บทที่ 3
การเคลื่อนที่ของอนุภาคในมิติเดียว
(MOTION OF A PARTICLE IN ONE DIMENSION)

ในบทนี้จะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงของอนุภาคมวล m โดยมีแรง F เป็นแรงที่กระทำต่ออนุภาคนี้ เราใช้แกน x เป็นแนวการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวราบ, และแกน y เป็นแนวการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวดิ่ง จะเห็นว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่กล่าวมานี้เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคในมิติเดียวนั่นเอง.

3.1 ทฤษฎีโมเมนตัมและทฤษฎีพลังงาน (MOMENTUM AND ENERGY THEOREMS)

การเคลื่อนที่ของอนุภาคในบทนี้เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน กล่าวคือ

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.1}$$

ก่อนจะพิจารณาสมการ (3.1) เราควรทราบถึงกระบวนการบางอย่างที่ใช้สำหรับอธิบายปัญหาทางกลศาสตร์ และการพิสูจน์ทฤษฎีพื้นฐานของการเคลื่อนที่ในมิติเดียว. โมเมนตัมเชิงเส้น P (The linear momentum) มีนิยามว่า

$$P = mv = m\frac{dx}{dt} \tag{3.2}$$

จากสมการ (3.1) และ (3.2) โดยทั่วไปเราถือว่ามวล m คงที่, ดังนั้น

$$\frac{dp}{dt} = F \tag{3.3}$$

สมการ (3.3) กล่าวสรุปได้ว่า "อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเท่ากับแรงภายนอก" (The time rate of change of momentum is equal to the applied force) และแน่นอนสมการ

(3.3) คือกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันนั่นเอง แต่เราอาจเรียกว่าเป็นทฤษฎี (ดิฟเฟอเรนเชียล) โมเมนตัม. ถ้าเราคูณสมการ (3.3) ด้วย dt แล้ว อินทิเกรทจากเวลา t_1 ถึง t_2 เราได้ฟอร์มการอินทิเกรทของทฤษฎีโมเมนตัม (The in tegrated form of the momentum theorem):

$$P_2 - P_1 = \int_{t_1}^{t_2} F \, dt \tag{3.4}$$

สมการ (3.4) แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมที่เกิดจากแรง F ในระหว่างเวลา t_1 กับ t_2 อินทิกรัลทางขวามือเรียกว่า อิมพัลส์ (impulse) การหาค่าของอินทิกรัลแรง F ต้องเป็นฟังก์ชั่นของเวลา t เพียงอย่างเดียว แต่ถ้า F เป็นฟังก์ชั่นของ x, ความเร็ว v, และเวลา t $F = F(x,v,t)$ เราสามารถคำนวณหาอิมพัลส์ สำหรับการเคลื่อนที่ใด ๆ ที่กำหนด x(t), v(t) ได้โดยวิธีเฉพาะ

มาพิจารณาถึงปริมาณที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง คือ พลังงานจลน์ (kinetic energy) เรากำหนดนิยามตามแบบฟิสิกส์ยุคเก่า (Classical physics) โดยสมการ

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \tag{3.5}$$

ถ้าเราคูณสมการ (3.1) ด้วย v, เราได้

$$m v \frac{dv}{dt} = Fv,$$

หรือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{dT}{dt} = F v. \tag{3.6}$$

สมการ (3.6) แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนของพลังงานจลน์ ซึ่งอาจเรียกว่าทฤษฎี (ดิฟเฟอเรนเชียล)

ของพลังงาน ถ้าเราคูณสมการ (3.6) ด้วย dt และอินทิเกรทจากเวลา t_1 ถึง t_2 เราได้ฟอร์มการอินทิเกรทของทฤษฎีพลังงาน (The integrated form of the energy theorem):

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\,v\,dt \qquad (3.7)$$

สมการ (3.7) เป็นการเปลี่ยนของพลังงานที่เกิดจากการกระทำของแรง F ในระหว่างเวลา t_1 และ t_2 อินทิกรัลทางขวามือของสมการ (3.7) คืองานที่เกิดจากแรง F ในช่วงเวลาเดียวกันนี้ อินทิเกรทของ F v เป็นอัตราของงานที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 และเราเรียกว่ากำลัง (Power) ซึ่งเกิดจากแรง F. ในกรณีทั่วไป เมื่อ $F = F(x,v,t)$ การหาค่าของงานสามารถคำนวณได้โดยวิธีเฉพาะของการเคลื่อนที่ $x(t)$, $v(t)$ เท่านั้น. เราทราบแล้วว่า $v = \frac{dx}{dt}$, ดังนั้นเราสามารถหางานได้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นวิธีพื้นฐานง่าย ๆ เมื่อเราทราบว่า F เป็นฟังก์ชั่นของ x คือ

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \qquad (3.8)$$

3.2 การวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปของการเคลื่อนที่ในมิติเดียว (DISCUSSION OF THE GENERAL PROBLEM OF ONE-DIMENSIONAL MOTION)

ถ้าแรง F เป็นการเคลื่อนที่ตามสมการ (3.1) มันคือสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองธรรมดาของการหาค่าที่ต้องการสำหรับฟังก์ชั่น $x(t)$. แรง F นี้เราอาจทราบค่าได้ในแบบฟังก์ชั่นของตัวแปรใด ๆ หรือทุก ๆ ตัวแปร t, x, และ v. สำหรับการกำหนดการเคลื่อนที่ใด ๆ ของระบบทางพลศาสตร์ (dynamical system), ตัวแปรทุกตัวทางพลศาสตร์ (x,v,F,P,T, etc) จะมีความสัมพันธ์ร่วมกันในลักษณะที่เป็นฟังก์ชั่นของเวลา นั่นคือ แต่ละตัวแปรมีการกำหนดค่าแน่นอน ณ เวลา t ใด ๆ อย่างไรก็ตามมีอยู่หลายกรณีที่ตัวแปรในทางพลศาสตร์ เช่น แรง F เรา

