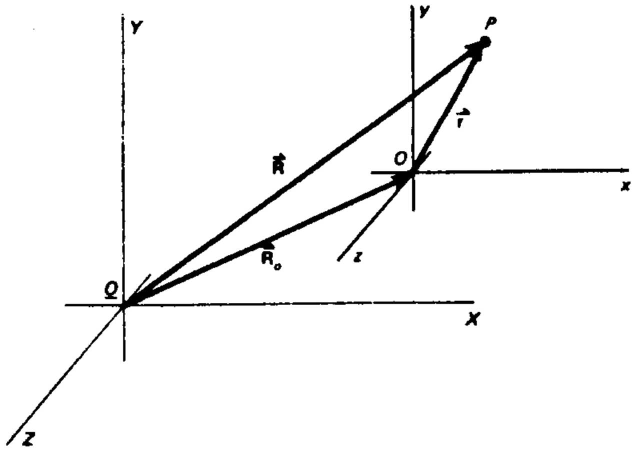
บทที่ 5
ระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่
(MOVING COORDINATE SYSTEMS)

การอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคในบางครั้งเราไม่สามารถจะอธิบายด้วยวิธีที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 หรือบทที่ 4 ได้ ระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่จึงเป็นวิธีการเฉพาะวิธีหนึ่งที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เราไม่สามารถจะใช้วิธีการของบทที่ 3 หรือบทที่ 4 ได้ การอธิบายการเคลื่อนที่ด้วยวิธีนี้เราใช้ในกรณีที่ระบบโคออดิเนตอันหนึ่งเคลื่อนที่ และระบบโคออดิเนตอีกอันหนึ่งตรึงกับที่หรือตรึง (fixed) กับโลก ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบนี้ที่เห็นได้ชัดเจน เช่น การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ของวัตถุที่กำลังหมุน หรือการเคลื่อนที่ของโลกขณะที่มันหมุนรอบตัวเอง เป็นต้น

5.1 การเลื่อนตำแหน่งของระบบโคออดิเนต (TRANSLATION OF THE COORDINATE SYSTEM)

กรณีง่าย ๆ ในการเคลื่อนที่ของระบบโคออดิเนต คือ การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบเลื่อนตำแหน่งเพียงอย่างเดียว. ในรูป 5.1 QXYZ เป็นแกนของโคออดิเนตเริ่มต้น (primary coordinate axes) โดยสมมติว่าเป็นแกนที่ตรึงกับโลก และ Oxyz เป็นแกนที่เคลื่อนที่. ในกรณีของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งเพียงอย่างเดียว แกน QX กับ Ox, QY กับ Oy, และ QZ กับ Oz เป็นแกนที่ขนานกันตามลำดับ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค P แทนด้วยสัญญลักษณ์ $\vec{R}$ ในแกนเริ่มต้นหรือระบบโคออดิเนตที่ตรึงกับที่, $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค P ในระบบเคลื่อนที่, และระยะขจัด QO ของจุดกำเนิดที่เคลื่อนที่แทนด้วยสัญญลักษณ์ $\vec{R}_o$ ดังนั้น

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_o \tag{5.1}$$



รูป 5.1 Rolationship between the position vectors for two coordinate system undergoing pure translation relation to one another.

โดยการหาอนุพันธ์ครั้งที่ 1 กับครั้งที่ 2 ของสมการ (5.1) เทียบกับเวลา เราได้เวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งเป็น

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_o \tag{5.2}$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_o \tag{5.3}$$

เมื่อ $\vec{V}$ และ $\vec{A}$ เป็นความเร็วและความเร่งของอนุภาค P ในระบบเริ่มต้น (primary system), $\vec{v}$ และ $\vec{a}$ เป็นความเร็วและความเร่งของอนุภาค p ในระบบเคลื่อนที่ (moving system), $\vec{v}_o$ และ $\vec{A}_o$ เป็นความเร็วและความเร่งของอนุภาค p ในจุดกำเหนิดเคลื่อนที่ (moving origin).

ในกรณีที่ระบบเคลื่อนที่ไม่มีความเร่ง ดังนั้น $\vec{A}_o = o$ และจากสมการ (5.3) เราได้

$$\vec{A} = \vec{a}$$

แสดงว่าความเร่งทั้งสองระบบมีค่าเท่ากัน ซึ่งคำกล่าวนี้จะเป็นจริงเมื่อไม่มีการหมุนในระบบเคลื่อนที่ และในกรณีนี้เราจะไม่พิจารณา เพราะเราสามารถหาคำตอบของการเคลื่อนที่ด้วยวิธีการของบทที่ 3 หรือบทที่ 4 ได้.

5.2 แรงเริ่มต้น (INERTIAL FORCES)

ถ้ากฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันเป็นจริงในระบบโคออดิเนตนี้ ดังนั้น

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

จากสมการ (5.3) สมการการเคลื่อนที่ในระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่ คือ

$$\vec{F} - m\vec{A}_o = m\vec{a} \qquad (5.4)$$

$\vec{F} - m\vec{A}_o$ หรือ $m\vec{A} - m\vec{A}_o$ ในสมการ (5.4) คือ เทอมเริ่มต้น (inertial term) ซึ่งเราเรียกเทอมเริ่มต้นในลักษณะของแรงนี้ว่า แรงเริ่มต้น (inertial forces) ถ้าเราให้ F^* เป็นแรงเริ่มต้น ดังนั้น

$$\vec{F}^* = m\vec{a} \qquad (5.5)$$

สมการการเคลื่อนที่ในระบบเคลื่อนที่นี้ ถ้าเรามีเทอมเริ่มต้น $\vec{F}^*$ อยู่ด้วย เทอมนี้จะไม่มีอัตรกิริยา (interaction) ต่อวัตถุอื่นเหมือนแรงธรรมดา และบางครั้งแรงเริ่มต้นนี้เราเรียกว่า "fictitions forces". ในทุกกรณีเทอมของแรงเริ่มต้น $\vec{F}^*$ จะปรากฏอยู่ ถ้าระบบโคออดิเนตของการเคลื่อนที่นั้นมีความเร่ง.

