บทที่ 9
สมการของลากรานซ์
(LAGRANGE'S EQUATIONS)

วิธีการที่ใช้หาสมการของการเคลื่อนที่ในแบบพลศาสตร์ นอกจากเราจะใช้วิธีการตามแบบของนิวตันแล้ว ยังมีวิธีอื่นอีก วิธีหนึ่งที่น่าสนใจและควรแก่การศึกษา คือ วิธีการของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อลากรานซ์ (Joseph Louis Lagrange) ดังจะได้ศึกษาต่อไปในบทนี้.

9.1 โคออดิเนตแบบทั่วไป (GENERALIZED COORDINATES)

สิ่งแรกตามวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่แบบลากรานซ์ เราต้องรู้จักโคออดิเนตแบบทั่วไปเสียก่อน เราทราบแล้วว่า เมื่ออนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในสเปซ เราระบุโคออดิเนตได้ 3 โคออดิเนตโดยอาจจะอยู่ในลักษณะของ Cartesian, spherical หรือ Cylindrical โคออดิเนตฯ. หรือตามความเป็นจริงเราอาจกำหนดตัวสัญญลักษณ์ใด ๆ ขึ้น 3 ตัว สำหรับแสดงตำแหน่งของอนุภาคนั้นก็ย่อมทำได้

กรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ใน 2 มิติ หรือในระนาบ เราใช้เพียง 2 โคออดิเนตสำหรับแสดงตำแหน่งของอนุภาค หรือถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในมิติเดียว เช่นการเคลื่อนที่แบบเส้นตรง เราต้องการเพียงโคออดิเนตเดียวเท่านั้น สำหรับแสดงตำแหน่งของอนุภาค

ในกรณีของระบบอนุภาคที่มีอนุภาคทั้งหมด N อนุภาค เราอาจต้องใช้ 3N โคออดิเนตสำหรับแสดงตำแหน่งของอนุภาคทั้งหมดนี้ เพื่อเป็นโครงสร้างของระบบ แต่อย่างไรก็ตามไม่ได้หมายความว่าระบบอนุภาคที่มี N อนุภาคจะต้องใช้ 3N โคออดิเนตเสมอไป เพราะในบางกรณีระบบอนุภาคนี้อาจเป็นการเคลื่อนที่ใน 2 มิติ หรือมิติเดียวก็เป็นได้ ซึ่งแสดงว่าโครงสร้างของระบบนี้อาจใช้น้อยกว่า 3N โคออดิเนต

สำหรับกรณีทั่วไป ถ้าเราให้ n เป็นจำนวนของโคออดิเนตที่น้อยที่สุดที่แสดงถึงโครงสร้างของระบบที่กำหนดให้ใด ๆ เรากำหนดโคออดิเนตเหล่านี้ด้วยสัญญลักษณ์

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$$

เราเรียกมันว่า เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไป และเรียก n ว่าเป็นจำนวน degrees of freedom ของระบบนี้ และโคออดิเนตแบบทั่วไปใด ๆ (q_k) ที่กำหนดนี้ อาจเป็นมุมหรือระยะทางก็ได้

ถ้าจำนวนโคออดิเนตที่แสดงโครงสร้างของระบบมีมากกว่า N และแต่ละโคออดิเนตสามารถแปรผันได้อย่างอิสระ เราเรียกระบบนี้ว่าเป็นระบบ holonomic ในระบบนี้ถ้าจำนวนโคออดิเนตแบบทั่วไปเท่ากับ n จำนวน degree of freedom ก็เท่ากับ n เช่นกัน. ในทางตรงกันข้ามคือระบบ nonholonomic ระบบนี้โคออดิเนตไม่สามารถแปรผันอย่างอิสระได้หมด และจำนวน degree of freedom น้อยกว่าค่าน้อยที่สุดของจำนวนโคออดิเนตหรือน้อยกว่า n ตัวอย่างเช่น การกลิ้งของทรงกลมบนระนาบ เราต้องการ 5 โคออดิเนตสำหรับแสดงโครงสร้างของระบบโดยมี 2 โคออดิเนตแสดงตำแหน่งของทรงกลม และ 3 โคออดิเนตสำหรับแสดงตำแหน่งเวลาทรงกลมหมุน โคออดิเนตเหล่านี้ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างอิสระได้หมด มีเพียง 2 โคออดิเนตเท่านั้นที่เปลี่ยนเมื่อทรงกลมนี้กลิ้ง ซึ่งแตกต่างกับระบบการเคลื่อนที่แบบ holonomic ดังได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นในบทนี้เราจะพิจารณาเพียงกรณีของ holonomic เท่านั้น

