บทที่ 4
การเคลื่อนที่ของอนุภาคในสองหรือสามมิติ
(MOTION OF A PARTICLE IN TWO OR THREE DIMENSIONS)

จากบทที่ 3 เราได้ศึกษาของอนุภาคแบบทั่วไปในมิติเดียว บทนี้ก็เช่นกัน เราจะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุมวล m แบบทั่วไป แต่เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบ (2- มิติ) และใน space (3- มิติ) การอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ในบทนี้ จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องใช้เรื่องราวของเวกเตอร์ ซึ่งแตกต่างกับบทที่แล้วคือ ในบทที่ 3 นั้นเรื่องราวของเวกเตอร์ไม่จำเป็นเลย อย่างไรก็ตามทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ อาจจะคล้ายคลึงกับทฤษฎีพื้นฐานในบทที่แล้วบ้าง.

4.1 ทฤษฎีโมเมนตัมและทฤษฎีพลังงาน (MOMENTUM AND ENERGY THEOREMS)

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ใน 2 และ 3–มิติ คือ

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{4.1}$$

เรากระจายให้อยู่ในฟอร์มของการเคลื่อนที่แต่ละแกนใน 3- มิติ สำหรับคาร์ทีเซียล โคออดิเนต (Cartesian Coordinates) ได้เป็น

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x , \tag{4.2}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y , \tag{4.3}$$

และ

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z . \tag{4.4}$$

ส่วนการเคลื่อนที่ใน 2-มิตินั้น เรากระจายให้อยู่ในฟอร์มของการเคลื่อนที่ของแต่ละแกน ได้โดยสมการ (4.2) และ (4.3)

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงเส้น (The linear momentum vector) $\vec{P}$ คือ

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{4.5}$$

สมการ (4.1) จึงสามารถเขียนเป็น

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{4.6}$$

และในฟอร์มของแต่ละแกน เช่นเดียวกับสมการ (4.2),(4.3) และ (4.4)

$$\frac{d\,p_x}{dt} = F_x, \tag{4.7}$$

$$\frac{d\,p_y}{dt} = F_y, \tag{4.8}$$

$$\frac{d\,p_z}{dt} = F_z. \tag{4.9}$$

สำหรับการเคลื่อนที่ในระนาบหรือ 2- มิติ ก็เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว คือ เราใช้เฉพาะสมการ (4.7) และ (4.8) เท่านั้น. ถ้าเราคูณสมการ (4.6) ด้วย dt แล้วอินทิเกรตจาก เวลา t_1 ถึง t_2, เราทราบการเปลี่ยนของโมเมนตัม

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\ dt. \tag{4.10}$$

สมการ (4.10) คือ เวกเตอร์ฟอร์มการอินทิเกรตของทฤษฎีโมเมนตัม, และอินทิกรัลทางขวามือของสมการ คือ อิมพัลส์ (impulse). เมื่อกระจายออกในฟอร์มของแต่ละแกนได้เป็น

$$P_{x_2} - P_{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt, \tag{4.11}$$

$$P_{y_2} - P_{y_1} = \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt, \tag{4.12}$$

$$P_{z_2} - P_{z_1} = \int_{t_1}^{t_2} F_z \, dt. \tag{4.13}$$

ในการหาสมการของอัตราการเปลี่ยนของพลังงานจลน์ (kinetic energy) เราหาได้โดยการคูณสมการ (4.2), (4.3),และ (4.4) ด้วย v_x, v_y, และ v_z ตามลำดับ. เราได้

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} mv_x^2\right) = F_x v_x , \tag{4.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} mv_y^2\right) = F_y v_y , \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2} m v_z^2\right) = F_z v_z . \tag{4.16}$$

เมื่อบวกสมการ (4.14), (4.15), และ (4.16) เข้าด้วยกัน, เราทราบว่า

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

หรือ

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\, mv^2\right) \quad = \quad \frac{dT}{dt} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (4.17)$$

เราอาจพิสูจน์สมการ (4.17) ได้จากสมการ (4.1), โดยใช้นิยามของผลคูณสเกลาร์และทั้งสองข้างของสมการ dot ด้วยเวกเตอร์ $\vec{v}$ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

$$m\,\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, \frac{d(v^2)}{dt} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v}$$

เมื่อมวล m คงที่

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\, mv^2\right) \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dT}{dt} \quad = \quad \vec{F} \cdot \vec{v}$$

ถ้าเราคูณสมการ (4.17) ด้วย dt แล้วอินทิเกรตจากเวลา t_1 ถึง t_2, เราได้เวกเตอร์ฟอร์มการอินทิเกรตของทฤษฎีพลังงาน

$$T_2 - T_1 \quad = \quad \tfrac{1}{2}\, mv_2^2 + \tfrac{1}{2}\, mv_1^2 \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\; dt. \qquad (4.18)$$

เมื่อ $\vec{v}\, dt = d\vec{r}$ และแรง $\vec{F}$ ที่กำหนดเป็นฟังก์ชั่นของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$, ทางขวามือของสมการ (4.18) เราสามารถเขียนใหม่เป็น

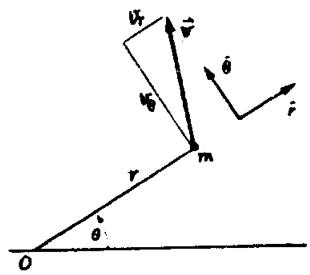
$$T_2 - T_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.19)$$

สมการ (4.19) นี้เป็นการอินทิกรัลตามเส้นโค้งของการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากตำแหน่ง $\vec{r}_1$ ไปยัง $\vec{r}_2$. อินทิกรัลทางขวามือของสมการ (4.18) และ (4.19) คืองาน (work) ที่เกิดจากแรง $\vec{F}$ ในระหว่างเวลา t_1 ถึง t_2 .

4.2 ระนาบและเวกเตอร์ของทฤษฎีโมเมนตัมเชิงมุม (PLANE AND VECTOR ANGULAR MOMENTUM THEOREMS)

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบหรือ 2 มิติ เราหาโมเมนตัมเชิงมุม L_o รอบจุด o ได้เช่นเดียวกับการหาโมเมนต์ของเวกเตอร์โมเมนตัมรอบจุด o กล่าวคือเราหาค่ามันได้จากผลคูณของระยะทางจากจุด o กับโมเมนตัมในแนวแกนที่ตั้งฉากกับเส้นที่ลากจากจุด o ไปยังอนุภาคมวล m ตัวห้อย$_o$ ส่วนใหญ่ไม่ค่อยได้ใช้ ยกเว้นจุดกำเนิดของการหมุนมีหลาย ๆ จุด ดังได้กล่าวมาแล้วว่าการหาโมเมนตัมเชิงมุม เราใช้วิธีแบบเดียวกับทอร์คหรือโมเมนต์ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุม L เราอาจกำหนดให้เป็นบวกเมื่อมันเคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกา และให้เป็นลบเมื่อมันหมุนทวนเข็มนาฬิกา โคออดิเนตที่สะดวกที่สุดในการใช้หาโมเมนตัมเชิงมุมในระนาบ คือ โพลาร์ โคออดิเนต (polar coordinates) ถ้าเราให้อนุภาคใด ๆ มีมวล m โมเมนตัมของมันคือ $m\vec{v}$ และโมเมนตัมในแนวแกนที่ตั้งฉากกับเส้นที่ลากจากจุด o ไปยังมวล m ของโพลาร์โคออดิเนตคือ $m\, v_\theta$ (ดังรูป 4.1) ดังนั้นจากสมการ (1.82)

$$L = r\, m\, v_\theta = m\, r^2 \dot{\theta} \qquad (4.20)$$



รูป 4.1 Components of velocity in a plane

ถ้าเราเขียนแรงในเทอมของแกนโพลาร์

$$\vec{F} = \hat{r}\, F_r + \hat{\theta}\, F_\theta \tag{4.21}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าความเร่งจากสมการ (1.84) ในสมการ (4.21) สมการของการเคลื่อนที่ซึ่งแยกออกในแต่ละแกน คือ

$$ma_r = m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F_r \ , \tag{4.22}$$

$$ma_\theta = m r \ddot{\theta} + 2m \dot{r} \dot{\theta} = F_\theta \ . \tag{4.23}$$

จากสมการ (4.20) อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม คือ

$$\frac{dL}{dt} = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta}$$

โดยการคูณสมการ (4.23) ด้วย r เราได้

$$2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} = r F_\theta$$

ดังนั้นจากการเปรียบเทียบสองสมการนี้ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = r F_\theta = N \tag{4.24}$$

ปริมาณ $r F_\theta$ คือทอร์คที่เกิดจากการกระทำของแรง F และแทนด้วยสัญลักษณ์ N. เมื่ออินทิเกรตสมการ (4.24), เราได้ฟอร์มการอินทิเกรตของทฤษฎีโมเมนตัมเชิงมุม (integrated from of the angular momentum theorem) สำหรับการเคลื่อนที่ในระนาบ:

$$L_2 - L_1 = m r_2^2 \dot{\theta}_2 - m r_1^2 \dot{\theta}_1 = \int_{t_1}^{t_2} r F_\theta \, dt \tag{4.25}$$

ส่วนการเคลื่อนที่ในสามมิติหรือในสเปซ (space) เราสามารถให้ความหมายของโมเมนตัมเชิงมุม L_o รอบจุด o ได้เช่นเดียวกับการหาค่าเวกเตอร์โมเมนต์ของเวกเตอร์โมเมนตัมรอบจุด o คือ

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{P} = m (\vec{r} \times \vec{v}) \tag{4.26}$$

เมื่อ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งจากจุดกำเนิด o ของอนุภาคมวล m. ตัวห้อย$_o$, ไม่ค่อยได้ใช้เช่นเดียวกับโมเมนตัมเชิงมุมในระนาบ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมใด ๆ ของจุดกำเนิด o ตัวเดียวเราแทนด้วย L และอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุม L ใด ๆ คือ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times (m\,\vec{v})\right]$$

โดยกฎของเวกเตอร์พีชคณิตและเวกเตอร์แคลคูลัส

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + \vec{v} \times m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times (m\frac{d\vec{v}}{dt}).$$

และจากสมการ (4.1)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

หรือ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \tag{4.27}$$

สมการ (4.27), เราได้ข้อสรุปว่า "อัตราการเปลี่ยนของเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค มีค่าเท่ากับเวกเตอร์ของทอร์คที่มากระทำ". อินทิกรัลฟอร์มของทฤษฎีโมเมนตัมเชิงมุม คือ

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{N}\,dt \tag{4.28}$$

4.3 การวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปของการเคลื่อนที่ในสองและสามมิติ (DISCUSSION OF THE GENERAL PROBLEM OF TWO AND THREE DIMENSIONAL MOTION)

ถ้าแรง F ในกรณีทั่วไปเป็นฟังก์ชั่นของความเร็ว, เวกเตอร์บอกตำแหน่ง, และเวลา $[F = F(v,r,t)]$ สมการการเคลื่อนที่ (4.2), (4.3), และ (4.4), จะอยู่ในลักษณะกลุ่มของสามสมการ สำหรับการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ (ส่วนการเคลื่อนที่ในสองมิติ อยู่ในลักษณะกลุ่มของสองสมการ) และกลุ่มสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองของมัน คือ

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned} \tag{4.29}$$

ถ้าเรากำหนดให้เวกเตอร์บอกตำแหน่งเริ่มต้น $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ และความเร็วต้น $\vec{v}_o = (v_{x_o}, v_{y_o}, v_{z_o})$ ที่เวลาเริ่มต้น t_o เราอาจหาค่า $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ ในเวลา t ใด ๆ ได้. ในกรณีทั่วไป $[\vec{F} = \vec{F}(r, \dot{r}, t)]$ เป็นการยากมากที่จะแก้สมการประเภทนี้ แม้ว่าเราจะทราบ $\vec{r}_o$ และ $\dot{\vec{r}}_o$ ก็ตาม. จากการเคลื่อนที่ในมิติเดียว เราได้วิเคราะห์สมการ (3.9) กรณีที่แรงเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรสามตัวขณะเดียวกัน คือ x, v, และ t, การแก้สมการ (3.9) เป็นการยากมากที่จะแก้สมการได้ หรือกล่าวได้ว่าแทบจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ธรรมดาไม่ได้เลย ดังนั้นเมื่อเป็นการเคลื่อนที่ใน 2 หรือ 3 มิติก็ยิ่งทวีความยากยิ่งขึ้น กล่าวคือสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองแทนที่จะมีสมการเดียวเช่นสมการ (3.9) มันกลับมีถึงสามสมการ สำหรับการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ (และสองสมการสำหรับการเคลื่อนที่ใน 2- มิติ) ซึ่งจะมีค่าคงที่ถึงหกค่า คือ x_o, y_o, z_o, v_{x_o}, v_{y_o}, v_{z_o}. (มีค่าคงที่สี่ค่าสำหรับการเคลื่อนที่ใน 2-มิติ) และถ้าวิเคราะห์

ให้ลึกลงไปจะเห็นว่า ตัวแปร $\dot{\vec{r}}$ และ $\vec{r}$ ของแต่ละสมการ จากกลุ่มสมการ (4.29) ตัวแปรเหล่านี้ไม่ได้มีองค์ประกอบเพียงแกนเดียว แต่มีองค์ประกอบถึงสองหรือสามแกน จึงยิ่งเพิ่มปัญหาในการแก้สมการมากขึ้นอีก เราจึงไม่พิจารณาต่อสำหรับการเคลื่อนที่ในกรณีทั่วไปนี้.

กรณีกลุ่มสมการ (4.29) ถ้าเราแยกพิจารณา แรงในแต่ละแกน กล่าวคือ

$$F_x = F_x(\dot{x}, x, t), \tag{4.30}$$

$$F_y = F_y(\dot{y}, y, t), \tag{4.31}$$

$$F_z = F_z(\dot{z}, z, t). \tag{4.32}$$

เราสามารถแยกหาค่าของ $x(t)$, $y(t)$, และ $z(t)$ ได้อย่างอิสระ เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ในมิติเดียว. สิ่งที่สำคัญสำหรับกรณีนี้คือ แรงที่กำหนดให้ต้องเป็นฟังก์ชั่นของเวลาเพียงอย่างเดียว:

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = \left[F_x(t),\ F_y(t),\ F_z(t)\right] \tag{4.33}$$

เมื่อแรงเป็นฟังก์ชั่นของเวลาเพียงอย่างเดียว เราสามารถแยกหาสมการการเคลื่อนที่ของ x, y และ z ทีละอย่างได้ โดยใช้วิธีการเดียวกับตอน 3.3 (กรณีแรงภายนอกขึ้นอยู่กับเวลา). ในกรณีที่แรงเสียดทานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วก็เป็นอีกประเด็นหนึ่งสำหรับสมการ (4.30), (4.31), และ (4.32) เราก็สามารถแยกหาสมการการเคลื่อนที่ของความเร็วในแต่ละแกน คือ $\dot{x}$, $\dot{y}$, และ $\dot{z}$ หรือ v_x, v_y, และ v_z ได้ โดยวิธีการของตอน (3.4) ของบทที่ 3. อีกกรณีหนึ่งที่อาจเกิดขึ้นได้ คือ แรงเป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่ง เช่น การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์ใน 3 มิติ ซึ่งแรงสำหรับการเคลื่อนที่ คือ

$$F_x = -kx,$$

$$F_y = -ky, \tag{4.34}$$

$$F_z = -kz,$$

กรณีของแรงเป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่งนี้ เราสามารถแยกแก้สมการหาค่าของ x,y และ z ได้ โดยใช้วิธีการของตอน 3.5. ทั้งสามกรณีที่กล่าวมา คือแรงเป็นฟังก์ชั่นของเวลา, ความเร็วและตำแหน่ง จะเห็นว่าเราไม่สามารถหาค่าหรือสมการของ x, y และ z ในขณะเดียวกันได้ นอกจากใช้วิธีการของบทที่ 3 แยกหาทีละค่าหรือทีละสมการก่อน แล้วจึงนำวิธีการของเวกเตอร์จากบทที่ 1 รวมสองหรือสามสมการเข้าด้วยกัน เพื่อหาคำตอบสำหรับการเคลื่อนที่ใน 2 หรือ 3 มิติ. แต่กรณีที่แรงเป็นฟังก์ชั่นของความเร็ว, ตำแหน่ง, และเวลา, ในขณะเดียวกัน เราได้วิเคราะห์ไปแล้วในตอน 3.2 จึงไม่ขอกล่าวถึงอีก และกรณีนอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้ว เราก็จะไม่วิเคราะห์เช่นกัน.

