บทที่ 8
ความโน้มถ่วง
(GRAVITATION)

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีของความโน้มถ่วง รวมทั้งสมการของสนามโน้มถ่วงเพื่อประโยชน์ในการศึกษาวิชาฟิสิกส์ต่อไป.

8.1 จุดศูนย์ถ่วงสำหรับวัตถุแผ่กว้าง (CENTERS OF GRAVITY FOR EXTENDED BODIES)

คงจำได้ว่าสูตรของกฎความโน้มถ่วงในตอน 2.5 เกี่ยวกับอนุภาค 2 อนุภาคมวล m_1 และ m_2 ที่มีระยะห่างกัน r จะมีแรงดึงดูดระหว่างกันซึ่งมีขนาดตามสมการ (2.11) เป็น

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2} \tag{8.1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyne} - \text{cm}^2 - \text{g}^{-2} \tag{8.2}$$

สมการ (8.1) เราสามารถเขียนตามฟอร์มของเวกเตอร์ของแรงที่แสดงทั้งขนาดและทิศทางได้คือ

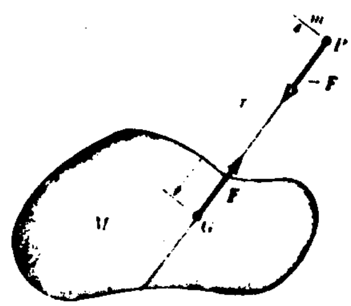
$$\vec{F}_{12} = \frac{G\, m_1\, m_2}{|r_1 - r_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{8.3}$$

เมื่อ $\vec{F}_{12}$ เป็นแรงที่อนุภาค m_2 กระทำกับอนุภาค m_1, $\vec{r}_1$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล m_1, $\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวล m_2 และ $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพัทธ์ของ $\vec{r}_2$ เมื่อเทียบกับ $\vec{r}_1$. กฎความโน้มถ่วงในสมการ (8.3) นำไปใช้ได้ในกรณีที่เราไม่คิดว่ามวลของวัตถุจะมีขนาดใหญ่แค่ไหน กล่าวคือตัดเรื่องมวลของวัตถุทิ้งไปเมื่อเปรียบเทียบกับระยะทางระหว่างมวลทั้งสอง มิเช่นนั้นแล้วขนาดของ $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ไม่สามารถจำกัดได้ สำหรับวัตถุที่มีบริเวณแผ่กว้าง เราต้องจินตนาการว่าแต่ละวัตถุถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อย ๆ และมีขนาดเล็กมาก

เมื่อเปรียบเทียบกับระยะทางระหว่างมวล และคำนวณหาแรงได้จากการกระทำของแต่ละส่วนย่อยของวัตถุกับแต่ละส่วนย่อยของวัตถุอื่น

พิจารณาวัตถุที่มีบริเวณแผ่กว้างมวล M กับอนุภาคมวล m ซึ่งอยู่ที่จุด p (ดังรูป 8.1) ถ้าวัตถุมวล M แบ่งออกเป็นมวลเล็ก ๆ m_i แต่ละมวล m_i ดึงดูดหรือกระทำต่ออนุภาคมวล m ด้วยแรง $\vec{F}_i$ ดังนั้นแรงทั้งหมดของระบบมวล M กระทำต่อมวล m คือ

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (8.4)$$



รูป 8.1 Gravitational attraction between a particle and an extended body.

