บทที่ 6

พลศาสตร์ของระบบอนุภาค

(DYNAMICS OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ในบทนี้จะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคตั้งแต่สองอนุภาคขึ้นไปที่มีระบบการเคลื่อนที่เป็นแบบเดียวกัน เช่น การเคลื่อนที่ของโมเลกุลของน้ำ (H_2O) ซึ่งเราเรียกว่าเป็นการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค ตัวอย่างสำคัญที่จัดเป็นระบบอนุภาคอีกอย่างคือ เทหวัตถุแข็งเกร็ง (a rigid body) ดังนั้น เนื้อหาในบทนี้จึงเป็นประโยชน์พื้นฐาน สำหรับศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุแข็งเกร็งในบทต่อไปด้วย.

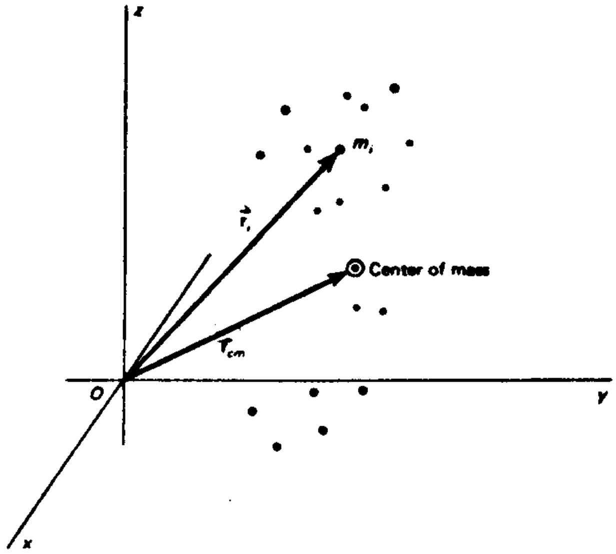
6.1 ศูนย์กลางของมวลและโมเมนตัมเชิงเส้น (CENTER OF MASS AND LINEAR MOMENTUM)

กรณีทั่วไปของการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค เราสมมุติให้อนุภาคทั้งหมดมี n อนุภาค ฉนั้นเป็นการยากมากที่เราจะคิดการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาค เราจึงต้องคิดเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งหมดหรือเป็นระบบพร้อมกันไป ดังนี้

ให้อนุภาคมวล $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$ ตามลำดับ (ดังรูป 6.1) ถ้าเวกเตอร์บอกตำแหน่งของศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาคคือ $\vec{r}_{cm}$ ดังนั้น เราหา $\vec{r}_{cm}$ ได้จากนิยาม

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_n\vec{r}_o}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

$$= \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \tag{6.1}$$



รูป 6.1 ศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาค

เมื่อ M เป็นมวลทั้งหมดของระบบ และจากสมการ (6.1) ตำแหน่งศูนย์กลางของมวลในแต่ละแกน คือ

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M},$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \tag{6.2}$$

$$Z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}.$$

จากการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการ (6.1) เทียบกับเวลาและถือว่ามวลของอนุภาคคงที่ เราได้ความเร็วที่ศูนย์กลางของมวลเป็น

$$\vec{v}_{cm} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M} \tag{6.3}$$

<u>ตัวอย่าง 6.1</u> ระบบอนุภาคหนึ่งประกอบด้วยอนุภาค 3 อนุภาค แต่ละอนุภาคมีมวล 0.1 กรัม ซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งและความเร็ว ดังนี้

$$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k},\ \vec{r}_3 = \hat{k} \quad \text{เซ็นติเมตร}$$

และ $$\vec{v}_1 = 2\hat{i},\ \vec{v}_2 = \hat{j},\ \vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad \text{เซ็นติเมตร/วินาที}$$

จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งและความเร็วที่จุดศูนย์กลางของมวล

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม สมการ (6.1)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{0.1\hat{i} + 0.1\hat{j} + 0.1\hat{j} + 0.1\hat{k} + 0.1\hat{k}}{0.1 + 0.1 + 0.1}$$

$$= \frac{0.1\hat{i} + 0.2\hat{j} + 0.2\hat{k}}{0.3}$$

$$= \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} \qquad \text{เซ็นติเมตร}$$

และจากสมการ (6.3)

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= 0.2\hat{i} + 0.1\hat{j} + 0.1\hat{i} + 0.1\hat{j} + 0.1\hat{k}$$

$$= \hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$ เซ็นติเมตร/วินาที <u>ตอบ</u>

โมเมนตัมของระบบอนุภาค. จากนิยามความเร็วศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาค [สมการ (6.3)] ทำให้เราสามารถหาโมเมนตัมของระบบได้ไม่ยาก กล่าวคือ ให้โมเมนตัมของระบบอนุภาคทั้งหมดเป็น $\Sigma \vec{P}_i$ ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

$$= M\vec{v}_{cm} \qquad (6.4)$$

สมการ (6.4) สรุปได้คือ "โมเมนตัมทั้งหมดของระบบหาได้จากการคิดให้มวลทั้งหมดมารวมกันที่จุดศูนย์กลางของมวลและเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}_{cm}$". สำหรับกรณีเฉพาะ เช่นกรณีที่เราใส่แกนอ้างอิงที่จุดศูนย์กลางของมวล ซึ่งเรียกว่า "แกนโมเมนตัมศูนย์" (Zero momentum frame) เราได้

$$\vec{r}_{cm} = 0, \quad \vec{v}_{cm} = 0$$

ดังนั้น $$\Sigma\vec{P}_i = M\vec{v}_{cm}$$

$$= 0 \qquad (6.5)$$

นั่นคือ "โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค เมื่อใช้ศูนย์กลางของมวลเป็นแกนอ้างอิงมีค่าเท่ากับศูนย์" ส่วนในกรณีที่ระบบอนุภาคเป็นระบบโดดเดี่ยว (ไม่มีแรงภายนอก) จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (principle of conservation of momentum) เราทราบ

$$\Sigma \vec{P}_i = M\vec{v}_{cm} = \text{คงที่}$$

หรือ

$$\vec{v}_{cm} = \text{คงที่} \qquad (6.6)$$

สมการ (6.6) สรุปได้ว่า "ศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาคโดดเดี่ยว เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวสัมพัทธ์กับแกนเฉื่อยใด ๆ "

