ้าเราเลือกค่าคงที่ A_1, ϕ_1, A_2 และ ϕ_2 ในสมการ(๑.๖๑) อย่างอิสระแล้ว เราจะไม่สามารถเลือกค่าคงที่ที่เหลือในสมการ(๑.๖๒) ได้อย่างอิสระอีก ทั้งนี้เพราะว่า ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นค่าที่ถูกกำหนดแน่นอนและต้องเป็นไปตามสมการ(๑.๖๐)

ถ้า A_1, ϕ_1, A_2 และ ϕ_2 เป็นสภาวะเริ่มต้นของสมการ x(t) แล้ว สมการ y(t) ก็จะต้องถูกบังคับด้วยสภาวะเริ่มต้นเดียวกัน

<u>ตัวอย่าง ๔</u> การออสซิลเลตของสองวัตถุ

จากรูป ๑.๑๐ แสดงวัตถุสองก้อนมีมวล m_1 และ m_2 เชื่อมกันด้วยสปริงเบาที่มีค่าคงที่สปริง K เคลื่อนที่ไถลบนพื้นราบที่ปราศจากความเสียดทาน ดังนั้นจะมีแรงเนื่องจากสปริงเพียงอย่างเดียวที่กระทำต่อวัตถุทำให้วัตถุมีการเคลื่อนที่ เราสมมติว่าศูนย์กลางของมวล (center of



รูป ๑.๑๐ วัตถุมวล m_1 และ m_2 เชื่อมด้วยสปริงมีค่าคงที่สปริง K

mass) หยุดนิ่ง ดังนั้น m_1 และ m_2 จะสั่นกลับไปกลับมาสัมพันธ์กับศูนย์กลางของมวลในทิศทางตรงกันข้าม เมื่อ m_1 เคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ m_2 จะเคลื่อนที่ไปทางขวามือ และมวลทั้งสองถึงที่ระยะมากที่สุดของการเคลื่อนที่ในเวลาเดียวกัน พิจารณาจากรูป ๑.๑๐ ในขณะใดๆมวล m_1 อยู่ที่ตำแหน่ง x_1 และมวล m_2 อยู่ที่ตำแหน่ง x_2 คิดจากผนังข้างซ้ายมือ ดังนั้นความยาวของสปริงในขณะใดๆเป็น x_2-x_1 ซึ่งเท่ากับความยาวขณะสมดุลย์ ℓ บอกได้ด้วยการขจัด x

$$\ell+x = x_2-x_1$$

$$x = x_2-x_1-\ell \qquad (๑.๖๓)$$

การขจัด x มีค่าเป็นบวกเมื่อสปริงถูกยืดออก และมีค่าเป็นลบเมื่อสปริงถูกกดเข้าจากสภาวะปกติ ให้ F_1 และ F_2 เป็นแรงเนื่องจากสปริงกระทำต่อมวลทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น

$$F_1 = Kx \quad ; \quad F_2 = -Kx \qquad (๑.๖๔)$$

เราได้สมการของการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสองเป็น

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = Kx \qquad (๑.๖๕)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Kx \qquad (๑.๖๖)$$

สมการทั้งสองสามารถรวมกันได้ โดยคูณสมการแรกด้วย m_2 และคูณสมการหลังด้วย m_1 และลบสมการหลังจากสมการแรก เราได้

$$m_1m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - m_1m_2\frac{d^2x_1}{dt^2} = -m_1Kx - m_2Kx$$

เขียนใหม่ได้

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = -Kx \qquad (๑.๖๗)$$

จากสมการ(๑.๖๖) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t สองครั้ง และ ℓ คือความยาวของสปริงเมื่อสมดุลย์เป็นค่าคงที่ เราได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (๑.๖๘)$$

แทนค่าสมการ(๑.๖๘) ในสมการ(๑.๖๗) ดังนั้นได้สมการที่มีตัวแปรของ x อย่างเดียว

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

หรือ

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \qquad \text{เมื่อ} \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

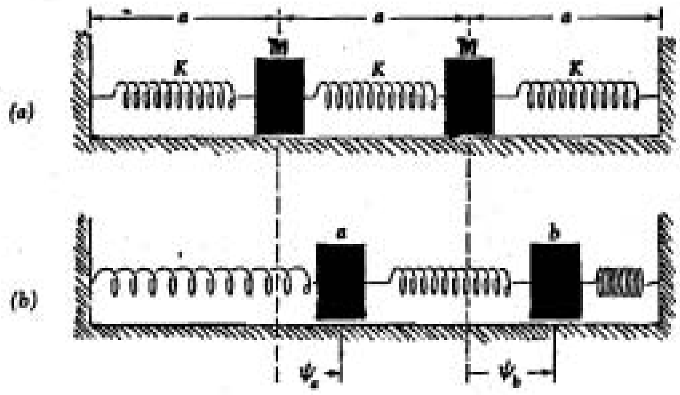
μ เรียกว่า reduced mass ของระบบ นั่นคือการเคลื่อนที่ของสองวัตถุสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเดียวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุเดียวที่มีมวลเท่ากับ μ ผูกติดกับสปริงตัวเดียวกัน ดังนั้นความถี่ของการออสซิลเลตของสองวัตถุเป็น

$$\omega^2 = \frac{K}{\mu}$$

<u>ตัวอย่าง ๘</u> การออสซิลเลตตามยาวของสองมวลควบคู่กัน

วิธีหาคำตอบของระบบนี้ทำได้สองวิธีดังนี้

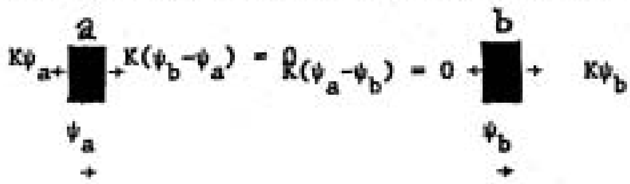
วิธีแรกใช้การคาดคะเน จากการคาดคะเนเราทราบว่าต้องมีสอง modes เพราะว่าระบบเป็นแบบ ๒ ดีกรีออฟฟรีดอม (คือมีสองตัวแปรที่ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของทั้งสองมวล) แต่ละส่วนเคลื่อนที่ (moving part) จะมีการเคลื่อนที่เป็นแบบฮาร์โมนิก และใน mode เดียวกันแต่ละมวลมีความถี่เท่ากัน คือมี ω^2 เท่ากัน แรงคืนกลับต่อหน่วยมวลต่อหน่วยการขจัดเท่ากัน ซึ่งเป็น



รูป ๑.๑๑ การออสซิลเลตตามยาว (a) ขณะสมดุลย์ (b) การขจัดขณะใดๆ

จริงไม่ว่าจะเป็นหนึ่งดีกรีออฟฟรีดอมหรือเป็นส่วนย่อยของระบบใหญ่ที่มีดีกรีออฟฟรีดอมมากกว่าหนึ่งขึ้นไปก็ตาม

ครั้งแรกเราให้ $|\psi_a| = |\psi_b|$ เมื่อมวลทั้งสองมีการขจัดเท่ากัน ($\psi_a = \psi_b$) เราคาดคะเนว่ามวลทั้งสองเคลื่อนที่ไปทางเดียวกัน สปริงตัวกลางไม่ได้ออกแรงเพิ่มขึ้นเลยเหมือนกับไม่มีสปริงตัวกลาง พิจารณาทีละมวลจะพบว่าแรงกระทำบน a และ b เป็นดังนี้



รูป ๑.๑๒ แสดงทิศทางของแรงที่กระทำต่อวัตถุ

เขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้คือ

$$m\ddot{\psi}_a = -K\psi_a \quad \rightarrow \quad \ddot{\psi}_a = -\frac{K}{m}\psi_a$$

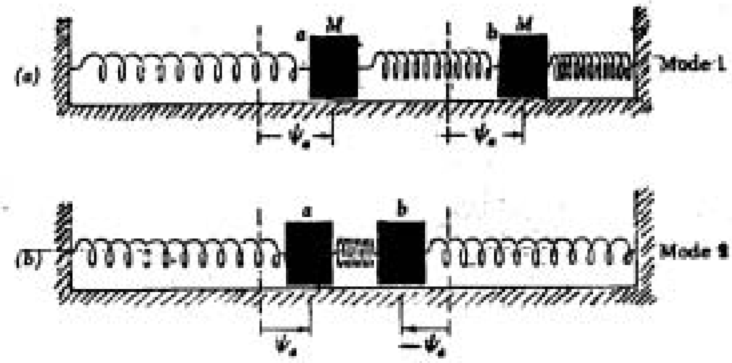
$$m\ddot{\psi}_b = -K\psi_b \quad \rightarrow \quad \ddot{\psi}_b = -\frac{K}{m}\psi_b$$

เราได้หนึ่ง mode ซึ่ง

$$\text{mode 1} : \quad \psi_a(t) = \psi_b(t), \quad \omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad (๑.๒๔)$$