อาจทราบค่าในลักษณะฟังก์ชั่นของ x หรือ v โดยตรง, หรืออาจอยู่ในลักษณะฟังก์ชั่นร่วมของ x,v, และ t ในขณะเดียวกัน ตัวอย่าง เช่น แรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational force) ที่ดึงดูดวัตถุจากตำแหน่งที่สูงมากพอ ให้ตกลงมายังผิวโลก ถ้าเราพิจารณาเฉพาะตำแหน่งของวัตถุเพียงอย่างเดียว แรง F ก็จะเป็นฟังก์ชั่นของ x แต่ถ้าการตกของวัตถุนี้มีแรงเสียดทานหรือแรงต้านในลักษณะอื่น ๆ มาเกี่ยวข้อง แรง F ก็จะเป็นฟังก์ชั่นของความเร็วด้วย และถ้าขณะที่วัตถุตกลงมาเกิดความผันผวนทางอากาศ แรง F ก็จะเป็นฟังก์ชั่นของเวลาอีกด้วย

ถ้าเรากำหนด F = F(x,v,t) ซึ่งทราบค่าของ x(t) และ v(t), ฟังก์ชั่นนี้เราสามารถกำหนดให้ F เป็นฟังก์ชั่นของเวลาเพียงอย่างเดียวได้ แต่ว่าในกรณีทั่วไปอาจจะเป็นไปไม่ได้ นอกเสียจากว่าเราสามารถแก้ปัญหาของสมการ (3.1) ให้ได้เสียก่อน ซึ่งอาจมีข้อผิดพลาดได้ง่าย และก็ไม่ง่ายนักสำหรับการใช้วิธีการเช่นนี้ ในกรณีที่กำหนด F = F(x,v,t) ใด ๆ (F อาจเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง หรืออาจเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรทั้งสามตัว) สมการ (3.1) จะอยู่ในฟอร์มของสมการดิฟเฟอเรนเชียล ดังนี้

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x,\dot{x},t)$$

สมการ (3.9) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง (Second-order differential equation) ทั่วไปที่สำคัญมาก ซึ่งเราจะได้ศึกษาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาและการประยุกต์ สมการนี้สำหรับเรื่องราวทางกลศาสตร์ต่อไป (ในบทนี้)

การเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้ของอนุภาคที่เกิดจากลักษณะเฉพาะของแรง สมการ (3.9) สามารถใช้แก้ปัญหาได้ดี ในกรณีทั่วไปอาจมีการเคลื่อนที่ได้หลายรูปแบบ, และสมการ (3.9) ได้วางเงื่อนไขใช้เฉพาะกรณีความเร่งของอนุภาคขณะนั้น (ในเวลา t ใด ๆ) ในเทอมของตำแหน่ง (position) x และความเร็ว v ขณะนั้นด้วย ถ้าเราทราบตำแหน่ง x และความเร็ว v ของอนุภาคในเวลาที่แน่นอน, เมื่อต้องการทราบค่าของความเร่งก็สามารถหาได้จากความเร็ว, และเมื่อต้องการทราบความเร็ว เราก็สามารถหาได้จากตำแหน่ง x ด้วยวิธีเดียวกัน ส่วนค่าของ x นั้นเราอาจหาก่อนหรืออาจหาทีหลังโดยการอินทิเกรทความเร็วก็ย่อมทำได้

การวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปของการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคในมิติเดียวเป็นเรื่องที่สลับซับซ้อนพอสมควร เพราะในกรณีที่แรง F เป็นฟังก์ชั่นของความเร็ว v, ตำแหน่ง x, และเวลา t ในขณะเดียวกันนั้น เป็นเรื่องที่ยากมากในการแก้ปัญหาโจทย์ประเภทนี้ หรืออาจกล่าวได้ว่าแทบแก้ปัญหาไม่ได้เลย แม้แต่กรณีที่ง่ายกว่า กล่าวคือ แรง F เป็นฟังก์ชั่นของ v, และ x ในขณะเดียวกันก็เป็นเรื่องที่ยากสำหรับที่จะใช้วิธีการธรรมดาในการแก้ปัญหา จริงอยู่เราอาจสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้ แต่ก็ต้องใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยแก้ปัญหาด้วย และก็ไม่ง่ายเลย อย่างไรก็ตามเรื่องราวของการเคลื่อนที่ในมิติเดียวก็มีประโยชน์มากมายทั้งทางวิชาฟิสิกส์โดยตรงหรืออาจนำไปประยุกต์ใช้กับทางด้านวิชาวิศวกรรม

มาวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปของการเคลื่อนที่ของอนุภาคในมิติเดียว, ในกรณีที่เราสามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีธรรมดาได้ คือ กรณีที่แรง F ตามสมการ (3.9) เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง กล่าวคือ F = F(x), F = F(x), และ F = F(t) ดังนั้นในตอนต่อไปเราจะพิจารณาถึงกรณีที่แรงเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งเท่านั้น

3.3 แรงภายนอกขึ้นอยู่กับเวลา (APPLIED FORCE DEPENDING ON THE TIME)

ถ้าแรง F เป็นฟังก์ชั่นของเวลาเพียงอย่างเดียว แล้วสมการการเคลื่อนที่ของสมการ (3.9) เราสามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีดังต่อไปนี้. จากการคูณสมการ (3.9) ด้วย dt แล้วอินทิเกรทจากเวลาเริ่มต้น t_o ถึงเวลา t ใด ๆ , สมการ (3.4) ในกรณีนี้เราเขียนได้ในฟอร์ม :

$$m v - m v_o = \int_{t_o}^{t} F(t)\, dt \qquad (3.10)$$

เมื่อเราทราบแล้วว่า แรงเป็นฟังก์ชั่นของเวลา, และโดยการเอาสเกลาร์มาหารตลอด เราหาค่าของ v ได้ในลักษณะของสมการ :

$$v = \frac{dx}{dt} = v_o + \frac{1}{m} \int_{t_o}^{t} F(t)\, dt \qquad (3.11)$$

จากสมการ (3.11) คูณด้วย dt, และอินทิเกรทอีกครั้งจากเวลา t_o ถึง ใด ๆ เรา สามารถหาค่าของ x ได้ในฟอร์ม :

$$x - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{m} \int_{t_o}^{t} \left[\int_{t_o}^{t} F(t)\, dt \right] dt \qquad (3.12)$$