<u>ตัวอย่าง 6.2</u> จากตัวอย่าง 6.1 จงหาโมเมนตัมของระบบอนุภาค

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม (6.4)

$$\Sigma \vec{P}_i = M\vec{v}_{cm}$$

$$= 0.3\,(\hat{i} + \tfrac{2}{3}\hat{j} + \tfrac{1}{3}\hat{k})$$

$$= 0.3\hat{i} + 0.2\hat{j} + 0.1\hat{k} \quad \text{กรัม-เซ็นติเมตร/วินาที}$$ <u>ตอบ</u>

6.2 แรงของระบบอนุภาค

จากที่เราได้กล่าวถึงโมเมนตัมของระบบอนุภาคในตอนที่แล้ว เราจึงสามารถหาแรงของระบบอนุภาคได้โดยความสัมพันธ์ของแรงและโมเมนตัมตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน กล่าวคือ เราให้แรงทั้งหมดของระบบอนุภาคที่มี n อนุภาคใด ๆ เป็น $\Sigma \vec{F}_i$ ซึ่งประกอบไปด้วยแรงภายนอกทั้งหมดบวกกับแรงภายในทั้งหมดของระบบอนุภาค ดังนั้น

$$\Sigma \vec{F}_i = \Sigma \vec{F}_i^{ext} + \Sigma \vec{F}_i^{int} = \Sigma \dot{\vec{P}}_i \qquad (6.7)$$

เมื่อ $\Sigma \vec{F}_i^{ext}$ เป็นแรงภายนอกทั้งหมด และ $\Sigma \vec{F}_i^{int}$ เป็นแรงภายในทั้งหมด และสมมติว่าแรงภายในที่กระทำต่ออนุภาค ใด ๆ คือ $\sum_{j=1}^{n\,\prime} \vec{F}_{ij}^{int}$ แต่แรงภายในที่เกิดขึ้นเป็นลักษณะของแรงกริยากับปฏิกริยา (action และ reaction) ตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน ฉนั้นแรงภายในทั้งหมดคือ $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n\,\prime} F_{ij}^{int}$ สมการ (6.7) จะกลายเป็น

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j=1}^{n\,\prime} \vec{F}_{ij}^{int} = \sum_i \dot{\vec{P}}_i \qquad (6.8)$$

เมื่อสมการ (6.8) เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัว คือ $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อ $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ แสดงว่าแรงภายในที่กระทำต่อกันแต่ละคู่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นแรงภายในทั้งหมดของสมการ (6.8) ก็จะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย. สมการ (6.8) จึงกลายเป็น

$$\Sigma \vec{F}_i = \Sigma \vec{F}_i^{ext} = \Sigma \dot{\vec{P}}_i = M \vec{a}_{cm} \qquad (6.9)$$

สมการ (6.9) สรุปได้ว่า "ศูนย์กลางของมวลของระบบอนุภาค เคลื่อนที่เหมือนกับอนุภาคที่มีมวลเท่ากับมวลทั้งหมดของระบบ ถูกกระทำด้วยแรงภายนอกที่ใช้กับระบบนั้น"

<u>ตัวอย่าง 6.3</u> สมมติว่าอนุภาคกลุ่มหนึ่งเคลื่อนที่ภายใต้สนามแรงดึงดูดของโลกเพียงอย่างเดียว จงหาความเร่งของอนุภาคกลุ่มนี้

<u>วิธีทำ</u> การเคลื่อนที่ของอนุภาค i ใด ๆ

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}$$

ดังนั้น เมื่อคิดทั้งระบบคือ

$$\Sigma \vec{F}_i = \Sigma \vec{F}_i^{ext} = \Sigma m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

จากสมการ (6.9), $$M \vec{g} = M \vec{a}_{cm}$$

ดังนั้น $$\vec{a}_{cm} = \vec{g}$$ <u>ตอบ</u>

ในกรณีที่แรงภายนอก $\Sigma \vec{F}_i^{ext} = 0$ แสดงว่า $M \vec{a}_{cm} = 0$ หรือ $\vec{a}_{cm} = 0$ และ $\vec{v}_{cm}$ = คงที่ นั่นคือ

$$\Sigma \vec{P}_i = M \vec{v}_{cm} = \text{คงที่} \tag{6.10}$$

สมการ (6.10) นี้ คือหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง.