ในระบบที่มีอนุภาคเพียงอนุภาคเดียว เราสามารถอธิบายคาร์ทีเชียลโคออดิเนตในลักษณะฟังก์ชั่นของโคออดิเนตแบบทั่วไปได้ คือ

1 – มิติ:

$$x = x(q) \quad ; \quad \text{one degree of freedom}$$

2 – มิติ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{two degree of freedom}$$

3 – มิติ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{three degree of freedom}$$

ถ้าเราสมมติให้ q's ใด ๆ เปลี่ยนจากค่าเริ่มต้น $(q_1, q_2, \ldots)$ ไปยังค่าใกล้เคียง $(q_1 + \delta q_2, q_2 + \delta q_2, \ldots)$ และสัมพันธ์กับการเปลี่ยนในคาร์ทีเซียลโคออดิเนต คือ

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots$$

เมื่อ $\frac{\partial x}{\partial q_2}$, $\frac{\partial x}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2} \ldots$ เป็นฟังก์ชั่นของ q's ตัวอย่างในกรณีนี้ เช่น การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบ ถ้าเรากำหนดให้โพลาร์โคออดิเนตในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป คือ

$$q_1 = r\ , \quad q_2 = \theta$$

แล้ว

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

และ

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \ \delta r - r \sin\theta \ \delta\theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \delta r + r \cos \theta \ \delta\theta$$

โดยที่ให้การเปลี่ยนของ x และ y สัมพันธ์กับการเปลี่ยนน้อย ๆ ใน r และ θ

ถ้าเราพิจารณากรณีของระบบที่มีอนุภาคจำนวนมาก โดยให้ระบบอนุภาคนี้มีจำนวน degree of freedom เป็น n และเป็นจำนวนของโคออดิเนตแบบทั่วไปด้วย ดังนั้นโคออดิเนตแบบทั่วไป คือ

$$q_1, q_2, q_3, \dots q_n$$

การเปลี่ยนของโครงสร้างจาก $(q_1, q_2, q_3, \dots q_n)$ ไปยังค่าใกล้เคียง $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3 \dots q_n + \delta q_n)$ แสดงถึงว่าอนุภาค i ใด ๆ เคลื่อนที่จากตำแหน่ง (x_i, y_i, z_i) ไปยังตำแหน่งใกล้เคียง $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ เมื่อ เมื่อ

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (9.1)$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

ซึ่ง $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$ เป็นฟังก์ชั่นของ q's ใด ๆ ตัวห้อย k แสดงถึงจำนวนของโคออดิเนตแบบทั่วไป หรือจำนวนของ degree of freedom โดยที่ q_k เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไปใด ๆ ส่วนตัวห้อย i แสดงถึงจำนวนของโคออดิเนตใน regtangular โคออดิเนต ดังนั้นสำหรับระบบอนุภาคที่มี N อนุภาค ค่าของ i จึงมีค่าระหว่าง 1 ถึง 3N.