4.4 ฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์ใน 2 และ 3 มิติ. (THE HARMONIC OSCILLATOR IN TWO AND THREE DIMENSION)

ในตอนนี้และตอนต่อไป เราจะพิจารณาถึงปัญหาธรรมดาบางส่วนในลักษณะที่แรงเป็นไปตามสมการ (4.30), (4.31), และ (4.32). ซึ่งได้วิเคราะห์ไปแล้วว่า เราสามารถใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์แยกหาสมการการเคลื่อนที่ของ x, y และ z แต่ละค่าอย่างอิสระ.

4.4.1 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์ในระนาบเดียวหรือ 2 มิติ

สมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่เมื่อไม่มีแรงหน่วง คือ

$$m\ddot{x} = -k_x x,$$

$$m\ddot{y} = -k_y y. \tag{4.35}$$

ซึ่งมีลักษณะการเคลื่อนที่ของ x และ y อยู่ในฟอร์ม

$$x = A_x \cos (\omega_x t + \theta_x),$$
$$y = A_y \cos (\omega_y t + \theta_y). \qquad (4.36)$$

เมื่อ $\omega_x^2 = \frac{k_x}{m}$, และ $\omega_y^2 = \frac{k_y}{m}$. ค่าคงที่ A_x, A_y, θ_x, และ θ_y ทราบได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่แต่ละกรณี. การหาทางเดินของสมการนั้น เราตัดเรื่องเวลาระหว่างสองสมการออกไป และการแก้ปัญหานี้เราให้สมการที่สองของสมการ (4.36) อยู่ในฟอร์ม

$$y = A_y (\cos \omega_y t + \theta_x + \theta_i)$$

เมื่อ

$$\theta_i = \theta_y - \theta_x, \quad \text{และให้} \quad \omega_x = \omega_y = \omega$$

ดังนั้น

$$y = A_y \left[\cos (\omega t + \theta_x) \cos \theta_i - \sin (\omega t + \theta_x) \sin \theta_i \right]$$

จากสมการแรกของสมการ (4.36) เราทราบ

$$\frac{y}{A_y} = \frac{x}{A_x} \cos \theta_i - (1 - \frac{x^2}{A_x^2})^{\frac{1}{2}} \sin \theta_i$$

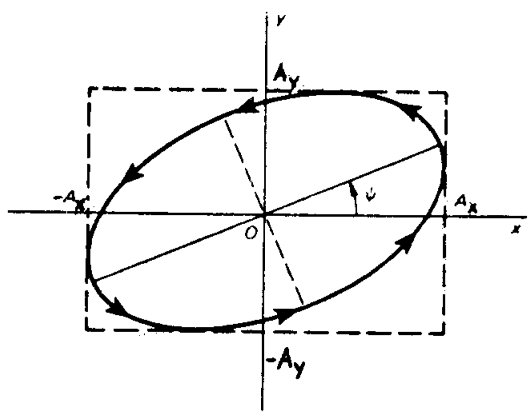
เมื่อยกกำลังสองตลอด เราได้

$$\frac{x^2}{A_x^2} - xy \frac{2 \cos \theta_i}{A_x A_y} + \frac{y^2}{A_y^2} = \sin^2 \theta_i \qquad (4.37)$$

สมการ (4.37) คือสมการควอดแรทิก (quadratic) ของ x และ y. ซึ่งสมการทั่วไปของควอดแรทิก คือ

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

ซึ่งแสดงในรูปของ ellipse, palabola, หรือ hyperbola, ขึ้นอยู่กับว่าค่าของ $b^2 - 4ac$ เป็นลบ, ศูนย์, หรือบวก, ตามลำดับ. สำหรับสมการ (4.37) ค่าของ $b^2 - 4ac = -(2 \sin \theta_i/A_x A_y)^2$ ซึ่งเป็นลบ ดังนั้นแสดงว่าทางเดินของการออสซิลเลตในระนาบเดียวหรือสองมิติเป็นแบบ ellipse ดังรูป 4.2



รูป 4.2 Elliptical path of motion of a two-dimensional harmomic oscillator

ในกรณีที่ผลต่างของมุมเฟส θ_i เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$, สมการของทางเดินของอนุภาค คือ

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของ ellipse ที่ระยะพิกัดของแกนทับกัน. อีกแบบหนึ่ง ถ้าผลต่างของมุมเฟส θ_i เป็นศูนย์หรือเท่ากับ π แล้ว สมการทางเดินของอนุภาคจะเป็นแบบเส้นตรงกล่าวคือ

$$y = \pm \frac{A_y}{A_x} x$$

เครื่องหมายบวก แสดงในกรณีที่ผลต่างของมุมเฟสเป็นศูนย์ ส่วนเครื่องหมายลบแสดงว่าผลต่างของมุมเฟสเท่ากับ π สำหรับกรณีทั่วไป เราให้ ψ เป็นมุมที่ทำกับแกน x ด้านบวกในแนวเอียง (ดังรูป 4.2) สมการทางเดินของอนุภาคเป็นแบบ ellispe เมื่อ

$$\tan 2\psi = \frac{2A_x A_y \cos \theta_i}{A_x^2 - A_y^2} \tag{4.38}$$

4.4.2 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค ออสซิลเลเตอร์ใน 3 มิติ

สมการของการเคลื่อนที่ใน 3 มิติโดยไม่มีแรงหน่วงนี้คือ

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x, \\ m\ddot{y} &= -k_y y, \\ m\ddot{z} &= -k_z z. \end{aligned} \tag{4.39}$$

และแบบของการเคลื่อนที่ ดังรูป 4.3, เป็นลักษณะของกล่องสี่เหลี่ยมมวล m ซึ่งผูกติดกับสปริงซึ่งตรึงไว้ในแนวแกนที่ตั้งฉากกันทั้งสามแกน ดังนั้นลักษณะการเคลื่อนที่ของกลุ่มสมการแบบฮาร์โมนิค ออสซิลเลเตอร์ แต่ละแกนจึงเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคอย่างง่าย :

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x), \qquad \omega_x^2 = \frac{k_x}{m},$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y), \qquad \omega_y^2 = \frac{k_y}{m}, \qquad (4.40)$$

$$z = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z), \qquad \omega_z^2 = \frac{k_z}{m}.$$

ค่าคงที่ทั้งหกค่า (A_x, A_y, A_z, θ_x, θ_y, θ_z) นี้ ขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น x_o, y_o, z_o, x_o, y_o, z_o. แต่ละโคออดิเนต ออสซิลเลตอย่างอิสระ แบบฮาร์โมนิคอย่างง่าย ด้วยความถี่ที่ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ของแรงคืนตัวและมวล m. ผลสรุปของการเคลื่อนที่แบบออสซิลเลตของอนุภาคมวล m ภายในกล่องสี่เหลี่ยม ที่มีขนาดวัดจากจุดศูนย์กลางหรือ origin ของแต่ละด้านเป็น $2A_x$, $2A_y$, และ $2A_z$. ถ้าความถี่เชิงมุม ω_x, ω_y, และ ω_z เป็นสัดส่วนที่สัมพันธ์กับเซทของเลขจำนวนเต็มบางชุด

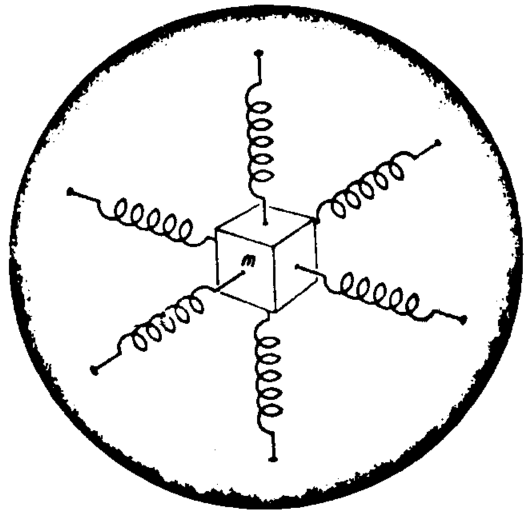
$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z} \qquad (4.41)$$

แล้วทางเดินของมวล m ในสเปซเป็นรูปปิด กล่าวคือ การเคลื่อนที่ของมวล m จะกลับสู่ตำแหน่งเริ่มต้น โดยคาบเวลา (period) ของการเคลื่อนที่เป็น

$$T = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}. \qquad (4.42)$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าความถี่เชิงมุม ω_x, ω_y, และ ω_z ไม่เป็นสัดส่วนที่สัมพันธ์กับเซทของเลข

จำนวนเต็ม แล้วทางเดินของมวล m ในสเปซก็ไม่เป็นรูปปิด และคาบเวลาของการเคลื่อนที่ก็ไม่แน่นอน



รูป 4.3 Model of a three-dimensional harmonic oscillator

4.5 โปรเจคไทล์ (PROJECTILES)

ในประวัติศาสตร์ของการศึกษาวิชากลศาสตร์ ปัญหาที่สำคัญอย่างหนึ่ง คือ การศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ภายใต้แรงกระทำอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงใกล้ ๆ ผิวโลก. ถ้าเราไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ สมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ คือ

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - mg\,\hat{k} , \tag{4.43}$$

เมื่อให้ z เป็นแกนของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ฟอร์มของสมการในแต่ละแกนเขียนได้เป็น

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{4.44}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \tag{4.45}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg. \tag{4.46}$$

ลักษณะการเคลื่อนที่ของสมการ (4.44), (4.45), และ (4.46) คือ

$$x = x_o + v_{x_o} t, \tag{4.47}$$

$$y = y_o + v_{y_o} t, \tag{4.48}$$

$$z = z_o + v_{z_o} t - \tfrac{1}{2} gt^2. \tag{4.49}$$

หรือในฟอร์มของเวกเตอร์

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t - \tfrac{1}{2} gt^2 \hat{k} . \tag{4.50}$$

ถ้าเราสมมติให้การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์นี้เริ่มจากจุดเริ่มต้น (0, 0, 0) ด้วยความเร็วต้นในระนาบ x-z นั่นคือ $v_{y_o} = 0$ ดังนั้นลักษณะการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ตามสมการ (4.47), (4.48), (4.49) จึงกลายเป็น

$$x = v_{x_o} t, \tag{4.51}$$

$$y = 0, \tag{4.52}$$

$$z = v_{z_o} t - \tfrac{1}{2} gt^2 \tag{4.53}$$

สมการชุดนี้ เป็นการอธิบายการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ ได้อย่างสมบูรณ์ สำหรับกรณีไม่มีแรงเสียดทาน. จากการหาค่า t ในสมการ (4.51) แล้วนำไปแทนค่าในสมการ (4.53) เราได้สมการการเคลื่อนที่ในระนาบ x-z เป็น

$$z = \frac{v_{z_o}}{v_{x_o}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_o}^2} x^2 \qquad (4.54)$$

สมการ (4.54) เราสามารถจัดให้อยู่ในฟอร์ม :

$$\left(x - \frac{v_{z_o} v_{x_o}}{g}\right)^2 = -2 \frac{v_{x_o}^2}{g} \left(z - \frac{v_{z_o}^2}{2g}\right). \qquad (4.55)$$

สมการนี้ คือ สมการของพาราโบลา (parabola) รูปโค้งคว่ำ ซึ่งมีความสูงมากที่สุดที่ตำแหน่ง

$$z_m = \frac{v_{z_o}^2}{2g} , \qquad (4.56)$$

และพาราโบลานี้ จะตัดกับแกนในแนวราบ ที่จุด z = 0 หรือจุดเริ่มต้น และที่จุด

$$x_m = \frac{2 v_{z_o} v_{x_o}}{g} \qquad (4.57)$$

ถ้าผิวโลกอยู่ในแนวราบ ค่าของ x_m คือพิสัย (range) หรือระยะไกลที่สุดในแนวราบของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

ต่อไปถ้าเราพิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ ในกรณีที่มีแรงเสียดทานของอากาศ เมื่อแรงนี้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็ว สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - mg \hat{k} - b \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.58}$$

เมื่อสมมติให้เป็นการเคลื่อนที่ในระนาบ x-z (เช่นเดียวกับกรณีไม่มีแรงเสียดทานของอากาศ) เราได้สมการในฟอร์มแกน x และแกน z เป็น

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - b \frac{dx}{dt} , \tag{4.59}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = - mg - b \frac{dz}{dt} \tag{4.60}$$

ถ้าการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เริ่มจากจุดกำเนิดที่เวลา $t = 0$ ดังนั้นลักษณะการเคลื่อนที่ของสมการ (4.59) และ (4.60) คือ (ดูจากตอน 3.4 และ 3.6)

$$v_x = v_{x_o} e^{-\frac{bt}{m}} , \tag{4.61}$$

$$x = \frac{m v_{x_o}}{b} (1 - e^{-\frac{bt}{m}}) , \tag{4.62}$$

$$v_z = (\frac{mg}{b} + v_{z_o}) e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{mg}{b} , \tag{4.63}$$

$$z = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m\, v_{z_o}}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b}\, t. \qquad (4.64)$$

จากการแก้สมการ (4.62) เพื่อหาค่า t แล้วแทนค่า t ในสมการ (4.64) เราได้สมการสำหรับการเคลื่อนที่วิถีโค้ง (trajectory) คือ

$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x_o}} + \frac{v_{z_o}}{v_{x_o}}\right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{m\, v_{x_o}}{mv_{x_o} - bx}\right) \qquad (4.65)$$

ถ้าแรงเสียดทานอากาศน้อยหรือวัตถุตกในระยะสั้น, เมื่อ $(bx)/(mv_{x_o}) << 1$ เราอาจขยายในรูปสมการยกกำลังของ $(bx)/(mv_{x_o})$ ได้เป็น

$$z = \frac{v_{z_o}}{v_{x_o}}\, x - \tfrac{1}{2}\, \frac{g}{v_{x_o}^2}\, x^2 - \frac{1}{3}\, \frac{bg}{m\, v_{x_o}^3}\, x^3 - \ldots \qquad (4.66)$$

ดังนั้น การเคลื่อนที่วิถีโค้งจะเห็นว่าในตอนแรก ๆ ทางเดินเป็นรูปพาราโบลา แต่เมื่อ x มีค่ามากขึ้นและ v_{x_o} เป็นบวกค่าของ z จะลดลงอย่างรวดเร็ว ทำให้วิถีการเคลื่อนที่ของมวล m ไม่เป็นรูปพาราโบลาอย่างแท้จริง. สองเทอมแรกของสมการ (4.66) จะเห็นว่าเหมือนกับสมการ (4.54) ซึ่งเราไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ ส่วนเทอมที่สามและเทอมต่อ ๆ ไป เป็นค่าที่อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ให้ถูกต้องสำหรับการขยายในรูปสมการยกกำลังของ $(bx)/(mv_{x_o})$ ที่มีค่าน้อย ๆ นี้ ซึ่งเป็นตัวอย่างที่มีประโยชน์ต่อการตรวจสอบผลที่ได้ รวมทั้งเป็นตัวอย่างของการประมาณค่าเพื่อง่ายต่อการอธิบายตามสมการ (4.65). ถ้า x ย่างเข้าสู่ค่าของ $\frac{m}{b}v_{x_o}$ ค่าของ z จะย่างเข้าสู่