หรือถ้าเราให้ t' เป็นการอินทิเกรทครั้งแรก, และ t'' เป็นการอินทิเกรทครั้งที่สองเราเขียนสมการของ x ได้อีกแบบ :

$$x = x_o + v_o\,(t - t_o) + \frac{1}{m} \int_{t_o}^{t} dt'' \int_{t_o}^{t''} F(t')\, dt' \qquad (3.13)$$

สมการ (3.13) นี้ต้องอธิบาย $x(t)$ ในเทอมของสองอินทิกรัล ซึ่งสมการนี้จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อเราทราบค่าที่กำหนดของ $F(t)$

ในทางกลศาสตร์ กรณีที่แรง F เป็นฟังก์ชั่นของเวลา มักเกิดขึ้นได้เสมอ เมื่อมีอิทธิพลจากภายนอก หรือมีแรงภายนอกมากระทำต่ออนุภาค

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> จงหาลักษณะการเคลื่อนที่ของอีเลคตรอนอิสระประจุ $-e$ ขณะที่กำลังเกิดการ oscillate ในสนามไฟฟ้า (electric field) ในแนวแกน x

<u>วิธีทำ</u> เราทราบว่าในสนามไฟฟ้า

$$E_x = E_o \cos\,(\omega t + \theta) \qquad (3.14)$$

แรงบนอีเลคตรอนคือ

$$F = -eE_x = -e\,E_o \cos\,(\omega t + \theta) \qquad (3.15)$$

สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{dv}{dt} = - e E_o \cos (\omega t + \theta) \qquad (3.16)$$

สมการ (3.16) x dt และอินทิเกรทโดยให้ $t_o = o$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_o + \frac{eE_o \sin \theta}{m\omega} \quad \frac{e E_o}{m\omega} \sin (\omega t + \theta) \qquad (3.17)$$

เอา dt คูณตลอดและอินทิเกรทแบบเดิมอีกครั้ง เราได้

$$x = x_o - \frac{e E_o \cos \theta}{m\omega^2} + (v_o + \frac{e E_o \sin \theta}{m\omega}) \; t$$

$$+ \frac{e E_o}{m\omega^2} \cos (\omega t + \theta) \qquad (3.18)$$

ถ้าอีเลคตรอนเริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งและตำแหน่งเริ่มต้น $x_o = o$, สมการ (3.18) คือ

$$x = - \frac{e E_o \cos \theta}{m\omega^2} + \frac{e E_o \sin \theta}{m\omega} t + \frac{e E_o}{m\omega^2} \cos (\omega t + \theta) \qquad (3.19)$$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> แท่งสี่เหลี่ยมอันหนึ่งเริ่มต้นเคลื่อนที่บนผิวเรียบในแนวราบด้วยแรงภายนอกที่เพิ่มขึ้นอย่างคงที่ในแนวราบ : $F = bt$ ถ้าแท่งสี่เหลี่ยมนี้เริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งที่เวลา $t_o = o$ จงหาความเร็ว v, และระยะขจัด x ในเทอมฟังก์ชั่นของเวลา

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.1)

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

ดังนั้น

$$m\frac{dv}{dt} = bt$$

ค่าของความเร็ว v คือ

$$v = \frac{1}{m}\int_0^t bt \; dt$$

และค่าของระยะขจัด คือ = $\dfrac{bt^2}{2m}$

$$x = \int_0^t v \, dt$$

$$= \int_0^t \frac{bt^2}{2m} \; dt$$

$$= \frac{bt^3}{6m}$$

<u>ตอบ</u>

3.4 แรงหน่วงขึ้นอยู่กับความเร็ว (DAMPING FORCE DEPENDING ON THE VELOCITY)

แรงอีกชนิดหนึ่งที่ใช้อธิบายสมการ (3.9) คือ แรงหน่วง (damping force) และแรงนี้เป็นฟังก์ชั่นของความเร็วเพียงอย่างเดียว: นั่นคือ

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \qquad (3.20)$$

เราอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของแรงนี้ ด้วยวิธีการต่อไปนี้ จากสมการ (3.20) คูณด้วย $[mF(v)]^{-1}\,dt$ และอินทิเกรทจากเวลา t_o ถึง t :

$$\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_o}{m} \qquad (3.21)$$

วิธีการหาค่าของ $\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{F(v)}$ อย่างน้อยเราต้องทราบค่าของ $F(v)$, และสมการของผลลัพธ์ที่ยังไม่ทราบค่าของ v นั้น จะอยู่ในลักษณะที่พิเศษออกไป ถ้าสมการ (3.21) เป็นสมการใช้หาค่าของ v (สมมติว่าการวิเคราะห์ทั่วไปนั้นเป็นไปได้), เราจะได้สมการของ v อยู่ในฟอร์ม :

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi\left(v_o, \frac{t - t_o}{m}\right) \qquad (3.22)$$

ดังนั้นการอธิบายสำหรับ x คือ

$$x = x_o + \int_{t_o}^{t} \varphi\left(v_o, \frac{t - t_o}{m}\right) dt \qquad (3.23)$$

กรณีของการเคลื่อนที่ในมิติเดี่ยว, มีแรงชนิดหนึ่งที่สำคัญ สำหรับกรณีที่แรงขึ้นอยู่กับความเร็ว แรงนั้นคือ "แรงเสียดทานใด ๆ" (frictional forces) และเราทราบว่าลักษณะของแรงเสียดทานใด ๆ นี้ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วยกกำลัง n (เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก) ดังนั้นถ้าเราให้ f เป็นลักษณะของแรงเสียดทานใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของความเร็ว, เราได้

$$f = +\, b\, v^{n} \qquad (3.24)$$

สมการ (3.24) นี้ b เป็นค่าคงที่ และถ้า n เป็นเลขคี่เราใช้เครื่องหมายลบ แต่ถ้า n เป็นเลขคู่ก็ให้ใช้เครื่องหมายบวก. สำหรับสมการนี้ มีเทคนิคอย่างหนึ่งเพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหาโจทย์คือส่วนใหญ่เราจะกำหนดให้ ค่าของ $n = 1$ สมการ (3.24) ก็จะเป็น $f = -bv$ นอกเสียโจทย์จะกำหนดค่า n มาให้