9.2 แรงแบบทั่วไป (GENERALIZED FORCED)

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปเป็นระยะขจัด $d\vec{r}$ ด้วยแรง $\vec{F}$ งานในช่วงนี้ (δW) ซึ่งเกิดจากแรง $\vec{F}$ หาได้จาก

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \, dx + F_y dy + F_z \, dz$$

หรือถ้าเราอธิบาย δW ตามวิธีการของตอน 9.1 เราได้

$$\delta W = \sum_i F_i \, \delta x_i \qquad (9.2)$$

สูตรของสมการ (9.2) ใช้ได้ทั้งกรณีของอนุภาคเดี่ยวและระบบอนุภาค อนุภาคเดี่ยวค่าของ i เป็นค่าระหว่าง 1 ถึง 3 ส่วนระบบอนุภาคค่าของ i เป็นค่าระหว่าง 1 ถึง 3N.

เมื่อเราอธิบายค่าที่เพิ่มขึ้น δx_i ในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป โดยการแทนค่าสมการ (9.1) ในสมการ (9.2) เราได้

$$\delta W = \sum_i (F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \delta q_k)$$

$$= \sum_i \quad (\sum_k \quad F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \; \delta q_k)$$

โดยการสลับค่าของ $\sum\limits_i$ กับ $\sum\limits_k$ จะได้

$$\delta W = \sum_k (\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}) \; \delta q_k \qquad (9.3)$$

สมการ (9.3) เราเขียนใหม่ได้เป็น

$$\delta W = \sum_k Q_k \ \delta q_k \qquad (9.4)$$

เมื่อ

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \qquad (9.5)$$

ค่าของ Q_k ซึ่งอธิบายตามสมการ (9.5) เรียกว่า แรงแบบทั่วไป ซึ่งแสดงในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป q_k ถ้าผลคูณของ $Q_k \delta q_k$ เป็นงานแล้ว Q_k คือแรงและ q_k คือระยะทาง หรือถ้า Q_k เป็นทอร์คแล้ว q_k ก็จะเป็นมุม

การหาค่าของปริมาณ Q_k ทุก ๆ แรงแบบทั่วไป Q_k สามารถคำนวณได้โดยตรง จากความเป็นจริง กล่าวคือถ้า $Q_k \delta q_k$ เป็นงานของระบบ Q_k ก็คือแรงภายนอกใด ๆ เมื่อโคออดิเนต q_k เปลี่ยนไป δq_k ตัวอย่าง เช่น งานของวัตถุแข็งแกร็ง งานนี้เป็นงานที่เกิดจากแรงภายนอกเมื่อวัตถุหมุนไปเป็นมุม $\delta\theta$ รอบแกนที่กำหนด $L_\theta \ \delta_\theta$ เมื่อ L_θ เป็นขนาดของโมเมนต์ของแรงทั้งหมด ในกรณีของตัวอย่างนี้ L_θ คือแรงแบบทั่วไปและ θ คือ โคออดิเนตแบบทั่วไป

แรงแบบทั่วไปสำหรับระบบอนุรักษ์ (Generalized forces for conservative systems)

เราทราบแล้วว่าใน regtangular โคออดิเนต แรงที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่สำหรับระบบอนุรักษ์กำหนดได้จาก

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (9.6)$$

เมื่อ V ฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์ (Potential energy function) จากสมการ (9.5) ดังนั้นแรงแบบทั่วไป สำหรับระบบอนุรักษ์ คือ

$$Q_k = -\left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

หรือ

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (9.7)$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้โพลาร์โคออดิเนต $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ แล้ว แรงแบบทั่วไป $Q_k = -\partial V/\partial r$; $Q_\theta = -\partial V/\partial\theta$. และถ้า V เป็นฟังก์ชั่นของ r เพียงอย่างเดียว (กรณีของแรงผ่านศูนย์กลาง) แล้ว $Q_\theta = 0$

9.3 สมการของลากรานช์ (LAGRANGE'S EQUATIONS)

การหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป เราเริ่มด้วยสมการ

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

แล้วพยายามเขียนสมการของการเคลื่อนที่นี้ให้อยู่ในเทอมของ q's โดยตรง ก่อนอื่นเราต้องพิจารณาในเรื่องพื้นฐานเกี่ยวกับพลังงาน เพื่อคำนวณหาพลังงานจลน์ในเทอมของคาร์ทีเซียลโคออดิเนต แล้วอธิบายในลักษณะฟังก์ชั่นของโคออดิเนตแบบทั่วไป ซึ่งพลังงานจลน์ T ของระบบ N อนุภาค คือ

$$T = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

หรือเขียนแบบง่าย ๆ เป็น

$$T = \sum_{i=1}^{3N} (\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \tag{9.8}$$

เมื่อคาร์ทีเซียลโคออดิเนต x_i เป็นฟังก์ชั่นของโคออดิเนตแบบทั่วไป q_k และเป็นอนุพันธ์ของเวลา กล่าวคือ

$$x_i = x_i (q_1, q_2, \ldots q_n, t) \tag{9.9}$$

ดังนั้นเมื่อเราดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (9.9) จะได้

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{9.10}$$

ในที่นี้ i เป็นค่าระหว่าง 1 ถึง 3N, N เป็นจำนวนอนุภาคของระบบ, k เป็นค่าระหว่าง 1 ถึง n และ n เป็นจำนวนโคออดิเนตแบบทั่วไปหรือจำนวน degree of freedom ของระบบ

จากการอธิบายค่า $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$ ในสมการ (9.10) เราได้

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{9.11}$$

โดยการคูณสมการ (9.11) กับ $\dot{x}_i$ แล้วดิฟเฟอเรนชิเอทเทียบกับเวลา t

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}) = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k})$$

$$= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

หรือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_i^2}{2}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)$$

เมื่อเอา m_i คูณตลอด :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right) = m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}\right)$$

โดยการใส่ $\sum_i$ ตลอด แล้วแทนค่า T จากสมการ (9.8) จะได้

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$= \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

จากนิยามของแรงแบบทั่วไป สมการ (9.5) ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{9.12}$$

สมการ (9.12) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ในโคออดิเนตแบบทั่วไปซึ่งเรารู้จักในชื่อของ "สมการการเคลื่อนที่ของลากรานช์"

ในกรณีเป็นการเคลื่อนที่ของระบบอนุรักษ์ ซึ่งค่าของแรงแบบทั่วไป Q_k เป็นไปตามสมการ (9.7) ดังนั้น สมการของลากรานช์เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{9.13}$$

เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ ลากรานช์ได้กำหนดฟังก์ชั่นของเขา (Lagrangian function) เป็น

$$L = T - V \tag{9.14}$$

เมื่อ T และ V อธิบายในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป และสมการ (9.14) เราเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

ดังนั้นเมื่อ $V = V(q)$ และ $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ แล้ว

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{9.15}$$

จากการแทนค่าสมการ (9.15) ในสมการ (9.13) ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของลากรานช์ในกรณีของระบบอนุรักษ์ คือ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (9.16)$$

สำหรับกรณีของระบบไม่อนุรักษ์ กล่าวคือ แรงแบบทั่วไป Q_k ไม่เป็นไปตามสมการ (9.7) ให้ปริมาณ Q_k' เป็นปริมาณส่วนที่เปลี่ยนไป ดังนั้น

$$Q_k' = Q_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (9.17)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์ ในกรณีของระบบไม่อนุรักษ์ได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (9.18)$$

ตัวอย่างของแรงแบบทั่วไป Q_k' เช่น แรงเสียดทาน เป็นต้น

9.4 การประยุกต์สมการของลากรานจ์ไปใช้ในบางกรณี

การใช้สมการของลากรานจ์หาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่สำหรับระบบใด ๆ นั้น เรามีหลักเกณฑ์โดยทั่วไป ดังนี้