6.3 โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ (ANGULAR MOMENTUM OF A SYSTEM)

จากบทที่ 4 สมการ (4.26) เราทราบว่านิยามของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคเดี่ยวคือ r x mv. ดังนั้น ถ้าให้ ΣL_i เป็นโมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมดของระบบอนุภาค เราได้นิยามโมเมนตัมเชิงมุมของระบบเป็น

$$\sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \tag{6.11}$$

สมการ (6.11) เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาคได้ โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการ (6.11) เทียบกับเวลา

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

$$= \sum_i \left(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i\right) \qquad (6.12)$$

เทอมแรกทางขวามือของสมการ (6.12) มีค่าเป็นศูนย์ ตามกฎของผลคูณเวกเตอร์ คือ $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$, และเมื่อ $\sum_i m_i \vec{a}_i$ คือแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบอนุภาค ดังนั้นจากสมการ (6.8) เราได้

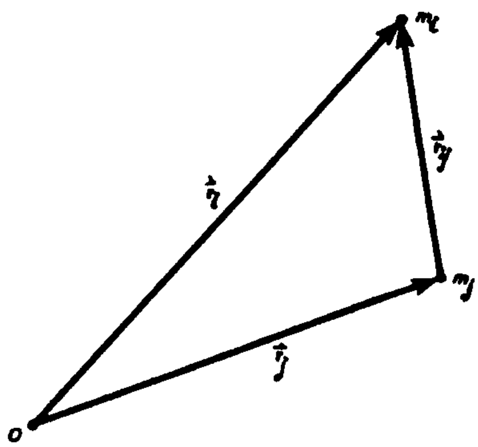
$$\frac{d}{dt}\left(\sum \vec{L}_i\right) = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{n}{}' \vec{F}_{ij}^{int}\right)\right]$$

$$= \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}\right) + \sum_i \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}^{int} \qquad (6.13)$$

สมการ (6.13) สัญญลักษณ์ต่าง ๆ อธิบายเช่นเดียวกันกับตอน 6.2 คือ $\vec{F}_i^{ext}$ เป็นแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาค i ใด ๆ และ $\vec{F}_{ij}$ เป็นแรงภายในที่อนุภาค j กระทำต่ออนุภาค i ใด ๆ และเมื่อพิจารณาเทอมสุดท้ายของสมการ (6.13) โดยแยกพิจารณาทีละคู่ของแต่ละเทอม คือ

$$\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}\right) + \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{int}\right) \qquad (6.14)$$

เมื่อ $\vec{r}_i$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาคมวล m_i, $\vec{r}_j$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาคมวล m_j, และ $\vec{r}_{ij}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพัทธ์ของ $\vec{r}_i$ เมื่อเทียบกับ $\vec{r}_j$ ดังรูป 6.2



รูป 6.2 นิยามของเวกเตอร์ r_{ij}

จากรูป (6.2) เราทราบ

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \tag{6.15}$$

เมื่อแรงดึงดูดภายในของอนุภาค i กับอนุภาค j เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$) ดังนั้น สมการ (6.14) คือ.

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{int}) = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}^{int})$$

$$= \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{int}$$

$$= 0 \tag{6.16}$$

ดังนั้นเราสรุปได้ว่า เทอมสุดท้ายของสมการ (6.13) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}\,(\Sigma\,\vec{L}_i) \;=\; \Sigma\,(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}) \tag{6.17}$$

เทอมทางขวามือของสมการ (6.17) คือ ทอร์ค (torque) ที่เกิดจากแรงภายนอกทั้งหมดของระบบอนุภาค เราแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\Sigma\,\vec{N}_i$ ดังนั้น ข้อสรุปของสมการ (6.17) จึงกลายเป็น

$$\frac{d}{dt}\,(\Sigma\,\vec{L}_i) \;=\; \Sigma\,\vec{N}_i \tag{6.18}$$

หรือสรุปได้ว่า "อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับทอร์คที่เกิดจากแรงภายนอกทั้งหมดของระบบ". สำหรับกรณีที่ระบบอนุภาคเป็นระบบอิสระ ($\Sigma\,\vec{F}_i^{ext} = 0$) ทอร์คของระบบย่อมมีค่าเป็นศูนย์และโมเมนตัมเชิงมุมของระบบย่อมมีค่าคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง :

$$\frac{d}{dt}\,(\Sigma\,\vec{L}_i) \;=\; 0$$

$$\Sigma\,\vec{L}_i \;=\; \Sigma\,(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) \;=\; \text{คงที่} \tag{6.19}$$

สมการ (6.19) คือหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ (principle of conservation of angular momentum of a system) ในกรณีทั่วไปของอนุภาคเดี่ยวเราทราบว่า โมเมนตัมเชิงมุมจะมีค่าคงที่ หรือทอร์คมีค่าเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อแรงที่กระทำต่ออนุภาคนั้นเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง (central force) ทำนองเดียวกันสำหรับระบบอนุภาค ถ้าแรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคนั้นอยู่ในแนวเดียวกับ $\vec{r}_{cm}$ หรือเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง โมเมนตัมเชิงมุมของระบบก็ย่อมมีค่าคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง

6.4 พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค (KINETIC ENERGY OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ให้พลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบอนุภาคแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Sigma\ T_i$ ดังนั้นพลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบ คือ

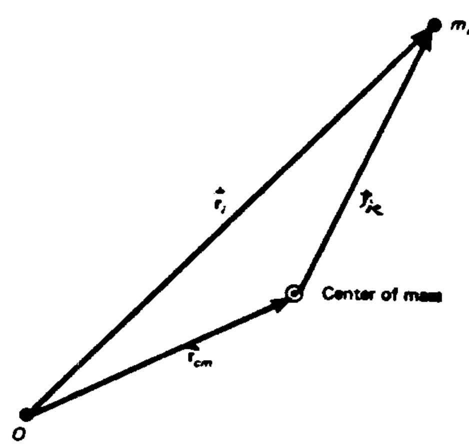
$$\Sigma\ T_i = \Sigma\ \tfrac{1}{2}\, m_i v_i^2$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์

$$\Sigma\ T_i = \Sigma\ \tfrac{1}{2}\, m_i\ (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \tag{6.20}$$