สมมติว่ามีจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับจุด P เมื่อไม่มีแรง $\vec{F}_i$ ใด ๆ กระทำที่จุด P ดังนั้นทอร์คทั้งหมดจะมีค่าเป็นศูนย์ จะเหลือเพียงระบบของแรงลัพธ์ $\vec{F}$ ที่กระทำต่อมวล m ในแนวเส้นตรงไปยังจุด P จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตันแรงที่เกิดจากมวล m คือ $-\vec{F}$ ซึ่งเป็นแรงปฏิกิริยากับแรง $\vec{F}_i$ ใด ๆ ดังนั้นถ้าแรงลัพธ์ $\vec{F}$ ในสมการ (8.4) อยู่ที่จุด G มีระยะห่างจากมวล m ในแนวเส้นตรงเป็นระยะทาง r เราสรุปได้ว่า

$$|\vec{F}| = \frac{G\,m\,M}{r^2} \qquad (8.5)$$

นั่นคือระบบของแรงโน้มถ่วงระหว่างวัตถุ M กับอนุภาคมวล m จะมีความสัมพันธ์คือ ระบบของแรงลัพธ์เดียว $\vec{F}$ ของวัตถุ M ที่จุด G เท่ากับ แรง $-\vec{F}$ ของมวล m ที่จุด P. เราเรียกจุด G ว่า

เป็น "จุดศูนย์ถ่วง" ของวัตถุ M ซึ่งสัมพัทธ์กับจุด P. ในกรณีทั่วไปจุดศูนย์ถ่วงกับจุดศูนย์กลางของมวลไม่ได้เป็นจุด ๆ เดียวกัน นอกจากว่าวัตถุนั้นเป็นวัตถุสมมาตร ซึ่งเรื่องนี้เราได้ศึกษามาแล้วจากฟิสิกส์ขั้นพื้นฐานจึงจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดอีก ฉนั้น G ในที่นี้อาจไม่ใช่จุดศูนย์กลางของมวล M และจุด p อาจจะไม่อยู่ในแนวเดียวกับจุดศูนย์กลางของมวลเสมอไป ส่วนในกรณีที่จุดศูนย์ถ่วงกับจุดศูนย์กลางของมวลอยู่ที่จุดเดียวกัน เช่น ทรงกลมเราสามารถนำไปอธิบายเรื่องของสนามโน้มถ่วงเอกรูปได้เป็นอย่างดี

สำหรับกรณีของวัตถุที่มีบริเวณแผ่กว้าง 2 อัน เราไม่สามารถหาจุดศูนย์ถ่วงในกรณีทั่วไปได้หรือแม้แต่ในลักษณะสัมพัทธ์ซึ่งกันและกัน ยกเว้นในกรณีพิเศษที่มีวัตถุอันใดอันหนึ่งเป็นทรงกลมหรือวัตถุทั้งสองมีระยะห่างกันมาก. ระบบของแรงโน้มถ่วงที่วัตถุหนึ่งกระทำต่ออีกวัตถุอาจจะมีแรงลัพธ์หรือไม่มีแรงลัพธ์เกิดขึ้นก็ได้ ถ้ามีแรงลัพธ์ แรงลัพธ์ของวัตถุทั้งสองจะมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามในแนวเส้นตรงเดียวกัน. อย่างไรก็ตามแม้จะมีแรงลัพธ์เกิดขึ้นเช่นในกรณีที่กล่าวมานี้ เราก็ไม่สามารถหานิยามตำแหน่งของจุดศูนย์ถ่วง G_1 และ G_2 ของวัตถุทั้งสองได้ เพราะสมการ (8.5) เจาะจงเฉพาะระยะทางระหว่าง G_1 กับ G_2 เท่านั้น

ปัญหาพื้นฐานทั่วไปในการหาค่าของแรงโน้มถ่วงระหว่างวัตถุ 2 อัน วิธีแก้ปัญหาที่ดีคือการใช้กระบวนการของทฤษฎีสนามของความโน้มถ่วงที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป.

