บทที่ 7
กลศาสตร์ของวัตถุแข็งแกร่ง. การเคลื่อนที่ในระนาบ
(MECHANICS OF RIGID BODIES. MOTION IN A PLANE)

วัตถุแข็งแกร็ง เป็นลักษณะของวัตถุที่ไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างตลอดการเคลื่อนที่ซึ่งนับได้ว่าเป็นระบบอนุภาคอันหนึ่ง การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งแกร็งอาจกล่าวได้เป็นสองแบบคือ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง (translation) และการเคลื่อนที่แบบการหมุน (rotation) แต่โดยทั่วไปแล้ววัตถุแข็งแกร็งมักจะมีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งและการหมุนพร้อมกันไปโดยที่จุดศูนย์กลางของมวลจะเลื่อนตำแหน่งไปและในขณะเดียวกัน วัตถุก็จะหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของมวลนั้นด้วย.

ในบทนี้จะเน้นพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ในระนาบของวัตถุแข็งแกร็ง

7.1 ศูนย์กลางของมวลของวัตถุแข็งแกร็ง (CENTER OF MASS OF A RIGID BODY)

เราทราบแล้วว่านิยามศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาค (ตอน 6.1) คือ

$$x_{cm} = \frac{\Sigma\, x_i\, m_i}{\Sigma\, m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{\Sigma\, y_i\, m_i}{\Sigma\, m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{\Sigma\, z_i\, m_i}{\Sigma\, m_i}$$

สำหรับวัตถุแข็งแกร็งที่มีส่วนขยายออก เราหาตำแหน่งศูนย์กลางของมวลโดยการอินทิเกรตปริมาตรของวัตถุ กล่าวคือ

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho\ x\ dv}{\int_v \rho\ dv} \quad , \quad y_{cm} = \frac{\int_v \rho\ y\ dv}{\int_v \rho\ dv} \quad , \quad z_{cm} = \frac{\int_v \rho\ z\ dv}{\int_v \rho\ dv} \qquad (7.1)$$

เมื่อ ρ เป็นความหนาแน่น และ dv เป็นส่วนย่อยของปริมาตร.

ถ้าวัตถุแข็งแกร็งอยู่ในลักษณะของ Thin shell สมการศูนย์กลางของมวล คือ

$$x_{cm} = \frac{\int_S \rho x\ ds}{\int_S \rho\ ds} \quad , \quad y_{cm} = \frac{\int_S \rho y\ ds}{\int_S \rho\ ds} \quad , \quad z_{cm} = \frac{\int_S \rho z\ ds}{\int_S \rho\ ds} \qquad (7.2)$$

เมื่อ ds เป็นพื้นที่ส่วนย่อย ๆ และ ρ เป็นอัตราส่วนของมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ในทำนองเดียวกัน ถ้าวัตถุแข็งแกร็งอยู่ในลักษณะของ Thin wire เราได้

$$x_{cm} = \frac{\int_\ell \rho x\ dl}{\int_\ell \rho\ dl} \quad , \quad y_{cm} = \frac{\int_\ell \rho y\ dl}{\int_\ell \rho dl} \quad , \quad z_{cm} = \frac{\int_\ell \rho z\ dl}{\int_\ell \rho\ dl} \qquad (7.3)$$

ในกรณีของสมการ (7.3) นี้ ρ เป็นอัตราส่วนของมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว และ dl เป็นส่วนย่อยของความยาว

สำหรับเทหวัตถุที่มีความหนาแน่นเท่ากันตลอดหรือคงที่ ค่าของความหนาแน่น ρ ซึ่งเป็นค่าคงที่ในสมการ (7.3) สามารถตัดทิ้งได้

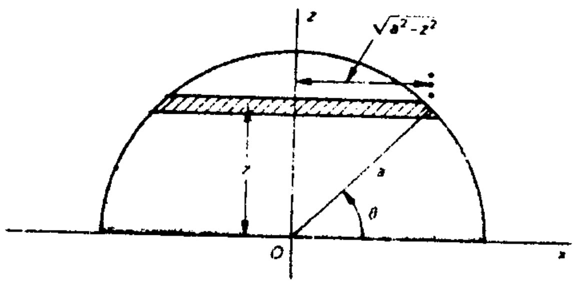
ถ้าวัตถุประกอบขึ้นจากสิ่งต่าง ๆ หลายอย่าง ตำแหน่งศูนย์กลางของมวลหาได้จากนิยาม :

$$x_{cm} = \frac{x_1\ m_1 + x_2\ m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad (7.4)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการของ y_{cm} และ z_{cm} ก็เช่นเดียวกับสมการของ x_{cm}

Solid Hemisphere

เราหาตำแหน่งศูนย์กลางของมวลของ Solid homogeneous hemisphere รัศมี a ได้จากการกำหนดแกนของระยะพิกัด ดังรูป 7.1



<u>รูป 7.1</u> Coordinates for calculating the center of mass of a hemisphere.