ต่อไปเราคาดคะเนอีกครั้งหนึ่งเพื่อหา mode 2 เราสมมติให้ a เคลื่อนที่เป็นระยะทาง ψ_a ไปทางขวามือ และ b เคลื่อนที่ไปเป็นระยะทางเท่ากันแต่ไปทางซ้ายมือ ดังนั้น mode 2 จะมี

$\psi_a = -\psi_b$

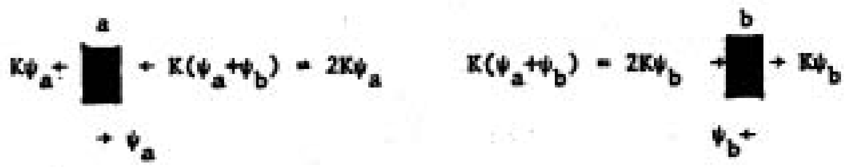


รูป ๑.๑๓ Normal modes ของการออสซิลเลตตามยาว

(a) modeความถี่ต่ำสุด

(b) modeความถี่สูง

พิจารณาแรงกระทำบนมวลทั้งสอง



รูป ๑.๑๔ แสดงทิศทางของแรงที่กระทำต่อวัตถุใน mode 2

เขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$m\ddot{\psi}_a = -K\psi_a - K(\psi_a + \psi_b) = -3K\psi_a$$

$$m\ddot{\psi}_b = -K\psi_b - K(\psi_a + \psi_b) = -3K\psi_b$$

$$\ddot{\psi}_a = \frac{-3K}{m}\psi_a \quad , \quad \ddot{\psi}_b = \frac{-3K}{m}\psi_b$$

เราได้ mode 2 : $\psi_a = -\psi_b$; $\omega_2^2 = \frac{3K}{m}$ (๑.๒๐)

จะเห็นได้ว่าสมการของทั้งสอง mode ไม่ควบคู่กัน ทั้งนี้เพราะว่าเรากำหนดให้ $|\psi_a| = |\psi_b|$ แต่ถ้า $|\psi_a| \neq |\psi_b|$ สมการของทั้งสอง mode จะควบคู่กันได้ วิธีการแก้ปัญหาเราต้องอาศัยวิธีการหาnormal coordinate ดังต่อไปนี้

คราวนี้กำหนดให้ $|\psi_a| < |\psi_b|$ จากการที่เมื่อมวลทั้งสองเคลื่อนที่ไปทางเดียวกันตามรูป ๑.๑๑

แรงกระทำบน a $= -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a)$

สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$m\ddot{\psi}_a = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a)$$

หรือ

$$\ddot{\psi}_a = -\frac{K}{m}(2\psi_a - \psi_b) \qquad (๑.๓๑)$$

แรงกระทำบน b $= -K\psi_b - K(\psi_b - \psi_a)$

สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$\ddot{\psi}_b = -\frac{K}{m}(2\psi_b - \psi_a) \qquad (๑.๓๒)$$

บวกสมการ(๑.๓๑)และ(๑.๓๒) เข้าด้วยกันเราได้

$$\ddot{\psi}_a + \ddot{\psi}_b = -\frac{K}{m}(2\psi_a - \psi_b) - \frac{K}{m}(2\psi_b - \psi_a)$$

$$\frac{d^2(\psi_a+\psi_b)}{dt^2} = -\frac{K}{m}(\psi_a + \psi_b) \qquad (๑.๓๓)$$

สมการ(๑.๓๑)ลบด้วยสมการ(๑.๓๒) เราได้

$$\ddot{\psi}_a - \ddot{\psi}_b = -\frac{K}{m}(2\psi_a - \psi_b) + \frac{K}{m}(2\psi_b - \psi_a)$$

หรือ

$$\frac{d^2(\psi_a-\psi_b)}{dt^2} = -\frac{3K}{m}(\psi_a - \psi_b) \qquad (๑.๓๔)$$

สมการ(๑.๓๓) และ(๑.๓๔) ไม่ควบคู่กัน และต่างก็เป็นสมการลิเนียร์เอกพันธุ์ในตัวแปร $\psi_a+\psi_b$ และ $\psi_a-\psi_b$ ดังนั้นคำตอบของสมการทั้งสองคือ

$$\psi_a+\psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) \quad , \quad \omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad (๑.๓๔)$$

$$\psi_a-\psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m} \qquad (๑.๓๕)$$

ในที่นี้ A_1 และ ϕ_1 คืออัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของ mode 1 และ A_2 และ ϕ_2 คืออัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของ mode 2 เราจะเห็นได้ว่า $\psi_1(t)$ สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางของมวล เมื่อ $\frac{1}{2}(\psi_a+\psi_b)$ คือตำแหน่งของศูนย์กลางของมวลทั้งสองนั่นเอง และ ψ_2 คือส่วนที่สปริงถูกยืดเพิ่มขึ้นจากตำแหน่งสมดุลย์เทียบได้กับระยะขจัดของมวลทั้งสอง ทั้ง ψ_1 และ ψ_2 เราเรียกว่า normal coordinate มีสมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$\ddot{\psi}_1 = -\frac{K}{m}\psi_1 = -\omega_1^2\psi_1 \qquad \text{เป็น} \qquad \text{mode 1}$$

$$\ddot{\psi}_2 = \frac{-3K}{m}\psi_2 = -\omega_2^2\psi_2 \qquad '' \qquad \text{mode 2}$$

ในปัญหาของเราเมื่อรู้ normal coordinate แล้ว เราต้องย้อนกลับไปหา coordinate เดิมของแต่ละมวล โดยการแก้สมการ(๑.๓๔) และ(๑.๓๕) เราได้

$$2\psi_a = \psi_1+\psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๓๗)$$

$$2\psi_b = \psi_1-\psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๓๘)$$

ให้สังเกตว่าถ้าระบบมีการเคลื่อนที่เพียง mode 1 อย่างเดียวแล้ว $A_2 = 0$ จากสมการ(๑.๓๗) และ(๑.๓๘) เราได้ $\psi_a = \psi_b$ ทำนองเดียวกันใน mode 2 เราได้ $A_1 = 0$ และ $\psi_a = -\psi_b$ ซึ่งก็คือแบบเดียวกับที่หาได้จากสมการ(๑.๒๘) และ(๑.๓๐) นั่นเอง

วิธีที่สองเรียกว่า Systematic method

อาศัยจากสมการของการเคลื่อนที่ (๑.๓๑) และ(๑.๓๒)

$$m\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a)$$

$$m\frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K\psi_b - K(\psi_b - \psi_a)$$

เมื่อคำนึงถึงว่าในแต่ละ mode a และ b จะเคลื่อนที่ด้วยความถี่เดียวกัน ดังนั้น

$$\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -\omega^2\psi_a \quad ; \qquad \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -\omega^2\psi_b \qquad (๑.๓๙)$$

เปรียบเทียบกับสมการข้างบนเราได้

$$\psi_a\left(\frac{2K}{m} - \omega^2\right) - \frac{K}{m}\psi_b = 0 \qquad (๑.๔๐)$$

$$-\frac{K}{m}\psi_a + \left(\frac{2K}{m} - \omega^2\right)\psi_b = 0 \qquad (๑.๔๑)$$

ในการหาคำตอบเราจะกำจัด ψ_a และ ψ_b ทิ้ง โดยหาจากอัตราส่วน ψ_a/ψ_b หรือหาจาก determinant ของสัมประสิทธิ์ของ ψ_a และ ψ_b เท่ากับ 0 ก็ได้ผลเช่นเดียวกัน

$$\frac{\psi_a}{\psi_b} = \frac{-K}{m\omega^2-2K} = \frac{-(m\omega^2-2K)}{K}$$

หรือ

$$\begin{vmatrix} m\omega^2-2K & K \\ K & m\omega^2-2K \end{vmatrix} = 0$$

ได้ค่า ω ดังนี้

$$(m\omega^2-2K)^2 - K^2 = 0$$

$$(m\omega^2-2K-K)(m\omega^2-2K+K) = 0$$

$$(m\omega^2-3K)(m\omega^2-K) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3K}{m}, \frac{K}{m} \qquad (๑.๔๒)$$

เลือกค่าความถี่ต่ำเป็น mode ต่ำ คือ

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad \text{และ} \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$

ได้คำตอบเป็น

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) \quad \text{หรือ} \quad \psi_a = A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