<u>ตัวอย่าง 5.1</u> แท่งไม้วางอยู่นิ่งบนโต๊ะที่ไม่เรียบในแนวราบ ถ้าโต๊ะมีความเร่งในแนวราบ ภายใต้เงื่อนไขอย่างไรแท่งไม้จึงจะมีโอกาสหลุดออกไปจากโต๊ะ ?

<u>วิธีทำ</u> ให้สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างแท่งไม้กับโต๊ะเป็น μ แรงเสียดทานมีค่ามากที่สุด คือ

$$F = \mu mg$$

จากสมการ (5.4) และ (5.5)

$$\vec{F} - m\vec{A}_o = m\vec{a} = \vec{F}^*$$

ดังนั้นเงื่อนไขสำหรับแท่งไม้จะหลุดออกไปจากโต๊ะได้ก็ต่อเมื่อ แรงเริ่ม F^* ไม่เป็นศูนย์ โดยที่

$$|m\vec{A}_o| > \mu mg$$

หรือ

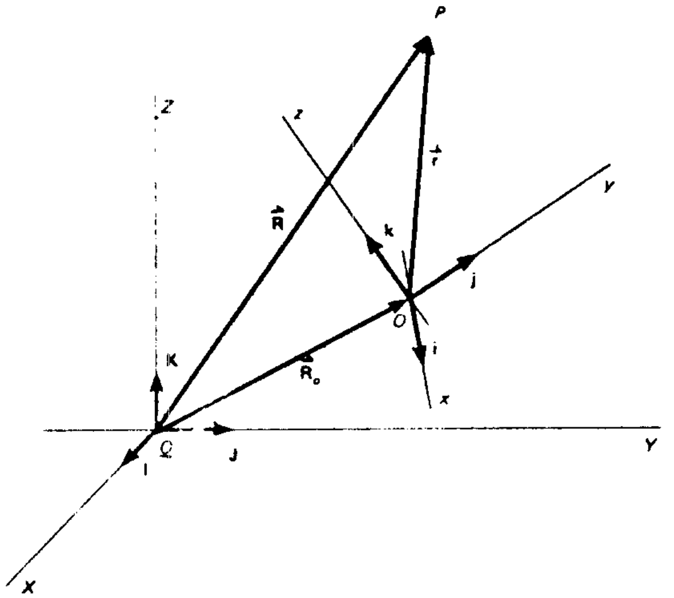
$$|\vec{A}_o| > \mu g$$

นั่นคือ

ความเร่งของโต๊ะ $> \mu g$ <u>ตอบ</u>

5.3 การเคลื่อนที่แบบทั่วไปของระบบโคออดิเนต (GENERAL MOTION OF THE COORDINATE SYSTEM)

ในตอน 5.1 เราพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งของระบบโคออดิเนตเพียงอย่างเดียว แต่ในตอนนี้เราจะพิจารณารวมไปถึงการเคลื่อนที่แบบการหมุน (rotation) เข้าไปด้วย. สัญญลักษณ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งของการเคลื่อนที่แบบทั่วไปนี้ยังคงใช้แบบเดียวกับตอน 5.1 แต่ระบบแกนเริ่มต้นไม่ขนานกับระบบแกนเคลื่อนที่ ดังรูป 5.2



รูป 5.2 Geometry for the general case of translation and rotation of the coordinate system

จากรูป 5.2, เราทราบ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{5.6}$$

และ

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{R}_o + \vec{r} \\ &= \vec{R}_o + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\end{aligned} \tag{5.7}$$

โดยการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (5.7) เทียบกับเวลา เราได้

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_o + \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad (5.8)$$

สมการ (5.8) นี้ คือ สมการของความเร็วในระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่แบบทั่วไป และเราอธิบายความเร็วต่าง ๆ ทางขวามือของสมการ (5.8) ดังนี้

ความเร็ว $\vec{V}_o$ เป็นความเร็วในการเคลื่อนที่ของจุดกำเหนิด, ความเร็ว $\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ เป็นความเร็วของอนุภาค P ในระบบเคลื่อนที่หรือความเร็ว $\dot{\vec{r}}$, ส่วนความเร็ว $x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}$ แสดงถึงความเร็วในการหมุนของแกน oxyz ของระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่. ถ้าเราให้ทิศทางของแกนหมุน oxyz แทนด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{u}$ ใด ๆ (ดังรูป 5.3) และให้อัตราเร็วเชิงมุมของแกนหมุนนี้ คือ ω ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมของระบบแกนหมุนนี้ คือ

$$\vec{\omega} = \omega\hat{u} \qquad (5.9)$$

ทิศทางของความเร็วเชิงมุมนี้เป็นไปตามกฎมือขวาของผลคูณเวกเตอร์, การหาค่า $\frac{d\hat{i}}{dt}$, $\frac{d\hat{j}}{dt}$, และ $\frac{d\hat{k}}{dt}$ ในเทอมของ $\vec{\omega}$ เราพิจารณาจากรูป 5.4 ซึ่งได้แสดงการเปลี่ยน $\Delta\hat{i}$ ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และจากรูป 5.4 นี้ เราพบว่าขนาดของ $\Delta\hat{i}$ หาได้จาก

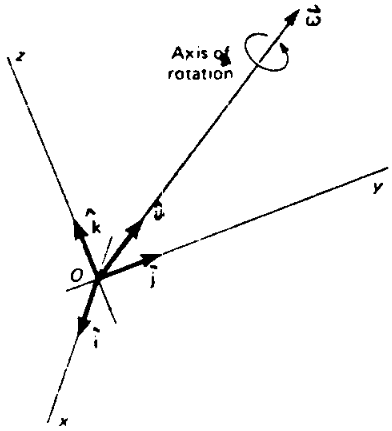
$$\Delta\hat{i} \simeq (\sin\psi)\ \Delta\theta \qquad (5.10)$$

เมื่อ $\Delta\theta$ เป็นผลจากการหมุนของระบบ oxyz ซึ่งเกิดขึ้นในอันตรภาคเวลา Δt และ ψ เป็นมุมระหว่าง $\hat{i}$ กับ $\vec{\omega}$ ดังนั้น