จากรูป 7.1 จะเห็นว่าศูนย์กลางของมวลอยู่ในแนวแกน z การคำนวณตำแหน่งของ z_{cm} เราใช้ส่วนย่อยวงกลมของปริมาตรที่มีความหนา dz รัศมี $(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้น

$$dv = \pi (a^2 - z^2)\, dz$$

นั่นคือ

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho \pi z (a^2 - z^2)\, dz}{\int_0^a \rho \pi (a^2 - z^2)\, dz}$$

$$= \frac{3}{8}\, a \qquad (7.5)$$

Hemispherical Shell

สำหรับ hemispherical shell รัศมี a เราใช้แกนของศูนย์กลางของมวล เช่นเดียวกับรูป 7.1 กล่าวคือ สำหรับวัตถุสมมาตรนี้ ศูนย์กลางของมวลก็จะอยู่ในแนวแกน z เช่นกัน. สำหรับส่วนย่อยของผิววงกลม เรากำหนดความกว้างเป็น $ad\theta$ ดังนั้น เราสามารถเขียนได้ว่า

$$ds = 2\pi (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \, ad\theta$$

แต่ $\theta = \sin^{-1}(z/a)$ ฉนั้น $d\theta = (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \, dz$ เราได้

$$ds = 2\pi \, a \, dz$$

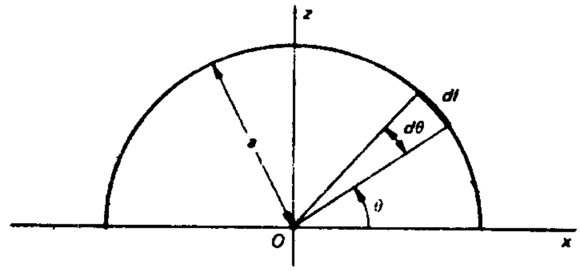
ดังนั้นตำแหน่งศูนย์กลางของมวลของ hemispherical shell คือ

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho \, 2\pi \, az \, dz}{\int_0^a \rho \, 2\pi \, a \, dz}$$

$$= \frac{1}{2} a \qquad (7.6)$$

ครึ่งวงกลม (Semicircle)

การหาศูนย์กลางของมวลของแผ่นบางครึ่งวงกลม ซึ่งมีรัศมี a เรากำหนดแกนดังรูป 7.2



รูป 7.2 Coordinates for calculating the center of mass of a simicircular wire.

จากรูป เราทราบ

$$dl = a\,d\theta$$

และ

$$z = a\sin\theta$$

ดังนั้น

$$z_{cm} = \frac{\int_0^{\pi} \rho(a\sin\theta)\,a\,d\theta}{\int_0^{\pi} \rho\,a\,d\theta}$$

$$= \frac{2}{\pi}a \tag{7.7}$$

7.2 สมดุลย์สถิตของวัตถุแข็งแกร็ง (STATIC EQUILIBRIUM OF A RIGID BODY)

เราทราบจากตอน 6.1 แล้วว่า ความเร่งที่ศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาคเท่ากับผลบวกเวกเตอร์ของแรงภายนอกทั้งหมด หารด้วยมวลทั้งหมด ในกรณีของวัตถุแข็งแกร็ง ถ้าผลบวกเวกเตอร์ของแรงภายนอกทั้งหมดเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0 \tag{7.8}$$

แล้วศูนย์กลางของมวลจะไม่เปลี่ยนไป นั่นคือ สมการ (7.8) ได้อธิบายเงื่อนไขการสมดุลย์แบบเลื่อนตำแหน่ง (translation eqvilibrium) ของวัตถุแข็งแกร็ง

ในทำนองเดียวกันถ้าทอร์คที่เกิดจากแรงภายนอกทั้งหมดเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \ldots = 0 \qquad (7.9)$$

แสดงว่าโมเมนตัมเชิงมุมของสมการ (7.9) มีค่าคงที่ และสมการนี้ได้อธิบายเงื่อนไขการสมดุลย์แบบการหมุน (rotational equilibrium) ของวัตถุแข็งแกร็ง และถ้าวัตถุแข็งแกร็งอยู่ในลักษณะของสมการ (7.8) และ (7.9) ในขณะเดียวกันแสดงว่าวัตถุนั้นอยู่ในลักษณะสมดุลย์อย่างสมบูรณ์ที่สุด

สมดุลย์ในสนามโน้มถ่วงเอกรูป (Equilibrium in a Uniform Gravitational Field)

พิจารณาวัตถุแข็งแกร็งในสนามโน้มถ่วงเอกรูปที่ผิวของโลก เมื่อผลบวกของแรงโน้ม = mg เราสามารถเขียนสมการของการสมดุลย์แบบเลื่อนตำแหน่งได้เป็น

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + m\vec{g} = 0 \qquad (7.10)$$

เมื่อ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ เป็นแรงภายนอกอื่น ๆ ที่ไม่ใช่แรงโน้มถ่วง. ในทำนองเดียวกันเงื่อนไขของการสมดุลย์แบบการหมุน เราเขียนได้เป็น

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \ldots + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = 0 \qquad (7.11)$$