จากรูป 6.3, เราสามารถอธิบายเวกเตอร์บอกตำแหน่งของแต่ละอนุภาค i ใด ๆ ได้ในเทอมของ

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{ic} \tag{6.21}$$



<u>รูป 6.3</u> นิยามของ $\vec{r}_{ic}$

เมื่อ $\vec{r}_{ic}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของแต่ละอนุภาค i ใด ๆ สัมพัทธ์กับจุดศูนย์กลางของมวล. และโดยการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (6.21) เทียบกับเวลา เราได้

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{ic} \tag{6.22}$$

เมื่อแทนค่า v_i ในสมการ (6.20) เราได้พลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบในเทอมของ :

$$\begin{aligned} \Sigma T_i &= \Sigma \left[\tfrac{1}{2} m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{ic}) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{ic}) \right] \\ &= \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_{cm}^2 + \Sigma m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{ic}) + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_{ic}^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \vec{v}_{cm}^2 \ \Sigma m_i + \vec{v}_{cm} \cdot \Sigma m_i \vec{v}_{ic} + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_{ic}^2 \end{aligned} \tag{6.23}$$

เทอมกลางทางขวามือของสมการ (6.23) มีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \Sigma m_i \vec{v}_{ic} &= \Sigma m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) \\ &= \Sigma m_i \vec{v}_i - M \vec{v}_{cm} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.24}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบอนุภาคในสมการ (6.23) จึงกลายเป็น

$$\Sigma T_i = \tfrac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_{ic}^2$$

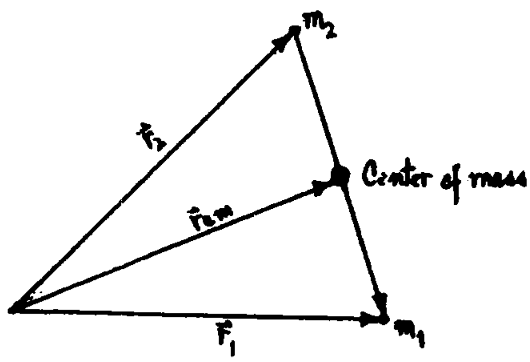
หรือตามนิยามของผลคูณสเกลาร์

$$\Sigma T_i = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_{ic}^2 \qquad (6.25)$$

ข้อสรุปของสมการ (6.25) คือ "พลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบอนุภาคหาได้จากผลบวกของพลังงานจลน์ที่จุดศูนย์กลางของมวล กับ พลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาค สัมพัทธ์กับจุดศูนย์กลางของมวล" การแยกพลังงานจลน์ออกเป็นสองส่วนนี้ มีประโยชน์สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับพลังงานในเรื่องของฟิสิกส์โมเลกุลเป็นอย่างยิ่ง

6.5 การเคลื่อนที่ของวัตถุ 2 อัน เมื่อมีแรงกระทำระหว่างกัน (MOTION OF TWO INTERACTING BODIES) และมวลลดทอน (THE REDUCED MASS)

ในตอนนี้เราจะพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ของระบบที่มีอนุภาคเพียงสองอนุภาค (หรือวัตถุ 2 อัน แต่เราคิดวัตถุในลักษณะของอนุภาค) ซึ่งอาจจะมีแรงดึงดูดระหว่างอนุภาคสองอนุภาคหรือมีแรงภายในของระบบ เราให้ m_1, m_2 เป็นมวลของอนุภาคทั้งสอง, และให้ $\vec{F}_1^{ext}$, $\vec{F}_2^{ext}$ เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อมวล m_1, m_2 และ $\vec{F}_{12}^{int}$, $\vec{F}_{21}^{int}$ เป็นแรงภายในของมวล m_2 กระทำต่อมวล m_1 และมวล m_1 กระทำต่อมวล m_2 ตามลำดับ. และเราแสดงตำแหน่งของมวล m_1, m_2 ด้วยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ ดังรูป 6.4



รูป 6.4 Coordinates for the two bodies problem

ดังนั้น จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของระบบ คือ

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12}^{int} + \vec{F}_{21}^{int} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 \qquad (6.26)$$

กรณีที่ระบบนี้เป็นระบบอิสระ (system is isolated) เราทราบจากสมการ (6.10) ว่า $\ddot{\vec{r}}_{cm} = 0$ ฉนั้น ถ้าแรงภายในเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน สมการ (6.26) กลายเป็น

$$\Sigma \vec{F} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \qquad (6.27)$$

สมการ (6.27) ไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงอีก เพราะสรุปแล้วไม่มีแรงมากระทำต่อระบบเลย เราจึงพิจารณาเฉพาะกรณีที่มีแรงมากระทำต่อระบบในแบบทั่วไปของสมการ (6.26) ถ้าพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาค เราได้

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}^{int} \qquad (6.28)$$

และ

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}^{int} \qquad (6.29)$$

จากรูป 6.4, ถ้า $\vec{r}_{12}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพัทธ์ของ $\vec{r}_1$ เทียบกับ $\vec{r}_2$ เราได้

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (6.30)$$

และ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.31)$$

จากการแทนค่า r_2 ของสมการ (6.30) ในสมการ (6.31) ได้

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} \qquad (6.32)$$

ทำนองเดียวกันกับสมการ (6.32)

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} \qquad (6.33)$$

พิจารณาสมการ (6.26) ในกรณีที่แรงภายในเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน ($\vec{F}_{12}^{int} = -\vec{F}_{21}^{int}$) จะได้