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> พิจารณาปัญหาของเรือลำหนึ่ง ที่กำลังเคลื่อนที่อยู่ด้วยความเร็วต้น v_o แล้วดับเครื่องยนต์ของเรือลำนี้ ที่เวลา $t_o = o$ และตำแหน่ง $x_o = o$ โดยสมมติว่าแรงเสียดทานของเรือกับน้ำตามสมการ (3.24) นั้น ค่าของ $n = 1$:

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.9) และสมการ (3.24) เราทราบ

$$m\frac{dv}{dt} = -bv \tag{3.25}$$

เราอธิบายการหาค่าสมการ (3.25) ตามลำดับแบบการสรุปที่กล่าวมาแล้ว สมการ (3.20) ถึงสมการ (3.23) :

$$\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}t, \tag{3.26}$$

$$\ln\frac{v}{v_o} = -\frac{b}{m}t$$

$$v = v_o e^{-bt/m} \tag{3.27}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $t \to \infty$, $v \to o$ เป็นเช่นนี้ตลอดการเคลื่อนที่, แต่เรือไม่สามารถหยุดนิ่งในเวลาจำกัดใด ๆ (เป็นไปได้ยากที่ความเร็วปลาย $= o$ อย่างแท้จริง), ดังนั้นการอธิบายค่าของ x (โดยประมาณ) คือ

$$x = \int_0^t v_o \, e^{-bt/m} \, dt$$

$$= \frac{m \, v_o}{b} \quad (1 - e^{-bt/m}) \qquad (3.28)$$

3.5 แรงอนุรักษ์ขึ้นอยู่กับตำแหน่ง. พลังงานศักย์ (CONSERVATIVE FORCE DEPENDING ON POSITION. POTENTIAL ENERGY)

แรงที่มีความสำคัญมากอีกชนิดหนึ่ง ซึ่งใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของสมการ (3.9) ในลักษณะเฉพาะ กล่าวคือ แรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่นี้เป็นลักษณะของแรงที่เป็นฟังก์ชั่นของโคออดิเนต x เพียงอย่างเดียว ตัวอย่างของแรงชนิดนี้ เช่น แรงดึงดูดของโลก, แรงอนุรักษ์ (Conservative force) สำหรับวิธีการที่จะทราบว่าแรงใดเป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่นั้น จะกล่าวถึงในช่วงท้ายของตอนนี้ ช่วงนี้เรามาพิจารณาถึงเรื่องราวของแรงที่เป็นฟังก์ชั่นของโคออดิเนต x เพียงอย่างเดียวเสียก่อน

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \qquad (3.29)$$

จากทฤษฎีพลังงาน [สมการ (3.8)], ดังนั้น เราทราบว่า

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_o^2 = \int_{x_o}^{x} F(x) \, dx \qquad (3.30)$$

อินทิกรัลทางขวามือของสมการ (3.30) คือ งานที่เกิดจากแรง เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง x_o ถึง x. ถ้าเราให้ความหมายของพลังงานศักย์ (Potential energy) V(x) ตามแบบของงานที่เกิดจากแรง F เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง x ใด ๆ ไปยังตำแหน่งมาตรฐาน (standard point) ที่กำหนด x_s :

$$V(x) = \int_{x}^{x_s} F(x)\,dx = -\int_{x_s}^{x} F(x)\,dx \qquad (3.31)$$

ด้วยเหตุผลที่ว่าปริมาณของพลังงานศักย์ เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้น จากค่าของ $V(x)$ ในสมการ (3.31) และจากสมการ (3.30) เราสามารถเขียนอินทิกรัลใหม่ได้เป็น

$$\int_{x_o}^{x} F(x)\,dx = -V(x) + V(x_o) \qquad (3.32)$$

จากสมการ (3.30) = สมการ (3.32), ดังนั้น

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_o^2 + V(x_o) \qquad (3.33)$$

ปริมาณทางขวามือขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) เท่านั้น แต่ปริมาณนี้จะมีค่าคงที่ตลอดการเคลื่อนที่ ซึ่งเราเรียกว่าพลังงานรวม (total energy) E และสมการ (3.33) นี้เราเรียกว่า "หลักการอนุรักษ์พลังงาน" พลังงานรวม E มีค่าคงที่นี้เกิดขึ้นเฉพาะกรณีที่แรง F เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x เพียงอย่างเดียว :

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = T + V = E \qquad (3.34)$$

สมการ (3.34) เราใช้ในอธิบายการหาค่าของ v, ได้ดังนี้

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - V(x)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.35)$$

การอธิบายหาค่าของ x จากสมการ (3.35), เราจะพบฟังก์ชั่น x(t) ด้วย กล่าวคือสมการของ x จะอยู่ในฟอร์ม :

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_c}^{x} \left[E - V(x) \right]^{\frac{1}{2}} dx = t - t_o \qquad (3.36)$$

ในกรณีของสมการ (3.36) นี้ เงื่อนไขเริ่มต้นเราอธิบายในเทอมค่าคงที่ของพลังงานรวม E และ x_o

จากนิยามของสมการ (3.31) เราสามารถอธิบายแรงในเทอมของพลังงานศักย์ได้คือ

$$F = -\frac{dv}{dx} \qquad (3.37)$$

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> พิจารณาปัญหาของอนุภาคที่ถูกกระทำด้วยแรงนำกลับในแนวเส้นตรง (a linear restoring force) เช่น กรณีของมวลผูกติดกับสปริง (ไม่คิดแรงเสียดทาน)

<u>วิธีทำ</u> จากกฎของ Hooke, เราทราบว่า แรงนำกลับ

$$F = -kx \qquad (3.38)$$

เมื่อให้ $x_s = o$, พลังงานศักย์ตามสมการ (3.31) คือ

$$V(x) = \int_{o}^{x} (-kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} kx^2 \qquad (3.39)$$