แต่ $\vec{g}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ ดังนั้น

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = (\sum_i \vec{m}_i \vec{r}_i) \times \vec{g}$$

$$= m \vec{r}_{cm} \times \vec{g}$$

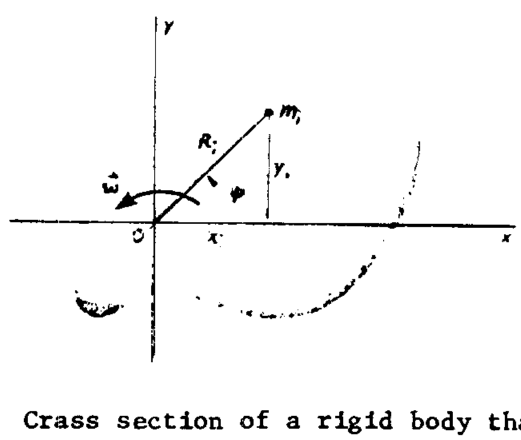
$$= \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \qquad (7.12)$$

สมการ (7.12) สรุปได้ว่า "ทอร์คของแรงโน้มถ่วงที่จุดใด ๆ มีค่าเหมือนกับทอร์คของแรง $m\vec{g}$ กระทำที่จุดศูนย์กลางของมวล". และจากสมการ (7.12) เราสรุปสมการ (7.11) ได้ใหม่เป็น

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \ldots + \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0 \qquad (7.13)$$

7.3 การหมุนของวัตถุแข็งแกร็งรอบแกนที่ตรึงกับที่ (ROTATION OF A RIGID BODY ABOUT A FIXED AXIS). โมเมนต์ของความเฉื่อย (MOMENT OF INERTIA)

การเคลื่อนที่แบบธรรมดาที่สุดของวัตถุแข็งแกร็งคือ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งเพียงอย่างเดียว กับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกบังคับให้หมุนรอบแกนที่ตรึงกับที่ ในการเคลื่อนที่แบบหลังนี้ ถ้าเรากำหนดให้แกน z เป็นแกนหมุน และอนุภาค m_i แสดงโดยตำแหน่ง (x_i, y_i, z_i), มวล m_i มีวิถีทางเดินเป็นวงกลมด้วยรัศมี $(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} = R_i$ โดยมีศูนย์กลางอยู่ที่แกน z. ดังรูป 7.3



รูป 7.3 Crass section of a rigid body that is rotating about z-axis.

อัตราเร็ว v_i ของอนุภาค i หาได้จาก

$$v_i = R_i\omega = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}\,\omega \qquad (7.14)$$

เมื่อ ω เป็นอัตราเร็วเชิงมุมของการหมุน จากรูป 7.3 เราหาความเร็วในแต่ละแกนได้คือ

$$x_i = -v_i \sin\psi = -\omega y_i \qquad (7.15)$$

$$y_i = v_i \cos\psi = \omega x_i \qquad (7.16)$$

$$z_i = 0 \qquad (7.17)$$

และความเร็ว $\vec{v}_i$ อาจหาได้จาก

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad (7.18)$$

เมื่อ $\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}.$

พลังงานจลน์จากการหมุนของวัตถุแข็งแกร็ว หาได้จาก

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

จากสมการ (7.14) ดังนั้น

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.19)$$

เมื่อ

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad (7.20)$$

ปริมาณ I เรียกว่า โมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia)

จากรูป 7.3 เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าโมเมนต์ตัมเชิงมุมของอนุภาคมวล m_i ใด ๆ รอบแกนหมุน z คือ

$$L_i = m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega = m_i R_i^2 \omega \qquad (7.21)$$

ถ้า $\Sigma L_i = L$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมด ดังนั้น

$$L = \sum_i m_i R_i^2 \omega = I\omega \qquad (7.22)$$

จากบทที่ 6 เราได้แสดงแล้วว่า อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบเท่ากับทอร์ค นั่นคือ

$$\frac{dL}{dt} = N$$

จากสมการ (7.22) เราได้ความสัมพันธ์ของทอร์คกับโมเมนต์ของความเฉื่อยสำหรับวัตถุแข็งแกร็งเป็น

$$N = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

ถ้า I เป็นค่าคงที่ แสดงว่า :

$$N = I\frac{d\omega}{dt} = I \propto \qquad (7.23)$$

7.4 การคำนวณโมเมนต์ของความเฉื่อย (CALCULATION OF THE MOMENT OF INERTIA)

กรณีของวัตถุที่มีมวลกระจายต่อเนื่องกันเป็นก้อนเดียวกัน เราอาจแบ่งมวลของวัตถุนั้นออกเป็นส่วนย่อยเล็กจำนวนมาก ซึ่งมีมวล dm โดยที่ R เป็นระยะห่างของมวลเล็กนั้นจากแกนหมุน โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุนั้นอาจเขียนได้เป็น

$$I = \int R^2 \, dm \tag{7.24}$$

สำหรับวัตถุที่มีรูปร่างทรงเรขาคณิต เช่น วงแหวน, ล้อตัน, ล้อกลวง, ทรงกลม, คานหมุน ฯลฯ เราสามารถคำนวณหาโมเมนต์ของความเฉื่อย โดยใช้สมการ (7.24) ได้โดยไม่ยากนัก. ดังเช่น