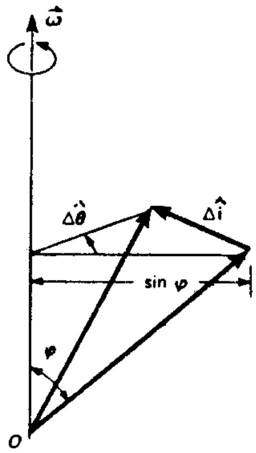
$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \lim_{\Delta t \to o} \left| \frac{\Delta \hat{i}}{\Delta t} \right|$$

$$= (\sin \psi\ ) \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \omega \sin \psi \tag{5.11}$$



รูป 5.3 The angular velocity vector of a rotating coordinate system



รูป 5.4 The change in the coordinate vector i due to rotation of the coordinate system

แต่ $\Delta\hat{i}$ ตั้งฉากกับ $\vec{\omega}$ และ $\hat{i}$ นั่นคือเราสามารถอธิบาย $\frac{d\hat{i}}{dt}$ ในเทอมของผลคูณเวกเตอร์ $\vec{\omega}$ และ $\hat{i}$ ได้ กล่าวคือ

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} \qquad (5.12)$$

ในทำนองเดียวกันเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} \qquad (5.13)$$

และ

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k} \qquad (5.14)$$

จากสมการการบวกของสมการ (5.12), (5.13) และ (5.14) เราได้

$$\begin{aligned} x\left(\frac{d\hat{i}}{dt}\right) + y\left(\frac{d\hat{j}}{dt}\right) + z\left(\frac{d\hat{k}}{dt}\right) &= x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k}) \\ &= \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (5.15) \end{aligned}$$

เมื่อเราแทนค่าสมการ (5.15) ในสมการ (5.8) เราได้

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_o \qquad (5.16)$$

สมการ (5.16) หรือสมการการเคลื่อนที่ของระบบโคออดิเนตแบบทั่วไปนี้ เราหมายถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาค P ในระบบเคลื่อนที่นั้น เป็นการเคลื่อนที่ทั้งแบบเลื่อนตำแหน่งและการหมุนในขณะเดียวกัน ไม่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบการหมุนเพียงอย่างเดียว.

ถ้าเราดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (5.16) เทียบกับเวลา เราจะได้สมการของความเร่งของระบบโคออดิเนตเคลื่อนที่ คือ

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{A}_o \qquad (5.17)$$

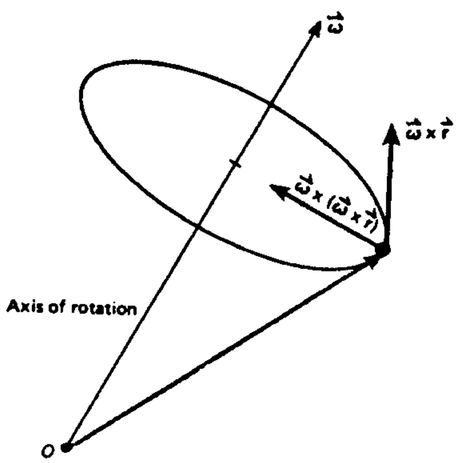
เมื่อ $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ เป็นความเร่งสัมพัธ์, $\ddot{\vec{r}}$ เป็นความเร่งของอนุภาคในระบบเคลื่อนที่, $\vec{A}_o$ เป็นความเร่งของจุดกำเหนิด ส่วนความเร่ง 3 อย่างที่เหลือนั้น เรามีชื่อเรียกดังนี้

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ เรียกว่า ความเร่ง Coriolis

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ เรียกว่า ความเร่ง transverse

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ เรียกว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (Contripetal acceleration)

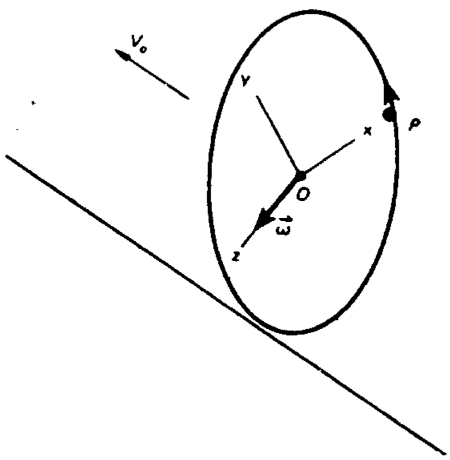
ซึ่งมีทิศทางเข้าสู่ศูนย์กลางของการหมุน ดังรูป 5.5



รูป 5.5 Illustrating the centripetal acceleration

ตัวอย่าง 5.2 วงล้ออันหนึ่งรัศมี b กลิ้งไปข้างหน้าบนพื้นราบเรียบด้วยอัตราเร็วคงที่ v จงหาความเร่งที่จุดใด ๆ บนขอบวงล้อสัมพันธ์กับพื้นราบนี้

วิธีทำ



รูป 5.6 Rotating coordinate system fixed to rolling wheel.

ให้การเคลื่อนที่เป็นไปตามรูป 5.6 โดยแกน x ผ่านจุด p ใด ๆ บนขอบของวงล้อและ z เป็นแกนหมุน ดังนั้น เราทราบ

$$\vec{r} = b\hat{i}$$

$$\dot{\vec{r}} = 0$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

ความเร็วเชิงมุม ω กำหนด โดย

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} = \frac{v}{b}\hat{k}$$

เพราะว่า v คงที่ เพราะฉะนั้น V_o และ ω จึงคงที่ด้วย นั่นคือ

$$\frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{A}_o = 0$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

จากสมการ (5.17)

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{A}_o$$

เมื่อแทนค่าที่ทราบลงในสมการนี้ เราได้

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \omega\hat{k} \times (\omega\hat{k} \times b\hat{i})$$

$$= \frac{v^2}{b} (\hat{k} \times \hat{j})$$

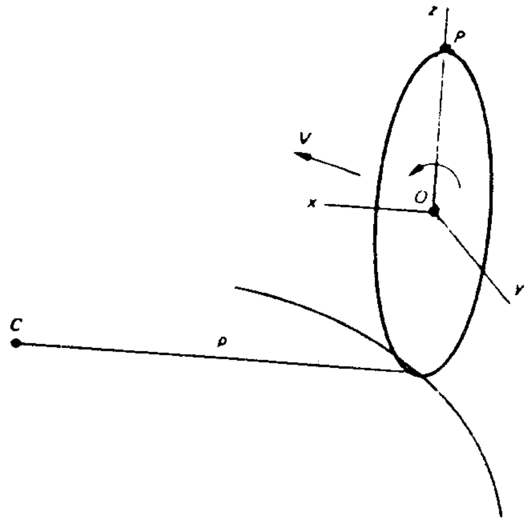
$$= -\frac{v^2}{b} \hat{i}$$

นั่นคือ ความเร่งที่จุดใด ๆ บนขอบวงล้อสัมพัทธ์กับพื้นราบเรียบมีขนาด $= \frac{v^2}{b}$ และมีทิศทางชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของวงล้อ.