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \qquad (6.34)$$

จากการหาค่าอนุพันธ์ครั้งที่สองเทียบกับเวลาของสมการ (6.32) และ (6.33) แล้วแทนค่าในสมการ (6.34) :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

$$= m_1 \left(\ddot{\vec{r}}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{12}\right) + m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{12}\right)$$

$$= (m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_{cm} \qquad (6.35)$$

สมการ (6.35) สรุปได้เช่นเดียวกับสมการ (6.9) ของระบบ n อนุภาค และสมการ (6.35) นี้คือสมการการเคลื่อนที่ของ $\vec{r}_{cm}$. สำหรับสมการการเคลื่อนที่ของ $\vec{r}_{12}$ นั้นเราหาได้จากการคูณสมการ (6.28) ด้วย m_2 แล้วลบด้วยการคูณสมการ (6.29) ด้วย m_1 :

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = (m_2 \vec{F}_1^{ext} + m_2 \vec{F}_{12}^{int}) - (m_1 \vec{F}_2^{ext} + m_1 \vec{F}_{21}^{int})$$

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_{12}) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{12}^{int} + m_1 m_2 \left(\frac{\vec{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{ext}}{m_2} \right) \quad (6.36)$$

ถ้า $\frac{\vec{F}_1^{ext}}{m_1} = \frac{\vec{F}_2^{ext}}{m_2}$, ดังนั้น สมการ (6.36) กลายเป็น

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}^{int} \quad (6.37)$$

ให้ μ เป็นมวลลดทอน (reduced mass) ซึ่งมีนิยามว่า

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.38)$$

แทนค่าสมการ (6.38) ในสมการ (6.37) ดังนั้น

$$\mu \ddot{\vec{r}}_{12} = \vec{F}_{12}^{int} \quad (6.39)$$

สมการ (6.39) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของ $\ddot{\vec{r}}_{12}$ ซึ่งอธิบายในเทอมของมวลลดทอนและแรงภายใน $\vec{F}_{12}^{int}$, ทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\mu \ddot{\vec{r}}_{21} = \vec{F}_{21}^{int} \tag{6.40}$$

ข้อสังเกตในที่นี้คือ เรื่องของมวลลดทอนซึ่งสรุปได้ว่ามวลลดทอนจะเกิดขึ้นได้ตามเงื่อนไข ดังนี้

ก. ระบบอนุภาคซึ่งประกอบด้วยอนุภาค 2 อนุภาค.

ข. ระบบอนุภาคนี้เป็นระบบโดดเดี่ยว คือ ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

ค. ระบบอนุภาคนี้มีเฉพาะแรงภายในเท่านั้น

การหาโมเมนตัม, พลังงานจลน์ และโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค 2 อนุภาค เราหาได้ไม่ยากถ้าทราบความเร็วที่ต้องการ ซึ่งความเร็วที่ต้องการนี้เราหาได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการ (6.30) และ (6.31) เทียบกับเวลา:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \tag{6.41}$$

และ

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.42}$$

จากการแทนค่าสมการ (6.41) ในสมการ (6.42) และใช้นิยามของมวลลดทอน เราได้

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_{12} \tag{6.43}$$

และ

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} - \frac{\mu}{m_2} \vec{v}_{12} \tag{6.44}$$

ดังนั้นโมเมนตัมทั้งหมดของระบบ 2 อนุภาคหาได้โดยการแยกโมเมนตัมออกเป็น 2 ส่วน คือ

$$\Sigma \vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \tag{6.45}$$

แล้วแทนค่า $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ จากสมการ (6.43) และ (6.44) ในสมการ (6.45) จะได้

$$\Sigma \vec{P} = M \vec{v}_{cm} \tag{6.46}$$

เมื่อ $M = m_1 + m_2$, ส่วนการหาค่าพลังงานจลน์และโมเมนตัมเชิงมุมของระบบก็ใช้วิธีเดียวกันนี้ ซึ่งค่าของพลังงานจลน์ คือ

$$\Sigma T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} \mu v_{12}^2 \tag{6.47}$$

และค่าของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ 2 อนุภาค คือ

$$\Sigma \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$= m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$$

$$= M (\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}) + \mu (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}) \tag{6.48}$$

<u>ตัวอย่าง 6.4</u> จงพิสูจน์สมการ (6.47)

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{a}$$

จากรูป 6.4,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

ดังนั้น $$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad (b)$$

แทนค่า v_2 จาก (b) ใน (a) ได้

$$\vec{v}_1 = v_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12} \qquad (c)$$

และแทนค่า $\vec{v}_1$ จาก (b) ใน (a) ได้

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12} \qquad (d)$$

พลังงานจลน์ทั้งหมดคือ

$$\Sigma\, T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

เพราะว่า $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2 = v^2$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (e)$$

จาก (c) และ (d) แทนค่าใน (e) ได้

$$\Sigma\, T = \tfrac{1}{2} m_1 (\vec{v}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}) + \tfrac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12})$$

$$= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\mu v_{12}^2$$

<u>ซ.ต.พ</u>

6.6 การชนกัน (COLLISIONS)

การชนกันของวัตถุหรืออนุภาค 2 อนุภาค โดยแรงที่กระทำต่อกันระหว่างการชนเป็นแรงภายใน ถ้าพิจารณาอนุภาค 2 อนุภาคนี้ในลักษณะของระบบโดดเดี่ยว เราทราบว่าโมเมนตัมทั้งหมดของระบบคงที่ นั่นคือ