คานหมุน

สำหรับคานหมุนที่มีความหนาแน่นสม่ำเสมอ ยาว a และมีมวล m ถ้าแกนหมุนอยู่ในแนวแกน z ดังรูป 7.4 (a) โมเมนของความเฉื่อย คือ

$$I = \int_0^a x^2 \rho \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \rho a^3$$

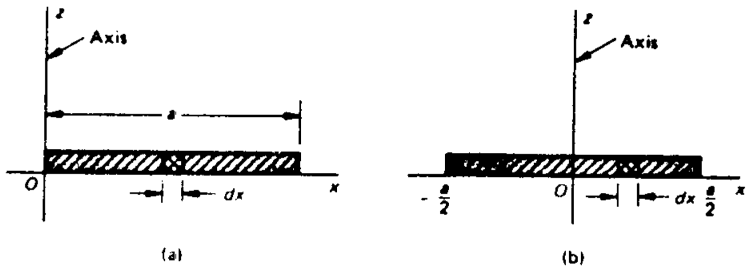
$$= \frac{1}{3} ma^2 \tag{7.25}$$

ถ้าแกนหมุนอยู่ตรงกึ่งกลางของคาน โมเมนต์ของความเฉื่อย คือ

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \rho \, dx$$

$$= \frac{1}{12} \rho a^3$$

$$= \frac{1}{12} ma^2 \qquad (7.26)$$



<u>รูป 7.4</u> Coordinates for calculating the moment of inertia of a rod (a) about one end (b) about the center

ล้อตัน

การคำนวณโมเมนต์ของความเฉื่อยของล้อตันมวล m รัศมี a เราใช้โพลาร์โคออดิเนต ให้ส่วนย่อย dm ของมวล m มีความหนาน้อย ๆ dr ในรัศมี r ดังนั้น

$$dm = \rho 2\pi r \, dr$$

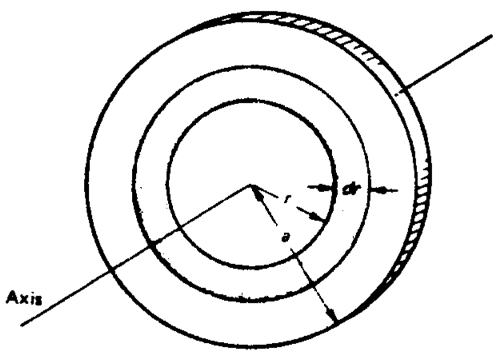
เมื่อ ρ เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่. โมเมนต์ของความเฉื่อยในแนวแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางของล้อตัน ดังรูป 7.5 คือ

$$I = \int_0^a \rho (r^2) \, (2\pi r \, dr)$$

$$= 2\pi\rho \frac{a^4}{4}$$

แต่ $m = \rho\pi a^2$ ดังนั้น

$$I = \tfrac{1}{2} ma^2 \qquad (7.27)$$



รูป 7.5 Coordinates for finding the mement of inertia of a dise.

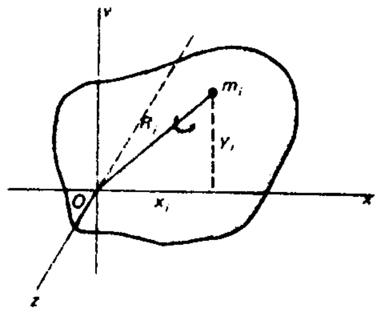
ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Perpendicular-axis theorem)

ทฤษฎีแกนตั้งฉากเป็นทฤษฎีหนึ่งที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของโมเมนต์ของความเฉื่อย กรณีวัตถุมีลักษณะเป็นแผ่นดังรูป 7.6 ถ้า I_x, I_y และ I_z เป็นค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุเป็นแผ่นรอบแกนซึ่งตั้งฉากกัน โดยที่ I_x, I_y และ I_z เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน x, y และ z ตามลำดับ จะได้ว่า

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

หรือ

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7.28)$$



รูป 7.6 The perpendicular axis theorem

ตัวอย่าง 7.1 จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของแผ่นวัตถุกลมบางมีมวล m รัศมี a รอบแกน ซึ่งขนานกับแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางของมวล

วิธีทำ จากทฤษฎีแกนตั้งฉาก $I_z = I_x + I_y$

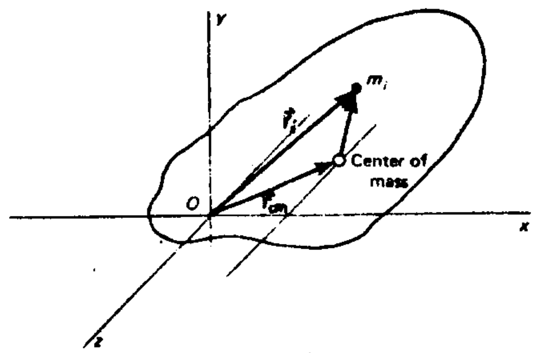
เนื่องจาก $I_z = \frac{1}{2} ma^2$ และ $I_x = I_y$