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.3</u> จักรยานคันหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามทางโค้งซึ่งมีรัศมี ρ ด้วยอัตราเร็วคงที่ จงหาความเร่งที่ตำแหน่งสูงสุดของวงล้อ? กำหนดให้ v เป็นอัตราเร็วของจักรยานและ เป็นรัศมีของวงล้อจักรยาน

<u>วิธีทำ</u> ให้ระบบโคออดิเนตมีจุดกำเหนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงล้อ แกน x เป็นแกนในแนวราบมีทิศชี้เข้าหาศูนย์กลางของทางโค้ง c, และแกน z เป็นแกนในแนวดิ่ง (Vertical) ดังรูป 5.7



รูป 5.7 ลักษณะการหมุนของวงล้อจักรยาน

ดังนั้น ระบบแกน oxyz หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม

$$\vec{\omega} = \frac{v}{\rho}\hat{k}$$

ความเร่งของจุดกำเหนิดเคลื่อนที่ คือ

$$\vec{A}_o = \frac{v^2}{\rho}\hat{i}$$

เมื่อทุก ๆ จุดของวงล้อเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี b ซึ่งสัมพันธ์กับจุดกำเหนิดเคลื่อนที่ แสดงว่าความเร่งของระบบ oxyz ที่จุดใด ๆ ของวงล้อ มีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลาง o ด้วยขนาดเท่ากับ $\frac{v^2}{b}$ ดังนั้นในระบบเคลื่อนที่เราได้ (จากตัวอย่าง 5.2)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{v^2}{b}\hat{k}$$

สำหรับจุด p ซึ่งเป็นตำแหน่งสูงสุดของวงล้อ และความเร็วที่จุด p ในระบบเคลื่อนที่หาได้จาก

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= \omega\hat{i} \times b\,\hat{k}$$

$$= -v\,\hat{j}$$

ฉนั้นความเร่ง Coriolis คือ

$$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = 2(\frac{v}{\rho}\,\hat{k}) \times (-v\hat{j})$$

$$= 2\,\frac{v^2}{\rho}\;\hat{i}$$

เมื่อ v ของจักรยานคงที่ (ตามโจทย์) ดังนั้น ω ของวงล้อจักรยานคงที่ด้วย ความเร่ง transverse จึงมีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่า $\dot{\vec{\omega}} = 0$, และความเร่งสู่ศูนย์กลางก็มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{v^2}{\rho^2}\;\hat{k} \times (\hat{k} \times b\hat{k}) = 0$$

จากการแทนค่าที่ทราบทั้งหมดนี้ ลงในสมการ (5.17) เราได้

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{A} = 3\,\frac{v^2}{\rho}\hat{i} - \frac{v^2}{b}\,\hat{k}$$

ดังนั้น ความเร่งที่ตำแหน่งสูงสุดของวงล้อ คือ $3\,\frac{v^2}{\rho}\;\hat{i} - \frac{v^2}{b}\;\hat{k}$.

<u>ตอบ</u>

5.4 พลศาสตร์ของอนุภาคในระบบโคออดิเนตที่กำลังหมุน (DYNAMICS OF A PARTICLE IN A ROTATING COORDINATE SYSTEM)

เมื่อเราสมมติว่าระบบโคออดิเนตที่ตรึงกับโลก (primary coordinate system) เป็นระบบเริ่มต้น ดังนั้น สมการมูลฐานของการเคลื่อนที่ของแรง คือ

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

จากสมการ (5.17) x m เราได้

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = m\ddot{\vec{r}} + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m\vec{A}_o \quad (5.18)$$

จากสมการ (5.18) ถ้าเราเขียนเป็นสมการ การเคลื่อนที่ในเทอมของโคออดิเนตเคลื่อนที่ได้เป็น

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.19)$$

เทอมที่สาม, สี่และห้าทางขวามือของสมการ (5.19) มีชื่อเรียก ดังนี้

แรง Coriolis :

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

แรง transverse :

$$\vec{F}_{trans} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

แรงหนีศูนย์กลาง (Centrifugal force);

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

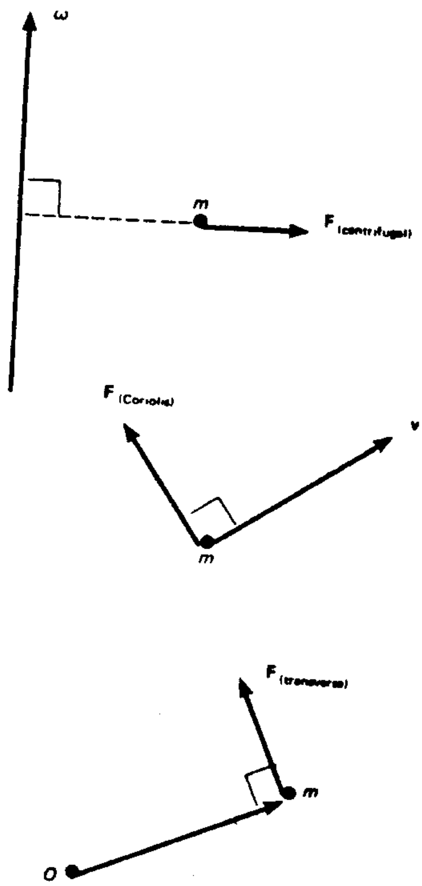
เทอมเหล่านี้เป็นเทอมที่เกิดจากการหมุนของระบบโคออดิเนต ส่วนเทอมที่เหลือสองเทอม คือ $\vec{F}$ กับ $m\vec{A}_o$ เป็นเทอมเริ่มต้นที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งของอนุภาคดังได้กล่าวมาแล้วในตอน 5.2 และจากการพิจารณาเทอมเริ่มต้นเช่นเดียวกับตอน 5.2 เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบเคลื่อนที่ได้เป็น

$$\vec{F}^* = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) \qquad (5.20)$$