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (6.49)$$

หรือ

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (6.50)$$

เมื่อ $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ และ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ เป็นโมเมนตัมและความเร็วของมวล m_1, m_2 ก่อนชน $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ และ $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ เป็นโมเมนตัมและความเร็วของมวล m_1, m_2 หลังชนตามลำดับ. แน่นอนการชนกันของวัตถุหรืออนุภาค 2 อนุภาคย่อมเป็นไปตามหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม เมื่อไม่มีแรงภายนอก แต่ถ้าพิจารณาถึงพลังงานจลน์เนื่องจากการชน ตามความเป็นจริงโดยทั่วไปอาจมีการสูญเสียหรือเปลี่ยนแปลงพลังงานไปบ้าง ถ้าเราให้ ΣT และ ΣT เป็นพลังงานจลน์ทั้งหมด ก่อนชนและหลังชนตามลำดับ เราได้สมการสมดุลย์ของพลังงาน (Balance energy equation) คือ

$$\tfrac{1}{2} m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2'^2 + Q \qquad (6.51)$$

หรือในเทอมของโมเมนตัม :

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad (6.52)$$

เมื่อ Q เป็นพลังงานที่เปลี่ยนแปลงหรือสูญเสียไปเนื่องจากการชน สำหรับการชนกันของวัตถุหรืออนุภาคในทางฟิสิกส์เราแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. การชนแบบยืดหยุ่น (Elastic collision) เราถือว่าการชนแบบนี้ไม่มีการสูญเสียพลังงาน เนื่องจากการชนตามความเป็นจริงโดยทั่วไป เมื่อวัตถุชนกันย่อมจะมีการสูญเสียพลังงานไปบ้าง แต่ในทางฟิสิกส์เราถือว่าการชนกันของอณูเล็ก ๆ เช่น นิวตรอนไม่มีการสูญเสียพลังงาน และเราเรียกการชนกันของอนุภาคที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานเลย ($Q = 0$) ว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Perfectly elastic collision)

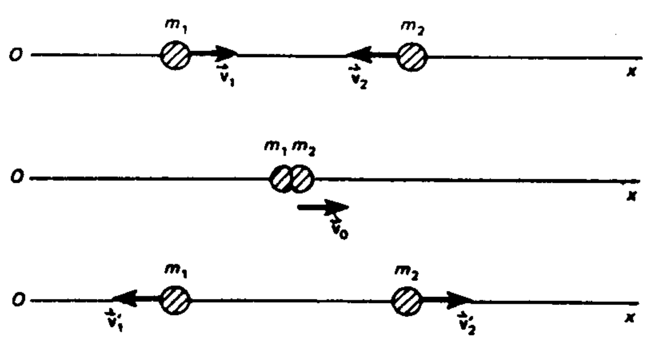
2. การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic colliosio) การชนแบบนี้มีการสูญเสียหรือเปลี่ยนแปลงพลังงานหลังการชน ($Q \neq 0$) กรณี Q เป็นบวกเรียกว่าเป็นการชนแบบ endoergic และกรณี Q เป็นลบ เรียกว่าเป็นการชนแบบ exoergic. การชนกันของวัตถุ 2 อันเมื่อชนกันแล้ว วัตถุทั้งสองเกาะหรือยุบติดไปด้วยกันเรียกว่า เป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (perfectly inelastic collision)

ปัญหาการชนกันของอนุภาคเป็นเรื่องสำคัญที่จะต้องศึกษาเป็นพิเศษในเรื่อง อะตอมมิก (atomic) และฟิสิกส์นิวเคลียร์

Direct Collisions

พิจารณาการชนของอนุภาคหรือวัตถุ อัน แบบพิเศษในลักษณะของการชนแบบประสานงาน (head-on collision) ซึ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคเป็นการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเดียวกันทั้งก่อนชนและหลังชน (ดังรูป 6.5), ในกรณีที่การชนเป็นไปตามสมการ (6.49) โมเมนตัมทั้งหมดของระบบจะคงที่ ดังนั้นเราเขียนสมการการชนโดยไม่จำเป็นต้องใช้เวกเตอร์ได้คือ

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (6.53)$$



รูป 6.5 Head on collision of two particles

การคำนวณหาความเร็วของอนุภาคหลังชน สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการ (6.53) ถ้าเราทราบความเร็วของอนุภาคก่อนชน (ควรระวังเรื่องเครื่องหมายของความเร็วด้วย) ในกรณีที่การชนกันของอนุภาคมีการสูญเสียพลังงาน เราสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (6.51) ถ้าเราทราบค่าของพลังงานที่สูญเสียไป, การหาค่าพลังงาน Q ที่สูญเสียไป วิธีการที่เราใช้กันบ่อยคือการอธิบายค่าของ Q ในเทอมของสัมประสิทธิ์การคืนตัว (Coefficient of restitution) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ ε และมีนิยามดังนี้

$$\varepsilon = \frac{\text{ความเร็วในการแยกออกจากกัน}}{\text{ความเร็วในการเข้าหากัน}}$$

$$= \frac{\text{ผลต่างของอัตราเร็วของอนุภาคหลังชน}}{\text{ผลต่างของอัตราเร็วของอนุภาคก่อนชน}}$$

$$= \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}$$

$$= \frac{v'}{v} \tag{6.54}$$

จะเห็นว่าค่าของ ε ขึ้นอยู่กับลักษณะการชนของวัตถุหรืออนุภาคทั้งสอง กรณีการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ($Q = 0$) พิจารณาจากสมการ (6.51) พบว่าค่าของ $\varepsilon = 1$, ส่วนกรณีการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ ($Q \neq 0$) และวัตถุหรืออนุภาคทั้งสองยุบติดไปด้วยกัน ซึ่งผลต่างของอัตราเร็วหลังการชนมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าของ ε กรณีนี้ $= 0$ สำหรับกรณีทั่วไปอื่น ๆ ค่าของ ε จะมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 เช่นการชนกันของลูกบิลเลียดสีขาวจากการทดลองพบว่า ค่า $\varepsilon = 0.95$ (โดยประมาณ) อย่างไรก็ตามค่าของ ε ขึ้นอยู่กับความเร็วของการชนด้วย.