ดังนั้น

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} ma^2$$ ตอบ

ทฤษฎีแกนขนาน (paralel-axis theorem)

ทฤษฎีแกนขนานเป็นทฤษฎีกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุนสองแกนซึ่งขนานกัน โดยที่แกนหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุ ถ้า I_{cm} เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุมวล m รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของมวล I เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนซึ่งขนานกัน และห่างกันเป็นระยะ 1 ดังรูป 7.8



รูป 7.8 Paralld axis theorem

จากรูป 7.8 $$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{i-cm}$$

ฉนั้น $$x_i = x_{cm} + x_{i-cm} \;,\quad y_i = y_{cm} + y_{i-cm} \qquad (7.29)$$

เนื่องจาก $$I = \sum_i m_i \, (x_i^2 + y_i^2)$$

จากสมการ $$I = \sum_i m_i \, (x_{i-cm}^2 + y_{i-cm}^2) + \sum_i m_i \, (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)$$

$$+ 2x_{cm} \sum_i m_i x_{i-cm} + 2y_{cm} \sum_i m_i \, y_{i-cm} \qquad (7.30)$$

จากนิยามของศูนย์กลางของมวล

$$\sum_i m_i x_{i-cm} = \sum_i m_i y_{i-cm} = 0$$

$$l^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$$

ดังนั้นสมการ (7.30) จึงกลายเป็น

$$I = I_{cm} + ml^2 \tag{7.31}$$

สมการ (7.31) คือ ข้อสรุปของทฤษฎีแกนขนาน

<u>ตัวอย่าง 7.2</u> จงคำนวณค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของคานยาว L มวล m ดังรูป 7.9 เมื่อ (a) หมุนรอบแกนซึ่งผ่านปลายคาน (b) หมุนรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของคาน.

<u>วิธีทำ</u>

(a) พิจารณาส่วนเล็ก ๆ ของคานซึ่งมีความยาว dy พื้นที่ภาคตัด s ซึ่งมีระยะห่าง y จากแกน

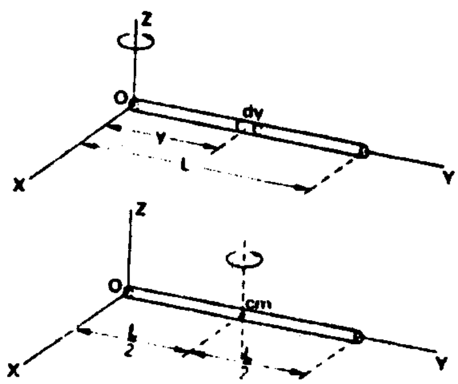
$$I = \int R^2\, dm = \int_0^L y^2\, (\rho s\, dy)$$

$$= \rho s \int_0^L y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\, \rho\, SL^3$$

$$= \frac{1}{3}\, mL^2$$

<u>ตอบ</u>



<u>รูป 7.9</u> ความยาว L มวล m

(b) จากทฤษฎีแกนขนานจะได้ว่า

$$I_o = I_{cm} + m(\frac{L}{2})^2$$

หรือ

$$I_{cm} = I_o - m\,(\frac{L}{2})^2$$

$$= \frac{1}{3}\ mL^2 - \frac{1}{4}\ ML^2$$

$$= \frac{1}{12}\ mL^2$$

<u>ตอบ</u>

รัศมีไจเรชั่น (Radius of gyration)

ไม่ว่าวัตถุจะมีรูปร่างอย่างไรก็ตาม เพื่อความสะดวกเราอาจคิดเสมือนว่ามวลของวัตถุทั้งก้อนรวมกันอยู่ ณ. ตำแหน่งหนึ่งโดยมีระยะห่างระยะหนึ่งจากจุดนั้นไปยังแกนหมุน ซึ่งเรียกว่า รัศมีไจเรชั่น แทนด้วยสัญลักษณ์ K เราจะใช้ระยะนี้แสดงค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย ตามความสัมพันธ์

$$I = m k^2 \quad \text{หรือ} \quad k = \frac{I}{m} \tag{7.32}$$

เช่นวัตถุทรงกลมจะได้ $mk^2 = \frac{2}{5} ma^2$ หรือ $k = \frac{2}{5} a$

<u>ตาราง 7.1</u>

Values of k^2 of Various Bodies

(Moment of Inertia = Mass x k^2)

Body	Axis	k^2
Thin rod, length a	Normal to rod at its center	$\frac{a^2}{12}$
	Normal to rod at one end	$\frac{a^2}{3}$
Thin rectangular lamina, sides a and b	Through the center, parallel to side b	$\frac{a^2}{12}$
	Through the center, normal to the the lamina	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
Thin circular disc, radius a	Through the center, in the plane of the disc	$\frac{a^2}{4}$
	Through the center, normal to the disc	$\frac{a^2}{2}$
Thin hoop (or ring) radius a	Through the center, in the plane of the loop	$\frac{a^2}{2}$
	Through the center, normal the plane of the hoop	a^2