1. กำหนดโคออดิเนตแบบทั่วไปที่เหมาะสมสำหรับเป็นโครงสร้างของระบบ
2. หาค่าของพลังงานจลน์ T ในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป
3. ถ้าเป็นระบบอนุรักษ์ให้หาค่าของพลังงานศักย์ V ในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไป หรือถ้าไม่ใช่ระบบอนุรักษ์ให้หาค่าของแรงแบบทั่วไป Q_k' ด้วยในเทอมของโคออดิเนตแบบทั่วไปเช่นกัน

4. สมการของลากรานซ์ที่จะประยุกต์มาใช้คือ สมการ (9.12), (9.16) และ (9.18) ตามความเหมาะสม

ตัวอย่าง 9.1 จงใช้สมการของลากรานซ์ หาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ในมิติเดียวของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์แบบมีการหน่วง (One-dimensional damped harmonic oscillator)

วิธีทำ ให้ x เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไป

ดังนั้น $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ และ $V = \frac{1}{2} kx^2$

ฟังก์ชันของลากรานซ์ คือ

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

เนื่องจากระบบนี้มีการหน่วง จึงไม่เป็นระบบอนุรักษ์ และแรงหน่วงแปรผันโดยตรงกับความเร็ว ฉนั้น

$$Q_k' = - b\dot{x}$$

จากสมการ (9.18) ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} + Q_k'$$

โดยการแทนค่า :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\ (\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2}{\partial \dot{x}}\right] = \left[\frac{\partial\ (\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2)}{\partial x}\right] - b\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$ <u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 9.2</u> จงใช้สมการของลากรานซ์หาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลาง

<u>วิธีทำ</u> ให้โคออดิเนตแบบทั่วไป $q_1 = r$ และ $q_2 = \theta$

ดังนั้น

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

และฟังก์ชั่นของลากรานซ์

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

เมื่อระบบของแรงผ่านศูนย์กลางเป็นระบบอนุรักษ์ ดังนั้นจากสมการ (9.16) เราได้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \text{และ} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

เมื่อแทนค่าของ L ได้ผลลัพธ์ เป็น

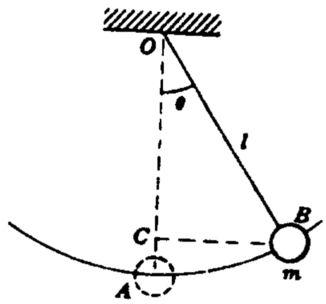
$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{และ} \quad \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0$$

หรือ

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F(r) \quad \text{และ} \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

ตอบ

ตัวอย่าง 9.3 จงแสดงวิธีหาฟังก์ชั่นของลากรานซ์ (Lagrangian function) และหาสมการการเคลื่อนที่ของ Simple pudulum ดังรูป 9.1



รูป 9.1 Simple pendulum

วิธีทำ ให้ θ เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไป ดังนั้น พลังงานจลน์ T คือ

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2 = \tfrac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

และจากรูป 9.1 พลังงานศักย์ คือ

$$\begin{aligned} V &= mg\ (oA - oC) \\ &= mg\ (l - l\cos\theta) \\ &= mgl\ (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

ฟังก์ชั่นของลากรานซ์ คือ $L = T - V$

$$= \tfrac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$ <u>ตอบ</u>

จากสมการของลากรานซ์

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

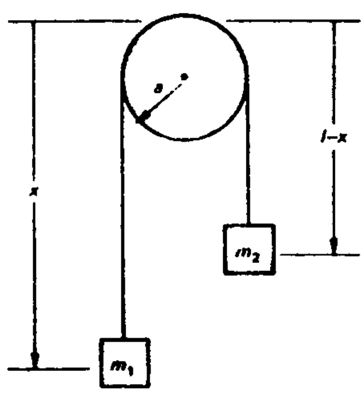
$$\frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\theta}) = -mg\,l \sin\theta$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + mg\,l \sin\theta = 0$$