กรณีนี้เราให้ $t_o = o$, ดังนั้น สมการ (3.36) กลายเป็น

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^{x} (E - \frac{1}{2} kx^2)^{\frac{1}{2}} \, dx = t \qquad (3.40)$$

เมื่อเรากำหนดการแทนค่าต่าง ๆ (ตามลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคอย่างง่าย) ด้วย

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{k}{2E}} \qquad (3.41)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \qquad (3.42)$$

ดังนั้น

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^{x} (E - \frac{1}{2} kx^2)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\omega} \int_{\theta_o}^{\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_o),$$

และจากสมการ (3.40) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคอย่างง่าย (Simple harmonic motion)

$$\theta = \omega t + \theta_o$$

เราสามารถหาค่าของ x ในสมการ (3.41) ได้

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta$$

$$= A \sin (\omega t + \theta_o) \tag{3.43}$$

เมื่อ

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \tag{3.44}$$

เราสรุปได้ว่าการ oscillates ของมวล m ในแนวแกน x เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค ด้วยช่วงกว้าง (Amplitude) A, และความถี่ (frequency) $f = \frac{\omega}{2\pi}$ เงื่อนไขเริ่มต้นนั้นหาได้จากค่าคงที่ A และมุมเฟสเริ่มต้น θ_o ซึ่งมีความสัมพันธ์กับพลังงานรวม E และตำแหน่งเริ่มต้น x_o โดยสมการ

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \tag{3.45}$$

$$x_o = A \sin \theta_o \tag{3.46}$$

ส่วนการอธิบายค่าของ v นั้น เราทราบได้จากสมการ (3.35) และสมการ (3.39) ซึ่งค่าของ v คือ

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}} \left(E - \frac{1}{2} kx^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.47}$$

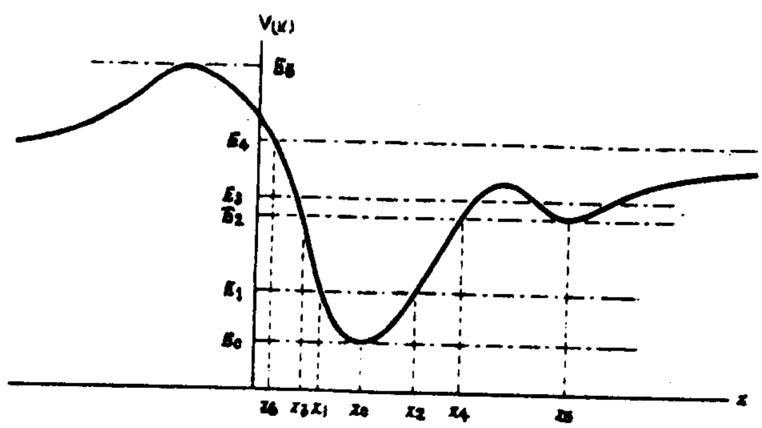
เมื่อค่าของ E คือสมการ (3.45)

<u>ตอบ</u>

จากตัวอย่าง 3.4 นี้ เราจะเจอปัญหายุ่งยากเกี่ยวกับเครื่องหมายในการถอดรู้ทสอง (square root) ของสมการ (3.40) จากการแทนค่า $(1-\sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$ ด้วย $(\cos \theta)^{-1}$ ปริมาณอันนี้สามารถเป็นไปได้ทั้งบวกและลบ ซึ่งมันขึ้นอยู่กับ θ ว่าอยู่ใน quadrant ไหน

ฟังก์ชั่นของตัวแปรที่ไม่อิสระ (dependent variable) และอนุพันธ์แรก (first derivative) ซึ่งมีค่าคงที่สำหรับทุก ๆ การหาค่าสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง, เราเรียกว่า อินทิกรัลครั้งแรก (first intigral) ของสมการ. ส่วนฟังก์ชั่น $\frac{1}{2}mx^2 + V(x)$ เราเรียกว่า อินทิกรัลพลังงาน (Energy intigral) ของสมการ (3.39) และอินทิกรัลของสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางกลศาสตร์เราเรียกมันด้วยว่า ค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ (Constant of the motion)

ในกรณีทั่วไป เราสามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางกลศาสตร์ได้ ถ้าเราสามารถหาค่าของอินทิกรัลครั้งแรก และค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ได้, แต่ก็เป็นเรื่องที่ยากทีเดียว. แม้แต่กรณีที่จะอินทิกรัลสมการ (3.36) ก็ไม่ง่ายเลยในการหาค่าหรือหาผลลัพธ์ของสมการในการอธิบายค่า $\ddot{x}(t)$ ได้อย่างไม่มีปัญหา. สำหรับกรณีที่กำหนดค่าของพลังงาน E เราดูจากสมการ (3.35) จะเห็นว่าอนุภาคถูกจำกัด ลักษณะการเคลื่อนที่ในแนวแกน x เมื่อ $V(x) < E$ นอกจากนั้น ความเร็วก็เป็นสัดส่วนโดยตรงกับรู้ทสองของผลต่างระหว่าง E และ V(x) ดังนั้นถ้าเราพรอท (plot) กราฟระหว่าง V(x) กับ x, เราสามารถให้รูปพรรณที่ดีสำหรับอธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นไปได้ ดังรูป 3.1