8.2 สนามโน้มถ่วงและศักย์โน้มถ่วง (GRAVITATIONAL FIELD AND GRAVITATIONAL PLTENTIAL)

แรงโน้มถ่วง F_m กระทำต่ออนุภาคมวล m ที่จุด $\vec{r}$, กระทำต่ออนุภาคมวล m_i ใด ๆ ที่จุด $\vec{r}_i$ ใด ๆ ดังนั้นแรงโน้มถ่วง F_m ที่เกิดขึ้น คือ

$$F_m = \sum_i \frac{m\, m_i\, G\, (\vec{r}_i - \vec{r})}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} \qquad (8.6)$$

ถ้ามวล m_i กระจายอยู่ในลักษณะต่อเนื่องในสเปซ ด้วยความหนาแน่น $\rho(\vec{r})$ แรงโน้มถ่วงของมวล m ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ คือ

$$F_m = \iiint \frac{m\,G\,(\vec{r}' - \vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{\vec{r}' - \vec{r}^{\;3}}\, dV' \qquad (8.7)$$

การอินทิเกรตอาจต้องจำกัดให้มวลอยู่ในขอบเขตที่สามารถคำนวณได้โดยมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ หรือโดยการอินทิเกรตรอบเสปซทั้งหมด ถ้าเรากำหนดให้ความหนาแน่นภายนอกขอบเขตนั้นเป็นศูนย์. จากสมการ (8.7) แรง F_m เป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวล m, และเรานิยามสนามความเข้มของความโน้มถ่วง (หรือเรียกง่าย ๆ ว่า สนามโน้มถ่วง) $g(\vec{r})$ ที่จุด $\vec{r}$ ใด ๆ ในเสปซกระทำต่อมวลใด ๆ ที่กระจายออกไป เหมือนกับแรงต่อหนึ่งหน่วยมวลที่เกิดจากมวลเล็ก ๆ m ใด ๆ ที่จุดนั้น กล่าวคือ

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_m}{m} \qquad (8.8)$$

เมื่อ F_m เป็นแรงที่กระทำต่อมวล m ที่จุด $\vec{r}$ เราสามารถเขียนสูตรของ $g(\vec{r})$ จากสมการ (8.6) และ (8.7) สำหรับมวลที่กระจายอย่างต่อเนื่องได้เป็น

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_i \frac{m_i\,G\,(\vec{r}_i - \vec{r})}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} \qquad (8.9)$$

และ

$$\vec{g}(\vec{r}) = \iiint \frac{G\,(\vec{r}' - \vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}\, dV' \qquad (8.10)$$

ในสนาม $\vec{g}(\vec{r})$ มีขนาดของความเร่งอยู่ด้วย ซึ่งตามความเป็นจริงแล้ว ความเร่งที่เกิดขึ้นจากอนุภาค m ที่จุด $\vec{r}$ เป็นความเร่งที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น

การคำนวณของสนามโน้มถ่วง $\vec{g}(\vec{r})$ จากสมการ (8.9) หรือ (8.10) เป็นเรื่องที่ยากมาก ยกเว้นในบางกรณีเท่านั้น กรณีแรงโน้มถ่วงระหว่างอนุภาคแต่ละคู่เป็นแรงผ่านศูนย์กลางซึ่งแรงนี้จะเป็นแรงอนุรักษ์ดังได้กล่าวมาแล้วในตอน 4.6 และพลังงานศักย์สามารถหาได้จากนิยามของอนุภาคมวล m ที่ถูกกระทำด้วยแรงโน้มถ่วง สำหรับอนุภาคมวล m และ m_i พลังงานศักย์กำหนดได้จากสมการ (4.120) และ (4.121) เป็น

$$V_{mm_i} = \frac{-G\,m\,m_i}{|r - r_i|} \tag{8.11}$$

พลังงานศักย์ของอนุภาคมวล m ที่จุด r กระทำต่อระบบอนุภาค m_i ใด ๆ คือ

$$V_m(\vec{r}) = \sum_i \frac{-G\,m\,m_i}{|r - r_i|} \tag{8.12}$$

เราให้นิยามของศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential) $\mathcal{G}(\vec{r})$ ที่จุด $\vec{r}$ เหมือนกับค่าลบของพลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยมวลของอนุภาคที่จุด $\vec{r}$ กล่าวคือ

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \frac{-V_m(\vec{r})}{m} \tag{8.13}$$