ตาราง 7.1

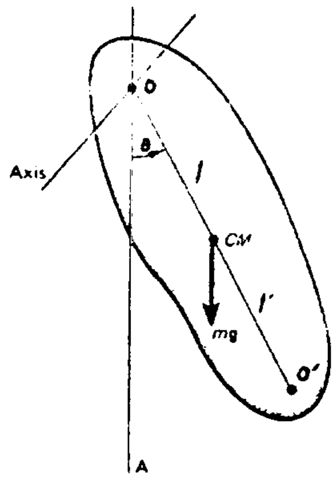
Values of k^2 of Various Bodies

(Moment of Inertia = Mass x k^2)

Body	Axis	k^2
Thin cylindrical shell, radius a, length b	Central longitudinal axis	a^2
Uniform solid right circular cylinder radius a, length b	Central longitudinal axis	$\frac{a^2}{2}$
	Through center, perpendicular to longitudinal axis	$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$
Thin spherical shell, radius a	Any diameter	$\frac{2}{3} a^2$
Uniform solid sphere, radius a	Any diameter	$\frac{2}{5} a^2$
Uniform solid recrangular parallelepiped, sides a, b, and c	Through center, normal to face ab, parallel to edge c	$\frac{a^2 + b^2}{12}$

7.5 ฟิสิกัลเพนดูลัม (THE PHYSICAL PENDULUM)

ตัวอย่างสำคัญอันหนึ่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งแกร็ง คือ การนำวัตถุแข็งเกร็งอันหนึ่งมาแขวนให้แกว่งได้รอบแกนในแนวระดับ ซึ่งจะเรียกว่าเป็นฟิสิกกัลเพนดูลัมหรือ Compourd pendulum ดังรูป 7.10



รูป 7.10 The physical pendulum

ให้ 0 แสดงตำแหน่งของแกนหมุนซึ่งอยู่ในแนวระดับ และ CM แสดงตำแหน่งศูนย์กลางของมวล โดยมีระยะห่างจาก 0 ถึง CM เท่ากับ 1, θ เป็นมุมระหว่าง OCM กับ OA ในแนวดิ่ง. ทอร์คของแรงโน้มถ่วงหรือทอร์คคืนกลับ คือ

$$N = -mgl \sin \theta$$

แต่จากสมการ (7.23) $N = I\omega$

ดังนั้น $$-mg\, l \sin \theta = I \dot{\omega}$$

หรือ

$$\theta + \frac{mgl}{I} \sin \theta = 0 \qquad (7.33)$$

สมการ (7.33) คือ ฟอร์มของสมการของการเคลื่อนที่ของชิมเปิลเพนดูลัม และสำหรับการออสซิลเลตเป็นมุมเล็ก ๆ นั้น $\sin\theta \approx \theta$ สมการ (7.33) จึงกลายเป็น

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\,\theta = 0 \qquad (7.34)$$

โดยสมการการเคลื่อนที่ของ θ คือ

$$\theta = \theta_o \cos(2\pi ft + \alpha) \qquad (7.35)$$

เมื่อ θ เป็นแอมปริจูด (amplitude) และ α เป็นมุมเฟสเริ่มต้น (initial phase angle) ความถี่ของการออสซิลเลต f หาได้จาก

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}} \qquad (7.36)$$

และเวลาในการออสซิลเลตครบ 1 รอบ (period) T คือ

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad (7.37)$$

เมื่อเขียน period T ในเทอมของรัศมีไจเรชั่น k จะได้เป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}} \qquad (7.38)$$

คาบเวลา T ของสมการ (7.38) เหมือนกับคาบเวลาของซิมเปิลเพนดูลัมที่มีความยาว $= k^2/l$

ศูนย์กลางของการออสซิลเลต (center of oscillation)

โดยการใช้ทฤษฎีแกนขนาน เราสามารถอธิบายรัศมีไจเรชั่น k ในเทอมของรัศมีไจเรชั่นที่ศูนย์กลางของมวล k_{cm} ได้ดังนี้ :

จาก

$$I = I_{cm} + m\,l^2$$

หรือ

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + m\,l^2$$

เมื่อตัดค่า m ทิ้งจะได้

$$k^2 = k_{cm}^2 + l^2 \qquad (7.39)$$

สมการ (7.38) จึงเขียนได้เป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l^2}{gl}} \qquad (7.40)$$

สมมติว่าแกนหมุนของฟิสิกัลเพนดูลัม เปลี่ยนจากตำแหน่งเป็น O ซึ่งมีระยะห่าง l จากศูนย์กลางของมวล (ดังรูป 7.10) คาบเวลาของการออสซิลเลตสำหรับแกนหมุนใหม่หาได้จาก