รูป 3.1 A potential-energy function for one-demensional motion

สำหรับฟังก์ชั่นของพลังงานศักย์ ตามรูป 3.1 เราให้ค่าที่น้อยที่สุดของพลังงาน E ที่เป็นไปได้ คือ E_o และ ณ. ที่พลังงาน E_o นี้อนุภาคอยู่ในสภาพนิ่งตรงตำแหน่งเริ่มต้น x_o เมื่อเราเพิ่มพลังงานเป็น E_1 อนุภาคก็สามารถเคลื่อนที่ระหว่างตำแหน่ง x_1 กับ x_2 และการเคลื่อนที่ของอนุภาคก็เป็นไปตามลักษณะการเคลื่อนที่ของฮาร์โมนิคอย่างง่าย กล่าวคือ เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง x_1 หรือ x_2 แสดงว่าตรงตำแหน่ง x_1 และ x_2 นี้เป็นตำแหน่งที่พลังงานศักย์มีค่ามากที่สุด หรือพลังงานจลน์มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง และความเร็วของอนุภาคในช่วงนี้ก็มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงตามตำแหน่งของการเคลื่อนที่ ซึ่งทำให้อนุภาคสามารถเคลื่อนที่จากตำแหน่ง x_1 ไปยัง x_2 และ x_2 มายัง x_1 ได้ เราจึงเรียกตำแหน่ง x_1 และ x_2 ว่าเป็นจุดกลับ (turning point) ในทำนองเดียวกันถ้าเราใช้เทคนิคในการเพิ่มพลังงานขึ้นอีกเป็น E_2 อนุภาคก็จะเคลื่อนที่กลับไปกลับมา (oscillate) ระหว่างตำแหน่ง x_3 กับ x_4 (ในลักษณะเดียวกับช่วงตำแหน่ง x_1 กับ x_2) หรืออาจจะมีค่าคงที่ในสภาพนิ่งตรงตำแหน่ง x_5 เมื่อเพิ่มพลังงานมากเป็น E_3 จะมีจุดกลับอยู่ถึง 4 จุด และอนุภาคสามารถเคลื่อนที่ไปมาระหว่างส่วนลึกทั้งสองของพลังงานศักย์. และเมื่อเพิ่มพลังงานเป็น E_4 ที่พลังงาน E_4 นี้จะมีจุดกลับเพียงจุดเดียวคือ x_6 เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปทางซ้าย เมื่อมันเคลื่อนที่กลับมาทางขวา มันจะเพิ่มอัตราเร็วที่ส่วนลึก x_0 และ X_5 และมันจะลดอัตราเร็วลงตรงส่วนนูนของการเคลื่อนที่. เมื่อเราเพิ่มพลังงานมากเต็มที่คือ E_5 หรือมากกว่า E_5 มันจะไม่มีจุดกลับของการเคลื่อนที่อีกเลย และอนุภาคจะเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวเท่านั้น ส่วนความเร็วก็จะแปรผันไปตามส่วนลึกพลังงานศักย์ของแต่ละจุด

ในช่วงท้ายของตอนนี้ขอกลับไปกล่าวถึงแรงอนุรักษ์อีกครั้งหนึ่งตามที่ได้บอกไว้ในช่วงแรก, เกี่ยวกับเราจะทราบได้อย่างไรว่าแรงโดยทั่ว ๆ ไปนั้น แรงไหนเป็นแรงอนุรักษ์. เรื่องนี้ตามความเป็นจริงแล้วควรจะกล่าวถึงในบทต่อไป, เพราะแรงที่จะกล่าวถึงนี้เป็นแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ใน 2 หรือ 3 มิติ แต่อย่างไรก็ตามในบทที่ 1 เราได้ศึกษาในเรื่องของเวกเตอร์มาแล้ว.

วิธีตรวจสอบว่าแรงใดเป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่ เรามีวิธีตรวจสอบอย่างง่ายอยู่ 2 วิธี คือ

1. ถ้า $\text{Curl}\,\vec{F} = o$, แล้ว $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์
2. ถ้า $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> กำหนดให้ $\vec{F} = c\,yz\,\hat{i} + czx\,\hat{j} + cxy\,\hat{k}$, จงแสดงว่าแรง F เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่?

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ cyz & czx & cxy \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

แสดงว่าแรง $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ <u>ตอบ</u>

3.6 การตกของวัตถุ (FALLING BODIES)

การเคลื่อนที่ในมิติเดียวแบบธรรมดาอีกลักษณะหนึ่งซึ่งเรามักพบเห็นได้บ่อย คือการเคลื่อนที่ของการตกของวัตถุ. เพื่อความสะดวกเรากำหนดให้การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ซึ่งเป็นแกนที่เรานิยมใช้ในแนวดิ่ง และเรากำหนดเครื่องหมายของการเคลื่อนที่โดยให้ทิศทางของวัตถุที่ตกลงมามีเครื่องหมายเป็นลบ ในทางตรงกันข้ามเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนมีเครื่องหมายเป็นบวก

ในกรณีวัตถุตกใกล้ผิวโลก, และเราไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ แรงคงที่หรือแรงดึงดูดของโลกที่กระทำต่อมวล m คือ

$$F = -mg, \tag{3.48}$$

จากสมการ (3.1), ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{3.49}$$

ถ้าแรงคงที่ F เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง t,v, หรือ x เราอาจอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ด้วยวิธีหนึ่ง ตามที่ได้วิเคราะห์มาแล้วในตอน 3.3, 3.4, และ 3.5.

แต่ถ้าเราคิดแรงเสียดทานของอากาศ โดยสมมติว่าแรงเสียดทานนี้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็ว v, ตามสมการ (3.24) เมื่อให้ n = 1. ดังนั้นแรงรวม F คือ

$$F = -mg - bv \tag{3.50}$$

ค่าคงที่ b ในสมการ (3.50) ขึ้นอยู่กับรูปร่างและขนาดของวัตถุในการเสียดสีกับความหนาแน่นของอากาศขณะที่วัตถุกำลังตกลงมา ปัญหานี้จึงอยู่ในกรณีของ F(v) :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv \tag{3.51}$$