และสำหรับระบบอนุภาค:

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \sum_i \frac{m_i\,G}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{8.14}$$

ถ้า $\rho(\vec{r})$ แสดงถึงความหนาแน่นจากการกระจายอย่างต่อเนื่องของมวล ศักย์โน้มถ่วงของมันคือ

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \iiint \frac{G\,\rho\,(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dV' \tag{8.15}$$

เพราะว่า $\mathcal{G}(\vec{r})$ เป็นฟังก์ชั่นสเกลาร์ ดังนั้นศักย์โน้มถ่วง $\mathcal{G}(\vec{r})$ จึงหาค่าได้ง่ายกว่าสนามโน้มถ่วง $\vec{g}(\vec{r})$. โดยความสัมพันธ์ของแรงกับพลังงานศักย์ในสมการ (4.80) ทำให้เราสามารถคำนวณค่า $\vec{g}$ ได้ง่าย ถ้าเราทราบค่า $\mathcal{G}$, จากความสัมพันธ์

$$\vec{g} = \vec{\nabla}\mathcal{G} \tag{8.16}$$

และความสัมพันธ์กลับกันคือ

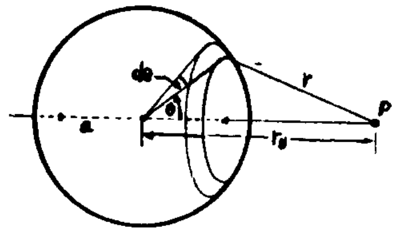
$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \int_{r_s}^{r} \vec{g} \cdot d\vec{r} \tag{8.17}$$

นิยามของ $\mathcal{G}(\vec{r})$ คล้ายกับของพลังงานศักย์ $V(\vec{r})$ การแก้สมการก็ใช้วิธีการเช่นเดียวกัน.

สนามโน้มถ่วงและศักย์โน้มถ่วงต้องใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาเช่นเดียวกันกับความเข้มของสนามไฟฟ้าและ electrostatic potential ใน electrostatics ยกเว้นเครื่องหมายลบในสมการ (8.13) เป็นไปตามทฤษฎีความโน้มถ่วง และยกเว้นกรณีมวลทั้งหมดเป็นบวก และแรงโน้มถ่วงทุกแรงเป็นแรงดึงดูดเพราะกฎการเคลื่อนที่ของแรงจะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับทาง electrostatics ส่วนทฤษฎีของศักย์ (potential) มีความหมายกว้าง แต่เราสามารถจำกัดให้อยู่ในวงแคบได้

ตัวอย่างการใช้กระบวนการของศักย์, เราคำนวณศักย์ที่กระทำต่อทรงกลม (เนื้อเดียวกัน) แผ่นบางที่มีมวล M ความหนาแน่น ρ ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ และมีรัศมีเท่ากับ a ดังนั้น

$$M = 4\pi a^2 \rho \tag{8.18}$$



รูป 8.2 Method of computing of a spherical shell

ศักย์ที่จุด p คำนวณได้จากการอินทิเกรตตามวงแหวน ดังรูป 8.2 ซึ่งศักย์ของวงแหวนมีรัศมี $a \sin\theta$, ความกว้าง $ad\theta$ และทั้งหมดของมวลส่วนนี้ห่างจากจุดเป็นเป็นระยะ r ดังนั้นเราได้

$$d\mathcal{G} = \frac{G\rho(2\pi a \sin\theta)\, a\, d\theta}{r}$$

และศักย์ทั้งหมดที่จุด p ของทรงกลม คือ

$$\mathcal{G}(p) = \frac{G\rho(2\pi a \sin\theta)\, a\, d\theta}{r}$$

$$= \frac{MG}{2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(r_o^2 + a^2 - 2ar_o\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{MG}{2ar_o}\Big[(r_o + a) - |r_o - a|\Big] \qquad (8.19)$$