ค่าอนันต์ในทิศทางลบ และทางเดินของวิถีโค้งก็จะสิ้นสุดลง วัตถุจะเคลื่อนที่ตกลงมาตามแนวดิ่ง ณ ตำแหน่ง $x = \frac{m}{b} v_{x_o}$; จากสมการ (4.63) เราพบว่า ถ้าวัตถุตกลงมาตามแนวดิ่งเมื่อสิ้นสุดวิถีโค้งนั้น วัตถุจะมีความเร็วปลายเท่ากับ $-\frac{mg}{b}$ (การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ วัตถุอาจจะตกถึงผิวโลกก่อนถึงความเร็วปลายนี้ ซึ่งตามปกติจะต้องเป็นเช่นนี้). ถ้าเรากำหนดให้ $z = 0$ ในสมการ (4.66) เราจะได้คำตอบอันหนึ่งที่ปรากฏอย่างแน่ชัด คือ $x = o$ และอีกคำตอบหนึ่งเราจะได้ค่าของ x_m เป็นค่ามากที่สุดระหว่าง $x = o$ และ $x = x_m$ นี้เป็นพิสัยที่ไกลที่สุดของโปรเจคไทล์ ซึ่งเราอาจหาได้โดยการประมาณค่า โดยเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$x_m = \frac{2 v_{x_o}}{g} - \frac{2}{3} \frac{b}{v_{x_o}} x_m^2 - \ldots \tag{4.67}$$

ถ้าเราตัดเทอมที่สองของสมการ (4.67) ทิ้ง เราจะได้การประมาณค่าอันดับแรกเป็น

$$x_m \doteq \frac{2 v_{x_o} v_{z_o}}{g}$$

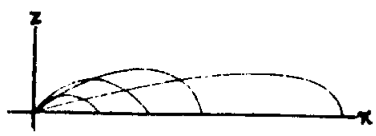
ซึ่งก็เป็นลักษณะเดียวกับสมการ (4.57) และเมื่อเราแทนค่า x_m นี้ในเทอมที่สองของสมการ (4.67) เราจะได้ค่าประมาณอันดับที่สองเป็น

$$x_m \doteq \frac{2 v_{x_o} v_{z_o}}{g} - \frac{8}{3} \frac{b v_{z_o}^2 v_{x_o}}{mg^2} \tag{4.68}$$

เทอมที่สองของสมการนี้จะเป็นเทอมแก้ไขอันดับแรก อันเนื่องมาจากความต้านทานของอากาศ และสองเทอมแรกนี้จะเป็นการประมาณค่าได้เป็นอย่างดี สำหรับกรณีที่มีแรงเสียดทานของอากาศน้อย ๆ ส่วนเทอมที่มีกำลังสูงกว่าต่อไป สามารถที่จะคำนวณได้โดยการแทนค่า x_m กลับเข้าไปอีกครั้งใน

สมการ (4.67) ดังนั้นเราจะพบว่าค่าของ x_m นี้จะเป็นอนุกรมเลขยกกำลังของ b. ในทางตรงกันข้ามถ้าพิจารณาความต้านทานของอากาศที่มีค่ามาก ๆ ค่าของพิสัย (ตามรูป 4.4) หาได้จากตำแหน่งที่วัตถุตกลงมาตามแนวดิ่ง ณ. ตำแหน่ง $x = m v_{x_o}/b$ ซึ่งอยู่เหนือระนาบในแนวราบที่ $z = 0$ ดังนั้น ค่าของพิสัยโดยประมาณ คือ

$$x_m \doteq \frac{m v_{x_o}}{b} , \qquad \left(\frac{b v_{z_o}}{mg} >> 1 \right) \tag{5.69}$$



รูป 4.4 Trojectories for maximum range for projectile with various muzzle velocities

เราสามารถหาสมการ (โดยประมาณ) ในกรณีที่มีลมพัดขณะที่อนุภาคมวล m กำลังเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ โดยการสมมติให้ แรงต้านของอากาศ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วสัมพัทธ์ของโปรเจคไทล์เทียบกับอากาศ. สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = - mg\,\hat{k} - b\left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_w\right), \tag{4.70}$$

เมื่อ $\vec{v}_w$ เป็นความเร็วของลม. ถ้า $\vec{v}_w$ มีค่าคงที่ เทอมของ $b\vec{v}_w$ ในสมการ (4.70) ก็เป็นแรงคงที่อีกแรงหนึ่ง นอกเหนือจาก $- mg\,\hat{k}$ ดังนั้นการแก้ปัญหานี้จึงกระทำได้โดยไม่ยากเช่นเดียวกับวิธีการที่แล้วมา แตกต่างกันแต่เพียงมีแรงคงที่เพิ่มขึ้นอีกแรงหนึ่งเท่านั้น นอกเหนือจากแรง

เสียดทานในทิศของสามตัวแปร x, y, z.

แรงต้านของอากาศที่กระทำต่อโปรเจคไทล์จะลดลงตามระดับความสูง ดังนั้นรูปสมการ การเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์ที่ดีกว่าเมื่อความสูงมีค่ามากขึ้น สามารถเขียนได้เป็น

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k} - be^{-\frac{z}{h}}\frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4.71}$$

เมื่อ h เป็นความสูง (ประมาณ 5 ไมล์) ที่ซึ่งแรงต้านของอากาศจะลดลง $\frac{1}{e}$ ของแรงต้านของอากาศบนผิวโลก ดังนั้นสมการของการเคลื่อนที่ในแต่ละแกน คือ

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}e^{-\frac{z}{h}}, \tag{4.72}$$

$$m\ddot{y} = -b\dot{y}e^{-\frac{z}{h}}, \tag{4.73}$$

$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}e^{-\frac{z}{h}} \tag{4.74}$$

การแก้สมการชุดนี้อาจกระทำได้ยาก เพราะค่าของ z ปรากฏอยู่ในรูปสมการของ x และ y เราจึงต้องแก้สมการของ (4.74) ให้ได้เสียก่อน แล้วนำไปแทนค่าในสมการของ x และ y คือ สมการ (4.72) และ (4.73) ความสำคัญของปัญหาที่กล่าวมานี้ ได้เคยใช้ในระหว่างสงครามโลกครั้งแรก ซึ่งเป็นการค้นพบโดยบังเอิญ เพราะแต่ก่อนนั้นมนุษย์เราเชื่อว่าการเล็งปืนใหญ่โดยให้ปากกระบอกปืนยกในระดับสูงขึ้นจะทำให้ได้ระยะทางของลูกปืนวิ่งไปได้ไกลมากขึ้น.

4.6 พลังงานศักย์ (POTETIAL ENERGY)

ถ้าแรง F ที่กระทำต่ออนุภาคเป็นฟังก์ชั่นของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = (x,y,z)$ ของมัน แล้วงานที่เกิดจากแรง $\vec{F}$ เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\vec{r}_1$ ถึง $\vec{r}_2$ คือ

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.75)$$

สมการของงานนี้ เป็นแนวทางในการหาพลังงานศักย์ $V(\vec{r}) = V(x,y,z)$ เพราะมีลักษณะใกล้เคียงกับสมการ (3.31) ของการเคลื่อนที่ในมิติเดียว ซึ่งถ้าเราให้งานนี้เกิดจากแรงที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\vec{r}$ ไปยังตำแหน่งมาตรฐาน $\vec{r}_s$ ที่กำหนด สมการของพลังงานศักย์ คือ

$$V(\vec{r}) = -\int_{r_s}^{r} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (4.76)$$

หากสมมติให้ฟังก์ชั่นของแรงเป็น $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ แสดงว่าเส้นอินทิกรัลในสมการ (4.76) เป็นทางเดินอิสระของการอินทิเกรตจาก $\vec{r}_s$ ไปยังตำแหน่ง $\vec{r}$ ใด ๆ โดยที่ค่าของอินทิกรัลจะขึ้นอยู่กับตำแหน่ง $\vec{r}$ และ $\vec{r}_s$ เท่านั้น. การเปลี่ยนของพลังงานศักย์ V เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จาก $\vec{r}$ ไปยัง $\vec{r} + d\vec{r}$ นั้น งานที่เกิดจากแรง $\vec{F}$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.77)$$

จากนิยามของเกรเดียน (gradient) และสมการ (4.77) เราได้

$$-\vec{F} = \text{grad } V,$$

หรือ

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \qquad (4.78)$$

สมการ (4.78) เราแยกอธิบายในแต่ละแกน ได้เป็น

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad (4.79)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

จากนิยามของผลคูณเวกเตอร์ เราทราบว่า

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

เมื่อนำ $(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})$ มาใช้ในลักษณะฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์ V เราได้

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \text{curl (grad V)} = 0 \qquad (4.80)$$

สมการ (4.80) และสมการ (4.78) สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl } \vec{F} = 0 \qquad (4.81)$$

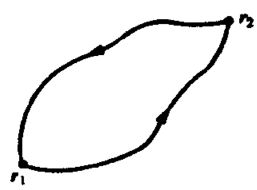
สมการ (4.81) ได้พิจารณาสมมติฐานของการหาค่าพลังงานศักย์ภายใต้เงื่อนไขของแรงซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชั่นของ F(x,y,z) และเราสามารถแสดงว่าสมการ (4.81) เป็นสมการที่มีเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการหาค่าพลังงานศักย์ โดยการใช้ทฤษฎีของ Stoke, ถ้าเราพิจารณาระบบทางเดินรูปปิด C ใด ๆ ในสเปซ งานที่เกิดจากแรง $F(\vec{r})$ ไปตามทางเดินรูปปิดนี้ คือ

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, ds \qquad (4.82)$$

เมื่อ s เป็นผิวของสเปซ ซึ่งล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง c ตอนนี้จะเห็นว่าสมมติฐานของสมการ (4.81) เป็นจริง นั่นคือ ค่าทางขวามือของสมการ (4.82) เท่ากับศูนย์ ดังนั้นงานสำหรับทางเดินของรูปปิด C ใด ๆ คือ

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{4.83}$$

เมื่องานที่เกิดจากแรง $\vec{F}$ ครบรอบทางเดินของส่วนโค้งเป็นศูนย์นั้น ไม่ได้หมายความว่างานที่เกิดจากระยะทาง $\vec{r}_1$ ไปยัง $\vec{r}_2$ หรือ $\vec{r}_2$ มายัง $\vec{r}_1$ (ดังรูป 4.5) จะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย ค่าของพลังงานศักย์ก็เช่นกันมันจะมีค่าตามตำแหน่งของ $\vec{r}_1$ กับ $\vec{r}_2$ และไม่ขึ้นอยู่กับวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาค



รูป 4.5 Two paths between $\vec{r}_1$ and $\vec{r}_2$, forming a closed path

เมื่อ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ เราสามารถอธิบายงานของแรง $\vec{F}$ เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จาก $\vec{r}_1$ ไปยัง $\vec{r}_2$ เช่นเดียวกับความแตกต่างของพลังงานศักย์ ที่จุดนั้น :

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_3}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \tag{4.84}$$

โดยการรวมสมการ (4.19) กับสมการ (4.84) เราได้

$$T_1 + V(\vec{r}_1) = T_2 + V(\vec{r}_2) \tag{4.85}$$

จากสมการ (4.85) แสดงว่าพลังงานรวม (T + V) มีค่าคงที่ หรือพลังงานในกรณีที่กล่าวมานี้เป็นไปตามหลักการอนุรักษ์พลังงานนั่นเอง และเราเขียนสมการ (4.85) สำหรับการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ เป็น

$$T + V = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x,y,z) = E \tag{4.86}$$

ในบางกรณี แรงอาจเป็นฟังก์ชั่นของ $\vec{r}$ และเวลา t ในขณะเดียวกัน แต่ถ้าในเวลาหนึ่งเวลาใดที่ $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t) = 0$ แล้ว ฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์ $V(\vec{r},t)$ สามารถหาได้โดย

$$V(\vec{r},t) = \int_{r_s}^{r} \vec{F}(\vec{r},t) \cdot d\vec{r} \tag{4.87}$$

เมื่อ $\vec{\nabla} \times \vec{F}(r,t) = 0$ ดังนั้น

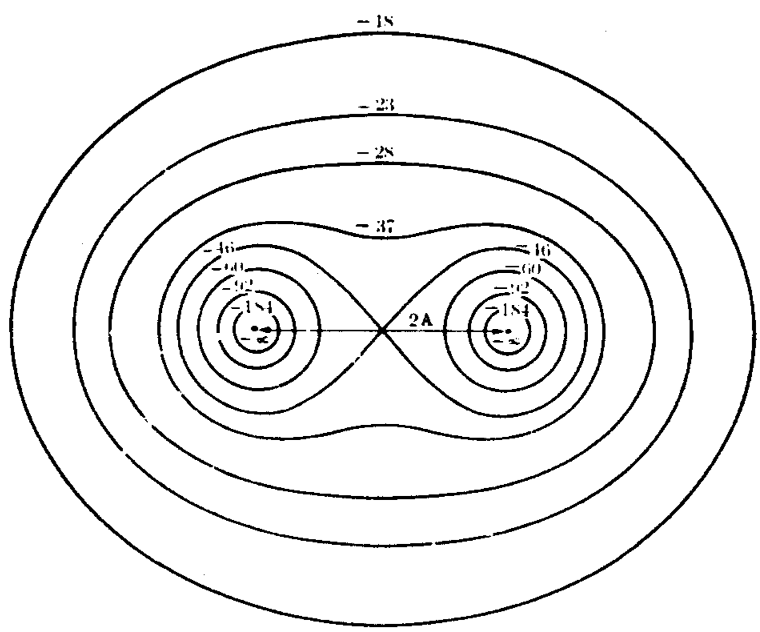
$$F(r,t) = -\nabla V(r,t) \tag{4.88}$$

เมื่อแรงที่กระทำต่ออนุภาคเป็นแรงอนุรักษ์ เราสามารถคำนวณหาค่าของอัตราเร็วในลักษณะฟังก์ชั่นของตำแหน่งได้จากสมการ (4.86), พลังงานรวม E มีค่าตามเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่และมีค่าคงที่. สมการ (4.86) ไม่สามารถบอกทิศทางของการเคลื่อนที่ได้ การที่เราไม่ทราบทิศทางของการเคลื่อนที่ทำให้เราไม่สามารถจะบอกได้ว่าการเคลื่อนที่นั้นเป็นการเคลื่อนที่ใน 2 หรือ 3 มิติ ส่วนการเคลื่อนที่ในมิติเดียวนั้นเป็นการเคลื่อนที่ในแนวเดียวกัน ดังได้กล่าวมา

แล้วในบทที่ 3. การเคลื่อนที่ในหลายมิติในกรณีที่ $V(x,y,z) < E$ ตัวอย่าง เช่น พลังงานศักย์ของอีเล็คตรอน ในสนามไฟฟ้าของโปรตอน 2 ตัว (การแตกตัวของโมเลกุลของ H_2^+) คือ

$$V = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}, \quad \text{(esu)} \tag{4.89}$$

เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นระยะทางของอีเล็คตรอนจากโปรตอนทั้งสอง. ฟังก์ชั่น $V(x,y)$ (สำหรับการเคลื่อนที่ในระนาบ xy เท่านั้น) ได้แสดงไว้ดังรูป 4.6, เมื่อโปรตอนทั้งสองห่างกัน 2A อยู่ที่ตำแหน่ง $y = o$, $x = \pm A$ และรูปนี้เป็นเส้นแสดงถึงพลังงานศักย์ โดยที่พลังงานศักย์อยู่ในหน่วยของ 10^{-12} เอิร์ก และ $E < -46 \times 10^{-12}$ เอิร์ก.