และ
$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (๑.๔๓)$$

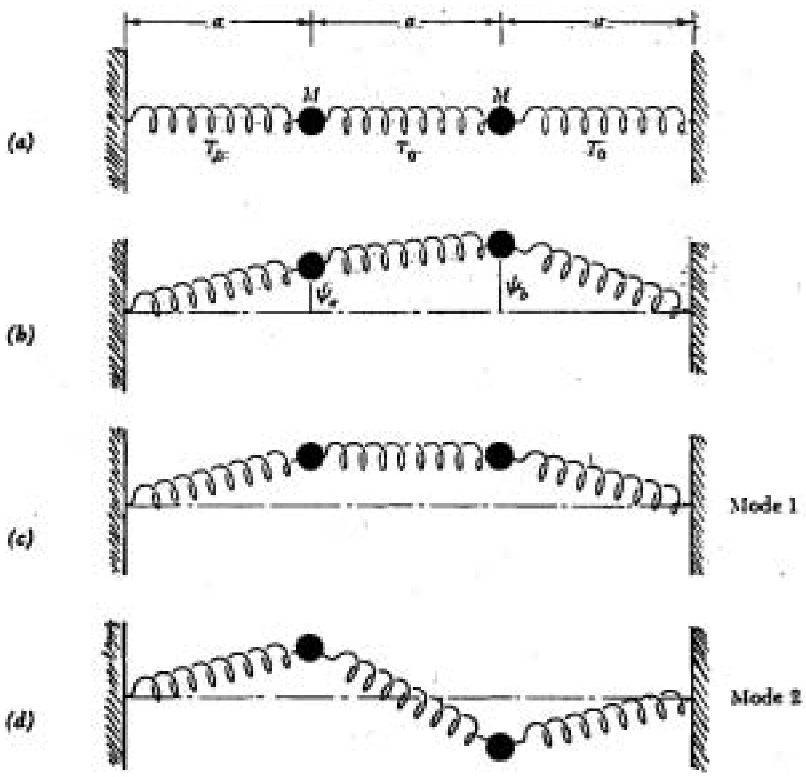
ซึ่งคำตอบทั่วไปจะเป็นการรวมกันของคำตอบทั้งสอง ทำนองเดียวกัน

$$\psi_b = B_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) \quad \text{หรือ} \quad \psi_b = B_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

และ
$$\psi_b = B_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

<u>ตัวอย่าง ๑๐</u> การออสซิลเลตตามขวางของสองมวลควบคู่กัน

กำหนดให้ระบบตามรูป ๑.๑๔ ออสซิลเลตภายในขอบเขตบนระนาบของกระดาษ



สปริงเบาสามตัวเป็นสปริงชนิดเดียวกัน มีค่าคงที่สปริง K และความยาวที่ระยะพัก เป็น a_o ซึ่งสั้นกว่าความยาวขณะสมดุลย์ a ตามรูป ๑.๑๔a สปริงขณะนี้มีแรงดึงเป็น T_o เมื่อพิจารณาจากรูปซึ่งมีลักษณะสมมาตรทำให้คาดคะเนได้ว่าเป็นระบบสองดีกรีออฟฟรีดอมควรมีสอง mode คือ $\psi_a/\psi_b = 1$ และ $\psi_a/\psi_b = -1$ (ในที่นี้กำหนดให้ $|\psi_a| = |\psi_b|$ และเป็นการออสซิลเลตเล็กน้อย) ใน mode 1 (mode ที่มีความถี่ต่ำกว่า กล่าวคือ mode ที่มีแรงคืนกลับต่อหน่วยการขจัดต่อหน่วยมวลของแต่ละมวลน้อยที่สุด) มีรูปร่างตามรูป ๑.๑๔ c สปริงตัวกลางไม่ได้ออกแรงเพิ่มขึ้นอีก แรงที่ทำให้มวลกลับสู่สมดุลย์คือ $-T_o\sin\theta$ (สำหรับการประมาณแบบการออสซิลเลตเล็กน้อย $T = T_o$ และ $\sin\theta = \theta$ ดังนั้น $l = a$)

$$m\ddot{\psi}_a = -T_o \sin\theta \qquad (๑.๔๔)$$

$$\ddot{\psi}_a = \frac{-T_o}{m}\frac{\psi_a}{a} = \frac{-T_o}{ma}\psi_a \; ; \quad \omega_1^2 = \frac{T_o}{ma} \qquad (๑.๔๕)$$

เราจะพิสูจน์ว่า ถ้าใช้การประมาณแบบสลิงกียังคงเป็นจริง

จากรูป ๑.๑๔ c เมื่อมวลมีการขจัดเพิ่มขึ้นความยาวสปริงเพิ่มขึ้นเป็น l ดังนั้นแรงดึงในสปริงเป็น

$$T = K(L-a_o)$$

โดยใช้การประมาณแบบสลิงกี $\quad T = KL(1-\frac{a_o}{L}) = KL$

และเดิมแรงดึงในสปริงเป็น $\quad T_o = K(a-a_o) = Ka(1-\frac{a_o}{a}) = Ka$

ดังนั้น $\quad T = \frac{T_o l}{a} \qquad (๑.๔๖)$

แรงคืนกลับเป็น $\quad T\sin\theta = T_o\frac{l}{a}\cdot\frac{\psi_a}{l}$

$$= \frac{T_o}{a}\psi_a$$

$$\frac{\text{แรงคืนกลับ}}{\text{การขจัด x มวล}} = \frac{T_o\psi_a}{a.\psi_a.m} = \frac{T_o}{ma} \qquad (๑.๔๗)$$

ดังนั้น $\omega_1^2 = \frac{T_o}{ma}$ ค่านี้ใช้ได้ไม่ว่าจะเป็นการประมาณแบบใดก็ตาม

mode 2 $\psi_a/\psi_b = -1$ จากรูป ๑.๑๔ d พิจารณาแรงกระทำบนมวลด้านซ้ายมือที่มีการขจัด $\psi_a(t)$ กำลังสบัดขึ้นด้วยความเร่ง $\ddot{\psi}_a$ แรงดึงกลับสู่สมดุลย์เกิดจากแรงดึงของสปริงทั้งสอง ดังนั้นสมการของการเคลื่อนที่คือ

$$m\ddot{\psi}_a = -T_1 \sin\theta - T_2 \sin 2\theta \qquad (๑.๔๘)$$

เมื่อมวลมีการออสซิลเลตเพียงเล็กน้อย $\sin\theta \to \theta$ $T = T_o$ สมการ(๑.๔๘)กลายเป็น

$$m\ddot{\psi}_a = -T_o\,\theta - 2T_o\,\theta = -3T_o\frac{\psi_a}{a}$$

$$\ddot{\psi}_a = \frac{-3T_o}{ma}\psi \qquad (๑.๔๙)$$

เราได้ $$\omega_2^2 = \frac{3T_o}{ma} \qquad (๑.๕๐)$$

สรุปได้ว่า สำหรับการออสซิลเลตตามขวาง ความถี่ mode มีลักษณะเช่นเดียวกับการออสซิลเลตตามยาวเพียงแต่เปลี่ยน K สำหรับการออสซิลเลตตามยาวเป็น T_o/a ในการออสซิลเลตตามขวางเท่านั้น

$$\text{mode 1}: \quad \omega_1^2 = \frac{T_o}{ma}, \quad \frac{\psi_a}{\psi_b} = +1$$

$$\text{mode 2}: \quad \omega_2^2 = \frac{3T_o}{ma}, \quad \frac{\psi_a}{\psi_b} = -1$$

ตัวอย่าง ๑๑ สองวงจร LC ควบคู่กัน

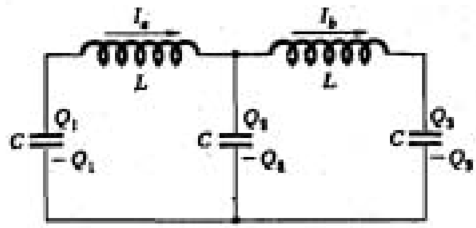
พิจารณาสองวงจร LC ควบคู่กันตามรูป ๑.๑๕ เราต้องการหาสมการของการเคลื่อนที่ประจุหรือกระแสไฟฟ้าในกรณีนี้ ดูวงจรทางด้านซ้ายมือ แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่ผ่านขดลวดตัวนำ L เป็น $L\,dI_a/dt$ ประจุบวก Q_1 บนตัวเก็บประจุซ้ายมือให้ emf เป็น $C^{-1}Q_1$ ซึ่งทำให้กระแส I_a เพิ่มขึ้นตามทิศทวนนาฬิกา... ส่วนประจุบวก Q_2 บนตัวเก็บประจุตัวกลางให้ emf เป็น $C^{-1}Q_2$ ซึ่งทำ

ให้กระแส I_a ลดลง ดังนั้นเราได้

$$L\frac{dI_a}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 \qquad (๑.๔๐)$$

ทำนองเดียวกัน

$$L\frac{dI_b}{dt} = C^{-1}Q_2 - C^{-1}Q_3 \qquad (๑.๔๑)$$



รูป ๑.๑๖ สองวงจรไฟฟ้า LC ควบคู่

จากสมการ (๑.๔๐) และ (๑.๔๑) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2} = C^{-1}\frac{dQ_1}{dt} - C^{-1}\frac{dQ_2}{dt} \qquad (๑.๔๒)$$

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2} = C^{-1}\frac{dQ_2}{dt} - C^{-1}\frac{dQ_3}{dt} \qquad (๑.๔๓)$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I_a \ , \quad \frac{dQ_2}{dt} = I_a - I_b \ , \quad \frac{dQ_3}{dt} = I_b \qquad (๑.๔๔)$$