เรามี 2 กรณี คือ กรณีที่ p อยู่นอกทรบกลม กับ p อยู่ในทรงกลม กล่าวคือ

$$\mathcal{G}(p) = \frac{MG}{r_o}, \quad r_o \geq a \qquad (8.20)$$

และ

$$\mathcal{G}(p) = \frac{MG}{a}, \quad r_o \geq a \tag{8.21}$$

ฉนั้นเมื่อจุด p อยู่นอกแผ่นทรงกลม ค่าของศักย์หาได้จากการที่มวล M อยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม ค่าของสนามโน้มถ่วงก็เช่นกัน

8.3 สมการสนามโน้มถ่วง (GRAVITATION FIELD EQUATIONS)

มันเป็นสิ่งที่น่าสนใจที่จะหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่เหมาะสมกับฟังก์ชั่นของ $\vec{g}(\vec{r})$ และ $\mathcal{G}(\vec{r})$ จากสมการ (8.16) ซึ่งเป็นไปดังนี้

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \tag{8.22}$$

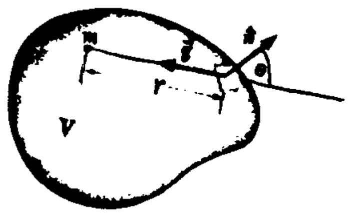
เมื่อเขียนในรูปของระบบโคออดิเนตใด ๆ สมการเวกเตอร์นี้จะกลายเป็นส่วนของสามสมการย่อยดิฟเฟอเรนเชียล ถ้าใช้ regtangular coordinates เราได้

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0. \tag{8.23}$$

สมการ (8.23) เพียงอย่างเดียวไม่สามารถหาค่าของสนามโน้มถ่วงได้ การหาค่าสนามโน้มถ่วงเราจำเป็นต้องใช้สมการที่เกี่ยวข้องกับ $\vec{g}$ ด้วย

มาศึกษาถึงสนามโน้มถ่วง $\vec{g}$ ที่กระทำต่อมวล m และพิจารณาปริมาตร V ใด ๆ ของมวล โดยให้ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่จุดใด ๆ บนผิว S บริเวณ V (ดังรูป 8.3) เมื่ออินทิเกรตตามผิว:

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{g} \, ds \tag{8.24}$$



รูป 8.3 A mass m inclosed in a volume V.

ความหมายทางเรขาคณิตของการอินทิเกรตสามารถเห็นได้ ถ้ารวมแนวแรงที่ผ่านในแนวของ $\vec{g}$ และในลักษณะที่จำนวนของเส้นต่าง ๆ ต่อพื้นที่หนึ่งหน่วยที่จุดนั้นมีความเข้มสนามโน้มถ่วงเท่ากัน. เมื่อ I เป็นจำนวนเส้นที่ผ่านตลอดผิว S ซึ่งเรียกว่าฟลัก (flux) ของ $\vec{g}$ ผ่าน s มุมตัน $d\Omega$ ขยายออกที่จุดตำแหน่ง m ของผิว ds โดยรัศมีกวาดจาก m บนผิว ds ได้พื้นที่ดังนี้

$$d\Omega = \frac{ds \cos \theta}{r^2} \tag{8.25}$$

จากรูป (8.3) เราทราบความสัมพันธ์

$$\hat{n} \cdot \vec{g} = -\frac{m G \cos \theta}{r^2} \tag{8.26}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ของสมการ (8.25) และ (8.26) อินทิกรัล I ในสมการ (8.24) จะเป็น

$$I = \iint_S -m G \, d\Omega = -4\pi m G \tag{8.27}$$

อินทิกรัล I เป็นอิสระของตำแหน่ง m ภายในผิว s ซึ่งมีผลคล้ายคลึงทาง electrostatics ที่ว่ามี 4π ของเส้นแรงจากการเปลี่ยนแปลงของแต่ละหน่วย สนามโน้มถ่วงของจำนวนมวล เป็นส่วนหนึ่งของแต่ละสนามมีผิว S รอบ ๆ มวล m_i:

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, ds = -\sum_i 4\pi m_i G \qquad (8.28)$$

สำหรับมวลที่กระจายอย่างสม่ำเสมอภายในผิว S สมการจะกลายเป็น

$$\iint_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, ds = -\iiint_V 4\pi\, G\, \rho\, dv \qquad (8.29)$$

เมื่อใช้ทฤษฎีไดเวอเจนซ์ของ Gause จะได้

$$\iint_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dV \qquad (8.30)$$

จากสมการ (8.29) ลบด้วย สมการ (8.28) เราได้ผลลัพธ์เป็น

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi\, G\, \rho)\, dV = 0 \qquad (8.31)$$

สมการ (8.31) ใช้ได้สำหรับทุก ๆ ค่า V และเป็นจริงเมื่ออินทิเกรตทางขวามือหายไป นั่นคือ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi\, G\, \rho \qquad (8.32)$$

สมการ (6.31) ในคาร์ทีเซียลโคออดิเนตมีฟอร์มเป็น

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\rho\,(x,y,z) \qquad (8.33)$$

เมื่อ $\rho(x,y,z)$ กำหนดมาให้ กลุ่มของสมการ (8.23) และ (8.33) สามารถวัดค่ากลุ่มของสนามโน้มถ่วง (g_x, g_y, g_z) ได้ ถ้าเรารวมขอบเขตของ $g \to o$ เช่นเดียวกับ $r \to \infty$ โดยการแทนค่าสมการ (8.16) ในสมการ (8.32) เราได้สมการของศักย์เป็น

$$\vec{\nabla}^2 \mathcal{G} = -4\pi G \rho \qquad (8.34)$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{z^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{z^2} = -4\pi G \rho \qquad (8.35)$$

สมการ (8.34) จะหาค่า $g(x,y,z)$ ได้เพียงอย่างเดียว ถ้าเราเพิ่มเงื่อนไขว่า $g \to o$ เช่นเดียวกับ $r \to \infty$ ผลลัพธ์นี้เราอ้างจากทฤษฎีของศักย์โดยไม่มีการพิสูจน์. มันง่ายเสมอสำหรับการแก้สมการ (8.35) โดยตรง ง่ายกว่าการคำนวณโดยการอินทิเกรตจากสมการ (8.15) กลุ่มสมการ (8.34), (8.16)และ (8.8)ประกอบกันเป็นการย่อใจความที่สมบูรณ์ของทฤษฎีความโน้มถ่วงของนิวตัน เช่นเดียวกันกับกลุ่มสมการ (8.32), (8.22) และ (8.8) นั่นคือผลลัพธ์ของทฤษฎีความโน้มถ่วงของนิวตัน สรุปได้จากสมการกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง

สมการ (8.34) เรียกว่าสมการของ Poisson สมการนี้เราพบเห็นบ่อยในทฤษฎีทางฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น เรื่องของ electrostatic potential ก็มีสมการในแบบเดียวกัน เมื่อ ρ เป็นความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า, ถ้า $\rho = o$ สมการ (8.34) จะอยู่ในฟอร์มของ

$$\nabla^2 \mathcal{G} = o \qquad (8.36)$$

สมการ (8.36) นี้เรียกว่า สมการของ Laplace.

แบบฝึกหัดบทที่ 8

8.1 (a) Given Newton's laws of motion, and Kepler's first two laws of planetary motion show that the force acting on a planet is directed toward the suh and is inversely proportional to the square of the distance from the sun.

(b) Use Kepler's third law to show that the forces on the planets are proportional to their masses.

(c) If this suggests to you a universal law of attraction between any two masses, use Newton's third law to show that the force must be proportional to both masses.

8.2 Two equal masses m are separated by a distance a. Find the center of gravity of the two masses relative to a point P on the perpendicular bisector of the line joining them a distance y from the midpoint between them. Show that as $y \to x$, the center of gravity approaches the center of mass. What happens as $y \to 0$?