หรือ สมการการเคลื่อนที่ของ Simple pendulum คือ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ <u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 9.4</u> จงหาสมการการเคลื่อนที่ของ Atwood's machine (ดังรูป 9.2) ด้วยวิธีการของลากรานซ์



<u>รูป 9.2</u> Atwood's machine ($m_1 > m_2$)

<u>วิธีทำ</u> ระบบนี้มี one degree freefom, ให้ x เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไป. ดังนั้น พลังงานจลน์ (กรณีคิดน้ำหนักของรอก อัตราเร็วเชิงมุมของรอก $= \frac{\dot{x}}{a}$) คือ

$$T = \tfrac{1}{2} m_1\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

เมื่อ I เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของรอก พลังงานศักย์ คือ

$$V = - m_1 gx - m_2g(1 - x)$$

ฟังก์ชั่นของลากรานซ์

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}) \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2) x + m_2gl$$

จากสมการของลากรานซ์

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

ดังนั้น

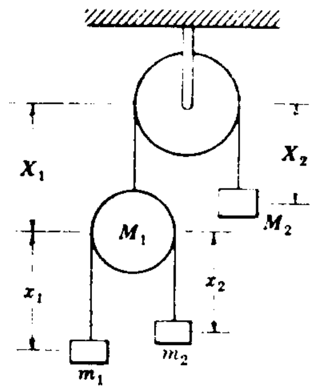
$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}) \ddot{x} = g (m_1 - m_2)$$

หรือ

$$\ddot{x} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2+\frac{I}{a^2}}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 9.5 จงแสดงวิธีหาฟังก์ชั่นของลากรานช์ และสมการการเคลื่อนที่ของ Double atwood machine (ดังรูป 9.3 โดยไม่คิดน้ำหนักของรอก)



รูป 9.3 The double atwood machine

วิธีทำ ระบบของ double atwood machine มี two degree of freedom, ให้โครงสร้างของระบบนี้ แสดงโดยโคออดิเนตแบบทั่วไป x_1 และ x_1, จากรูป (9.3) เราทราบ

$$X_1 + X_2 = 1 = \text{คงที่}$$

และ

$$x_1 + x_2 = 1 = \text{คงที่}$$

โดยการดิฟเฟอเรนชิเอทเทียบกับเวลาได้

$$\dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$$

และ

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

เราหาความเร็วของแต่ละมวลได้ดังนี้ :

ความเร็วของมวล $M_1 = \dot{X}_1$

ความเร็วของมวล $M_2 = \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$

ความเร็วของมวล $m_1 = \frac{d}{dt}(X_1 + x_1) = \dot{X}_1 + \dot{x}_1$

ความเร็วของมวล $m_2 = \frac{d}{dt}(X_1 + x_2) = \dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$

พลังงานจลน์ของระบบ คือ

$$T = \tfrac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2$$

พลังงานศักย์ของระบบ คือ

$$V = -M_1 g X_1 = M_2 g X_2 - m_1 g(X_1 + x_1) - m_2 g(X_1 + x_2)$$

$$= -M_1 g X_1 - M_2 g (1 - X_1) - m_1 g (X_1 + x_1) - m_2 g(X_1 + 1' - x_1)$$

ดังนั้นฟังก์ชั่นของลากรานซ์ คือ

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2$$

$$+ M_1 g X_1 + M_2 g (1 - X_1) + m_1 g(X_1 + x_1) + m_2 g(X_1 + 1 - x_1)$$

สมการของลากรานซ์ ในเทอมของ X_1 และ x_1 คือ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = \frac{\partial L}{\partial X_1}$$

และ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$$

ดังนั้น

$$(M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \ddot{X}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g$$

และ

$$(m_1 - m_2) \ddot{X}_1 + (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