แทนสมการ (๑.๔๔) ลงในสมการ (๑.๔๒) และ (๑.๔๓) เราได้สองสมการของการเคลื่อนที่ควบคู่กันดังนี้

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2} = -C^{-1}I_a + C^{-1}(I_b - I_a) \qquad (๑.๔๕)$$ 1.10

$$L\frac{d^2I_b}{dt^2} = -C^{-1}(I_b - I_a) - C^{-1}I_b \qquad (๑.๔๖)$$

เมื่อได้สมการของการเคลื่อนที่แล้ว ต่อไปเราต้องการหาสอง normal modes เราอาจหาได้โดยวิธีการคาดคะเน หรือโดย systematic method เมื่อใช้วิธีใดวิธีหนึ่งเราจะได้

$$\text{mode 1} \;:\quad I_a = I_b \;, \qquad \omega_1^2 = \frac{C^{-1}}{L}$$

$$\text{mode 2} \;:\quad I_a = -I_b \;, \qquad \omega_2^2 = \frac{3C^{-1}}{L} \qquad (๑.๔๔)$$

ให้สังเกตว่าใน mode 1 ตัวเก็บประจุตัวกลางไม่ต้องการประจุเพิ่มขึ้นเลย และสามารถถอดตัวเก็บประจุตัวกลางออกได้โดยไม่มีผลทำให้การเคลื่อนที่เปลี่ยนแปลง และประจุ Q_1 และ Q_3 มีขนาดเท่ากันต่างกันตรงเครื่องหมายสำหรับใน mode 1 ส่วนใน mode 2 ประจุ Q_1 และ Q_3 มีค่าเท่ากันเสมอทั้งขนาดและเครื่องหมาย ส่วน Q_2 มีขนาดมากกว่าเป็น ๒ เท่าแต่เครื่องหมายต่างกัน

๑.๔ บีต (Beats)

มีอาการทางฟิสิกส์มากมายที่การเคลื่อนที่เกิดจากการรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่มีความถี่เชิงมุม ω_1 และ ω_2 ต่างกัน สองคลื่นฮาร์โมนิกนี้อาจจะเป็นสอง mode ของระบบสองดีกรีออฟฟรีดอม หรืออาจจะได้จากแรงเคลื่อนภายนอกที่กระทำต่อระบบให้สองการออสซิลเลตที่อิสระต่อกัน ถ้าความถี่ของคลื่นทั้งสองต่างกันน้อย ทำให้ได้คลื่นรวมเกือบเป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน เช่นการเคาะส้อมเสียงสองอัน แต่ละอันทำให้เกิดการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิก ความดันอากาศตรงบริเวณขาส้อมเสียงมีการเปลี่ยนแปลงซึ่งจะแพร่ผ่านไปในอากาศกลายเป็นคลื่นเสียง ที่แก้วหูของคนจะทำให้เกิดการรวมกันของคลื่นเสียงทั้งสอง เราจะแยกฟังไม่ออกเพราะว่าความถี่ของคลื่นรวมกันแล้วเราเรียกว่าบีตมีค่าเท่ากับผลต่างของความถี่ของคลื่นทั้งสองที่มารวมกัน

คลื่นฮาร์โมนิกทั้งสองนี้ในทางคณิตศาสตร์มีลักษณะคล้ายกันมาก เพื่อความสะดวกเราสมมติว่าอัมปลิจูดของคลื่นทั้งสองเท่ากัน และสมมติให้สองคลื่นมีค่าคงที่เฟสเท่ากันด้วยซึ่งเราให้เท่ากับศูนย์ ดังนั้นเราเขียนการรวมกันของสองคลื่น ψ_1 และ ψ_2 เป็น ψ ได้ดังนี้

$$\psi_1 = A\cos\omega_1 t \;, \qquad \psi_2 = A\cos\omega_2 t \qquad (๑.๔๕)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \qquad (๑.๑๐๐)$$

ต่อไปเราเขียนสมการ(๑.๑๐๐)ใหม่ในลักษณะที่น่าสนใจยิ่งขึ้น โดยกำหนดความถี่เชิงมุมเฉลี่ย ω_{av} และความถี่เชิงผสม (modulation) ω_{mod} คือ

$$\omega_{av} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad , \qquad \omega_{mod} = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \qquad (๑.๑๐๑)$$

ผลรวมและผลต่างของค่าทั้งสองจะให้ค่า

$$\omega_1 = \omega_{av} + \omega_{mod} \quad , \quad \omega_2 = \omega_{av} - \omega_{mod} \qquad (๑.๑๐๒)$$

ดังนั้นเราเขียนสมการ(๑.๑๐๐)ในพจน์ของ ω_{av} และ ω_{mod} คือ

$$\begin{aligned}
\psi &= A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \\
&= A\cos(\omega_{av}t + \omega_{mod}t) + A\cos(\omega_{av}t - \omega_{mod}t) \\
&= (2A\cos\omega_{mod}t)\cos\omega_{av}t
\end{aligned}$$

$$\psi = A_{mod}(t)\cos\omega_{av}t \ , \qquad (๑.๑๐๓)$$

$$A_{mod}(t) = 2A\cos\omega_{mod}t \qquad (๑.๑๐๔)$$

แสดงว่าคลื่นรวม ψ มีการออสซิลเลตด้วยความถี่เชิงมุมเฉลี่ย ω_{av} และมีอัมปลิจูด A_{mod} ซึ่งไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาด้วยความถี่ ω_{mod} ถ้าความถี่ ω_1 และ ω_2 มีค่าเกือบใกล้เคียงกัน ดังนั้นความถี่ผสมมีขนาดน้อยเมื่อเทียบกับความถี่เฉลี่ย

$$\omega_1 = \omega_2 \quad ; \qquad \omega_{mod} << \omega_{av}$$

ในกรณีนี้อัมปลิจูดผสม $A_{mod}(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆขณะที่ $\cos\omega_{av}t$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว สมการ(๑.๑๐๓) สัมพันธ์กับการออสซิลเลตแบบ "เกือบเป็นฮาร์โมนิก" ด้วยความถี่ ω_{av} กล่าวคือ ถ้า A_{mod} เป็นค่าคงที่อย่างแท้จริงแล้วสมการ(๑.๑๐๓) จะกลายเป็นการออส-

ซิลเลตแบบฮาร์โมนิกอย่างแท้จริงด้วยความถี่ ω_{av} ซึ่ง $\omega_{av} = \omega_1 = \omega_2$ เมื่อ A_{mod} เป็นค่าคงที่ต่อเมื่อ $\omega_{mod} = 0$ และถ้า ω_1 มีค่าต่างจาก ω_2 เพียงเล็กน้อย การรวมกันได้ของสองคลื่นฮาร์โมนิก ω_1 และ ω_2 เรียกว่า "เกือบเป็นฮาร์โมนิก" ("almost harmonic") หรือ "almost monochromatic" ออสซิลเลตด้วยความถี่ ω_{av} และมีอัมปลิจูดที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ

<u>ตัวอย่าง ๑๒</u> บีตเกิดจากส้อมเสียงสองอัน

เมื่อคลื่นเสียงมาถึงหูเรามันจะทำให้ความดันอากาศที่บริเวณแก้วหู (eardrum) มีการเปลี่ยนแปลงได้ ให้ ψ_1 และ ψ_2 แทนความดันปรากฏ (guage pressure) เกิดที่บริเวณนอกแก้วหูจากส้อมเสียงหมายเลข ๑ และ ๒ ตามลำดับ ถ้าส้อมเสียงทั้งสองถูกตีพร้อมกันด้วยแรงเท่ากัน ทำให้มีอัมปลิจูดและค่าคงที่เฟสของความดันปรากฏ ψ_1 และ ψ_2 มีค่าเหมือนกัน ดังนั้นสมการ(๑.๔๔) ใช้แทนความดันอากาศทั้งสองได้ ความดันรวมขณะนี้เป็นการรวมกันได้ของความดันปรากฏทั้งสองที่มาจากส้อมเสียง

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\psi = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$

$$\psi = A_{mod}(t)\cos\omega_{av} t$$

และ

$$A_{mod}(t) = 2A\cos\omega_{mod} t$$

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองเป็น ν_1 และ ν_2 ซึ่งต่างกันมากกว่าประมาณ 6% ของค่าเฉลี่ย ν_{av} ของมันแล้ว แก้วหูของเราจะได้ยินเสียงทั้งหมดดังอย่างช้าๆด้วยผลต่างของ pitches เท่านั้น และถ้า ν_1 และ ν_2 ต่างกันน้อยกว่า 10 cps แล้ว หูของเราไม่สามารถฟังแยกโนตออกได้นอกจากนักดนตรีที่ได้ฝึกหัดมาอย่างดีแล้ว