รูป 4.6 Totential energy of electron in electric field of two protions 2 A apart (Potential energy in units of 10^{-12} erg)

จากรูป (4.6) จะเห็นว่า อีเล็คตรอนถูกจำกัดขอบเขตรอบ ๆ แต่ละโปรตอน การเคลื่อนที่ของมันจะออสซิลเลตรอบจุดศูนย์กลางเป็นชั้น ๆ เมื่อ E น้อยกว่าศูนย์ และมากกว่า -46×10^{-12} เอิร์ก

อีเล็คตรอนจะถูกจำกัดขอบเขตการเคลื่อนที่รอบโปรตอนทั้งสอง, กรณี $E > o$ การเคลื่อนที่ของอีเล็คตรอนอาจเป็นไปในลักษณะที่อีเล็คตรอนจะไม่ถูกจำกัดขอบเขตของการเคลื่อนที่จากพลังงานศักย์ ส่วนลักษณะการเคลื่อนที่อื่น ๆ เนื่องจากค่าของ E นั้นดูได้จากรูป 4.6

เมื่อกำหนดฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์เป็น $V(x,y,z)$ จากสมการ (4.79), ทำให้เราสามารถคำนวณหาค่าของแรงในแต่ละแกนได้ ในทางตรงกันข้ามถ้าเรากำหนดค่าฟังก์ชั่นของแรง $F(x,y,z)$ เราสามารถหาค่าเคิร์ลของแรง F เพื่อการหาค่าของพลังงานศักย์ได้เช่นกัน. ถ้าแต่ละแกนของเคิร์ล $\vec{F}$ มีค่าเป็นศูนย์ (เป็นแรงใน 3 มิติ) แล้ว ค่าของแรง $\vec{F}$ จะมีค่าเป็น $-\vec{\nabla}V$ ดังสมการ (4.88) ส่วนค่าของพลังงานศักย์คำนวณได้จากสมการ (4.76), นอกจากนี้เมื่อเคิร์ล $\vec{F} = o$ ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่ขึ้นอยู่กับการอินทิเกรตตามทางเดินของอนุภาค แต่เราอาจหาค่าอินทิกรัลไปตามส่วนโค้งหรือทางเดินที่สะดวกใด ๆ ได้ ดังตัวอย่าง 4.1

<u>ตัวอย่าง 4.1</u> พิจารณาฟังก์ชั่นของแรง $\vec{F}$ ในข้อ a) และ b) :

a) $F_x = axy, \qquad F_y = -az^2 \qquad F_z = -ax^2,$

b) $F_x = ay(y^2 - 3z^2), \qquad F_y = 3ax(y^2 - z^2), \qquad F_z = -6\,axyz,$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่.

<u>วิธีทำ</u> เราคำนวณค่าของเคิร์ล $\vec{F}$ ในแต่ละกรณีได้ คือ

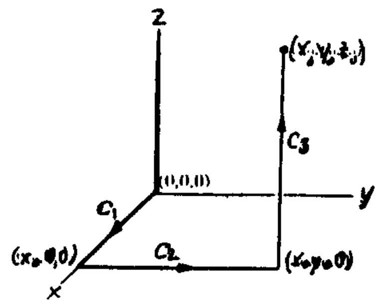
$$\text{a)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy & -az^2 & -ax^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,az\,\hat{i} + 2\,ax\,\hat{j} - ax\,\hat{k}$$

b) ใช้วิธีเดียวกันกับข้อ a) ได้

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = o$$

ในกรณี a) ไม่เกิดพลังงานศักย์. สำหรับกรณี b) มีฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์ การหาค่าพลังงานศักย์ในกรณีนี้เราให้ $\vec{r}_s = o$ และพลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดกำเนิด (origin) เมื่อแรงเป็นฟังก์ชั่นของ x,y,z วิธีง่ายที่สุดในการอินทิเกรต เราเริ่มจาก (o,o,o) ไปยังตำแหน่ง (x_o,y_o,z_o) เราคำนวณหาค่าพลังงานศักย์จากสมการ (4.76) ดังรูป 4.7



<u>รูป 4.7</u> A path of inlegration from (0,0,0) to (x_o, y_o, z_o)

$$V_{(x_o,y_o,z_o)} = - \int_{(o,o,o)}^{(x_o,y_o,z_o)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

การอินทิเกรตตาม C_1, เราทราบ

$$y = z = o, \quad F_x = F_y = F_z = 0, \quad d\vec{r} = dx\,\hat{i}.$$

ดังนั้น

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{c}^{x_c} F_x \, dx = 0.$$

การอินทิเกรตตาม C_2, เราทราบ

$$x = x_o, \quad z = o$$

$$F_x = ay^3, \quad F_y = 3\,ax_o y^2, \quad F_z = 0,$$

$$d\vec{r} = dy\,\hat{j}.$$

ดังนั้น

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{o}^{y_c} F_y \, dy = ax_o\, y_o^3$$

การอินทิเกรตตาม C_3, เราทราบ

$$x = x_o, \quad y = y_o,$$

$$F_x = ay_o(y^2 - 3z^2), \quad F_y = 3ax_o(y_o^2 - z^2),$$

$$F_z = -\,bax_o\, y_o\, z,$$

$$d\vec{r} = dz\,\hat{k}$$

ดังนั้น

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{z_o} F_z \, dr = -3\, ax_o\, y_o\, z_o^2$$

นั่นคือ

$$V(x_o, y_o, z_o) = -ax_o y_o^3 + 3\, ax_o\, y_o\, z_o^2$$

เมื่อตัดตัวห้อย $_o$ ของ x,y,z ออก พลังงานศักย์ $V(x,y,z)$ มีค่าเป็น

$$V(x,y,z) = -axy^3 + 3\, axyz^2$$

<u>ตอบ</u>

กรณีสำคัญของแรงอนุรักษ์คือ แรงผ่านศูนย์กลาง (Central force) ซึ่งแรงนี้เป็นแรงที่อยู่ในแนวเดียวกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง r และแรงนี้อาจมีทิศทางเข้าหาหรือออกจากจุดกำเนิด o. ใน Spherical Coordinates เมื่อ o เป็นจุดกำเนิด,

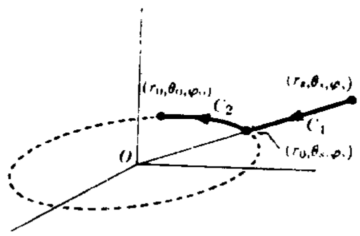
$$\vec{F} = F(r)\,\hat{r} \tag{4.90}$$

องค์ประกอบของคาร์ทีเซียล (Cartesian Components) ของแรงผ่านศูนย์กลาง คือ
(เมื่อ $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$)

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{x}{r}\, F(r), \\ F_y &= \frac{y}{r}\, F(r), \\ F_z &= \frac{z}{r}\, F(r), \end{aligned} \tag{4.91}$$

และ

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.92}$$



รูป 4.8 Path of integration for a central force

ค่าของเคิร์ลของแรง $\vec{F}$ นี้ สามารถพิสูจน์ได้ว่ามีค่าเป็นศูนย์ ไม่ว่าฟังก์ชั่นของ F(r) จะมีค่าอย่างไร เราพบว่า

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$= \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r}\right)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r}\right)$$

การคำนวณหาค่าของพลังงานศักย์ เราเลือกจุดมาตรฐานที่กำหนด r_s ใด ๆ แล้วอินทิเกรตจาก r_s ไปยัง r_o ตามส่วนโค้ง (ดังรูป 4.8), ระยะรัศมี (C_1) จาก r_s ซึ่งมีโคออดิเนต เป็น (r_s,θ_s,ψ_s) ไปยังจุด (r_o,θ_s,ψ_s) แล้วต่อไปยังเส้นรอบวง (C_2) ของรัศมี r_o

จนถึงจุด (r_o, θ_o, ψ_o) การอินทิเกรตตามเส้น C_1,

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{r_S}^{o} F(r)\,dr.$$

ตามเส้น C_2,

$$dr = r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\psi\,\hat{\psi}$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\,.\,d\vec{r} = 0$$

ดังนั้น

$$V(r_o) = -\int_{r_S}^{r_o} \vec{F}\,.\,d\vec{r}$$

$$= -\int_{C_1} \vec{F}\,.\,d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}\,.\,d\vec{r}$$

$$= -\int_{r_S}^{r_o} F(r)\,dr$$

เพราะพลังงานศักย์เป็นฟังก์ชั่นของ r เพียงอย่างเดียว ดังนั้น

$$V(\vec{r}) = V(r) = -\int_{r_S}^{r} F(r)\,dr. \qquad (4.93)$$

4.7 การเคลื่อนที่ภายใต้แรงผ่านศูนย์กลาง (MOTION UNDER A CENTRAL FORCE)

ในทางฟิสิกส์แรงผ่านศูนย์กลางคือแรงที่เป็นไปตามสมการ (4.90) แรงนี้อาจเป็นแรงดึงดูด ถ้า $F(r) < 0$ หรือเป็นแรงผลัก ถ้า $F_{(r)} > 0$ ต่ออนุภาคซึ่งอยู่ในแนวเดียวกันกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง r ใด ๆ . กรณีส่วนใหญ่แรงปฏิกิริยาระหว่างอนุภาค 2 อนุภาคถือว่าเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง ตัวอย่างของแรงผ่านศูนย์กลาง (ในลักษณะของแรงสู่ศูนย์กลาง) เช่น แรงโน้มถ่วงจากดวงอาทิตย์กระทำต่อดาวนพเคราะห์, แรงดึงดูดทางไฟฟ้าระหว่างอีเล็คตรอนกับนิวเคลียสของอะตอม (ในลักษณะของแรงผลักกัน), แรงระหว่างโปรตอนหรืออนุภาคอัลฟ่ากับนิวเคลียสอื่น ๆ , และกรณีที่สำคัญคือในกรณีที่แรง $F(r)$ เป็นสัดส่วนผกผันกับ r^2 จะกล่าวถึงในตอนต่อไป. ในตอนนี้เราให้เห็นวิธีทั่ว ๆ ไปของปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาค ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลาง.

จากตัวอย่างทั้งหมดที่กล่าวมาแล้ว ต่างก็เป็นการกระทำของอนุภาค อนุภาค ซึ่งเป็นอนุภาคที่มีความเร็วไปยังตำแหน่งคงที่ ปัญหาที่เราจะต้องแก้เหมือนกับปัญหาส่วนใหญ่ทางฟิสิกส์. โดยความเป็นจริงที่ถูกต้องและเหมาะสมคือ อนุภาคหนึ่งอนุภาคใดสามารถอนุโลมให้อยู่ในสภาพนิ่งนั้น มันจะเป็นไปได้เมื่อมันมีน้ำหนักมากกว่าอนุภาคตัวอื่น ส่วนแรงที่กระทำต่ออนุภาคทั้งสองมีขนาดเท่ากันตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน แต่ความเร็วของอนุภาคที่มีน้ำหนักมากกว่าจะมีขนาดน้อยกว่าอีกอนุภาคที่เบากว่า. ถ้ามวลของอนุภาคทั้งสองมีขนาดเท่ากัน เราสามารถให้คำตอบของปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองที่มีอัตกริยาต่อกันได้ถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้น.

เราอาจเขียนเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลางที่มีขนาดคงที่ ทอร์คที่เกิดขึ้น คือ

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \hat{r})\, F(r) = 0 \qquad (4.94)$$

ดังนั้นโดยสมการ (4.27) เราได้

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad (4.95)$$

ผลลัพธ์คือ โมเมนตัมเชิงมุมรอบแกนใด ๆ ที่เกิดจากแรงผ่านศูนย์กลางมีค่าคงที่. แรงทางฟิสิกส์จำนวนมากเป็นลักษณะของแรงผ่านศูนย์กลาง แนวความคิดพื้นฐานของโมเมนตัมเชิงมุมจึงเป็นสิ่งสำคัญมาก

ในการแก้ปัญหาสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ถูกกระทำโดยแรงผ่านศูนย์กลางนั้น สิ่งแรกเราต้องแสดงทางเดินของอนุภาคตามเส้นในระนาบเดียวไปยังศูนย์กลางของแรง ในการแสดงแบบนี้เราให้ตำแหน่ง r_o และความเร็ว v_o ที่กำหนดในขณะเวลาเริ่มต้น t_o ใด ๆ และเลือกแกน x ให้ผ่านตำแหน่งเริ่มต้น r_o โดยแกน ตั้งฉากกับความเร็วต้น v_o เราจะได้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$x_o = |\vec{r}_o| \quad , \quad y_o = z_o = o \qquad (4.96)$$

$$v_{x_o} = \vec{v}_o \cdot \hat{i} , \quad v_{y_o} = \vec{v}_o \cdot \hat{j} , \quad v_{z_o} = o. \qquad (4.97)$$

สมการการเคลื่อนของอนุภาคใน rectangular Coordinates ซึ่งกำหนดโดยสมการ (4.91) คือ

$$m\ddot{x} = \frac{x}{r} F(r), \quad m\ddot{y} = \frac{y}{r} F(r), \quad m\ddot{z} = \frac{z}{r} F(r). \qquad (4.98)$$

คำตอบสมการของ z ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดของ z_o และ v_{z_o} คือ

$$z(t) = 0 \qquad (4.99)$$

ด้วยเหตุนี้การเคลื่อนที่ จึงอยู่ในระนาบ xy เพียงอย่างเดียว เราสามารถสังเกตเห็นว่าแรงที่กระทำต่ออนุภาคเป็นแรงที่ชี้ไปทางจุดกำเหนิดเสมอ เมื่อเราพิจารณาถึงเหตุผลของผลที่ตามมาของการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม โดยสมการ (4.95) เวกเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L} = m (\vec{r} \times \vec{v})$ เป็นค่าคงที่ เพราะว่าทั้ง $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ จะต้องอยู่บนเส้นตรงในระนาบที่กำหนดตายตัว ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{L}$

ในตอนนี้เราจะกล่าวถึงปัญหาของการเคลื่อนที่ในระนาบเดียวเท่านั้น ซึ่งปัญหานี้จะมีสมการดิฟเฟอเรนเชียลเพียง 2 สมการ และค่าของเงื่อนไขเริ่มต้นเพียง 4 ค่า. ถ้าเราให้โพลาร์โคออดิเนตเป็นระนาบของการเคลื่อนที่ สมการการเคลื่อนที่ในเทอมของ r และ θ ซึ่งหาได้จากสมการ (4.90), และค่าของความเร่ง a_r และ a_θ คือ

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r), \qquad (4.100)$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0. \qquad (4.101)$$

จากการคูณสมการ (4.101) ด้วย r ดังนั้นอนุพันธ์ของทฤษฎีโมเมนตัมเชิงมุม (ในระนาบ) คือ

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0 \qquad (4.102)$$

สมการ (4.102) นี้แสดงถึงหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดกำเหนิด กล่าวคือเมื่อเราอินทิเกรตสมการ (4.102) เราได้สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{คงที่}$$

ค่าคงที่ L นี้เราหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนด. ค่าอินทิกรัลอีกแบบหนึ่งของสมการ (4.100) และ (4.101), เมื่อแรง F เป็นแรงอนุรักษ์ คือ

$$T + V = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E, \qquad (4.104)$$

เมื่อ $V(r)$ กำหนดโดยสมการ (4.93), และ E คงที่ แล้วแทนค่า $\dot{\theta}$ จากสมการ (4.103) ในสมการ (4.104) ค่าของพลังงาน E กลายเป็น

$$\tfrac{1}{2}\, m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \qquad (4.105)$$

เมื่อแก้สมการ (4.105) เพื่อหาค่า $\dot{r}$, เราได้

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.106)$$

นั่นคือ

$$\int \frac{dr}{\left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\; t \qquad (4.107)$$

สมการ (4.107) เป็นการหาคำตอบ สำหรับการแก้สมการของ $r(t)$. และเมื่อเราหาสมการของ $\theta(t)$ จากสมการ (4.103), เราได้

$$\theta = \theta_o + \int_0^t \frac{L}{mr^2}\, dt. \qquad (4.108)$$

นี่คือเราได้แสดงคำตอบการแก้ปัญหาของสมการ (4.100) และ (4.101) ในเทอมของค่าคงที่ 4 ค่า (L, E, r_o, θ_o) ซึ่งเราสามารถหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของตำแหน่งและความเร็วในระนาบที่กำหนด. เมื่อพิจารณาให้ลึกลงไปโดยการแทนค่า θ จากสมการ (4.103) ลงในสมการ (4.100) เราได้

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \qquad (4.109)$$

หรือ

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \qquad (4.110)$$

สมการ (4.110) นี้ คือ ฟอร์มของสมการการเคลื่อนที่ในมิติเดียว สำหรับอนุภาคที่ถูกกระทำด้วยแรง F(r) และแรงหนีศูนย์กลาง $\frac{L^2}{mr^3}$. แรงหนีศูนย์กลางในที่นี้ไม่ใช่แรงที่แท้จริงแต่เป็นส่วนหนึ่งที่เกิดจากมวลคูณด้วยความเร่ง, และทางขวามือของสมการ (4.110) เราอาจเรียกว่า "fictitious force". ถ้าเรายอมรับสมการ (4.110) เป็นปัญหาของการเคลื่อนที่ในมิติเดียว ความสัมพันธ์ของพลังงานศักย์กับแรงทางขวามือของสมการ (4.110) คือ

$$'V'(r) = -\int F(r)\,dr - \int \frac{L^2}{mr^3}\,dr$$

$$= V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (4.111)$$

เทอมที่สองของ V ในสมการนี้ คือ พลังงานศักย์ที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กับแรงหนีศูนย์กลาง.