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l'^2}{gl'}}$$

แต่คาบเวลาของการแกว่งสำหรับแกนหมุนใหม่กับแกนหมุนเก่ายังคงเท่ากัน ดังนั้น

$$\frac{k_{cm}^2 + l^2}{l} = \frac{k_{cm}^2 + l'^2}{l}$$

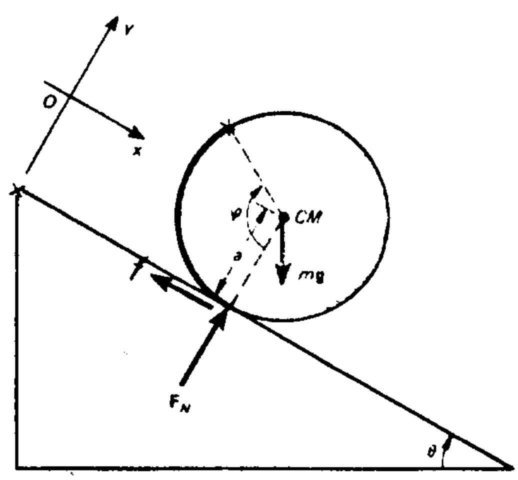
หรือ

$$l\,l' = k_{cm}^2 \tag{7.41}$$

ความสัมพันธ์ของตำแหน่ง o กับ o ในสมการ (7.41) เรียกว่า "ศูนย์กลางของการออสซิลเลต" สำหรับจุด o และ o เป็นศูนย์กลางของการออสซิลเลตของ o' ด้วย.

7.6 การกลิ้งของวัตถุบนระนาบเอียง (BODY ROLLING DOWN AN INCLINED PLANE)

วัตถุที่กลิ้งบนระนาบเอียง เช่น ลูกบอล หรือทรงกลม มีลักษณะการเคลื่อนที่ดังรูป 7.11 ซึ่งจะมีแรง 3 แรงกระทำต่อวัตถุ คือ (1) แรงที่ตกลงมาในแนวดิ่ง เนื่องจากแรงดึงดูดของโลก หรือน้ำหนักของวัตถุ (2) แรงปฏิกิริยาตั้งฉากของระนาบเอียง F_n และ (3) แรงเสียดทาน f ของระนาบเอียงกับวัตถุ



รูป 7.11 Body rolling an incline plane

ถ้ากำหนดให้ x เป็นแกนในแนวระนาบเอียง และ y เป็นแกนในแนวตั้งฉากกับระนาบเอียงเราได้สมการของการเคลื่อนที่แต่ละแกนแบบเลื่อนตำแหน่งของศูนย์กลางของมวลเป็น

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - f \tag{7.42}$$

$$m\ddot{y} = -mg\cos\theta + F_n \tag{7.43}$$

เมื่อ θ เป็นมุมของระนาบเอียงกับแนวราบ ถ้าวัตถุอยู่ในสภาพนิ่ง เราได้

$$y_{cm} = \text{คงที่}$$

หรือ

$$\ddot{y}_{cm} = 0$$

สมการ (7.43) สำหรับกรณีนี้ คือ

$$F_n = mg\cos\theta \tag{7.44}$$

มีแรงเพียงแรงเดียวเท่านั้นที่ทำให้เกิดทอร์คที่ศูนย์กลางของมวล คือ แรงเสียดทาน f ซึ่งขนาดของทอร์คเท่ากับ fa เมื่อ a เป็นรัศมีของวัตถุ ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่เชิงหมุน คือ

$$N = I_{cm}\dot{\omega} = f\,a \tag{7.45}$$

เมื่อวิเคราะห์ดูจะเห็นว่า การกลิ้งของระนาบเอียงบนระนาบเป็นไปได้ 2 แบบคือ การกลิ้งของวัตถุแบบไม่หลุดจากระนาบเอียง กับแบบที่หลุดจากระนาบเอียง แต่จะขอกล่าวถึงแบบแรกเท่านั้น

ถ้าการกลิ้งของวัตถุ ไม่หลุดจากระนาบเอียง เราได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} x_{cm} &= a\psi \\ \dot{x}_{cm} &= a\dot{\psi} = a\omega \\ \ddot{x}_{cm} &= a\ddot{\psi} = a\dot{\omega} \end{aligned} \tag{7.46}$$

เมื่อ ψ เป็นมุมของการหมุน. สมการ (7.45) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\,\ddot{x}_{cm} = f \qquad (7.47)$$

แทนค่า f ในสมการ (7.42) ได้

$$m\,\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\,\ddot{x}_{cm}$$

แก้สมการหาค่า x จะได้

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg\sin\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g\sin 0}{1 + (k_{cm}^2/a^2)} \qquad (7.48)$$

เมื่อ k_{cm} เป็นรัศมีไจเรชั่นที่ศูนย์กลางของมวล สมการ (7.48) คือสมการความเร่งของวัตถุที่กลิ้งบนระนาบเอียงแบบไม่หลุดจากระนาบเอียง ตัวอย่างเช่น ความเร่งของทรงกลม ($k_{cm}^2 = 2a^2/5$) คือ

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{5}{7}\,g\sin\theta$$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

7.1 Find the center of mass of each of the following: (a) A thin uniform lamina in the form of a quadrant of a circle. (b) A thin wire bent into a quadrant of a circle. (c) A solid uniform right circular cone of height h. (d) The area bounded by the parabola $x^2 = by$ and the line $y = b$. (e) The volume bounded by the paraboloid of revolution $z = (x^2 + y^2)/b$ and the plane $z = b$.