<u>Square law detector</u>

เนื่องจากอัมปลิจูดผสม A_{mod} ออสซิลเลตด้วยความถี่เชิงมุม ω_{mod} เมื่อ $\omega_{mod}t$ มีเฟสเพิ่มขึ้นด้วย 2π เราเรียน อัมปลิจูด A_{mod} ผ่านไปได้ครบหนึ่งรอบของการออสซิลเลต

กล่าวคือมันผ่านครบรอบของการออสซิลเลตอย่างช้าด้วยความถี่ ω_{mod} และกลับมาที่ค่าเดิมอีกครั้ง ที่เวลาทั้งสองระหว่างหนึ่งรอบ A_{mod} เป็นศูนย์ ที่เวลานั้นหูของเราไม่ได้ยินเสียงอะไรทั้งสิ้น แต่ระหว่างความเงียบทั้งสองเราจะได้ยินเสียงดังที่ค่าเฉลี่ยของ pitch กล่าวคือเมื่อ $\cos\omega_{mod}t$ ผ่านจากศูนย์ไปเป็น +1 แล้วลดลงเป็นศูนย์และจากศูนย์ไปเป็น -1 และกลับไปเป็นศูนย์อีกแล้วเพิ่มขึ้นเป็น +1 เป็นเช่นนี้ไปตลอดเวลา เราจะเห็นได้ว่า A_{mod} มีเครื่องหมายต่างกันขณะที่เกิดเสียงดังแต่ละครั้ง อย่างไรก็ตามหูของเราไม่สามารถแยกเสียงดังทั้งสองครั้งออกได้ กล่าวคือไม่สามารถแยกค่าของบวกออกจากค่าลบของ A_{mod} ออกได้ เพียงแต่แยกขนาดของ A_{mod} เป็นค่ามาก(เสียงดัง) และค่าน้อย(เสียงค่อย) นั่นคือค่ากำลังสองของ A_{mod} เป็นค่ามากหรือค่าน้อย จึงพูดได้ว่าหูของคนเป็น square law detector เพราะว่า A^2_{mod} มีค่ามากที่สุดสองครั้งสำหรับทุกๆหนึ่งรอบของ modulation (ระหว่างที่ $\omega_{mod}t$ มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย 2π เรเดียน) อัตรา repetition สำหรับ sequence "ดัง-ค่อย , ดัง-คอย , ดัง-ค่อย ,......" เป็นสองเท่าของความถี่ผสม อัตรา repetition ของค่ามากของ A^2_{mod} เรียกว่า ความถี่บีต (beat frequency) กล่าวคือทุก beat cycle เป็นจังหวะที่หูของคนได้ยินเสียงดังขึ้น ในหนึ่ง modulation cycle มี 2 beat cycle หรือความถี่บีตเป็นสองเท่าของความถี่ผสม จากรูป ๔.๑๗ เราจะเห็นได้ว่า

$$\omega_{beat} = 2\omega_{mod} = \omega_1 - \omega_2$$

ดังนั้นความถี่ของบีตมีค่าเท่ากับผลต่างของความถี่ของคลื่นทั้งสองขบวนนั้น เราสามารถเห็นได้จากผลทางคณิตศาสตร์ด้วยคือ

$$A_{mod}(t) = 2A\cos\omega_{mod}t$$

$$A^2_{mod}(t) = 4A^2\cos^2\omega_{mod}t$$

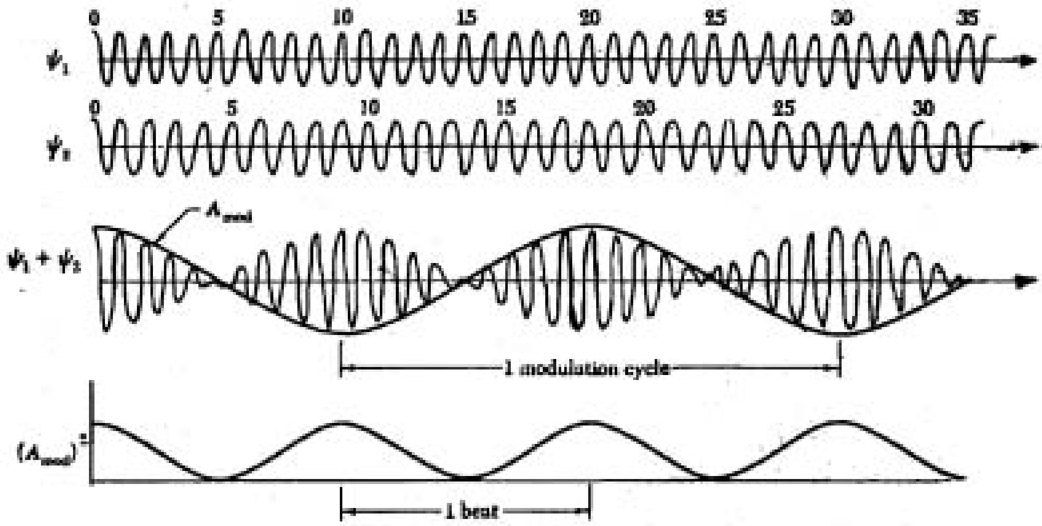
และจาก $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

ดังนั้น $$[A_{mod}(t)]^2 = 2A^2(1 + \cos 2\omega_{mod}t) \qquad (๔.๑๐๔)$$

แต่จากสมการของ beat cycle สมการนี้ควรเป็น

$$\{A_{mod}(t)\}^2 = 2A^2(1 + \cos\omega_{beat}t) \qquad (๑.๑๐๖)$$

ดังนั้น A_{mod}^2 ออสซิลเลตระหว่างค่าเฉลี่ยเป็นสองเท่าของความถี่ผสม $\omega_{beat} = 2\omega_{mod} = \omega_1 - \omega_2$ สรุปได้ว่า การรวมกันของสองคลื่นฮาร์โมนิกที่มีความถี่เกือบเท่ากันทำให้เกิดลักษณะบีต ตามรูป ๑.๑๗



รูป ๑.๑๗ บีต ψ_1 และ ψ_2 เป็นความดันเปลี่ยนแปลงที่บริเวณแก้วหูคนเกิดจากส้อมเสียง ๒ อัน ที่มีอัตราส่วนความถี่เท่ากับ $\nu_1/\nu_2 = 10/9$. ความดันทั้งหมดคือการรวมกันได้ของ $\psi_1 + \psi_2$ ซึ่งเกือบเป็นฮาร์โมนิก ออสซิลเลตที่ความถี่เฉลี่ย ν_{av} และมีอัมปลิจูดที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้า $A_{mod}(t)$.

ตัวอย่าง ๑.๑๓ **Beat between the two normal modes of two weakly coupled identical oscillators**

พิจารณาระบบลูกตุ้มธรรมดาสองชุดที่คล้ายกันตามรูป ๑.๑๘ เชื่อมโยงกันด้วยสปริงเบาตัวหนึ่ง ให้ลูกตุ้มทั้งสองมีการออสซิลเลตเพียงเล็กน้อย การพิจารณาระบบนี้จะใช้การคาดคะเน ซึ่ง normal modes เราสามารถคาดคะเนได้อย่างง่ายดาย โดยเปรียบเทียบกับการออสซิลเลตตามยาวของมวลเหมือนกันที่ได้ศึกษาในตอน ๑.๔มาแล้ว

mode 1 ให้มวลทั้งสองสั่นไปพร้อมกันในทิศทางเดียวกัน $\psi_a = \psi_b$ จะเห็นได้ว่าสปริงไม่ได้ออกแรงเพิ่มขึ้นเลย คงมีความยาวเท่ากับเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลย์ แรงคืนกลับจึงเกิดจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น

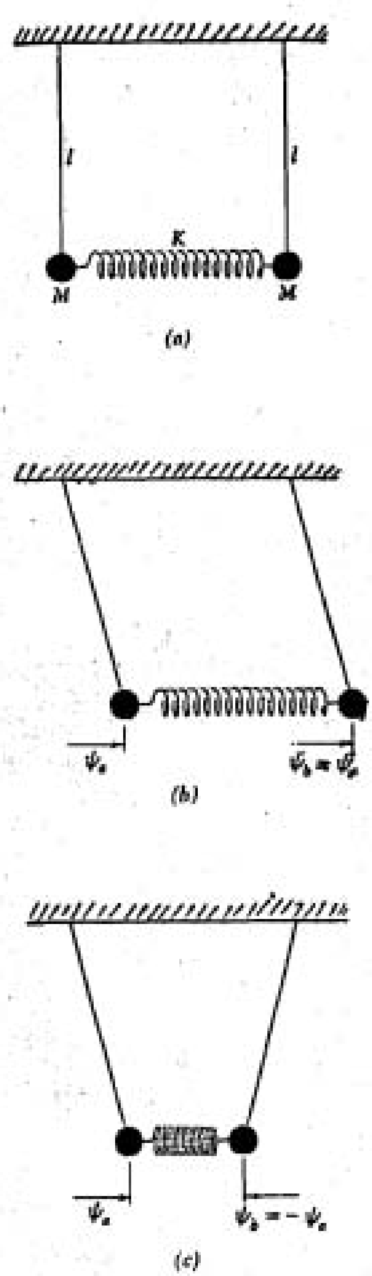
$$\omega_1^2 = \frac{\text{แรงคืนกลับ}}{\text{มวล x การขจัด}} = \frac{mg\theta}{ml\theta} = \frac{g}{l}$$

$$\text{mode 1} \;:\; \omega_1^2 = \frac{g}{l} \;,\; \psi_a = \psi_b$$

mode 2 ให้มวลสั่นพร้อมกันในทิศตรงกันข้าม $\psi_a = -\psi_b$ พิจารณาเฉพาะมวลทางซ้ายมือ สปริงจะหดสั้นลงจากเดิมเป็น $\psi_a + \psi_b$ มวลจะมีแรงกระทำสองแรงที่ทำให้มันกลับสู่สมดุลย์คือ แรงเนื่องจากสปริงและแรงโน้มถ่วง

$$\omega_2^2 = \frac{mg\theta + K(\psi_a + \psi_b)}{m\psi_a}$$

$$= \frac{mg\psi_a/l + K(2\psi_a)}{m\psi_a}$$



รูป ๑.๑๘ ระบบลูกตุ้มเหมือนควบคู่

$$\text{mode 2} : \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \ , \quad \psi_a = -\psi_b \qquad (๑.๑๐๘)$$