อินทิกรัลของสมการ (4.107) บางครั้งทำความเข้าใจได้ยาก และแตกต่างไปจากการคำนวณในแบบฝึกหัด และยังยากสำหรับการแก้สมการหาค่า r(t) แต่บางครั้งก็ง่ายสำหรับการนำไปใช้ เช่น การหาทางเดินของอนุภาคในสเปซ ซึ่งก็ง่ายกว่าการใช้วิธีที่ให้การเคลื่อนที่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา กล่าวคือ เราสามารถอธิบายทางเดินของอนุภาคโดยการกำหนด $r(\theta)$ วิธีการนี้ค่อนข้างจะง่าย ถ้าเรากำหนดการแทนค่า :

$$u = \frac{1}{r}\ ,\quad r = \frac{1}{u} \qquad (4.112)$$

เมื่อใช้สมการ (4.103), เราได้

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$= -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$$

$$= -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}, \qquad (4.113)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}$$

$$= -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (4.114)$$

แทนค่า r และ $\ddot{r}$ ในสมการ (4.110) และคูณด้วย $-m/(L^2u^2)$ เราได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับทางเดินหรือทางโคจรในเทอมของ $U(\theta)$ เป็น

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \qquad (4.115)$$

ในกรณีที่ $L = o$ สมการ (4.115) จะเป็นสมการของการกระจาย แต่เราทราบจากสมการ (4.103) ว่า θ มีค่าคงที่ และทางเดินของอนุภาคเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเหนิด

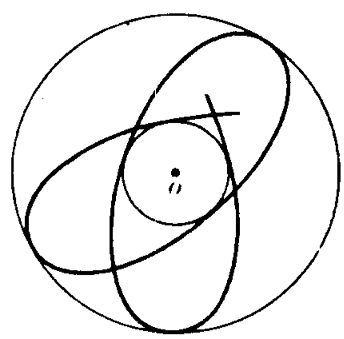
การอธิบายคำตอบของสมการ (4.107), (4.108) หรือ (4.115) ยากกว่าที่ผ่านมามาก แต่เราสามารถแสดงปริมาณที่สำคัญของการเคลื่อนที่ของ r จากผลของพลังงานศักย์ 'V' ที่กำหนดโดยสมการ (4.111) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบมิติเดียว. โดยการพรอท (plot) 'V'(r) เราสามารถสรุปพลังงานรวม E ได้ว่า ทำให้การเคลื่อนที่จาก r ครบวงโคจรหรือไม่ เราอาจจะแสดง

ตำแหน่งของจุดกลับ (turning point) และสามารถอธิบายอย่างสังเขปว่าความเร็วเปลี่ยนแปลงระหว่างการเคลื่อนที่อย่างไร. ถ้า $'V'(r)$ มีค่าต่ำสุดที่ตำแหน่ง r_o แล้วพลังงานรวม E จะมีขนาดมากกว่า $'V'(r_o)$ ส่วน อาจจะมีขนาดเล็ก และการออสซิลเลตแบบฮาร์โมนิคโดยประมาณรอบ r_o ด้วยความถี่เชิงมุม ω กำหนดโดย

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2\ 'V'}{dr^2} \right)_{r_o} \qquad (4.116)$$

เราคงจำได้ว่า ที่เวลาเดียวกันนี้ อนุภาคจะหมุนรอบศูนย์กลางของแรง ด้วยความเร็วเชิงมุม

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \qquad (4.117)$$



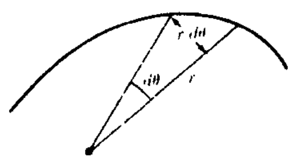
รูป 4.9 An aperiodic bounded .orbit

อัตราการหมุนจะลดลงเมื่อ r เพิ่มขึ้น. ในกรณีที่ r เคลื่อนที่ไม่ครบวงโคจร แล้ว $\theta \to o$ ขณะที่ $r \to \infty$ และ การหมุนของอนุภาคอาจจะเป็นการหมุนที่สมบูรณ์หรือไม่สมบูรณ์ก็ได้ในขณะที่มันเคลื่อนที่เข้าสู่ $r = \infty$ ขึ้นอยู่กับว่า เพิ่มขึ้นอย่างไร. เมื่อการเคลื่อนที่ของ r ครบวงโคจร คาบเวลา r จะไม่อยู่ในลักษณะทั่วไปเหมือนกับคาบเวลาของการหมุน ดังนั้นวงโคจรอาจจะไม่เป็นวงโคจรรูปปิด แม้ว่ามันจะเป็นการเคลื่อนที่ในสเปซ (ดูรูป 4.9) ถ้าอัตราส่วนของคาบเวลา (period) ของ

การเคลื่อนที่ของ r ต่อคาบเวลาของจำนวนการหมุนเป็นเศษส่วน วงโคจรจะเป็นรูปปิด และถ้าอัตราส่วนนี้เป็นเลขจำนวนเต็ม วงโคจรก็จะเป็นเส้นโค้งรูปปิดอย่างง่าย ๆ โดยคาบเวลาจะสัมพันธ์กับพื้นที่ของวงโคจร. เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ผ่านเป็นมุมเล็ก ๆ $d\theta$ พื้นที่ของรัศมี r ที่กวาดจากจุดกำเนิด (ดูรูป 4.10) เป็น

$$ds = \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} \qquad (4.118)$$



รูป 4.10 Area swept out by radius vector

ผลลัพธ์อันนี้เป็นจริงสำหรับอนุภาคใด ๆ ที่เคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลาง ถ้าการเคลื่อนที่ครบวงโคจรแล้ว ผลรวมตลอดคาบเวลาของการเคลื่อนที่ เราสามารถหาพื้นที่ของเขตวงโคจรได้จาก

$$S = \frac{LT}{2m} \qquad (4.119)$$

เมื่อ s เป็นพื้นที่ของเขตวงโคจร และถ้าเราทราบค่า s เราก็สามารถคำนวณหาค่าของคาบเวลาของการหมุนได้จากสมการนี้

4.8 แรงผ่านศูนย์กลางเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางกำลังสอง (THE CENTRAL FORCE INVERSELY PROPORTIONAL TO THE SQUARE OF THE DISTANCE)

ปัญหาสำคัญมากของการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ คือ การเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลางที่เป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางยกกำลังสองจากจุดศูนย์กลาง :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\,\hat{r} \tag{4.120}$$

และสำหรับพลังงานศักย์ คือ

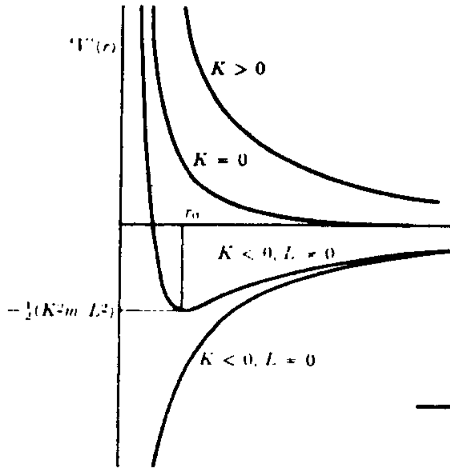
$$V(r) = \frac{K}{r} \tag{4.121}$$

ตัวอย่างของแรงในลักษณะของแรงผ่านศูนย์กลางที่กล่าวมานี้ เช่น แรงโน้มถ่วง (ตอน 2.5) ระหว่างอนุภาค 2 อนุภาคมวล m_1 และ m_2 ซึ่งมีระยะห่างกัน r โดยสมการ (4.120) ค่าของ K คือ

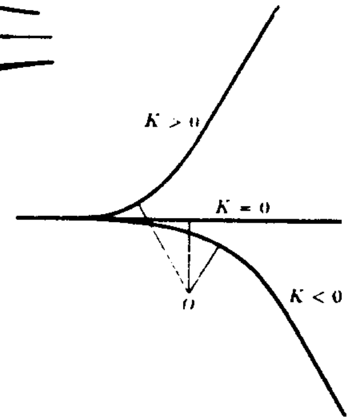
$$K = -Gm_1m_2 \tag{4.122}$$

เมื่อ $G = 6.67 \times 10^{-8}$ dyne $-g^{-2}$ – cm. K เป็นค่าลบเมื่อแรงโน้มถ่วงเป็นแรงดึงดูด. ตัวอย่างอีกแบบหนึ่งคือแรงทางไฟฟ้าระหว่างประจุ 2 ประจุ q_1 และ q_2 ที่มีระยะห่างกัน r โดยสมการ (4.120) ค่าของ K คือ

$$K = q_1\,q_2 \tag{4.123}$$



รูป 4.11 Effective potential for central inverse square law of force.



รูป 4.12 Sketch of unbounded inverse square law or'oits

การแสดงผลของทางโคจรตามธรรมชาติโดยส่วนกลับกำลังสองของแรง (ดังรูป 4.11) เป็นลักษณะการพรอทของพลังงานศักย์

$$'V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (4.124)$$

สำหรับแรงนำกลับ (repulsive force) (K > o), จะไม่มีทางโคจรการเคลื่อนที่ของ r นอกเสียกจากว่าพลังงานรวม E จะมีค่าเป็นบวก และอนุภาคี่เคลื่อนที่จาก $r = \infty$ มายังจุดกลับแล้วเคลื่อนที่สู่ตำแหน่ง ∞ อีกครั้ง. กรณีกำหนดค่าของพลังงาน E และโมเมนตัมเชิงมุม จุดกลับจะเกิดที่ตำแหน่ง r มีขนาดมากกว่า K = o (ไม่มีแรง) การเคลื่อนที่ของอนุภาคในแบบนี้จะเป็นเส้นตรง. สำหรับแรงดึงดูด (K < o) ซึ่ง $L \neq o$ การเคลื่อนที่จะไม่มีเขตจำกัด ถ้า E > o แต่ในกรณีนี้ จุดกลับจะเกิดขึ้นได้เมื่อขนาดของ r น้อยกว่า K = 0. ทางเดินของอนุภาคแสดงไว้ดังรูป 4.12. เส้นบางในรูป 4.12 แสดงให้เห็นจุดกลับโดยรัศมี r. กรณี K < o และ $-\frac{1}{2}K^2m/L^2 < E < o$, โคออดิเนต r จะออสซิลเลตระหว่างจุดกลับ 2 จุด, กรณี $E = -\frac{1}{2}K^2m/L^2$ อนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี $r_o = L^2/-Km$ การแสดงวิธีคำนวณในกรณีนี้มีในแบบฝึกหัด.

การหาค่าอินทิกรัลในสมการ (4.107), (4.108) สำหรับกฎส่วนกลับกำลังสองของแรงจะยากกว่าในทางปฏิบัติมา แต่เราทำได้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบธรรมดา ซึ่งเราเริ่มจากสมการ (4.115) ของวงโคจร ในกรณีนี้สมการ (4.115) ของวงโคจรจะเป็น

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mK}{L^2} \tag{4.125}$$

สมการ (4.125) นี้จะมีฟอร์มเป็นแบบเดียวกับการแกว่งแบบฮาร์โมนิค (ของหน่วยความถี่) เมื่อแรงคงที่ และเมื่อ θ ในที่นี้แทน t , สมการ homogeneous และการอธิบายคำตอบของสมการแบบทั่วไป คือ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \tag{4.126}$$

$$u = A\cos(\theta - \theta_o) \tag{4.127}$$

เมื่อ A และ θ_o เป็นค่าคงที่ ดังนั้นสมการ (4.125) จึงมีคำตอบที่เป็นค่าคงที่

$$u = -\frac{mK}{L^2}. \tag{4.128}$$

การอธิบายสมการแบบทั่วไปของสมการ (4.125) คือ

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_o) \tag{4.129}$$

สมการ (4.129) เป็นสมการรูปทรงกรวย (ellipse, parabola, or hypobola) ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $r = 0$. ค่าคงที่ θ_o จะปรากฏเมื่อกำหนดทางโคจรในระนาบ ส่วนค่าคงที่ A ซึ่งเป็นค่าบวกเป็นการแสดงจุดกลับของสมการการเคลื่อนที่ของ r ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + A, \qquad \frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - A. \tag{4.130}$$

ถ้า $A > -mK/L^2$ (เป็นไปได้เมื่อ $K > o$) แล้วจะมีจุดกลับเพียงจุดเดียวสำหรับ r_1 เมื่อ r ไม่มีค่าเป็นลบ, และถ้า r ไม่มีค่าเป็นบวก สำหรับค่า θ ใด ๆ แล้ว A ไม่มีทางมีค่าน้อยกว่า mK/L^2. สำหรับการกำหนดค่า E จุดกลับเป็นการอธิบายสมการ

$$'V'(r) = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E \tag{4.131}$$

ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

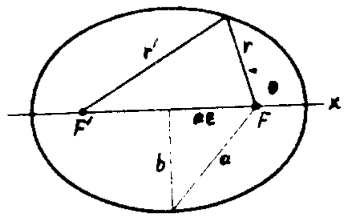
$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} \left[\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} \left[\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.132}$$

โดยการเปรียบเทียบสมการ (4.130) กับ (4.132) เราพบว่าค่าของ A ในเทอมของพลังงาน E และโมเมนตัมเชิงมุม L คือ

$$A^2 = \frac{m^2K^2}{L^4} + \frac{2m\ E}{L^2} \tag{4.133}$$

ตอนนี้วงโคจรจะปรากฏในเทอมของเงื่อนไข เริ่มต้น



รูป 4.13 Geometry of the ellipse

วงรี (ellipse) ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคแทนด้วยเส้นโค้งวงนอก นั่นคือ ผลบวกของระยะทางจากจุดตรึงทำให้ F และ F′ คงที่ ตำแหน่ง F และ F′ เรียกว่า foci ของวงรี และจากรูป 4.13 เราทราบ

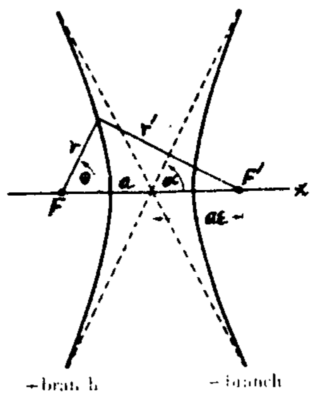
$$r' + r = 2a \qquad (4.134)$$

เมื่อ a เป็นรัศมีของเส้นผ่าศูนย์กลางส่วนที่ใหญ่ที่สุดของวงรี ในเทอมของโพลาร์โคออดิเนตที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัส F และแกน x ด้านซ้ายเป็นโฟกัส F′, จากกฎของ Cosine เราได้