ให้ $v_o = 0$ ที่เวลา t = o, เราใช้วิธีการต่อเนื่องจากตอน 3.4 สมการ (2.28) :

$$\int_0^{v} \frac{dv}{v + (mg/b)} = -\frac{bt}{m} \tag{3.52}$$

แก้สมการหาค่า v จากสมการ (3.52), โดยการอินทิเกรตจะได้

$$v = -\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) \tag{3.53}$$

จากสมการ (3.53), เราอาจหาสูตรเพื่อใช้สำหรับการตกของวัตถุในเวลาสั้น ๆ, โดยการขยาย exponential function ในรูปของอนุกรมยกกำลัง (Power serics):

$$v = -gt + \frac{1}{2}\frac{bg}{m}t^2 + \ldots \tag{3.54}$$

ดังนั้นสำหรับเวลาสั้น ๆ นี้ $(t \ll m/b)$ $v = -gt$ (โดยประมาณ) และไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ. หลังจากเวลาผ่านไปนานพอสมควร เมื่อเราพิจารณาสมการ (3.53) เราทราบว่า

$$v \doteq -\frac{mg}{b}, \quad \text{ถ้า} \quad t \gg \frac{m}{b}$$

ความเร็ว $\frac{mg}{b}$ เรียกว่าความเร็วปลาย (terminal velocity) ของลักษณะการตกของวัตถุแบบนี้ ถ้าวัตถุสามารถเคลื่อนที่ได้ $\frac{1}{e}$ ของความเร็วปลายภายในเวลา $t = m/b$ แล้วเราสามารถใช้วิธีการทดลองวัดค่าความเร็วปลาย เพื่อการหาค่าคงที่ b ได้. เมื่อเราอินทิเกรตสมการ (3.53), โดยให้ $x_o = o$ จะได้

$$x = \frac{m^2 g}{b^2}\left(1 - \frac{bt}{m} - e^{-bt/m}\right) \tag{3.55}$$

โดยการขยาย exponential function สมการ (3.55) ในรูปของอนุกรมยกกำลัง, เราได้

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\frac{bg}{m}t^3 + \ldots \tag{3.56}$$

ถ้า $t \ll m/b$ แล้ว $x \doteq -\frac{1}{2}gt^2$ [แบบสมการ (2.29)] แต่ถ้า $t \gg m/b$,

$$x \doteq \left(\frac{m^2 g}{b^2} - \frac{mg}{b}\,t\right)$$

ผลลัพธ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในเทอมของความเร็วปลายได้ไม่ยาก

กรณีวัตถุเล็ก ๆ แต่มีน้ำหนักซึ่งตกลงมาด้วยความเร็วปลายสูง เราอาจให้ค่าของแรงเสียดทานเป็นบวกได้ดีกว่า กล่าวคือ ตามสมการ (3.24) กำหนดให้ $n = 2$

$$f = bv^2 \tag{3.57}$$

ผลลัพธ์ในกรณีการตกของวัตถุมีแรงเสียดทาน ดังสมการ (3.57) ถ้าเราให้ $x_o = o$, $v_o = o$, ที่เวลา $t_o = o$ คือ

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tan\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}\, t\right)$$

$$\doteq \begin{cases} -gt, & \text{ถ้า } t \ll \sqrt{\dfrac{m}{bg}}, \\ -\sqrt{\dfrac{mg}{b}}, & \text{ถ้า } t \gg \sqrt{\dfrac{m}{bg}}, \end{cases} \qquad (3.58) \qquad (3.58)$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cos\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}\, t\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} gt^2, & \text{ถ้า } t \ll \sqrt{\dfrac{m}{bg}}, \\ \dfrac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\dfrac{mg}{b}}\, t, & \text{ถ้า } t \gg \sqrt{\dfrac{m}{bg}} \end{cases} \qquad (3.59)$$

อีกแบบหนึ่งของความเร็วปลาย คือ เมื่อกำหนดเวลา $t = (\frac{mg}{b})^{\frac{1}{2}}$ ความเร็วปลายในกรณีนี้สามารถหาได้แบบความเร็วปลายปกติ เมื่อแรงเสียดทานมีค่าเท่ากับแรงโน้มถ่วงของ (gravitational force) แต่มีข้อแม้ว่า แรงเสียดทานและความเร็วเนื่องจากการตกของวัตถุต้องมีค่ามากพอ

ในกรณีของวัตถุตกจากที่สูงมาก ๆ, แรงโน้มถ่วงจะเป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับความสูงนี้ด้วย ในกรณีนี้ถ้าเราไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ (เพื่อให้สามารถศึกษาเรื่องราวของพลังงานได้) และเราวัดความสูง y จากจุดศูนย์กลางของโลก ดังนั้น ตามสมการ (2.11) ถ้าเราให้ M เป็นมวลของโลก และ m เป็นมวลของวัตถุที่ตกจากความสูง y

$$F = -G\frac{mM}{y^2} , \tag{3.60}$$

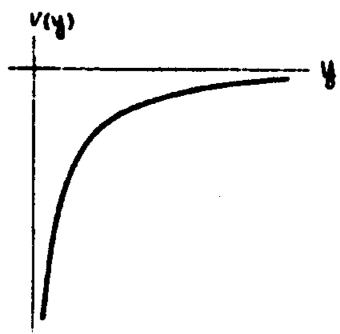
และจากสมการ (3.31)

$$V(y) = -\int_{\infty}^{y} F\,dy = -\frac{G\,m\,M}{y} , \tag{3.61}$$

สมการ (3.61), เราให้ $x_s = \infty$ เพื่อที่จะได้ตัดค่าเทอมที่คงที่ใน $V(x)$ ทิ้งไป ดังนั้น สมการ (3.35) จึงกลายเป็น

$$v = \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\left(E + \frac{G\,mM}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.62}$$

เครื่องหมายบวกแสดงว่าเป็นการเคลื่อนที่ขึ้นข้างบน, ส่วนเครื่องหมายลบเป็นการเคลื่อนที่ลงข้างล่างของวัตถุ (ตามที่เราได้เคยกำหนดไว้ก่อนแล้ว)



<u>รูป 3.2</u> Plot of $V(y) = -\left(G\frac{mM}{y}\right)$

จากการพรอท (plot) ฟังก์ชั่นของ V(x), ดังรูป 3.2 เราพบว่ามีการเคลื่อนอยู่ 2 ชนิด คือการเคลื่อนที่เมื่อ E เป็นบวก กับการเคลื่อนที่เมื่อ E เป็นลบ. ในกรณีที่ E เป็นบวกจะไม่มีจุดกลับ (turning point) ของการเคลื่อนที่ และถ้าวัตถุเริ่มต้นเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนมันก็จะเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนตลอดไป ด้วยความเร็วที่ลดลงจนกระทั่งถึงจุดจำกัดของความเร็ว v_1 (limiting velocity)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{3.63}$$