ความถี่ของทั้งสอง modes ω_1 และ ω_2จะมีค่าใกล้เคียงกันได้ต่อเมื่อใช้สปริงที่มีค่าคงที่สปริงน้อย หรือสปริงอ่อน จึงทำให้แบบการสั่นของทั้งสอง modes เสริมกันและหักล้างกันก่อให้เกิดลักษณะที่เรียกว่าบีตได้ เราต้องการพิจารณาลักษณะบีตของระบบที่มี ψ_1 และ ψ_2 เป็นการขจัดของระบบ ซึ่งการเคลื่อนที่ทั่วๆไปของมวลทั้งสองหาได้จากการรวมกันของสอง mode ทั้งสองนั่นเอง

$$\begin{aligned} \psi_a &= \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ \psi_b &= \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t+\phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{aligned} \qquad (๑.๑๐๙)$$

คลื่นรวมของมวลทั้งสองจะให้ผลเป็นลักษณะบีตได้มากที่สุดเมื่อให้ modesทั้งสองมีอัมปลิจูดและเฟสเท่ากัน (ถ้าทั้ง A_1 หรือ A_2 ต่างมีค่าน้อยเทียบเป็นศูนย์เมื่อเปรียบเทียบกับอีกค่าหนึ่ง มันจะไม่ปรากฏผลของบีตเลย เพราะว่า มันจะเกิดเพียงแต่การออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิกเท่านั้น แต่ถ้าทั้งสอง modes มีอัมปลิจูดเท่ากันอย่างประมาณจะทำให้เกิดลักษณะบีตอย่างชัดเจน)
ดังนั้นเราให้ $A_1 = A_2 = A$ และการเลือกค่าคงที่เฟส ϕ_1 และ ϕ_2 เราต้องเลือกให้สอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้น โดยเลือกให้ $\phi_1 = \phi_2 = 0$ จากการเลือกค่า A_1, A_2, ϕ_1 และ ϕ_2 สมการ(๑.๑๐๙)กลายเป็น

$$\begin{aligned} \psi_a(t) &= A \cos\omega_1 t + A \cos\omega_2 t \\ \psi_b(t) &= A \cos\omega_1 t - A \cos\omega_2 t \end{aligned} \qquad (๑.๑๑๐)$$

และความเร็วของทั้งสองมวลเป็น

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_a(t) &= \frac{d\psi_a}{dt} = -\omega_1 A \sin\omega_1 t - \omega_2 A \sin\omega_2 t \\ \dot{\psi}_b(t) &= \frac{d\psi_b}{dt} = -\omega_1 A \sin\omega_1 t + \omega_2 A \sin\omega_2 t \end{aligned} \qquad (๑.๑๑๑)$$

พิจารณาสภาวะเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ จากสมการ(๑.๑๑๐) และ(๑.๑๑๑) การขจัดเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของทั้งสองมวลกำหนดด้วย

$$\psi_a(0) = 2A \quad , \quad \psi_b(0) = 0 \quad , \quad \dot{\psi}_a(0) = 0 \quad , \quad \dot{\psi}_b(0) = 0$$

ดังนั้นตอนเริ่มต้นเราต้องดึงวัตถุ a ให้มีการขจัดเป็น 2A ส่วนวัตถุ b อยู่ที่ตำแหน่งสมดุลย์ และให้มวลทั้งสองหยุดนิ่งที่เวลาเดียวกันเป็น $t = 0$ หลังจากนั้นปล่อยให้วัตถุ a แกว่งแล้วให้สังเกต เราพบว่าการออสซิลเลตผ่านไปอัมปลิจูดของลูกตุ้ม a จะลดลงทุกที ขณะเดียวกันลูกตุ้ม b มีอัมปลิจูดเพิ่มขึ้น จนกระทั่งลูกตุ้ม a หยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุลย์ส่วนลูกตุ้ม b ออสซิลเลตด้วยอัมปลิจูดและพลังงานเท่ากับลูกตุ้ม a ตอนเริ่มต้นแกว่งครั้งแรก แสดงว่าพลังงานจากลูกตุ้ม a มีการถ่ายเทอย่างหมดสิ้นให้แก่ลูกตุ้ม b โดยการสมมาตรของระบบเราจะเห็นได้ว่า วิธีการยังคงดำเนินต่อไป พลังงานของการออสซิลเลตจะไหลกลับจากลูกตุ้ม b มาสู่ลูกตุ้ม a อีกครั้งหนึ่ง มีการถ่ายเทพลังงานกลับไปกลับมาระหว่างลูกตุ้มทั้งสองตลอดเวลา เวลาของการครบรอบหนึ่งบีตจะเป็นเวลาที่การถ่ายเทพลังงานจาก a ไปสู่ b และย้อนกลับจาก b มาสู่ a พอดีด้วยความถี่บีต เราเห็นได้ว่าเมื่อใช้ $\omega_1 = \omega_{av} + \omega_{mod}$ และ $\omega_2 = \omega_{av} - \omega_{mod}$ ในสมการ(๑.๑๑๐) เราได้การออสซิลเลตเกือบเป็นฮาร์โมนิก

$$\begin{aligned}
\psi_a(t) &= A\cos(\omega_{av} + \omega_{mod})t + A\cos(\omega_{av} - \omega_{mod})t \\
&= (2A\cos\omega_{mod}t)\cos\omega_{av}t \\
&= A_{mod}(t)\cos\omega_{av}t \qquad\qquad (๑.๑๑๒)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\psi_b(t) &= A\cos(\omega_{av} + \omega_{mod})t - A\cos(\omega_{av} - \omega_{mod})t \\
&= (2A\sin\omega_{mod}t)\sin\omega_{av}t \\
&= B_{mod}(t)\sin\omega_{av}t \qquad\qquad (๑.๑๑๓)
\end{aligned}$$

<u>การคำนวณหาพลังงาน</u>

ต่อไปเราจะหาสมการสำหรับพลังงาน (พลังงานจลน์บวกพลังงานศักย์) ของแต่ละลูกตุ้ม เราคิดว่าอัมปลิจูด $A_{mod}(t)$ ของการออสซิลเลตมีค่าเกือบคงที่ในหนึ่งรอบของการออสซิลเลต

อย่างรวดเร็ว และเราสามารถจะดึงพลังงานที่มีการถ่ายเทระหว่างสปริงอ่อนเชื่อมโยงกับลูกตุ้มทั้งสอง ดังนั้นในระหว่างหนึ่งรอบของการออสซิลเลตอย่างรวดเร็ว เราคิดว่าลูกตุ้ม a เป็นตัวออสซิลเลเตอร์แบบฮาร์โมนิกของความถี่ ω_{av} ด้วยอัมปลิจูด A_{mod} เป็นค่าคงที่ ดังนั้นเราเห็นได้ง่ายว่าพลังงานจะเป็นสองเท่าของค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ (เฉลี่ยในหนึ่งรอบของการออสซิลเลตอย่างรวดเร็ว)

$$\text{พลังงาน} = 2\,\langle \text{kinetic energy} \rangle$$

$$E_a = 2\,\langle \tfrac{1}{2} m \dot{\psi}_a^2 \rangle$$

$$= m \langle \dot{\psi}_a^2 \rangle = m \langle \omega_{av}^2 A_{mod}^2 \sin^2 \omega_{av} t \rangle$$

$$= m\omega_{av}^2 A_{mod}^2 \, \langle \sin^2 \omega_{av} t \rangle \qquad (๒.๓๓๔)$$

$$\langle \sin^2 \omega_{av} t \rangle = \frac{\int_0^T \sin^2 \omega_{av} t \, dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_{av} t \, dt$$