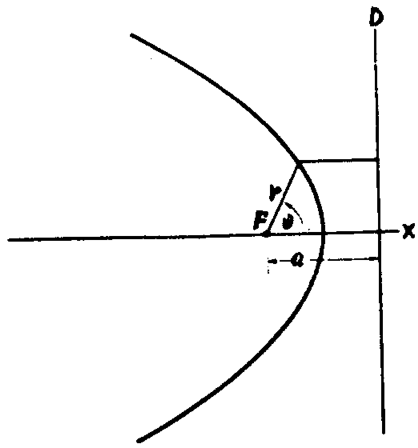
$$r'^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon\cos\theta \qquad (4.135)$$

เมื่อ a ε เป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังโฟกัส F ค่าของ ε เรียกว่า eccemtrocotu ของวงรี ถ้า ε = o ทางเดินของอนุภาคจะเป็นวงกลม แต่ถ้า ε → 1 วงรีจะเปลี่ยนเป็นรูปพาราโบลา หรือเส้นตรงส่วนหนึ่ง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าระยะทางจากโฟกัส F' กับ F มีขอบเขตจำกัดหรือไม่. จากการแทนค่า r ของสมการ (4.134) ในสมการ (4.135) เราพบว่า

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (4.136)$$



รูป 4.14 Geometry of the hypobola



รูป 4.15 Geometry of the parabola

สมการ (4.136) คือสมการของวงรีในโพลาร์โคออดิเนต ที่มีจุดกำเหนิดสำหรับโฟกัสเดียว ถ้า b เป็นรัศมีของเส้นผ่าศูนย์ส่วนที่สั้นที่สุดของวงรี จากรูป 4.13 เราได้

$$b = a(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.137}$$

พื้นที่ของวงรี สามารถหาได้จากการแทนค่าโดยตรง จากการอินทิเกรล:

$$S = \pi a b \tag{4.138}$$

ไฮเปอร์โบลาหาได้จากเส้นโค้งของทางเดินของอนุภาค นั่นคือผลต่างของระยะทางของจุดรวม (foci) ที่ตรึงไว้ 2 จุดคือ F และ F เป็นค่าคงที่ (ดูจากรูป 4.14) ซึ่งไฮเปอร์โบลาร์ทั้งสองแบบนี้หาได้จาก

$$\begin{aligned} r' - r &= 2a \quad (+\text{ branch}) \\ r' - r &= -2a \quad (-\text{ branch}) \end{aligned} \tag{4.139}$$

เราเรียกส่วนโค้งที่ล้อมรอบ F ว่าเป็นส่วนแกนบวก (ทางซ้ายมือรูป 4.14) และทางขวามือเป็นส่วนแกนลบ. สมการ (4.135) เป็นสมการของไฮเปอร์โบลาร์เช่นกัน แต่ค่า eccentricity ε มีมากกว่าหนึ่งจำนวน ดังนั้นสมการของไฮเปอร์โบลาร์ในโพลาร์โคออดิเนต คือ

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \varepsilon \cos\theta} \tag{4.140}$$

เครื่องหมายบวกในสมการ (4.140) แสดงถึง + branch ส่วนเครื่องหมายลบแสดงถึง − branch. เส้นไขปลาของไฮเปอร์โบลาร์ (ดูรูป 4.14) ทำมุม α กับแกนของ foci. เมื่อ α เป็นค่าของ θ สำหรับค่า r ที่ไม่มีขอบเขตจำกัด:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\varepsilon} \tag{4.141}$$

เมื่อพาราโบลาเป็นทางเดินเส้นโค้งของอนุภาค ดังนั้นระยะทางจากเส้นคงที่ D (directrix) เท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัส F, จากรูป 4,15 เราได้

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta} \qquad (4.142)$$

เมื่อ a เป็นระยะทางจากโฟกัส F ถึง directrix D

เราสามารถเขียนสมการรูปทรงกรวยทั้งสามแบบที่กล่าวมาแล้ว ให้อยู่ในฟอร์มมาตราฐานได้ คือ

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta \qquad (4.143)$$

เมื่อ A เป็นค่าบวก. ถ้าเรากำหนดค่าของ A และ B ดังต่อไปนี้ เราจะได้สมการในแบบต่าง ๆ คือ

B > A, ellipse,

$$B = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}; \qquad (4.144)$$

B = A, parabora

$$B = \frac{1}{a}, \quad A = \frac{1}{a}; \qquad (4.145)$$

0 < B < A, hypobola, + branch,

$$B = \frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}; \qquad (4.146)$$

$-A < B < 0$, hypobola, $-$ branch,

$$B = -\frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \qquad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}. \qquad (4.147)$$

สำหรับกรณีที่ $B < -A$ จะไม่มีทางเดินแบบเส้นโค้งของอนุภาคเกิดขึ้น.

4.9 ทางโคจรแบบวงรี (ELLIPTIC ORBITS). ปัญหาของเคปเลอร์ (THE KEPLER PROBLEM)

ตอนต้นศตวรรษที่ 17 ก่อนที่นิวตันจะค้นพบกฎการเคลื่อนที่ (The laws of motion) เคปเลอร์ได้อธิบายกฎ 3 ข้อ เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ โดยค้นคว้าต่อจากการสังเกตของ Tycho Brahe ซึ่งใจความของกฎ 3 ข้อนี้คือ

1. ดาวเคราะห์เคลื่อนที่เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดโฟกัส

2. พื้นที่ที่กวาดโดยเวกเตอร์ของรัศมี จากดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์ในเวลาเท่ากันมีพื้นที่เท่ากัน

3. คาบเวลา (period) กำลังสองของการหมุนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับรัศมีกำลังสาม.

กฎข้อที่สองแสดงให้เห็นได้โดยสมการ (4.118) และเป็นผลทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม เนื่องจากแรงที่ดวงอาทิตย์ดึงดูดดาวเคราะห์นั้นเป็นลักษณะของแรงผ่านศูนย์กลางหรือแรงสู่ศูนย์กลาง. กฎข้อแรกเราได้แสดงให้เห็นแล้วจากที่เราทราบว่าแรงดึงดูดของดวงอาทิตย์นั้นเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางยกกำลังสอง ส่วนกฎข้อสามเราทราบจากความจริงที่ว่าแรงโน้มถ่วงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลของดาวเคราะห์ ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังนี้

ในกรณีทางโคจรเป็นรูปวงรี เราสามารถหาคาบเวลาของการเคลื่อนที่ได้จากสมการ (4.119) และ (4.138) :

$$T = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi a^2 (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2 K^2 m}{2|E|^3} \qquad (4.148)$$

จาก $a = \left|\frac{K}{2E}\right|$ ดังนั้น

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \left|\frac{m}{K}\right| \qquad (4.149)$$

ในกรณีของวัตถุเล็ก ๆ มวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงดูดของแรงโน้มถ่วงที่มีมวลใหญ่มากเท่ากับ m และโดยสมการ (4.122) เราได้สมการของคาบเวลาเป็น

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{M\,G} a^3 \qquad (4.150)$$

จะเห็นว่าตัวคูณของ a^3 เป็นค่าคงที่สำหรับดาวเคราะห์ทุก ๆ ดวงนั่นคือ เรายอมรับกฎข้อสามของเคปเลอร์. สมการ (4.150) เราสามารถคำนวณหามวลของดวงอาทิตย์ได้ ถ้าเราทราบค่าของ a^3 ปัญหานี้อยู่ในแบบฝึกหัดบทที่ 2 ข้อ 11.

จะเห็นว่ากฎของเคปเลอร์ เป็นไปตามกฎของแรงตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันและกฎแรงโน้มถ่วง. ปัญหาของกฎของแรงจากกฎของเคปเลอร์และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันนี้ เป็นปัญหาพื้นฐานและสำคัญอย่างหนึ่งในประวัติศาสตร์ เพราะจากกฎที่กล่าวมานี้ทำให้นิวตันค้นพบกฎของแรงโน้มถ่วงหรือกฎของแรงดึงดูดระหว่างมวลในเวลาต่อมา. เรายอมรับว่าการเคลื่อนที่ของดวงดาวอาจคลาดเคลื่อนไปจากกฎของเคปเลอร์บ้าง แต่จากกฎพื้นฐานนี้ทำให้เราพอจะสรุปได้ว่า ดวงอาทิตย์จะหมุนอยู่กับที่ในขณะที่ดาวเคราะห์ต่าง ๆ โคจรรอบดวงอาทิตย์ สำหรับโลกเราก็มีแรงดึงดูดกับดาวเคราะห์เช่นเดียวกับดวงอาทิตย์

ดาวเนปจูน และดาวพลูโตได้ถูกค้นพบด้วยเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว กล่าวคือ วงโคจรของมันจะมีแรงดึงดูดกับดาวเคราะห์ดวงอื่น ๆ ดาวยูเรนัสได้ถูกค้นพบใน ค.ศ. 1787 แต่เราไม่สามารถอธิบายลักษณะการเบี่ยงเบนของวงโคจรของมันได้. จากการวิเคราะห์ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ของ Adam และ Levevrier ทำให้เราสามารถหาข้อมูลต่าง ๆ ของดาวยูเรนัส และคำนวณตำแหน่งของดวงดาวอื่น ๆ เช่นดาวเนปจูนได้

วงโคจรของดาวหาง ซึ่งเคลื่อนที่รอบดวงอาทิตย์จะปรากฏให้เห็นแต่ละครั้งใช้เวลานานมาก วิถีโคจรของมันจะเคลื่อนที่แบบไฮเปอร์โบลาหรือพาราโบลา มันจะเคลื่อนที่เป็นวงรีได้ก็ต่อเมื่อถูกดาวเคราะห์ดวงอื่นดึงดูดมัน เมื่อดาวหางมีแรงกระทำจากดวงดาวอื่น ๆ มันจะเคลื่อนที่ตามสมการ (4.143) แต่ก็ยังมีการเบี่ยงเบนในการเคลื่อนที่อยู่ โดยทั่วไปแรงดึงดูดระหว่างมวลไม่ว่าจะเป็นดาวหางหรือดาวเคราะห์อื่น ๆ แรงผ่านศูนย์กลาง $F(r)$ จะเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางยกกำลังสอง (r^2)

ปัญหาของอีเล็คตรอนที่เคลื่อนที่รอบนิวเคลียสก็เหมือนกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ ถ้าความเร็วของอีเล็คตรอนเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน แต่ปัจจุบันการคำนวณการเคลื่อนที่ของอีเล็คตรอนเราคำนวณจากหลักของกลศาสตร์ ควอนตัม (Quantum mechanics) ก่อนการค้นพบทฤษฎีทางกลศาสตร์ ควอนตัม Bohr ได้ทำการทดลองโดยใช้การสังเกตพฤติกรรมของอะตอม โดยสมมติว่าอีเล็คตรอนหมุนในวงโคจรที่กำหนดแน่นอน ตามแบบกลศาสตร์ของนิวตัน ปัจจุบันทฤษฎีของ Bohr ยังคงใช้อยู่เกี่ยวกับโครงสร้างของอะตอมอย่างสังเขป.

4.10 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (MOTION OF A PARTICLE IN AN ELECTROMAGNETIC FIELD)

การหาการเคลื่อนที่ของประจุของอนุภาคภายใต้การกำหนดค่าของแรงทางแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นปัญหาในทางกลศาสตร์เช่นกัน. แรงทางไฟฟ้าที่มีประจุ q ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่ง r คือ

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r}) \tag{4.151}$$

เมื่อ $E(\vec{r})$ เป็นความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ โดยทั่วไปความเข้มของสนามไฟฟ้าจะเป็นฟังก์ชั่นของเวลาเมื่อตำแหน่งของอนุภาคหรือประจุอยู่ในสเปซ แรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็กที่กระทำต่อประจุของอนุภาคที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ นั้น ขึ้นอยู่กับความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาค ซึ่งจะถูกกำหนดให้อยู่ในเทอมของการเหนี่ยวนำทางแม่เหล็ก $\vec{B}(\vec{r})$ โดยสมการ

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{4.152}$$

เมื่อ c คือความเร็วของแสง $= 3 \times 10^8$ ซ.ม/วินาที และทุกปริมาณจะอยู่ใน Gaussian units เช่น ประจุอยู่ในหน่วย electrostatic, B อยู่ในหน่วยของแม่เหล็กไฟฟ้า (Gauss) ส่วน $\vec{v}$ และ $\vec{F}$ อยู่ในหน่วยของ cgs. แต่ถ้าหน่วยที่ใช้เป็นหน่วย mks สมการจะเป็นดังนี้

$$F = q \vec{v} \times \vec{B}(r) \tag{4.153}$$

สมการ (4.151) นั้นจะใช้กับหน่วย Gaussian หรือหน่วย mks ก็ได้ ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะสมการ (4.152) ซึ่งปริมาณต่าง ๆ ใช้หน่วยเป็น Gaussian เท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามในตอนสุดท้ายเราก็สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในหน่วยของ mks ได้ โดยการกำจัดค่า c ออกไป. แรงรวมของแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำต่ออนุภาคเนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้า E และการเหนี่ยวนำของแม่เหล็ก B คือ

$$F = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \tag{4.154}$$

ถ้าประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่เข้าไปใกล้ขั้วเหนือของแท่งแม่เหล็กแล้ว แท่งแม่เหล็กก็จะส่งแรงมากระทำต่อประจุนั้น ซึ่งแรงนั้นจะมีค่าเป็นไปตามสมการ (4.152) และโดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ข้อสามของนิวตัน ประจุไฟฟ้าก็จะส่งแรงที่มีขนาดเท่ากันมากระทำต่อแท่งแม่เหล็กในทิศทางตรงกันข้าม

เช่นกัน ความจริงแล้วกรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ก็คือเมื่อความเร็วของอนุภาคหรือประจุไฟฟ้าต้องมีค่าน้อยกว่าความเร็วของแสง และถ้าเราสามารถหาค่าของสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเคลื่อนที่ของประจุได้ เราก็สามารถจะคำนวณหาค่าของแรงที่กระทำต่อแท่งแม่เหล็กได้. เนื่องจากการเหนี่ยวนำของแท่งแม่เหล็ก B มีทิศชี้ออกไปในแนวรัศมีจากขั้วแม่เหล็กและแรง F ก็ตั้งฉากกับ B ดังนั้น แรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าและแรงที่กระทำต่อขั้วแม่เหล็กจะมีทิศชี้ไปตามเส้นเชื่อมระหว่างประจุและขั้วแม่เหล็ก เหมือนกับกรณีของแรงผ่านศูนย์กลาง. กฎข้อที่สามของนิวตันนั้นในบางกรณีจะกล่าวถึงในลักษณะของความแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกริยาและแรงปฏิกริยานั้นมันมีทั้งกรณีที่เท่ากันซึ่งอยู่ในทิศทางตรงกันข้ามและทั้งกรณีที่อยู่ในทิศทางของเส้นเชื่อมโยงระหว่างอนุภาคที่เกิดปฏิกริยากันด้วย. สำหรับแรงของแม่เหล็กนั้น ถ้าพิจารณาเพียงแรงที่มีขนาดอ่อน ๆ เราก็อาจไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงทิศทางของแรงทั้งสองแรงได้ นอกจากว่ามันจะอยู่ในทิศทางที่ตรงกันข้ามกัน ความจริงข้อนี้ไม่ใช่เป็นแต่เพียงกรณีของแรงกระทำระหว่างแท่งแม่เหล็กกับประจุที่เคลื่อนที่เท่านั้น แต่จะเป็นได้สำหรับแรงของแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากประจุที่เคลื่อนที่กระทำต่อประจุอื่น ๆ ด้วย.