หรือเขียนในลักษณะแรงลัพธ์ทั้งหมดได้ คือ

$$\vec{F}^* = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{trans} + \vec{F}_{cent} - m\vec{A}_o \qquad (5.21)$$

แรงที่น่าสนใจของระบบนี้ คือ $\vec{F}_{cor}$, $\vec{F}_{trans}$ และ $\vec{F}_{cent}$ ดังรูป 5.8



<u>รูป 5.8</u> Illustrating the inetial forces aresing from ratation of the coordinate system. The forces are drawn seperately for clarity.

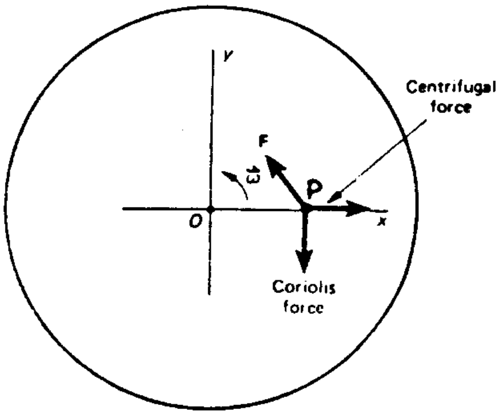
แรง Coriolis จะเกิดขึ้นเฉพาะในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ในระบบโคออดิเนตที่เกิดการหมุนเท่านั้น ทิศทางของแรงนี้จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ความเร็วในระบบเคลื่อนที่ การที่แรง Coriolis ตั้งฉากกับความเร็ว มันจะทำให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคเบนไปหรืออาจเปลี่ยนทิศทางได้ แรงนี้มีความสำคัญมาก สำหรับการเคลื่อนที่บางแบบ เช่นการเคลื่อนที่ตามวิถีโค้งของอนุภาคแบบโปรเจคไทล์, ในวิชาอุตุนิยมวิทยาแรงนี้ก็มีความสำคัญต่อการหมุนเวียนของอากาศ กล่าวคือ ผลจากแรง Coriolis นี้ทำให้ลมพัดกระจายออกในบริเวณที่มีความกดดันอากาศสูง และในทางตรงกันข้ามมันทำให้การพัดของลมรวมตัวกันในบริเวณที่มีความกดดันอากาศต่ำ เป็นต้น.

แรง transverse แรงนี้จะเกิดขึ้นเฉพาะกรณีที่มีความเร่งเชิงมุม จากการหมุนของระบบโคออดิเนต และแรง transverse นี้จะเป็นแรงที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ตลอดเวลา

แรงสุดท้ายคือ แรงหนีศูนย์กลาง แรงนี้เรารู้จักกันดี เป็นแรงที่เกิดจากการหมุนของแกน ทิศทางของแรงหนีศูนย์กลางจะหนีออกจากแกนหมุน และตั้งฉากกับแกนหมุน ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{r}$ และ $\vec{\omega}$ คือ θ ค่าของแรงหนีศูนย์กลางจะเท่ากับ $mr\omega^2 \sin\theta$ หรือ $m\rho\omega^2$ เมื่อ ρ ตั้งฉากกับระยะทางของอนุภาคจากตำแหน่งที่เคลื่อนที่ไปยังแกนหมุน.

<u>ตัวอย่าง 5.4</u> มดแดงตัวหนึ่งกำลังวิ่งไปข้างหน้าด้วยอัตราเร็ว คงที่ v ไปตามแกนของวงล้อที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ $\vec{\omega}$ ในแนวดิ่ง จงหาแรงลัพธ์ที่กระทำต่อมดแดงตัวนี้

<u>วิธีทำ</u> ให้ระบบโคออดิเนตตรึงกับวงล้อ, มดแดงเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x และ p เป็นจุดใด ๆ บนแกน x ที่ต้องการหาแรงลัพธ์ ดังรูป 5.9



ดังนั้น เราทราบ

$$\vec{r} = x\hat{i} = vt\,\hat{i}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} = v\,\hat{i}$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

เมื่อเราให้ z เป็นแกนหมุนในแนวดิ่ง เราได้

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

จาก v คงที่ ดังนั้น V_o คงที่ด้วย นั่นคือ $\vec{A}_o = 0$

เมื่อพิจารณาแต่ละแรงเราพบว่า

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

$$m\vec{A}_o = 0$$

แรง Coriolis :

$$-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = 2m\omega v(\hat{k} \times \hat{j}) = -2m\omega v\hat{j}$$

แรง transverse :

$$-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0$$

แรงหนีศูนย์กลาง :

$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m\omega^2 \left[\hat{k} \times (\hat{k} \times x\,\hat{i}) \right] \\ &= -m\omega^2 (\hat{k} \times x\hat{j}) \\ &= m\omega^2 x\,\hat{i} \end{aligned}$$

เมื่อเราแทนค่าที่ทราบในสมการ (5.18) หรือ (5.19) เราได้ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อมดแดง คือ

$$\vec{F} = -m\omega^2 x\hat{i} + 2m\omega v\hat{j}$$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 5.5</u> จากตัวอย่าง 5.4 ถามว่ามดแดงวิ่งไปได้ไกลเท่าไหร่? ก่อนที่มันจะเริ่มหลุดจากแกนของวงล้อ กำหนดให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างมดแดงและแกนของวงล้อเป็น μ

<u>วิธีทำ</u> มดแดงจะเริ่มหลุดออกจากแกนของวงล้อ เมื่อ

ขนาดของแรงเสียดทาน = ขนาดของแรงลัพธ์ที่กระทำต่อมดแดง

$$\mu mg = |\vec{F}|$$

หรือ

$$\left[(2m\omega v)^2 + (m\omega^2 x)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mu mg$$