7.2 Find the center of mass of an octant of a uniform solid ellipsoid of semiaxes a, b, and c.

7.3 Find the center of mass of a solid hemispherical body of radius a whose density varies linearly with the distance from the center, the density being zero at the center and ρ_o at the outside.

7.4 A solid uniform sphere of radius a has a spherical cavity of radius (½) a centered at a point (½)a from the center of the sphere. Find the center of mass.

7.5 How far up a ladder of length 1 and weight ω can a man of weight W climb before slipping occurs if the ladder rests against a rough vertical wall ? The angle between the ladder and the floor is θ. Assume that the coefficient of friction μ is the same between the ladder and wall and between the ladder and floor.

7.6 A uniform wire bent into a semicircle hangs on a rough peg. The line joining the ends of the wire makes an angle θ with the horizontal, and the wire is just on the verge of slipping. What is the coefficient of friction between the wire and the peg ?

7.7 A solid uniform hemisphere rests in limiting equilibrium against a vertical wall. The rounded side of the hemisphere is in contact with the wall and the floor. If the coefficient of friction μ is the same for the wall and the floor, find the angle between the plane face of the hemisphere and the floor.

7.8 A uniform hemispherical shell rests in limiting equilibrium on a rough inclined plane of inclination θ. The rounded side of the shell is in contact with the plane, and the coefficient of friction is μ. Find the inclination of the shell.

7.9 Given that a set of forces F_1, F_2, ... acting on a rigid body is (a) in translational equilibrium and (b) in rotational equilibrium about some point O. Prove that the set of forces is also in rotational equilibrium about any other point $\dot{O}$.

7.10 Show that the moments of inertia of a solid uniform rectangular parallelepiped, elliptic cylinder, and ellipsoid are, respectively, $(m/3)(a^2 + b^2)$, $(m/4)(a^2 + b^2)$, and $(m/5)(a^2 + b^2)$, where m is the mass, and 2a and 2b are the principal diameters of the solid at right angles to the axis of rotation, the axis being through the center in each case.

7.11 Show that the moment of inertia of a solid uniform octant of a sphere of radius a is $\frac{2}{5}ma^2$ about an axis along one of the straight edges, where m is the mass of the octant. Note: This is the same formula as that for a sphere of mass m.

7.12 Find the moment of inertia of a uniform solid right-circular cone of mass m about the central axis.

7.13 Find the moment of inertia of a uniform semicircular lamina about an axis passing through the center of mass and perpendicular to the plane of the lamina.

7.14 A thin rod AB of length l and mass m has a small object of mass m fastened at end B. Find the period of oscillation of the rod if it swings as a physical pendulum about end A.

7.15 A square plate of side a swings as a physical pendulum about one corner. Find the period of oscillation and the center of oscillation if the axis of rotation is (a) normal to the plate, and (b) in the plane of the plate.

7.16 Show that the period of a physical pendulum is equal t0 $2\pi\,(d/g)^{1/2}$ where d is the distance between the point of suspension 0 and the center of oscillation 0.

7.17 A uniform solid ball has a few turns of light string wound around it. If the end of the string is held steady, and the ball is allowed to fall under gravity, what is the acceleration of the center of the ball ?

7.18 Two men are holding the ends of a uniform plank of length l and mass m. Show that if one man suddenly lets go, the load supported by the other man suddenly drops from mg/2 to mg/4.

7.19 Two weights of mass m_1 and m_2 are tied to the ends of a light in extensible cord. The cord passes over a pulley of radius a and moment of inertia I. Find the accelerations of the weights, assuming $m_1 > m_2$ and neglecting friction in the axle of the puller.

7.20 A uniform right-circular cylinder of radius a is balanced on the top of a perfectly rough fixed cylinder of radius b(b > a), the axes of the two cylinders being parallel. If the balance is slightly disturbed, find the point at which the rolling cylinder leaves the fixed one.

7.21 A long uniform rod of length l stands vertically on a rough floor. The rod is slightly disturbed and falls to the floor. (a) Find the horizontal and vertical components of the reaction at the floor as functions of the angle θ between the rod and the vertical at any instant. (b) Find also the angle at which the rod begins to slip and in what direction the slipping occurs. Let μ be the coefficient of friction between the rod and the floor.

7.22 A ball si initially projected, without rotation, at a speed v_o up a rough inclined plane of inclination θ and coefficient of friction μ.. Find the plsition of the ball as a function of time, and determine the position of the ball when pure rolling begins. Assume that μ is greater than (2.7) tan θ.

7.23 A uniform circular disc rests on a smooth horizontal surface. If it is struck tangentially at a point on the circumference, about what point does the disc begin to rotate ?