จากสมการ (6.53) และสมการ (6.54) เราสามารถอธิบายอัตราเร็วของอนุภาคแต่ละอนุภาคหลังการชนได้ คือ

$$v_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)v_1 + (m_2 + \varepsilon m_2)v_2}{m_1 + m_2} \tag{6.55}$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + \varepsilon m_1)v_1 + (m_2 - \varepsilon m_1) v_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.56)$$

พิจารณาสมการ (6.55) และสมการ (6.56), ในกรณีที่ $\varepsilon = 0$ จะเห็นว่า $v_1' = v_2'$ แสดงว่าในการชนแบบนี้วัตถุหรืออนุภาคทั้งสองเกาะติดไปด้วยกัน ไม่มีการแยกจากกันเนื่องจากการชน. ในกรณีพิเศษคือการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ซึ่งค่า $\varepsilon = 1$ ถ้าเราให้ $m_1 = m_2$ ด้วยจะเห็นว่า ความเร็วหลังชนของสมการ (6.55) และ (6.56) คือ

$$v_1' = v_2 \text{ และ } v_2' = v_1 \qquad (6.57)$$

สมการ (6.57) สรุปได้ว่า "ความเร็วของแต่ละอนุภาคหลังการชนคือความเร็วของอนุภาคก่อนชนที่สลับกันนั่นเอง"

กรณีทั่วไปของการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์โดยตรง (Direct inelastic collision) เราสามารถพิสูจน์หาค่าของพลังงาน Q ที่สูญเสียไปได้ในเทอมของสัมประสิทธิ์การคืนตัว และมวลลดทอน μ โดยใช้สมการที่กล่าวมาแล้วของตอน 6.6 นี้ เราได้

$$Q = \tfrac{1}{2} \mu v_{12}^2 (1 - \varepsilon^2) \qquad (6.58)$$

เมื่อ v_{12} เป็นอัตราเร็วสัมพัทธ์ของมวล m_1 เมื่อเทียบกับมวล m_2 ก่อนชน และการพิสูจน์สมการ (6.58) นี้มีในแบบฝึกหัด

6.7 แรงดล (IMPULSE)

แรงที่กระทำต่อวัตถุหรืออนุภาคในช่วงเวลาสั้น ๆ เช่น แรงในขณะที่วัตถุชนกัน เราเรียกว่า impulsive forces. ถ้าเราพิจารณาวัตถุหรืออนุภาคเพียงอนุภาคเดียว เราทราบว่าสมการการเคลื่อนที่ของมันเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน คือ

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

หรือ

$$\vec{F}\,dt = d\,(m\vec{v}) = d\vec{p} \qquad (6.59)$$

ถ้าช่วงเวลาระหว่าง $t_1 \rightarrow t_2$ เป็นช่วงเวลาสั้น ๆ ที่แรงกระทำต่อวัตถุ ดังนั้นเมื่อเราอินทิเกรท สมการ (6.59) เราได้

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p}$$

$$= \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \qquad (6.60)$$

F dt ในสมการ 6.60 คือ แรงดลหรืออิมพัลส์ เราแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\vec{I}$ ดังนั้น

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\,(m\,\vec{v}) \qquad (6.61)$$

ข้อสรุปของสมการ (6.61) คือ "การเปลี่ยนของโมเมนตัมในช่วงเวลาสั้น ๆ ของวัตถุหรืออนุภาค เท่ากับอิมพัลส์ของแรง"

<u>ความสัมพันธ์ระหว่างอิมพัลส์กับสัมประสิทธิ์ของการคืนตัว</u>

ในการประยุกต์เรื่องราวของการชนแบบโดยตรง (direct collision) ของวัตถุทรงกลม 2 อัน กระบวนการอิมพัลส์ เราแบ่งออกเป็น 2 อย่าง คือ อิมพัลส์ของการคืนตัว (impulse of restitution) แทนด้วยสัญญลักษณ์ $\vec{I}_r$ กับ อิมพัลส์ของการอัด $\vec{I}_c$ (impulse of compression). ถ้าเราพิจารณาการชนกันตามรูป 6.5, โดยให้ $\vec{v}_o$ เป็นความเร็วร่วม (common velocity) ของการชน ซึ่งความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุทั้งสองในช่วงนี้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นอิมพัลส์ในการอัดเข้าของวัตถุทั้งสองคือ

$$m_1v_o - m_1v_1 = I_c \quad (6.62)$$

$$m_2v_2 - m_2v_o = -I_c \quad (6.63)$$

และอิมพัลส์ของการคืนตัวของวัตถุทั้งสอง คือ

$$m_1v_1' - m_1v_o = I_r \quad (6.64)$$

$$m_2v_2' - m_2v_o = -I_r \quad (6.65)$$

หาค่า v_o จากสมการ (6.62) และ (6.63) ได้

$$v_o = \frac{I_c + m_1 v_1}{m_1} \quad (6.66)$$

และ

$$v_o = \frac{-I_c + m_2 v_2}{m_2} \quad (6.67)$$

จากสมการ (6.66) = (6.67) ได้

$$\frac{I_c + m_1v_1}{m_1} = \frac{-I_c + m_2v_2}{m_2}$$

$$m_1m_2(v_2 - v_1) = I_c(m_1 + m_2) \quad (6.68)$$

ทำนองเดียวกัน, เมื่อเราหาความเร็วร่วม v_o จากสมการ (6.64) และ (6.65) แล้วจับสองสมการนี้เท่ากัน เราจะได้ความสัมพันธ์ :

$$m_1 m_2 (v_2' - v_1') = I_r(m_1 + m_2) \tag{6.69}$$

จากสมการ (6.69) หารด้วยสมการ (6.68) เราได้

$$\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = \frac{I_r}{I_c} \tag{6.70}$$