เมื่อแก้สมการหาค่า x เราได้ ระยะทางที่มดแดงวิ่งไปได้ก่อนที่มันจะเริ่มหลุดจากวงล้อ คือ

$$x = \frac{(\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega^2}$$

<u>ตอบ</u>

5.5 ผลจากการหมุนของโลก (EFFECTS OF THE EARTH'S ROTATION)

ตอนนี้เป็นการประยุกต์ทฤษฎีของตอนที่แล้วมา ในลักษณะของระบบโคออดิเนตที่เคลื่อนที่ไปกับการหมุนของโลก. ซึ่งอัตราเร็วเชิงมุมในการหมุนของโลก = 2π เรเดียน/วัน หรือ 7.3×10^{-5} เรเดียน/วินาที โดยประมาณ อย่างไรก็ตาม แม้ว่ารัศมีในแนวเส้นศูนย์สูตรมีมากกว่ารัศมีในแนวขั้วโลกถึง 13 ไมล์ แต่เราถือว่าค่านี้เป็นค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับรัศมีของโลกในแนวเส้นศูนย์สูตรของการหมุนรอบตัวเองของโลก

<u>ผลทางการสถิต (Static effects)</u>. <u>สายดิ่ง (The plumb line)</u>

กรณีแรกเราจะพิจารณากรณีที่อนุภาคหยุดนิ่งบนผิวโลก เพื่อให้แคบเข้าเราให้อนุภาคเป็นลูกดิ่งและอยู่ตอนปลายของสายดิ่ง. เมื่อเรากำหนดให้จุดกำเนิดของระบบโคออดิเนตอยู่ที่ตำแหน่งของอนุภาคหรือลูกดิ่ง ดังนั้น $\vec{r} = 0$ และความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เป็นความเร็วเชิงมุมของโลก มีทิศไปทางเดียวกับการหมุนของโลก ซึ่งมีค่าเกือบคงที่ และถือว่า $\vec{\omega}$ คงที่ นั่นคือความเร่งเชิงมุม $\dot{\vec{\omega}} = 0$ สำหรับกรณีของสถิตนี้ เราสรุปได้ว่าทุกเทอมในสมการ (5.18) มีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นแรง F และเทอมเริ่มต้น $m\vec{A}_o$ เท่านั้น ผลลัพธ์ของมันคือ

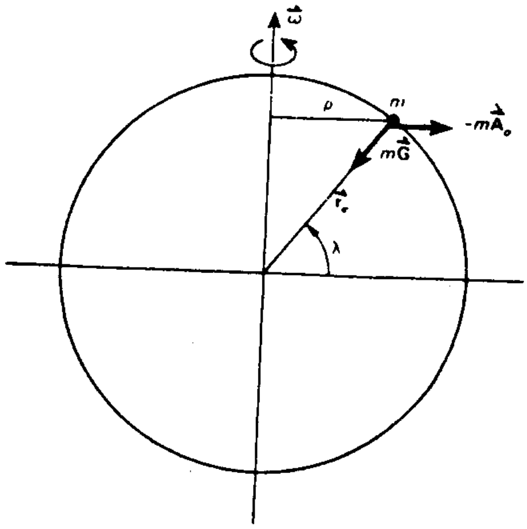
$$\vec{F} - m\vec{A}_o = 0 \tag{5.22}$$

แรง $\vec{F}$ คือแรงที่กำหนดโดยผลบวกเวกเตอร์ของแรงสองแรง แรงหนึ่งคือแรงโน้มถ่วงซึ่งเกิดจากแรงดึงดูดของโลกโดยตรง (เราอาจเรียกว่า $m\vec{G}$) และแรงดึงในแนวดิ่งของสายดิ่ง (เราแทนด้วย $-m\vec{g}$) แรงทั้งสองนี้แสดงไว้ในรูป 5.10 และรูป 5.11. ดังนั้น จากสมการ (5.22) เราได้

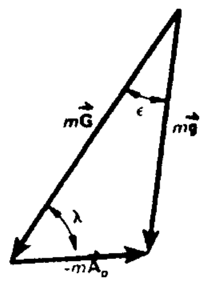
$$m\vec{G} - m\vec{g} - m\vec{A}_o = 0 \tag{5.23}$$

หรือ

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{A}_o \tag{5.24}$$



รูป 5.10 Gravitational and centrifugal forces on a particle on the surface of the earth.



รูป 5.11 Vector diagram defining the quantity mg

จะเห็นว่าเวกเตอร์ $m\vec{G}$ มีทิศทางเข้าสู่ศูนย์กลางของโลก และความเร่ง $\vec{A}_o$ คือความเร่งสู่ศูนย์กลางของจุดกำเหนิดเคลื่อนที่มีขนาดเท่ากับ $\rho\omega^2$ หรือ $(r_e \cos\lambda)\,\omega^2$ เมื่อ r_e เป็นรัศมีของโลก และ λ เป็นมุมของเส้นรุ้งที่วัดจากศูนย์กลางของโลก (geocentric latitude). เทอมของแรงหนีศูนย์กลาง $-m\vec{A}_o$ มีขนาดเท่ากับ $(m\, r_e \cos\lambda)\,\omega^2$ ซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกับแกนหมุนและหนีจากศูนย์กลางของโลก ดังรูป 5.10 ดังนั้น สายดิ่งย่อมไม่ได้ผ่านจุดศูนย์กลางของโลก แต่เบี่ยงเบนไปเป็นมุมเล็ก ๆ ε. จากสมการ (5.23) เราสามารถเขียนสมการของแรงทั้งสามได้ ในลักษณะของสามเหลี่ยมดังรูป 5.11 และโดยการใช้กฎของ sine เราได้

$$\frac{\sin \varepsilon}{|m \vec{A}_o|} = \frac{\sin \lambda}{|m \vec{g}|}$$

$$\frac{\sin}{mr_e \omega^2 \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{mg}$$

หรือ เมื่อ ε เป็นมุมเล็ก ๆ

$$\sin \varepsilon \simeq \varepsilon = \frac{r_e \omega^2}{g} \sin\lambda \cos\lambda$$