8.3 A mass aM is located at $x = a$, $y = 0$, and a second mass $(1 - a)$ M is located at $x = 0$, $v = b$, where $0 < a < 1$. Find thecoordinates x,y of the center of gravity of the two masses relative to the origin. Show that your formulas for x,y have the proper limits when $a \to 0$ or $b \to \infty$

8.4 (a) Find the gravitational field and gravitational potential at any point z on the symmetry axis of a uniform solid hemisphere of radius a, mass M. The center of the hemisphere is at $z = 0$.

(b) Locate the center of gravity of the hemisphere relative to a point outside it on the z-axis, and show that as $z \to \pm\infty$. The center of gravity approaches the center of mass.

8.5 Assuming that the earth is a sphere of uniform density, with radius a, mass M, calculate the gravitational field intensity and the gravitational potential at all points inside and outside the earth, taking $\mathcal{G} = 0$ at an infinite distance.

8.6 Assume that the density of a star is a function only of the radius r measured from the center of the star, and is given by*

$$\rho = \frac{Ma^2}{2\pi r(r^2+a^2)^2} \qquad 0 < r < \infty,$$

where M is the mass of the star, and a is a constant which determines the size of the star. Find the gravitational field intensity and the gravitational potential as finctions of r.

8.7 Show that if the sun were surrounded by a spherical cloud of dust of uniform density ρ, the gravitational field within the dust cloud would be

$$\vec{g} = -\left(\frac{MG}{r^2} + \frac{4\pi}{3}\rho\, Gr\right)\frac{\vec{r}}{r}$$

---

*The expression for ρ is chosen to make the problem easy to solve, not because it has more than a remote resemblance to the density variations within any actual star.

where M is the mass of the sun, and r is a vector from the sun to any point in the dust cloud.

8.8 Assuming that the interior of the earth can be treated as an incompressible fluid in equilibrium, (a) calculate the pressure within the earth as a function of distance from the center; (b) using appropriate values for the earth's mass and radius, calculate the pressure in tons per square inch at the center.

8.9 Set up the equations to be solved for the pressure as a function of radius in a spherically symmertric mass M of gas, assuming that the gas obeys the perfect gas laws and that the temperature is known as a function of radius.

8.10 (a) Assume that ordinary cold matter collapser, under a pressure greater than a certain critical pressure ρ_o, to a state of very high density ρ_1. A planet of mass M is constructed of matter of mean density ρ_o in its normal state. Assuming uniform density and conditions of fluid equilibrium, at what mass M_o and radius r_o will the pressure at the center reach the critical value ρ_o ?

(b) If $M > M_o$, the planet will have a very dense core of density ρ_1 surrounded by a crust of density ρ_o. Calculate the resulting pressure distribution within the planet in terms of the radius r_1 of the core and the radius r_2 of the planet. Show that if M is somewhat larger than M_o, then the radius r_2 of the planet is less than r_o. (The planet Jupiter is said to have a mass very nearly equal to the critical mass M_o, so that if it were heavier it might be smaller.)

8.11 Find the pressure and temperature as functions of radius for the star of Problem 6 if the star is composed of a perfect gas of atomic weight A.

8.12 Find the density and gravitational field intensity as a function of radius inside a small spherically symmertric planet, to order $(1/B^2)$, assuming that the bulk modulus B is constant. The mass is M and the radius is a. Hint: Calculate g(r) assuming uniform density: then find the resulting pressure p(r), and the density p(r) to order (1.B). Recalculate g(r) using the new p(r), and proceed by successive approximations to terms of order $(1/B^2)$.

8.13 Consider a spherical mountain of radius a, mass M. floating in equilibrium in the earth, and whose density is half that of the earth. Assume that a is much less than the earth's radius so that the earth's surface can be regarded as flat in the neighborhood of the mountain. If the mountain were not present, the gravitational field intensity near the earth's surface would be g_o.