และจากตารางทางคณิตศาสตร์

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$= \frac{2\pi}{2} \text{ หรือ } \pi, \; m = n \quad (๒.๓๓๕)$$

ดังนั้น
$$\langle \sin^2 \omega_{av} t \rangle = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E_a = \tfrac{1}{2} m\omega_{av}^2 A_{mod}^2 = 2mA^2\omega_{av}^2 \cos^2 \omega_{mod} t \quad (๒.๓๓๖)$$

ทำนองเดียวกัน
$$E_b = \tfrac{1}{2} m\omega_{av}^2 B_{mod}^2 = 2m\, A^2\omega_{av}^2 \sin^2 \omega_{mod} t$$

พลังงานทั้งหมดของทั้งสองลูกตุ้มเป็นค่าคงที่ เราสามารถเห็นได้โดยบวกพลังงานของมวลทั้งสองเข้าด้วยกัน

$$E_a + E_b = 2mA^2\omega_{av}^2 (\sin^2 \omega_{mod} t + \cos^2 \omega_{mod} t)$$

$$E = 2mA^2\omega_{av}^2 \quad = \quad \text{ค่าคงที่} \qquad (๑.๑๑๗)$$

ผลต่างของพลังงานทั้งสองคือ

$$E_a - E_b = 2mA^2\omega_{av}^2(\cos^2\omega_{mod}t - \sin^2\omega_{mod}t)$$

$$= E(\cos 2\omega_{mod}t)$$

$$= E\cos(\omega_1 - \omega_2)t \qquad (๑.๑๑๘)$$

รวมสมการ(๑.๑๑๗) และ(๑.๑๑๘) เข้าด้วยกันเราได้

$$(E_a + E_b) + (E_a - E_b) = E + E\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

$$2E_a = E\{1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t\}$$

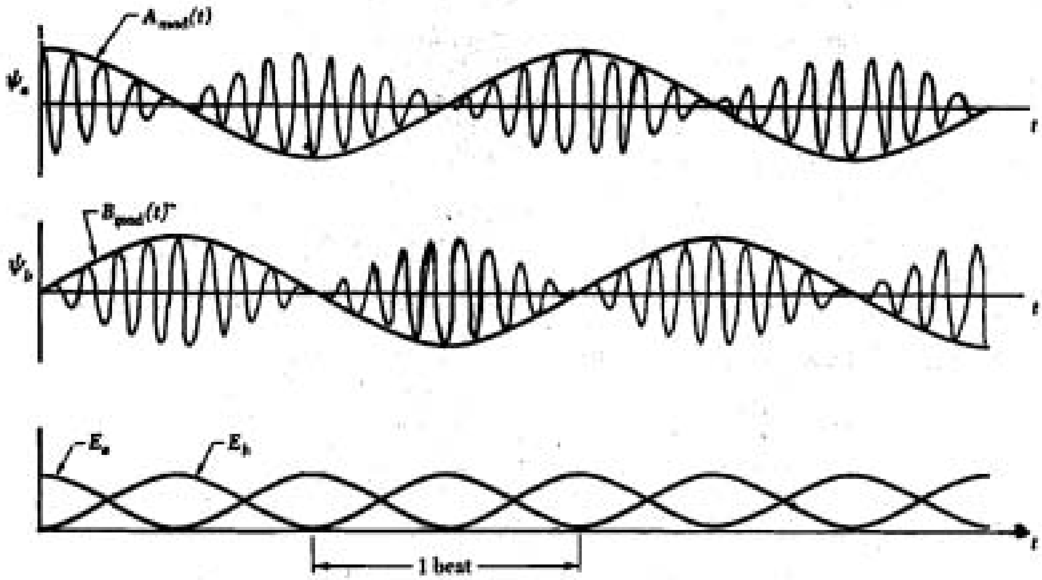
$$E_a = \frac{E}{2}\{1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t\} \qquad (๑.๑๑๙ก)$$

และ

$$(E_a + E_b) - (E_a - E_b) = E - E\cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

$$E_b = \frac{E}{2}\{1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t\} \qquad (๑.๑๑๙ข)$$

จากสมการ(๑.๑๑๔)แสดงให้เห็นว่า พลังงานทั้งหมด E เป็นค่าคงที่ และมีการถ่ายเทพลังงานกลับไปกลับมาระหว่างลูกตุ้มทั้งสองด้วยความถี่บีต ในรูป ๑.๑๔ ได้แสดงความสัมพันธ์ของ $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$; E_a และ E_b



รูป ๑.๑๔ แสดงพลังงานถ่ายเทระหว่างสองลูกตุ้มเหมือนควบคู่กันอย่างอ่อน พลังงานไหลกลับไปกลับมาจาก a ไป b ที่ความถี่ $|\nu_1 - \nu_2|$ ซึ่งก็คือความถี่บีตของทั้งสอง mode.

แบบฝึกหัดบทที่ ๑

1.1 Find the two mode frequencies in cps (cycle per second) for the LC network shown in Fig. 1.16, with L = 10 H (henrys) and C = 6 μF (micro farads). Also, sketch the current configuration for each mode.

1.2 Devise a damping mechanism ("friction") that will damp only mode 1 of the coupled pendulums of Fig. 1.18. Devise another that will damp only mode 2. Notice that friction at the supports (hinges) damps both modes. So does air resistance. These will not work.

1.3 Suppose one pendulum consists of a 1-meter string with a bob that is an aluminum sphere 2 inches in diameter. a second pendulum consists of a 1-meter string with a bob that is a brass sphere 2 inches in diameter. The two pendulums are set into oscillation at the same time and with the same amplitude A. After 5 minutes of undisturbed oscillation, the aluminum pendulum is oscillating with one-half of its initial amplitude. What is the oscillation amplitude of the brass pendulum? Assume that the friction is due to the relative velocity of bob and air and that the instantaneous rate of energy loss is proportional to the square of the velocity of the bob. Show that the energy decays exponentially. (Show that for any other velocity dependence, say υ^4, the energy does not decay exponentially.) Show that for the assumed exponential decay the mean decay time is proportional to the mass of the bob. The final answer is 0.81A for the amplitude of the brass pendulum.

1.4 The amplitude of harmonic oscillations is 50 mm., the period 4 s and the initial phase $\frac{1}{4}\pi$. (1) Write the equation of this oscillation (2) Find the displacement of an oscillating point from the equilibrium position at t = 0 and t = 1.5 s.

1.5 In what time after motion begins will a harmonically oscillating point be brought out of the equilibrium position by half the amplitude? The oscillation period is 24s and the initial phase is zero.

1.6 The amplitude of harmonic oscillation is 5 cm. and the period 4 s. Find the maximim velocity of an oscillating point and its maximum acceleration.

1.7 The eqution of motion of a point is given by $x = 2 \sin(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{4}\pi)$ cm. Find : (1) the period of oscillations, (2) the maximum velocity of the point, (3) its maximum acceleration.

1.8 A point performs harmonic oscillation. The period of oscillations is 2 s, the amplitude 50 mm and the initial phase is zero. Find the velocity of the point at the moment when it is displaced from equilibrium by 25 mm.

1.9 The initial phase of harmonic oscillation is zero. When the point deviates by 2.4 cm, from the position of equilibrium, its velocity is 3 cm/s, and by 2.8 cm-2cm/s. Find the amplitude and period of this oscillation.

What is the ratio between the kinetic energy of a harmonically oscillating poknt and its potential energy for the moments of time: (1) $t = \frac{T}{12}$ s, (2) $t = \frac{T}{8}$ s, (3) $t = \frac{T}{6}$ s? The initial phase of oscillations is zero.

1.11 What is the relationship between the kinetic energy of a harmonically oscillating point and its potential energy for the moments when the displacement of the point from the position of equilibrium is: (1) $x = \frac{A}{4}$, (2) $x = \frac{1}{2}A$, (3) $x = A$, where A is the amplitude of oscillations.

1.12 A body of mass 0.25 kgm is acted on by an elastic restoring force of force constant K = 25 n/m. (1) Construct the graph of elastic potential energy E_p as a function of displacement x, over a range of x from −0.3 m to +0.3 m. Let 1 in. = 0.25 joule vertically, and 1 in. = 0.1 m horizontally.

The body is set into oscillation with an initial potential energy of 0.6 joule and an initial kinetic energy of 0.2 joule. Answer the following questions by reference to the graph: (2) What is the amplitude of oscillation? (3) What is the potential energy when the displacement is one-half the amplitude? (4) At what displacement are the kinetic and potential energies equal? (5) What is the speed of the body at the midpoint of its path? (Answer: (2) 0.253 m)

1.13 The general equation of simple harmonic motion,

$$y = A \sin(\omega t + \phi),$$

can be written in the equivalent form

$$y = B \sin\omega t + C \cos\omega t.$$

(1) Find the expressions for the amplitudes B and C in terms of the amplitude A and the initail phase angle ϕ. (2) Interpret these expressions in term of rotating vector diagram.