ทางขวามือของสมการ (6.70) คือนิยามของสัมประสิทธิ์การคืนตัว ε ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{I_r}{I_c} \tag{6.71}$$

สมการ (6.71) คือ ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์การคืนตัว กับอิมพัลส์ ซึ่งสรุปได้ว่า "สัมประสิทธิ์การคืนตัว เท่ากับอิมพัลส์ของการคืนตัวหารด้วยอิมพัลส์ของการอัด"

แบบฝึกหัดบทที่ 6

6.1 A system of particles consists of 0.03 kg mass located at (1,0,-1), a 0.05 kg mass at (-2,1,3) and a 0.02 kg mass at (3,-1,1). Find the coordinates of the center of mass.

6.2 Let $\vec{r}$ and $\vec{v}$ be respectively the position vector and velocity of particle i relative to the center of mass, prove that

(a) $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_{12} = 0$ (b) $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{12} = 0$

6.3 Prove that : the center of mass of a system of particles move as if the total mass and resultant external force were applied at this point.

6.4 Prove that : The total momentum of a system of particles can be found by multiplying the total mass M of the system by the velocity $\vec{v}_{cm}$ of the center of mass.

6.5 Prove that : The total kinetic energy of a system of particles about any point 0 equal to the kinetic energy of the center of mass (assuming the total mass located there) plus the kinetic energy of motion about the center of mass.

6.6 A system consists of three particles, each of unit mass, with positions and velocities as follows :

$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j}$ $\vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k}$ $\vec{r}_3 = \hat{k}$

$$\vec{v}_1 = 2\hat{i} \qquad \vec{v}_2 = \hat{j} \qquad \vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

Find the kinetic energy of the above system and the angular momentum about the origin.

6.7 A gun of mass M fires a bullet of mass m. If the muzzle velocity (velocity of the bullet relative to the gun) is v_o, what is the actual speed of the bullet immediately after it leaves the gun barrel.

6.8 A bullet of mass m and speed v_o is fired directly into a block of wood of mass M resting on a rough horizontal table. If μ is the coefficient of sliding friction between the block and the table, how far will the block slide before coming to rest ?

6.9 An artillery shell is fired at angle of elevation of 45° with initial speed v_o. At the uppermost part of the trajectory the shell bursts into two equal fragments, one of which moves directly downward, relative to the ground, with initial speed $2v_o$. What is the direction and speed of the other fragment immediately after the burst.

6.10 Three particles of equal mass lie on a straight line along which the particles move. Initially the particles are located at the points -1,0, and +1, and their velocities are $4v_o$, $2v_o$, and v_o, respectively. Find the final velocities of the particles assuming that all collisions are perfectly elastic.

6.11. A ball is dropped from a height h onto a horizontal pavement. If the coefficient of restitution is e, show that the total vertical distance the ball goes before the rebounds cease is h $(1 + \epsilon^2)$
$(1 - \epsilon^2)$

6.12 In the abouve problem, find the total length of time that the ball bounces.

6.13 Derive Equations (6.55) and (6.56)

6.14 Consider the earth and the moon as an isolated system, and show that each describes an ellipse about their common center of mass.

6.15 Show that the kinetic energy of a two-particle system is $\frac{1}{2}\, mv_{cm}2 +$ $\frac{1}{2}{}_{\mu}v^2$ where $m = m_1 + m_2$, v is the relative speed, and μ is the reduced mass.

6.16 If two bodies undergo a direct collision, show that the loss in kinetic energy is equal to

$$\tfrac{1}{2}{}_{\mu}v^2\ (1 - \epsilon^2)$$

where μ is the reduced mass, v is the relative speed before impact, and ϵ is the coefficient of restitution.

6.17. Show that the angular momentum of a two-particle system is

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} + \vec{R} \times \mu\vec{v}$$

where $m = m_1 + m_2$, μ is the reduced mass, $\vec{R}$ is the relative position vector, and $\vec{v}$ is the relative velocity of the two particles.

6.18 A moving particle of mass m_1 collides elastically with a target particle of mass m_2 which is initially at rest. If the collision is head-on, show that the incident particle loses a fraction $4\mu/m$ of its original kinetic energy where μ is the reduced mass and $m = m_1 + m_2$.

6.19 Work the above problem for the case that the collision is inelastic and that Q is equal to ½ of the initial energy of the proton.

6.20 A proton of mass m_p with initial velocity v collides with a helium atom, mass $4m_p$, that is intially at rest. If the proton leaves the point of impact at an angle of 45° with its original line of motion, fine the final velocities of each particle. Assume that the collision is perfectly elastic.

6.21 A uniform heavy chain of length a hangs initially with a part of length b hanging over the edge of a table. The remaining part, of length a-b, is coiled up at the edge of the table. If the chain is released, whow that the speed of the chain when the last link leaves the end of the table is $2g(a^3 - b^3)/3a^2 \;^{½}$

6.22 Find the differential equation of motion of a raindrop falling through a mist collecting mass as it falls. Assume that the drop remains spherical and that the rate of accretion is proportional to the cross-sectional area of the drop multiplied by the speed of fall. Show that if the drop starts from rest when it is infinitely small, then the acceleration is constant and equal t0 $g/7$.