(a) Find the difference between g_o and the actual value of g at the top of the mountain.

(b) If the top of the mountain is eroded flat, level with the surrounding surface of the earth, and if this occurs in a short time compared with the time required for the mountain to float in equilibrium again, find the difference between g_o and the actual value of g at the earth's surface at the center of the eroded mountain.

8.14 (a) Find the gravitational potential and the field intensity due to a thin rod of length l and mass M at a point a distance r from the center of the rod in a direction making an angle 0 with the rod. Assume that r >> l, and carry the calculations only to second order in l/r.

(b) Locate the center of gravity of the rod relative to the specified point.

8.15 (a) Calculate the gravitational potential of a uniform circular ring of matter of radius a, mass M, at a distance r from the center of the ring in a direction making an angle 0 with the axis of the ring. Assume that r >> a, and calculate the potential only to second order in a/r.

(b) Calculate to the same appeoximation the components of the gravitational field of the ring at the wpecified point.

8.16 A small body with cylindrical symmetry has a sensity p(r,θ) in spherical coordinates, which vanishes for r > a. The origin r = 0 lies at the center of mass. Approximate the gravitational potential at a point r, θ far from the body (r >> a), by expanding in a power series in (a/r), and show that it has the form

$$\mathcal{G}(r,\theta) = \frac{MG}{r} + \frac{QG}{r^3} P_2 (\cos\theta) + \frac{EG}{r^4} P_3 (\cos\theta) + \ldots$$

where P_2 (cos θ), P_3(cos θ) are quadratic and cubic polynomials in cos θ that do not depend on the body, and Q,E are constants which depend on the mass distribution. Find expressions for P_2, P_3, Q, and E, and show that Q is of the order of magnitude Ma^2, and E of the order Ma^3. It is conventional to normalize P_2 so that the constant term is $-\frac{1}{2}$ and P_3 so that the linear term is $-\frac{3}{2}\cos 0$. The parameters Q. E are then called the quadrupole miment and the octopole moment of the body. (The polynomials P_2, P_3, ... and the Legendre polynomials but a knowledge of Legendre polynomials is not needed to solve this problem.)

8.17 The earth has approximately the shape of an oblate ellipsoid of revolution whose polar diameter $2a(1 - \eta)$ is slightly shorter than its equatorial diameter 2a. ($\eta = 0.0034$.) To determine to first order in η, the effect of the earth's oblateness on its gravitational field, we may replace the ellipsoidal earth by a sphere of radius R so chosen as to have the same volume. The gravitational field of the earth is then the field of a uniform sphere of radius R with the mass of the earth, plus the field of a surface distribution of mass (positive or negative). representing the mass per unit area which would be added or subtracted to form the actual ellipsoid.

(a) Show that the required surface density is, to first order in η.

$$\sigma = \frac{1}{3}\eta a\rho(1 - 3\cos^2\theta),$$

where θ is the colatitude, and ρ is the volume density of the earth (assumed uniform). Since the total mass thus added to the surface is zero, its gravitational field will represent the effect of the oblate shape of the earth.

(b) Show that the resulting correction to the gravitational potential at a very great distance r >> a from the earth is, to order (a^3/r^3).

$$\delta\mathcal{G} = \frac{1}{5}\eta \frac{MGa^2}{r^3} (1 - 3 \cos^2\theta), \quad (r \gg a).$$

8.18 (a) Use Gauss theorem (6.26) t0 determine the gravitational field inside and outside a spherical shell of radius a, mass M, uniform density.

(b) Calculate the resulting gravitational potential.

8.19 (a) Find the gravitational field at a distance x from an infinite plane sheet of density σ per unit area.

(b) Compare this result with the field just outside a spherical shell of the same surface density.

What part of the field comes from the immediately adjacent matter and what part from more distant matter ?

8.20 Show that the gravitational field equations (8.21), (8.31) and (8.33) are satisfied by the field intensity and potential which you calculated in Problem 8.5.