ถ้าสนามแม่เหล็กมีค่าคงที่เมื่อเทียบกับเวลาแล้ว ความเข้มของสนามไฟฟ้าจะสามารถแสดงให้อยู่ในเทอมที่สอดคล้องกันได้ดังนี้

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{4.155}$$

การพิสูจน์ข้อความนี้มีอยู่ในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า จึงไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงในที่นี้. อย่างไรก็ตามเราจะสังเกตเห็นได้ว่าในกรณีไฟฟ้าสถิตย์และสนามแม่เหล็กนั้นแรงทางไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนอนุภาคที่มีประจุจะเป็นแรงประเภทแรงอนุรักษ์ เราสามารถอธิบายศักย์ทางไฟฟ้าที่เกิดขึ้นได้ คือ

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{r_s}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{4.156}$$

โดยที่

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{4.157}$$

เมื่อ E เป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยประจุ ดังนั้น ϕ จึงเป็นพลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยประจุ ซึ่งเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับแรงทางไฟฟ้าดังสมการ

$$V(\vec{r}) = q\,\phi(\vec{r}) \qquad (4.158)$$

นอกจากนั้น เมื่อแรงทางแม่เหล็กมีทิศทางตั้งได้ฉากกับความเร็ว มันจึงไม่สามารถทำให้เกิดงานขึ้นได้บนอนุภาคที่มีประจุ และจากหลักการอนุรักษ์พลังงานสำหรับอนุภาคที่อยู่ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสถิตย์จะได้ว่า

$$T + q\phi = E \qquad (4.159)$$

เมื่อ E มีค่าคงที่

ผลที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงมากมายของปัญหาต่าง ๆ ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ จะนำไปสู่การพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าทั่ว ๆ ไป. ตามปกติแล้ววิธีการพิเศษในทางปฏิบัตินั้นเราจะต้องใช้เครื่องมือเฉพาะที่สอดคล้องกับปัญหานั้น ๆ ด้วย. ต่อไปเราจะพิจารณาถึงปัญหาในกรณีพิเศษ 2กรณีซึ่งจะสนใจถึงผลที่ได้รับกับวิธีการที่ทำให้เกิดผลอันนั้น

ประการแรกที่เราพิจารณาคือการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่มีประจุ q ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอ และเลือกใช้แกน z เป็นทิศทางของสนามแม่เหล็ก ดังนั้น

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B\,\hat{k} \qquad (4.160)$$

เมื่อ B เป็นค่าคงที่, โดยอาศัยสมการ (4.152) จะได้สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\,\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\,\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0 \qquad (4.161)$$

จะเห็นว่าสมการสุดท้ายของสมการ (4.161) นั้น องค์ประกอบของความเร็วในทิศทางของแกน z นั้นมีค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อเราพิจารณากรณี $v_z = 0$ การเคลื่อนที่ทั้งหมดอยู่ในระนาบ xy เท่านั้น ส่วนสองสมการแรกนั้นเราสามารถที่จะแก้สมการหาค่าได้ไม่ยากนัก แต่เราจะหลีกเลี่ยงการแก้สมการทั้งสองแบบตรงไปตรงมา โดยเราจะใช้วิธีของอินทิกรัลพลังงานแทน ซึ่งเราได้ว่า

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = E \tag{4.162}$$

ส่วนแรงกำหนดโดย

$$\vec{F} = \frac{qB}{c}\,\vec{v} \times \hat{k}, \tag{4.163}$$

$$F = \frac{q\,B\,v}{c} \tag{4.164}$$

แรงนี้จะมีค่าคงที่และมีทิศทางตั้งฉากกับความเร็ว อนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ v และความเร่งคงที่ a ในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมีเท่ากับ r คือ

$$a = r\,\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m} \tag{4.165}$$

เมื่อเราแทนค่า F จากสมการ (4.164) และแก้สมการหาค่า r เราได้

$$r = \frac{c\,m\,v}{q\,B} \tag{4.166}$$

นั่นคือ ผลคูณ Br จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าโมเมนตัม mv และเป็นสัดส่วนผกผันกับค่าของประจุ q

ผลที่ได้นี้สามารถนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในทางปฏิบัติได้ เช่น ถ้านำ buble chamber ไปวางไว้ในสนามแม่เหล็กที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอ ก็จะสามารถวัดค่าหาโมเมนตัมของอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าได้โดยการวัดค่ารัศมีของเส้นโค้งที่เกิดจากทางเดินของมัน หลักการอันเดียวกันนี้ยังได้นำไปใช้ในเครื่องมือ beta-ray spectrometer ซึ่งใช้สำหรับวัดค่าโมเมนตัมของอีเล็คตรอน โดยอาศัยเส้นโค้งที่เกิดจากทางเดินของมันในสนามแม่เหล็ก ในเครื่องมือ mass spectrometer อนุภาคจะถูกเร่งจนกระทั่งสู่ค่าความแตกต่างของศักย์ทางไฟฟ้า ดังนั้นจากสมการ (4.159) เราได้พลังงานจลน์ของมันมีค่าเป็น

$$\frac{1}{2} mv^2 = q\ (\phi_0 - \phi_1) \tag{4.167}$$

แล้วพลังงานจึงจะถูกส่งผ่านเข้าไปในสนามแม่เหล็กที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอ ถ้าเราทราบค่าของ q และวัดค่าของ r,B และ $(\phi_0 - \phi_1)$ ได้ เราก็จะสามารถกำจัดค่าของ v ในสมการ (4.166) และ (4.167) ได้ และแก้สมการหาค่ามวลได้เป็น

$$m = \frac{q\ B^2\ r^2}{2c^2(\phi_0 - \phi_1)} \tag{4.168}$$

จากความคิดพื้นฐานอันนี้ ก็ยังมีความผันแปรต่าง ๆ อีกมากมาย ในการทดลองของ J.J. Thomson เพื่อที่จะแสดงให้เห็นว่าอีเล็คตรอนนั้นมีอยู่จริง ๆ ก็โดยอาศัยสิ่งต่าง ๆ ที่มีอยู่แล้วนั่นเอง Thomson ก็สามารถแสดงให้เห็นถึงทางเดินที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของ Cathod ray ซึ่งเกิดขึ้นตามหลังอนุภาคที่มีประจุนั่นเอง โดยที่ทั้งหมดมีอัตราส่วน g/m เหมือนกัน

ในเครื่องมือ cyclotron อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้า จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมในสนามแม่เหล็กที่มีค่าคงที่สม่ำเสมอ และจะได้รับพลังงานเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าต่อรอบที่เกิดจากการเคลื่อนที่โดยผ่าน

สนามไฟฟ้าสลับ รัศมี r ของวงกลมนั้นจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งมีค่ามากที่สุด ซึ่งที่ค่ารัศมีนี้อนุภาคจะหลุดออกมาใน beam ของพลังงานที่จำกัดแน่นอน ซึ่งพิจารณาได้จากสมการ (4.166), ความถี่ ν ของสนามไฟฟ้าสลับจะต้องมีค่าเดียวกันกับค่าความถี่ ν ของการหมุนต่อรอบของอนุภาค ซึ่งหาได้จาก

$$v = 2\pi r\nu \tag{4.169}$$

จากการรวมสมการ (4.166) กับสมการ (4.169) นี้ เราได้

$$\nu = \frac{qB}{2\pi mc} \tag{4.170}$$

เนื่องจาก B มีค่าคงที่ ดังนั้นค่าของ ν จึงไม่ขึ้นอยู่กับค่าของ r และนี่เองเป็นหลักพื้นฐานเบื้องต้นที่นำไปใช้ควบคุมการทำงานของ

ส่วนใน betatron นั้น อีเล็คตรอนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม และสนามแม่เหล็กซึ่งอยู่ภายในวงกลมนั้นจะถูกทำให้มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เนื่องจากค่าของ B เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเทียบกับเวลา ดังนั้นค่าของ $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ จึงไม่เป็นศูนย์, การเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์แม่เหล็กจะเหนี่ยวนำให้เกิดความต่างศักย์ไฟฟ้าขึ้นรอบ ๆ วงกลม ดังนั้นปริมาณงานสุทธิที่กระทำบนอีเล็คตรอนโดยสนามไฟฟ้าจะเกิดขึ้นตามการเคลื่อนที่รอบวงกลม ดังนั้นเครื่องมือ betatron จึงถูกออกแบบสร้างเพื่อทำให้การเพิ่มขึ้นของ B ตามวงโคจรของอีเล็คตรอนจะเป็นสัดส่วนกับการเพิ่มขึ้นของค่า mv นั่นคือค่าของ r จะคงที่เสมอ

ประการสุดท้าย เราจะพิจารณาถึงอนุภาคมวล m ที่มีประจุ q เคลื่อนที่ไปในสนามไฟฟ้าที่มีความเข้มคงที่สม่ำเสมอ $\vec{E}$ และสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ $\vec{B}$ เช่นเดียวกับในประการแรก เราจะกำหนดให้แกน z เป็นทิศทางของ $\vec{B}$ และเลือกพิจารณาแกน y ด้วย ดังนั้น $\vec{E}$ จะมีทิศทางขนานไปกับระนาบ yz นั่นคือ

$$\vec{B} = B\hat{k}, \quad \vec{E} = E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \tag{4.171}$$

เมื่อ B, E_y, E_z เป็นค่าคงที่, จากสมการ (4.154) สมการการเคลื่อนที่ในกรณีนี้ คือ

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}, \tag{4.172}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x} + qE_y, \tag{4.173}$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \tag{4.174}$$

การเคลื่อนที่ในแนวแกน z จะถูกเร่งอย่างสม่ำเสมอ ตามสมการ

$$z = z_o + \dot{z}_o t + \tfrac{1}{2}\frac{qE_z}{m}t^2. \tag{4.175}$$

เพื่อที่จะแก้สมการของ x และ y เราดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (4.172) แล้วแทนค่าลงในสมการ (4.173) เพื่อการกำจัดค่า $\ddot{y}$ ออกไป เราได้

$$\frac{m^2c}{qB}\dddot{x} = -\frac{qB}{c}\dot{x} + qE_y \tag{4.176}$$

โดยการกำหนดให้

$$\omega = \frac{qB}{mc}, \tag{4.177}$$

$$a = \frac{q\,E_y}{m}\,, \tag{4.178}$$

เราสามารถเขียนสมการ (4.176) ใหม่ ในฟอร์มของ

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} + \omega^2\,\dot{x} = a\omega. \tag{4.179}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (4.179) นี้มีลักษณะเหมือนกับสามการของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค ออสซิลเลเตอร์ ซึ่งมีความถี่เชิงมุม ω และมีค่าขึ้นอยู่กับแรงภายนอกที่คงที่ aω เว้นแต่ว่า x ปรากฏอยู่ในเทอมของระยะพิกัด. เราอธิบายสมการของการเคลื่อนที่ในกรณีนี้ได้ คือ

$$\dot{x} = \frac{a}{\omega} + A_x \cos\,(\omega t + \theta_x), \tag{4.180}$$

เมื่อ A_x และ θ_x เป็นค่าคงที่ โดยการกำจัดค่า $\ddot{x}$ จากสมการ (4.172) ด้วยวิธีเดียวกับที่ใช้มาแล้ว เราจะได้สมการของ $\dot{y}$ เป็น

$$\dot{y} = A_y \cos\,(\omega t + \theta_y) \tag{4.181}$$

เราหาค่า x และ y โดยการอินทิเกรต สมการ (4.180) และ (4.181) ได้เป็น

$$x = C_x + \frac{at}{\omega} + \frac{A_x}{\omega}\sin\,(\omega t + \theta_x), \tag{4.182}$$

$$y = C_y + \frac{A_y}{\omega}\sin\,(\omega t + \theta_y)\,. \tag{4.183}$$

เมื่อมาถึงตอนนี้ก็จะมีข้อยุ่งยากเกิดขึ้น กล่าวคือ เรามีค่าคงที่ที่ต้องการทราบค่าถึง 6 ค่าด้วยกันคือ A_x, A_y, θ_x, θ_y, C_x และ C_y แต่จริง ๆ แล้วเราถือว่ามีอยู่เพียง 4 ค่าเท่านั้น คือ x_o, y_o, $\dot{x}_o$, และ $\dot{y}_o$ ที่สามารถนำไปหาค่าคงที่เหล่านั้นได้. การที่เกิดเป็นปัญหายุ่งยาก เนื่องจากว่าเราได้รากของสมการ ตามสมการ (4.182) และ (4.183) จากการดิฟเฟอเรนชิเอทครั้งแรก ซึ่งการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการนั้นจะทำให้เกิดรากใหม่ของสมการขึ้น ซึ่งจะไม่สอดคล้องกับสมการเริ่มแรก. ลองพิจารณาดูจากตัวอย่างง่าย ๆ ดังนี้ สมมติว่าสมการเริ่มแรกของเราเป็น

$$x = 3$$

เมื่อเราดิฟเฟอเรนชิเอท สมการนี้ได้สมการใหม่ เป็น

$$\dot{x} = 0$$

ซึ่งราก (ค่าคงที่) ของสมการใหม่ที่ได้ คือ

$$x = c$$

เราจะเห็นว่ามันมีเพียงค่าเฉพาะเพียงค่าเดียวเท่านั้น สำหรับค่าคงที่ c ที่จะสอดคล้องกับสมการเริ่มแรกของเรา. ถ้าเราแทนค่าสมการ (4.182), (4.183) หรือสมการ (4.180), (4.181) ก็ได้ ลงในสมการเริ่มแรก (4.172) และ (4.173) โดยใช้สมการ (4.177) และ (4.178) ช่วย เราจะได้ว่า

$$-\frac{qB}{c} A_x \sin(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y), \qquad (4.184)$$

$$-\frac{qB}{c} A_y \sin(\omega t + \theta_y) = -\frac{qB}{c} A_x \cos(\omega t + \theta_x). \qquad (4.185)$$

สมการ (4.184) และ (4.185) สามารถหาค่าที่ต้องการได้ ถ้าเราเลือกค่าของ A_x, A_y, θ_x และ θ_y ให้เหมาะสม โดยเราจะเลือกให้

$$A_x = A_y \tag{4.186}$$

$$\sin(\omega t + \theta_x) = -\cos(\omega t + \theta_y), \tag{4.187}$$

$$\cos(\omega t + \theta_x) = \sin(\omega t + \theta_y). \tag{4.188}$$

สองสมการสุดท้ายจะเป็นไปได้ ถ้า

$$\theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2} \tag{4.189}$$

และถ้าเรากำหนดให้

$$A_x = A_y = \omega A, \tag{4.190}$$

$$\theta_x = \theta, \tag{4.191}$$

$$\theta_y = \theta + \frac{\pi}{2} \tag{4.192}$$

ดังนั้น สมการ (4.182) และ (4.183) ก็จะกลายเป็น

$$x = c_x + A\sin(\omega t + \theta) + \frac{at}{\omega} \tag{4.193}$$

$$y = c_y + A\sin(\omega t + \theta). \tag{4.194}$$

ในตอนนี้จะเห็นว่ามีค่าคงที่ที่จะต้องพิจารณาเหลือเพียง 4 ค่าเท่านั้น คือ A, Θ, C_x และ C_y ซึ่งก็จะพิจารณาได้โดยการใช้ค่าเริ่มแรก x_o, y_o, $\dot{x}_o$ และ $\dot{y}_o$. สำหรับการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ก็สามารถหาได้จากสมการ (4.175) ในกรณีที่ $E_y = 0$ การเคลื่อนที่ในระนาบ xy ก็จะอยู่ในลักษณะที่เป็นวงกลมมีรัศมี A และความเร็วเชิงมุม ω อยู่ที่ตำแหน่ง (c_x, c_y) ซึ่งการเคลื่อนที่แบบนี้เราได้พิจารณามาแล้ว ผลที่เกิดขึ้นเนื่องจาก E_y ก็คือ เมื่อรวมเข้ากับการเคลื่อนที่แบบวงกลมอย่างเอกรูป มันก็จะออสซิลเลตอย่างสม่ำเสมอในทิศทาง x เท่านั้น. ผลที่เกิดจากการเคลื่อนที่ในระนาบ xy จึงเป็นทางเดินรูป Cycloid ซึ่งจะมีลักษณะเป็น loop, cup หรือ ripple (ดูรูป 4.16) เกิดขึ้นนั้น ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขในการเริ่มต้นครั้งแรกว่าเป็นอย่างไร รวมทั้งขนาดของ E_y ด้วย ปัญหานี้เองนำไปสู่การออกแบบสร้างเครื่องมือที่เรียกว่า magnetron. ในการแกว่งนั้น ความเร็วจะมีค่าเป็น

$$v_d = \frac{a}{\omega} = E_y c/B$$

หรือ

$$\vec{v}_d = c\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{B^2} \tag{4.195}$$

กระแสความเร็ว (drift velocity) ของอนุภาคที่มีประจุรวมของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กนี้จะเป็นหลักการพื้นฐานเบื้องต้นที่มีความสำคัญมากในทฤษฎีของพลาสม่า.