หลังจากแก้สมการทั้งสองนี้ เพื่อหาค่า $\ddot{X}_1$ และ $\ddot{x}_1$ เราได้

$$\ddot{X}_1 = - \ddot{X}_2 = \frac{(M_1 - M_2) (m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2}{(M_1 + M_2) (m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2} g$$

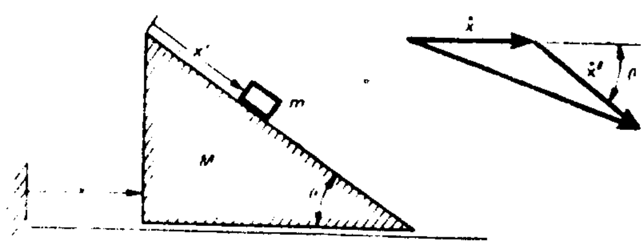
และ

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \frac{2 M_2 (m_1 - m_2)}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2} g$$

ตอบ

ตัวอย่าง 9.6 จงหาสมการการเคลื่อนที่ในกรณีของอนุภาคเคลื่อนที่บนระนาบเอียง ขณะที่ระนาบเอียงเคลื่อนที่อย่างอิสระบนผิวเรียบในแนวราบ

วิธีทำ กำหนดให้ลักษณะการเคลื่อนที่เป็นไปตามรูป 9.4 ซึ่งในกรณีนี้เราพบว่ามี two degree of freedom ดังนั้น เราจึงกำหนดให้ x และ x เป็นโคออดิเนตแบบทั่วไปของระบบ



รูป 9.4 Block sliding down a movable inclined plane

จากรูป (9.4) เราพบว่าอัตราเร็วของระบบหาได้จากกฎของ Cosine คือ

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}^{\;\;2} + 2\,\dot{x}\,\dot{x}' \cos\theta$$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของระบบ คือ

$$T = \tfrac{1}{2}\, m v^2 + \tfrac{1}{2}\, M \dot{x}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ m\ (\dot{x}^2 + \dot{x}'^{\,2} + 2\ \dot{x}\ \dot{x}\ \cos\theta) + \tfrac{1}{2}\ M\ \dot{x}^2$$

เมื่อ M เป็นมวลของระนาบเอียงที่เอียงเป็นมุม θ กับแนวระดับ สำหรับพลังงานศักย์ของระบบนั้น คือ

$$V = -\ mg\ x\ \sin\theta + \text{ค่าคงที่}$$

ฉนั้น ฟังก์ชั่นของลากรานซ์

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2}\ m\ (\dot{x}^2 + \dot{x}'^{\,2} + 2\ \dot{x}\ \dot{x}'\cos\theta) + \tfrac{1}{2}M\ \dot{x}^2 - mgx'\sin\theta$$

$$+ \text{ค่าคงที่}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ของลากรานซ์

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

และ

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าฟังก์ชั่นของลากรานซ์ในสมการการเคลื่อนที่ เราได้

$$m\ (\ddot{x} + \ddot{x}'\cos\theta) + M\ddot{x} = 0$$

และ

$$m\ (\ddot{x}' + \ddot{x}\cos\theta) = mg\ \sin\theta$$

หลังจากแก้สมการทั้งสองนี้ เพื่อหาค่า $\ddot{x}$ และ $\ddot{x}'$ จะได้

$$\ddot{x} = \frac{-g \sin\theta \cos\theta}{\frac{m+M}{m} - \cos^2\theta}$$

และ

$$\ddot{x}' = \frac{g \sin\theta}{1 - \frac{m \cos^2\theta}{m+M}}$$

<u>ตอบ</u>

วิธีการหาสมการของการเคลื่อนที่ในแบบพลศาสตร์ ตามวิธีการของลากรานซ์เท่าที่ได้กล่าวมานี้เป็นเพียงปัญหาเบื้องต้นเท่านั้น ยังมีเรื่องราวที่จะต้องศึกษาให้ลึกซึ้งอีกมากมาย วิธีการหาสมการของการเคลื่อนที่นอกจากวิธีการของลากรานซ์แล้วยังมีอีกวิธีหนึ่งที่ใช้วิธีการทำนองเดียวกับของลากรานซ์ คือ วิธีการของแฮร์มิลตัน แต่ในบทนี้ไม่ได้กล่าวถึง แต่ก็ไม่ยากเกินไปที่จะศึกษาด้วยตัวเอง.