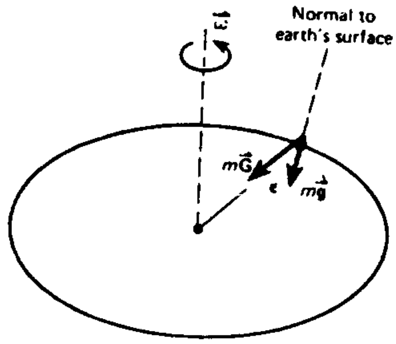
$$= \frac{r_e \omega^2}{2g} \sin 2\lambda \qquad (5.25)$$

ดังนั้น ค่าของ $\varepsilon = 0$ ที่เส้นศูนย์สูตร และที่ขั้วโลก เพราะว่าที่เส้นศูนย์สูตร $\lambda = 0$, และที่ขั้วโลก $\lambda = \pm 90^\circ$ ซึ่งการเบี่ยงเบนของสายดิ่งจะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $\lambda = 45^\circ$ ในแนวดิ่ง (Vertical) ดังนั้น

$$\varepsilon_{max} = \frac{r_e \omega^2}{2g} \simeq 1.7 \times 10^{-3} \text{ เรเดียน}$$

$$\simeq \frac{1}{10} \text{ องศา.}$$

รูปร่างลักษณะของโลกจึงเป็นไปได้ที่สายดิ่งใด ๆ ตั้งได้ฉากกับผิวโลก และสรุปได้ว่ารูปหน้าตัดมีลักษณะใกล้เคียงกับรูปไข่ ดังรูป 5.12



<u>รูป 5.12</u> Exaggerated diagram showing the flattening of the earth due to rotation

จากการที่ได้วิเคราะห์มาทั้งหมด เราสมมติให้แรงโน้มถ่วง mG มีค่าคงที่ และมีทิศทางสู่ศูนย์กลางของโลก ซึ่งการสมมตินี้ไม่ได้ถูกต้องแน่นอนนัก เพราะว่าโลกเราไม่ได้มีลักษณะเป็นรูปทรงกลมอย่างแท้จริง.

<u>ผลทางการเคลื่อนที่ (Dynamic effects)</u> <u>การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ (Motion of a projectile)</u>

กรณีของผลทางการเคลื่อนที่นี้ แรง F อาจเป็นแรงภายนอกอื่น ๆ มากกว่าที่จะเป็นแรงโน้มถ่วง. เราถือว่าการหมุนของโลกมีความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ คงที่ นั่นคือ $\dot{\vec{\omega}} = 0$ ดังนั้นจากสมการ (5.19) เราได้

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + (m\vec{G} - m\vec{A}_o) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

จากสมการ (5.23) เราทราบว่า

$$m\vec{g} = m\vec{G} - m\vec{A}_o$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ในกรณีนี้ คือ

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (5.26)$$

ถ้าเราพิจารณาการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ โดยไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศแล้ว $\vec{F} = 0$ และจากการที่เทอมของแรงหนีศูนย์กลาง $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ มีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับเทอมอื่น ๆ จึงสามารถตัดทิ้งได้ สมการการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์จึงเป็น

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \qquad (5.27)$$

เทอมสุดท้ายของสมการ (5.27) คือ แรง coriolis นั่นเอง

การแก้สมการ (5.27) เราให้ z เป็นระบบโคออดิเนตของแกน oxyz และอยู่ในแนวดิ่ง (ในทิศทางเดียวกับสายดิ่ง) และแกน x มีทิศไปทางตะวันออก, แกน y ไปทางทิศเหนือ ดังรูป 5.13 ซึ่งจากการกำหนดแกนแบบนี้ เราได้

$$\vec{g} = -g\,\hat{k} \qquad (5.28)$$

และ

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k} \\ &= (\omega\cos\lambda)\hat{j} + (\omega\sin\lambda)\,\hat{k}\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

ดังนั้น

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ - & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= (\omega\dot{z}\cos\lambda - \omega\dot{y}\sin\lambda)\,\hat{i} + (\omega\dot{x}\sin\lambda)\hat{j} + (-\omega\dot{x}\cos\lambda)\hat{k} \tag{5.29}$$

จากการแทนค่า สมการ (5.27) และ (5.28) ในสมการ (5.29) เราได้

$$m\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = -mg\hat{k} - 2m\left[(\omega\dot{z}\cos\lambda - \omega\dot{y}\sin\lambda)\hat{i} + (\omega\dot{x}\sin\lambda)\hat{j} + (-\omega\dot{x}\cos\lambda)\hat{k}\right] \tag{5.30}$$

จากสมการ (5.30) ดังนั้น องค์ประกอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ในแต่ละแกน คือ

$$\ddot{x} = -2\,\omega\,(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \tag{5.31}$$

$$\ddot{y} = -2\,\omega\,(\dot{x}\sin\lambda) \tag{5.32}$$

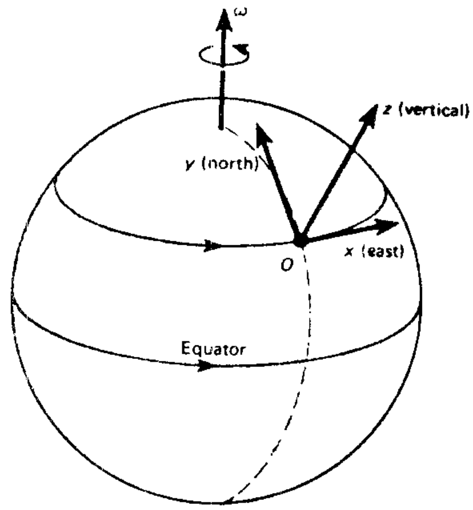
$$\ddot{z} = -g + 2\,\omega\,\dot{x}\cos\lambda \tag{5.33}$$

เมื่อเราอินทิเกรตสมการ (5.31), (5.32) และ (5.33) เทียบกับเวลาเราได้สมการของความเร็วเป็น

$$\dot{x} = -2\omega(z\cos\lambda - y\sin\lambda) + \dot{x}_o \quad (5.34)$$

$$\dot{y} = -2\omega x\sin\lambda + \dot{y}_o \quad (5.35)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega x\cos\lambda + \dot{z}_o \quad (5.36)$$