<u>รูป 4.16</u> orbits in xy-plane of charged particle subject to a magnetic field in the z-direction and on electricfield in the y-direction

แบบฝึกหัดบทที่ 4

4.1. A particle moves around a semicircle of radius R, from one end A of a diameter to the other B. It is attracted toward its starting point A by a force proportional to its distance from A. When the particle is at B, the force toward A is F_o. Calculate the work done against this force when the particle moves around the semicircle from A to B.

4.2. A particle is acted on by a force whose components are

$$F_x = ax^3 + bxy^2 + cz,$$

$$F_y = ay^3 + bx^2y,$$

$$F_z = cx.$$

Calculate the work done by this force when the particle moves along a straight line from the origin to the point (x_o, y_o, z_o)

4.3. A particle of mass m moves according to the equations

$$x = x_o + at^2,$$

$$y = bt^3,$$

$$z = ct.$$

Find the angular momentum L at any time t. Find the force F and from it the torque N acting on the particle. Verify that the angular momentum throrem is satisfied.

4.4. A particle of mass m moves with constant speed v around a circle of radius r, staring at t = 0 from a point P on the circle. Find the angular momentum about the point P at any time t, the force, and the torque about P, and verify that the angular momentum theorem is satisfied.

4.5. A moving particle of mass m is located by spherical coordinates $r(t)$, $O(t)$, $\psi(t)$. The force acting on it has spherical components F_r, F_θ, F_ψ. Calculate the spherical components of the angular momentum vector and of the torque vector about the origin, and verify by direct calculation that the equation

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

follows from Newton's equation of motion.

4.6. Give a suitable definition of the angular momentum of a particle about an axis in space. Taking the specified axis as the z-axis, express the angular momentum in terms of cylindrical coordinates. If the force acting on the particle has cylindrical components F_z, F_p, F_ψ, prove that the time rate of change of angular momentum about the z-axis is equal to the torque about that axis.

4.7. A projectile is fired from the origin with initial velocity $v_o = (v_{xo}, v_{yo}, v_{zo})$. The wind velocity is $v_w = wy$. Solve the equations of motion (4.70) for x, y, z as functions of t. Find the point x_1, y_1 at which the projectile will return to the horizontal plane, keeping only first-order terms in b. Show that if air resistance and wind velocity are neglected in aiming the gun, air resistance alone will cause the projectile to fall short of its target a fraction $4bv_{zo}/3mg$ of the target distance, and that the wind causes an additional miss in the y-coordinate of amount $2bwv_{zo}^2/(mg^2)$.

4.8. Find the maximum height z_{mzx} reached by a projectile whose equation of motion is Eq. (4.58). Expand your result in a power series in b, keeping terms in z_{max} up to first order in b, and cheek the lowest order term against Eq. (4.56).

4.9. A projectile is to be fired from the origin in the xz-plane (z-axis vertical) with muzzle velocity v_o to hit a target at the point $x = x_o$, $z = o$. (a) Neglecting air resistance, find the correct angle of elevation of the gun. Show that, in general, there are two such angles unless the target is at or beyoun the maximum range.
(b) Find the first-order correction to the angle of elevation due to air resistance.

4.10. Show that the forces in Problems 1 and 2 are conservative, find the potential energy, and use it to find the work done in each case.

4.11. Determine which of the following forces are conservative, and find the potential energy for those which are:

a) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2, \quad F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y, \quad F_z = 18abxz^2y.$

b) $F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2, \quad F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y, \quad F_z = 6abxyz^2.$

c) $\vec{F} = \hat{x}F_x(X) + \hat{y}F_y(Y) + \hat{z}F_z(Z).$

4.12. Determine the potential energy for each of the following forces which is conservative:

a) $F_x = 2ax(z^3 + y^3), \quad F_y = 2ay(z^3 + y^3) + 3ay^2(x^2 + y^2),$

$F_z = 3az^2(x^2 + y^2).$

b) $F_p = ap^2 \cos \psi, \quad F_\psi = ap^2 \sin \psi, \quad F_z = 2az^2.$

c) $F_r = -2ar \sin 0 \cos \psi, \quad F_o = -ar \cos 0 \cos \psi,$

$F_\psi = ar \sin 0 \sin \psi.$

4.13. Determine the potential energy for each of the following force which is conservative:

a) $F_x = axe^{-R}$, $F_y = bye^{-R}$, $F_z = cze^{-R}$, where $R = ax^2 + by^2 + cz^2$.

b) $\vec{F} = \vec{A}f(\vec{A} \cdot \vec{r})$, where $\vec{A}$ is a constant vector and $f(s)$ is any suitable function of $s = \vec{A} \cdot \vec{r}$.

c) $\vec{F} = (\vec{r} \times \vec{A})\, f(\vec{A} \cdot \vec{r})$.

4.14. A particle is attracted toward the z-axis by a force $\vec{F}$ proportional to the square of its distance from the xy-plane and inversely proportional to its distance from the z-axis. Add an additional force perpendicular to $\vec{F}$ in such a way as to make the total force conservative, and find the potential energy. Be sure to write expressions for the forces and potential energy which are dimensionally consistent.

4.15. Show that $\vec{F} = \hat{r}F(\hat{r})$ is a conservative force by showing by direct calculation that the integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

along any path between $\vec{r}_1$ and $\vec{r}_2$ depends only on r_1 and r_2. [Hint: Express $\vec{F}$ and $d\vec{r}$ in spherical coordinates.]

4.16. Find the components of force for the following potential-energy functions:

a) $$V = axy^2z^3.$$

b) $$V = \tfrac{1}{2} kr^2.$$

c) $$V = \tfrac{1}{2} k_x X^2 + \tfrac{1}{2} k_y Y^2 + \tfrac{1}{2} k_z Z^2.$$

4.17. Find the force on the electron in the hydrogen molecule ion for which the potential is

$$V = \frac{e^2 \; e^2}{r_1 \; r_2}$$

where r_1 is the distance from the electron to the point $y = z = 0$, $x = -a$, and r_2 is the distance from the electron to the point $y = z = 0$, $x = a$.

4.18. Find the frequency of small radial oscillations about steady circular motion for the effective potential given by Eq. (4.124) for an attractive inverse square law force, and show that it is equal to the frequency of revolution.

4.19. The potential energy for an isotropic harmonic oscillator is

$$V = \tfrac{1}{2} kr^2.$$

Plot the effective potential energy for the r-motion when a particle of mass m moves with this potential energy and with angular momentum L about the origin. Discuss the types of motion that are possible, giving as complete a description as is possible without carrying out the solution. Find the frequency of revolution for circular motion and the frequency of small radial oscillations about this circular motion. Hence describe the nature of the orbits which differ slightly from circular orbits.

4.20. A particle of mass m moves under the action of a central force whose potential is

$$V(r) = Kr^4, \quad K > 0.$$

For what energy and angular momentum will the orbit be a circle of radius a about the origin? What is the period of small radial oscillations about r = a?

4.21. According to Yukawa's theory of nuclear forces, the attractive force between a neutron and a proton has the potential

$$V(r) = \frac{Ke^{-ar}}{r}, \quad K < 0.$$

a) Find the force, and compare it with an inverse square law of force.

b) Discuss the types of motion which can occur if a particle of mass m moves under such a force.

c) Discuss how the motions will be expected to differ from the corresponding types of motion for an inverse square law of force.

d) Find L and E for motion in a circle of radius a.

e) Find the period of circular motion and the period of small radial oscillations.

f) Show that the nearly circular orbits are almost closed when a is very small.

4.22. Solve the orbital equation (4.115) for the case $F = 0$. Show that your solution agrees with Newton's first law.

It will be shown in Chapter 6 (Problem 7) that the effect of a uniform distribution of dust of density p about the sun is to add to the gravitational attraction of the sun on a planet of mass m an additional attractive central force

$$F = -mkr,$$

where

$$k = \frac{4¶}{3} pG.$$

a) If the mass of the sun is M, find the angular velocity of revolu tion of the planet in a circular orbit of radius r_o, and find the angular frequency of small radial oscillations. Hence show that if F is much less than the attraction due to the sun, a nearly circular orbit will be approximately an ellipse whose major axis precesses slowly with angular velocity

$$\omega_p = 2¶p \left(\frac{r_o^3 G}{M}\right)^{1/2}$$

b) Does the axis precess in the same or in the opposite direction to the orbital angular velocity? Look up M and the radius of the orbit of Mercury, and calculate the density of dust required to cause a precession of 41 seconds of are per century.

4.23. (a) Discuss the types of motion that can occur for a central force

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$$

Assume that $K > 0$, and consider both signs for K'.

(b) Solve the orbital equation, and show that the bounded orbits have the form (if $L^2 > -mK$)

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos x\theta}$$

(c) Show that this is a precessing ellipse, determine the angular velocity of precession, and state whether the precession is in the same or in the opposite direction to the orbital angular velocity.

4.24. a) Discuss by the method of the effective potential the types of motion to be expected for an attractive central force inversely proportional to the cube of the radius:

$$F(r) = -\frac{K}{r^3} \qquad K > 0.$$

b) Find the ranges of energy and angular momentum for each type of motion.

c) Solve the orbital equation (4.115) and show that the solution is one of the forms:

$$\frac{1}{r} = A \cos\left[\beta(\theta - \theta_o)\right]. \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r} = A \cos\left[\beta(\theta - \theta_o)\right] \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r} = A \sinh \left[\beta(\theta - \theta_o) \right] \tag{3}$$

$$\frac{1}{r} = A(\theta - \theta_o). \tag{4}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_o} e^{\pm\beta\theta} \tag{5}$$

d) For what values of L and E does each of the above types of motion occur? Express the constants A and β in terms of E and L for each case.

4.25. Explorer I had a perigee 360 km and an apogee 2,549 km above the earth's surface. Find its distance above the earth's surface when it passed over a point 90° around the earth from its perigee.

4.26. Sputnik I had a perigee (point of closest approach to the earth) 227 km above the earth's surface, at which point its speed was 28,710 km/hr. Find its apogee (maximum) distance from the earth's surface and its period of revolution. (Assume the earth is a sphere, and neglect air resistance. You need only look up g and the earth's radius to do this problem.)

4.27. Mariner 4 left the earth on an orbit whose perihelion distance from the sun was approximately the distance of the earth (1.49×10^8 km), and whose aphelion distance was approximately the distance of Mars from the sun (2.2×10^8 km). With what velocity did it leave relative to the earth? With what velocity must it leave the earth (relative to the earth) in order to escape altogether from the sun's gravita tional pull? (You need no further data to answer this problem except the length of the year, if you assume the earth moves in a circle.

4.28. Mars has a perihelion (closest) distance from the sun of 206 x 10^8 km, and an aphelion (maximum) distance of 2,485 x 10^8 km. Assume that the earth moves in the same plane in a circle of radius 1.49 x 10^8 km with a period of one year. From this data alone, find the speed of Mars at perihelion. Assume that a Mariner space probe is launched so that its perihelion is at the earth's orbit and its aphelion at the perihelion of Mars. Find the velocity of the Mariner relative to Mars at the point where they meet. Which has the higher velocity? Which has the higher average angular velocity during the period of the flight?

4.29 Two planets move in the same plane in circles ofradii $r_1 - r_2$ about the sun. A space probe is to be launched from planet 1 with velocity v_1 relative to the planet, so as to reach the orbit of planet 2. (The velocity v_1 is the relative velocity after the probe has escaped from the gravitational field of the planet.) Show that v_1 is a minimum for an elliptical orbit whose perihelion and aphelion are r_1 and r_2. In that case, find v_1, and the relative velocity v_2 between the space probe and planet 2 if the probe arrives at radius r_2 at the proper time to intercept planet 2. Express your results in terms of r_1,r_2 and the length of the year Y_1 of planet 1. Look up the appro peiate values of r_1 and r_2, and estimate v_1 for trips to Venus and

Mars from the earth.

4.30. A comet is observed a distance of 1.00×10^8 km from the sun, traveling toward the sun with a velocity of 51.6 km per second at an angle of 45° with the radius from the sun. Work out an equation for the orbit of the comet in polar coordinates with origin at the sun and x-axis through the observed position of the comet. (The mass of the sun is 2.00×10^{30} kg.)

4.31. A satellite moves around the earth in an obit which passes across the plles. The time at which it crosses each parallel of latitude is measured so that the function $\theta(t)$ is known. Show how to find the perigee, the semimajor axis, and the eccentricity of its orbit in terms of $\theta(t)$, and the value of g at the surface of the earth. Assume the earth is a sphere of radius R.

4.32. A particle of mass m moves in an elliptical orbit of major axis 2a, eccentricity ε, in such a way that the radius to the particle from the center of the ellipse sweeps out area at a constant rate

$$\frac{dS}{dt} = C,$$

and with period τ independent of a and ε. (a) Write out the equation of the ellipse in polar coordinates with origin at the center of the ellipse. (b) Show that the force on the particle is a central force, and find F(r) in terms of m,τ.

4.33. Solve Problem 34 for the case $\omega = qB_o/mc$.

4.34. A particle of charge q, mass m at rest in a constant, uniform magnetic field $\vec{B} = B_o\hat{z}$ is subject, beginning at $t = 0$, to an oscillating electric field

$$\vec{E} = E_o\hat{x} \sin \omega t.$$

Find its motion.

4.35. A particle of charge q in a cylindrical magnetron moves in a uniform magnetic field

$$\vec{B} = B\hat{z},$$

and an electric field, directed radially outward or inward from a central wire along the z-axis,

$$\vec{E} = \frac{a}{p}\hat{p},$$

where p is the distance from the z-axis, and $\hat{p}$ is a unit vector directed radially outward from the z-axis. The constants a and B may be either positive of negative.

a) Set up the equations of motion in cylindrical coordinates.

b) Show that the quantity

$$mp^2\dot{\psi} + \frac{qB}{2c}p^2 = K$$

is a constant of the motion.

c) Using this result, give a qualitative discussion, based on the energy integral, of the types of motion that can occur. Condider all cases, including all values of a,B,K, and E.

d) Under what conditions can circular motion about the axis occur?

e) What is the frequency of small radial oscillations about this circular motion?

4.36. A charged particle moves in a constant, uniform electric and magnetic field. Show that if we introduce a new variable

$$\vec{r} = \vec{r} \;\; \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \;\; ct,$$

the equation of motion for $\vec{r}\,'$ is the same as that for $\vec{r}$ except that the component of $\vec{E}$ perperdicular to $\vec{B}$ has been eliminated.