1.14 Find (1) the period T, (2) the frequency f, and (3) the angular frequency ω for the body in problem 1.12. (4) What is the initial phase angle ϕ if the amplitude A = 15 cm, the initial displacement x_o = 7.5 cm, and the initial velocity v_o is negative?

1.15 A body is vibrating with simple harmonic motion of amplitude 15 cm and frequency 4 vib/sec. Compute (1) the maximum values of the acceleration and velocity, (2) the acceleration and velocity when the coordinate is 9 cm, (3) the time required to move from the equilibrium position to a point 12 cm distant from it.

1.16 A body of mass 10 gm moves with simple harmonic motion of amplitude 24 cm and period 4 sec. The coordinate is +24 cm when t = 0. Compute (1) the coordinate of the body when t = 0.5 sec, (2) the magnitude and direction od the force acting on the body when t = 0.5 sec, (3) the minimum time required for the body to move from its initial position to the point where x = -12 cm, (4) the velocity of the body when x = -12 cm.
(Ans: (1) 17cm; (2) 417 dynes; (3) 1.33 sec; (4) ±32.6 cm/sec)

1.17 A particle situated at the end of one arm of a tuning fork passes through its equilibrium position with a velocity of 2 $m.s^{-1}$. The amplitude is 10^{-3} m. What is the frequency and period of the tuning fork? Write the equation expressing its displacement as a function of time.
(Ans: 318 Hz, 3.14×10^{-3}sec, $x = 10^{-3}\sin(2\times10^{3}t + \frac{1}{2}\pi)$ m.

1.18 A particle moving with simple harmonic motion of 1.5 m amplitude is vibrating 100 times per second. What is its angular frequency? Calculate its phase, its velocity, and its acceleration, when its displacement is 0.75 m. (Ans: 628 $rad.s^{-1}$, $\frac{\pi}{6}$ rad, 816 $m.s^{-1}$, -2.97×10^{5} $m.s^{-2}$)

1.19 A particular simple harmonic motion has an amplitude of 8 cm and a period of 4 s. Calculate the velocity and acceleration 0.5 s after the particle passes through the extreme of the trajectory. (Ans: -8.9×10^{-2} m.s^{-1} -0.14 m.s^{-2}.)

1.20 The motion of the needle in a sewing machine is practically simple harmonic. If the amplitude is 0.3 cm and the frequency is 600 vib/min, what will be the elongation, velocity, and acceleration one-thirtieth of a second after the needle passes through the center of the trajectory (1) in the upward or positive sense, (2) in the downward or negative sense? (Ans: 2.60×10^{-3}m, -9.42×10^{-2}m.s^{-1}, -10.3 m.s^{-2}; -2.60×10^{-3}m, 9,24 $\times 10^{-2}$ m.s^{-1}, 10.3 m.s^{-2}.)

1.21 What should be the percentage change of length of a pendulum in order that a clock have the same period when moved from a place where g = 9.80 m/s^{-2} to another where g = 9.81 m/s^{-2}? (Ans. 0.1%)

1.22 A simple pendulum whose length is 2 m is in a place where g = 9.80 m/s^{-2}. The pendulum oscillates with an amplitude of 2°. Express, as a function of time, (1) its angular velocity, (2) its angular acceleration, (3) its linear velocity, (4) its centripetal acceleration, and (5) the tension on the string if the mass of the bob is 1 kg.

1.23 A massless spring with no mass attached to hangs from the ceiling. Its length is 20 cm. A mass M is now hung on the lower end of the spring. Support the mass with your hand so that the spring remains relaxed, then suddenly remove your supporting hand. The mass and spring oscillate. The lowest position of the mass during the oscillations is 10 cm below the place it was resting when you supported it. (a) What is the frequency of oscillation? (b) What is the velocity when the mass is 5 cm below its original resting place? Ans. (a) 2.2 cps; (b) 70 cm/sec.

A second mass of 300 gm is added to the frist mass, making a total of mass M + 300 gm. When this system oscillates, it has half the frequency of the system with mass M alone. (c) What is M? (d) Where is the new equilibrium position? Ans. (c) 100 gm; (d) 15 cm below old position.

1.24 Suppose a and b are two coupled oscillators. Consider three different initial conditions:

(i) a and b are released from rest with amplitudes 1 and -1, respectively;

(ii) they are released from rest with amplitudes 1 and 1;

(iii) they are released from rest with amplitudes 2 and 0, respectively.

Thus the initial conditions for case (iii) are a superposition of those for cases(i) and (ii).

Show that the motion in case (iii) is a superposition of the motions for cases(i) and (ii)

1.25 Prove the general case corresponding to the example of Prob. 1.24 (Include the velocities as well as the displacements in the initial condition.)

1.26 Write down the three equations for a system of three degrees of freedom analogous to the general equations (1.50) and (1.51). Show that if one assumes a mode, one gets a determinantal equation analogous to Eq. (1.58) , except that it is a three-by-three determinant. Show that this gives a cubic equation in the variable ω^2 . Since a cubic has three solutions, there are three modes. Generize to N degrees of freedom. This constitutes a proof that N modes exist for a system of N degree of freedom. They must exist, because here you have a prescription for finding yhem.

1.27 Nonidentical coupled pendulums. Consider two pendulums, a and b, with the same string length l, but with different bob masses, M_a and M_b. They are coupled by a spring of spring constant K which is attached to the bobs. Show that the equations of motion (for small oscillations) are

$$M_a \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -M_a \frac{g}{l} \psi_a + K(\psi_b - \psi_a),$$

$$M_b \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -M_b \frac{g}{l} \psi_b - K(\psi_b - \psi_a).$$

Solve these two equations for the two modes by the method of searching for normal coordinates. Show that $\psi_1 \equiv (M_a\psi_a + M_b\psi_b)/(M_a + M_b)$ and $\psi_2 = \psi_a - \psi_b$ are normal coordinates. Find the frequencies and configurations of the modes. What is the physical significance of ψ_1? Of ψ_2? Find a superposition of the two modes which corresponds to the initial conditions at time t = 0 that both pendulums have zero velocity, that bob a have amplitude A, and that bob b have amplitude zero. Let E be the total energy of bob a at t = 0. Find an expression for $E_a(t)$ and for $E_b(t)$. Assume weak coupling. Does the energy of bob a transfer completely to bob b during a beat? Is it perhaps the case that if the pendulum which initially has all the energy is the heavy one, the energy is not completely transferred, but if it the light one, the energy is completely transferred?

Ans. $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + K(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b})$.

$\psi_a = A(\frac{M_a}{M} \cos\omega_1 t + \frac{M_b}{M} \cos\omega_2 t)$, $\psi_b = A \frac{M_a}{M}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$, where $M = M_a + M_b$

After defining $\omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ and $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$, one finds

$$\psi_a = (A\cos\omega_{mod}t)\cos\omega_{av}t + \left(A\frac{M_a - M_b}{M}\sin\omega_{mod}t\right)\sin\omega_{av}t,$$

$$\psi_b = \left(2A\frac{M_a}{M}\sin\omega_{mod}t\right)\sin\omega_{av}t.$$

The energy of each pendulum is easily found in the weak-coupling approximation where we neglect the time variation of the sine or cosine of $\omega_{mod}t$ during one cycle of the fast oscillation at frequency ω_{av}, because we assume $\omega_{mod} << \omega_{av}$ We also neglect the energy stored in the spring at any instant. Then you should find

$$E_b = E\left(\frac{2M_aM_b}{M^2}\right)\left[1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t\right]$$

$$E_a = E\left[\frac{M_a^2 + M_b^2 + 2M_aM_b\cos(\omega_2 - \omega_1)t}{M^2}\right]$$

Thus the energy of pendulum a (the one with all the energy at time zero) varies sinusoidally at the beat frequency, oscillating between a maximum value of E and a minimum value of $(M_a - M_b)/M\ ^2E$,

The energy of pendulum b oscillates at the beat frequency between a minimum value of zero and a maximum value of $(4M_aM_b/M^2)E$. The total energy $E_a + E_b$ is constant (since we neglect damping).

1.28 Using either the slinky approximation or the small-oscillations approximation, find the two coupled equations of motion for the transverse displacements ψ_a and ψ_b of Fig. 1.15. (a) Use the systematic method to find the frequencies and amplitude ratios for the two normal modes. (b) Find linear combination ψ_a and ψ_b that give uncoupled equations; i.e., find the normal coordinates, and find the frequencies and amplitude ratios for the two modes. Ans. See Eqs.(1.85) and (1.90).

1.29 Oscillations of two coupled LC circuits. Find the two normal modes of oscilsation of the coupled LC circuits shown in Fig.1.16, with equations of motion given by Eqs.(1.96) and(1.97). (a) Use the systematic method. (b) Use the method of finding normal coordinates.

1.30 The system is shown in Fig. 1.11. The equations of motion are given by Eqs.(1.71) and (1.72). Use the systematic method given in Eqs.(1.54) through (1.62) to find the modes. You should not simply plug into these equations, however, you should go through the analogous steps "without looking."
Ans. See Eqs.(1.85) and (1.90).