แบบฝึกหัดบทที่ 9

9.1 Find the acceleration of a solid uniform sphere rolling down a perfectly rough plane, the plane being fixed and inclined at an angle θ with the horizontal.

9.2 A ball of mass m rolls down a movable wedge of mass M. The angle of the wedge is θ, and it is free to slide on a smooth horizontal surface. The contact between the ball and the wedge is perfectly rough. Find the acceleration of the wedge.

9.3 A particle slides on a smooth inclined plane whose inclination θ is increasing at a constant rate ω. If $\theta = 0$, at which time the particle starts from rest, find the subsequent motion of the particle.

9.4 Two blocks of equal mass m are connected by a light inextensible cord. One block is placed on a smooth horizontal table, the other block hangs over the edge of the table. Find the acceleration of the system.

9.5 Solve Problem 9.4 for the case in which the cord is heavy, of mass m.

9.6 Find the motion of a projectile in a uniform gravitational field without air resistance.

9.7 Set up the equations of motion of a "double-double" Atwood machine consisting of one Atwood machine (with masses m_1 and m_2) connected by means of a light cord passing over a pulley to a second Atwood maching with masses m_3 and m_4. Neglect the masses of all pulleys. Find the actual accelerations for the case m_1 = m, m_2 = 4m, m_3 = 2m, and m_4 = 3m.

9.8 Show that Lagrange's method automatically yields the correct equations of motion for a particle moving in a plane in a rotating coordinate system Oxy. Hint: $T = \frac{1}{2} m\vec{V}\cdot\vec{V}$, where $\vec{V} = \hat{i}(x - \omega y) + \hat{j}(y + \omega x)$, and $F_x = - \partial V/\partial x$, $F_y = - \partial y/\partial y$.

9.9 Repeat the above problem for motion in three dimensions.

9.10 Find the differential equations of motion for an "elastic pendulum": a particle of mass m attached to an elastic string of stiffness k and unstretched length l_o. Assume that the motion takes place in a vertical plane.

9.11 Find the general differential equations of motion for a particle in cylindrical coordinates: R, ψ, Z. Use the relation

$$v^2 = vR^2 + v_\psi^2 + v_z^2$$

$$= \dot{R}^2 + R^2 \dot{\psi}^2 + z^2$$

9.12 Find the general differential equations of motion for a particle in spherical coordinates : r, θ, ψ. Use the relation

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\psi^2$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta\dot{\psi}^2$$

9.13 The point of support of a simple pendulum is being elevated at a constant acceleration a, so that the height of the supports is $\frac{1}{2}$ at^2, and its vertical velocity is at. Find the differential equation of motion for small oscillations of the pendulum by Lagrange's method. Show that the period of the pendulum is 2π $1/(g + a)^{\frac{1}{2}}$ where l is the length of the pendulum.

9.14 The point of support of a simple pendulum is moved in a horizontat direction with constant acceleration a. Find the equation of motion and the period for small oscillations.

9.15 Use Lagrange's method to find the differential equations of motion for the spherical pendulum in spherical coordinates.

9.16 Find the differential equations of motion for an elastic spherical pendulum, as in Problem 9.10

9.17 Show that the Lagrangian function

$$L = \tfrac{1}{2} mv^2 = q\psi + q\vec{v}.\vec{A}$$

yields the correct equation of motion for a particle in an electromagnetic field, namely,

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

where

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi \quad \text{and} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(The vector quantity $\vec{A}$ is called the vector potential, and the scalar quantity ψ is called the scalar potential.)