รูป 5.13 Coordinate ares for analyzing projectile motion

ค่าคงที่จากการอินทิเกรต x_o, y_o และ z_o เป็นองค์ประกอบเริ่มต้นของความเร็ว. เมื่อเราแทนค่าสมการ (5.35), (5.36) ในสมการ (5.31) เราได้

$$\ddot{x} = 2\omega g\,t\cos\lambda - 2\omega(\dot{z}_o\cos\lambda - \dot{y}_o\sin\lambda) \quad (5.37)$$

เมื่ออินทิเกรต สมการ (5.37) :

$$\dot{x} = \omega g t^2 \cos\lambda - 2\omega t(\dot{z}_o \cos\lambda - \dot{y}_o \sin\lambda) + \dot{x}_o$$

และเมื่ออินทิเกรตอีกครั้ง จะได้

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega t^2 (\dot{z}_o \cos\lambda - \dot{y}_o \sin\lambda) + \dot{x}_o t \quad (5.38)$$

เมื่อเราแทนค่า x ของสมการ (5.38) ในสมการ (5.35) และ (5.36), แล้วอินทิเกรตเทียบกับเวลา โดยตัดค่าของ ω^2 ทิ้ง และให้โปรเจคไทล์นี้เริ่มต้นที่จุดกำเหนิดที่เวลา $t = 0$ เราได้สมการของ y และ z คือ

$$y = \dot{y}_o t - \omega \dot{x}_o t^2 \sin\lambda \quad (5.39)$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_o t + \omega \dot{x}_o t^2 \cos\lambda. \quad (5.40)$$

ถ้าเราพิจารณากรณีพิเศษ กรณีแรกพิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ของอนุภาคที่เริ่มต้นตกจากการหยุดนิ่ง ($\dot{x}_o = o$, $\dot{y}_o = o$, $\dot{z}_o = o$) ดังนั้น จากสมการ (5.38), (5.39) และ (5.40) กลายเป็น

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda$$

$$y = o$$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2$$

แสดงว่า อนุภาคนี้ถูกพัดพาไปทางตะวันออก และถ้ามันตกในแนวดิ่งที่ความสูง h แล้ว $t^2 \approx \frac{2h}{g}$ และอนุภาคนี้ถูกพัดพาไปทางตะวันออกเป็นระยะทาง

$$\frac{1}{3} \omega \cos \lambda \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

กรณีพิเศษ กรณีที่สอง พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ของลูกปืนที่ยิงด้วยความเร็วสูงในแนวระดับหรือใกล้เคียงไปทางทิศตะวันออก ดังนั้น $\dot{x}_o = v_o, \dot{y}_o = \dot{z}_o = 0.$ ดังนั้น จากสมการ (5.39) เราได้

$$y = -\omega v_o t^2 \sin \lambda$$

แสดงว่าโปรเจคไทล์แบบนี้อนุภาคถูกพัดพาไปทางทิศใต้ ถ้า H เป็นค่าของพิสัยแล้ว $H \approx v_o t$ เมื่อ t เป็นเวลาในการเคลื่อนที่ของลูกปืน การพัดพาของโปรเจคไทล์ไปทางทิศใต้ จึงมีค่าโดยประมาณ

$$\frac{\omega H^2}{v_o} \sin \lambda$$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

5.1 A plumb line is carried along in a moving train. If m is the mass of the plumb bob, find the tension in the cord and the deflection from the local vertical if (a) the train is moving with constant acceleration a_o in a given direction, and (b) the train is rounding a curve of radius ρ with constant speed v_o. Neglect any effects due to the earth's rotation.

5.2 An automobile is rraveling with constant forward acceleration a_o. At a given instant the forward speed is v_o. Find whieh point on the has the greatest absolute acceleration, relative to the ground, and find the direction and magnitude of this acceleration.

5.3 In the motion of the bicycle wheel, Example 2, p. 125, what is the acceleration of the lowest point on the wheel ?

5.4 Work Example 3. by using a coordinate system with the origin a the center of the turning radius, the x axis passing through the center of the wheel, and the z axis vertical.

5.5 An insect crawls with speed v in a circular path of radius b on a phonograph turntable that revolves with constant angular velocity ω. Describe the motion in a coordinate system fixed to the turntable. Find the acceleration A of the insect relative to the outside, and find the force of friction F exerted on the insect. In particular, find A and F for the two cases

$$v = b\omega \quad \text{and} \quad v = -b\omega$$

Note that in the latter case, the insect is stationary relative to the outside.

5.6 A child is riding in a ferris wheel of radius b revolving with constant angular speed ω. If the child is holding a toy of mass m tied to a short string, find the tension in the string when the child is at the highest point, the lowest point, and level with the center of the ferris wheel.

5.7 Find the magnitude and direction of the Coriolis force action on a 4000 lb racing car that is traveling due north at a speed of 350 mph at a latitude of 45°N.

5.8 A particle is dropped from a height of 100 meters. Where does it hit the ground ? Let $\lambda = 45°$ N.

5.9 A plumb line is carried along in a moving airplane. If the airplane is heading due east with speed v, what is the angular deflection of the plumb line relative to the local vertical ? How fast must the airplane travel in order that the deflection be one degree ? Take $\lambda = 45°$ N.

5.10 Show that the time rate of change of the angular velocity vector is the same in either the fixed or the rotating coordinate system of Figure 5.2, that is, show that $d\vec{\omega}/dt = \dot{\vec{\omega}}$. Is the same true of the angular acceleration?

5.11 Derive an expression for the third derivative of the position vector $d^3\vec{R}/dt^3$ in terms of the components in a rotating coordinate system.

5.12 A projectile is shot vertically with initial speed v_o. Neglecting air resistance, and assuming that g is constant, find where the projectile lands when it hits the ground.

5.13 The differential equation of motion of a charged particle in an electric field $\vec{E}$ and a magnetic field $\vec{B}$ is

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

in an inertial coordinate system. Show that if the motion is referred to a coordinate system rotating with angular velocity $(q/2m)\,\vec{B}$, the equation of motion becomes

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

where it is assumed that $\vec{B}$ is small enough so that terms of order B^2 can be neglected. This result is known as Larmor's theorem.