แต่กรณีที่ E เป็นลบ, มันจะมีจุดกลับที่ความสูง

$$y_T = \frac{G\,mM}{-E} \tag{3.64}$$

กล่าวคือ เมื่อวัตถุมันเคลื่อนที่ขึ้นข้างบน, มันจะมีความเร็ว = o หรือหยุดการเคลื่อนที่ต่อตรงตำแหน่ง y_T และตำแหน่งความสูงนี้เองที่มันตกมายังพื้นโลก การเคลื่อนที่ทั้งสองชนิดตามที่กล่าวมานั้น มันจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อตำแหน่งเริ่มต้น และความเร็วต้นของการเคลื่อนที่เริ่มที่ E = o ถ้าจุดกลับอยู่ตรงตำแหน่งจุดอนันต์ (infinity) นั่นเอง วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนเพียงอย่างเดียว และแสดงว่าความเร็วจำกัด v_1 = o ถ้า E = o แล้วทุก ๆ ความสูง y ใด ๆ ความเร็วของมันจะเป็น

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,MG}{y}} \tag{3.65}$$

ความเร็วในสมการ (3.65) เรียกว่า eascape velocity (ความเร็วหนีแรงโน้มถ่วง) ของวัตถุ ความสูง y ที่วัดจากจุดศูนย์กลางของโลก แต่ว่าถ้าต้องการให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_e ตรงตำแหน่งความสูง y จำเป็นจะต้องมีพลังงานเพียงพอเพื่อการเคลื่อนที่ต่อไปอย่างไม่จำกัด (ไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ)

สำหรับการหาค่า $y(t)$, เราหาได้จากการอินทิเกรตสมการ (3.62)

$$\int_{y_o}^{y} \frac{dx}{\pm\left(E + \frac{G\,mM}{y}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\; t, \qquad (3.66)$$

เมื่อ y_o เป็นความสูงที่เวลา $t = o$, เพื่อการหาค่าเมื่อ E เป็นลบ, เราแทนค่า

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{-E\,y}{G\,mM}} \qquad (3.67)$$

ดังนั้นสมการ (3.66) จึงกลายเป็น

$$\frac{G\,mM}{(-E)^{1/2}} \int_{\theta_o}^{\theta} 2\cos^2\theta \; d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}}\; t, \qquad (3.68)$$

เราใช้เครื่องหมายในการอินทิเกรตเป็นบวก ดังนั้น θ จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t เพิ่มขึ้น) เราสามารถทำได้ โดยไม่คำนึงถึงลักษณะทั่ว ๆ ไป ให้ y_o เป็นจุดกลับ y_T บางครั้งวัตถุวิ่งเต็มที่ผ่าน y_T ถ้าไม่มีแรงอื่น ๆ มากระทำ นอกจากแรงดึงดูดของโลกเพียงอย่างเดียว เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ $E < o$. ดังนั้น $\theta_o = o$ และ

$$\frac{G\,mM}{(-E)^{\frac{3}{2}}} (\theta + \sin\theta\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{m}}\; t,$$

หรือ

$$\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta = \sqrt{\frac{2\,MG}{y_T^3}}\; t, \qquad (3.69)$$

และ

$$y = y_T \cos^2 \theta \tag{3.70}$$

จะเห็นว่า สมการ (3.69),(3.70) คู่นี้ไม่สามารถใช้สำหรับหาค่า y(t) ได้อย่างชัดเจน แต่การแก้ปัญหานี้อาจทำได้ โดยให้ θ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ติดต่อกัน แล้วหาความสัมพันธ์ของค่า y และ t จากสมการคู่นี้. กรณีความสูงของ y ในการเคลื่อนที่น้อยกว่ารัศมีของโลก โดยอาจสมมุติว่ามวลของโลกอยู่ที่จุด x = o ปัญหานี้ตัดทิ้งไปได้ (เพราะไม่ได้กล่าวถึงความจริงที่สมการของการเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับแรงเสียดทานของอากาศแต่เป็นแรงกระทำของวัตถุเมื่อชนกับโลก)

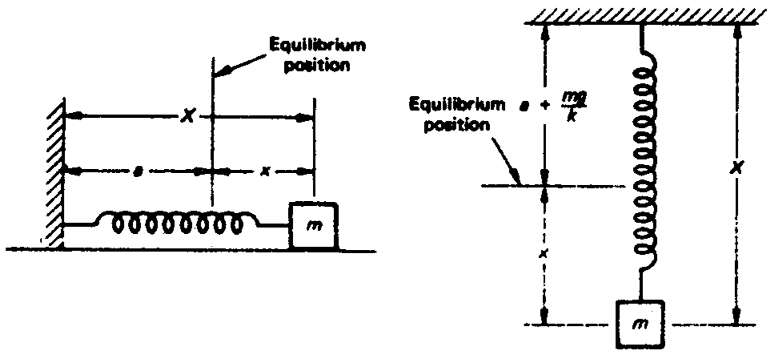
ในกรณีที่ E มีค่าเป็นบวกหรือเป็นศูนย์ การอธิบายหรือการแก้ปัญหาสามารถใช้วิธีการในทำนองเดียวกับเมื่อ E เป็นลบ.

3.7 แรงคืนตัวเชิงเส้น LINEAR RESTORING FORCE) การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค (HARMONIC MOTION)

การเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคในมิติเดียวที่สำคัญอีกแบบหนึ่ง คือ การเคลื่อนที่กลับไปกลับมาด้วยแรงคืนตัวในแนวเส้นตรง การเคลื่อนที่แบบนี้เราเรียกว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค (hormonic motion) ในการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคนี้ แรงคืนตัวเชิงเส้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะขจัด x. ตัวอย่างของการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ เช่น การเคลื่อนที่ของมวลผูกติดกับสปริง แรงคืนตัวของสปริงเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law)

$$F = -k (X - a) = - kx \tag{3.71}$$

เมื่อ x เป็นความยาวทั้งหมด, a เป็นความยาวตอนที่สปริงยังไม่ยืดหรือหด (ไม่มีน้ำหนัก), และเป็นความยาวที่วัดจากตำแหน่งสมดุลย์ (equilibrium position) ขณะที่สปริงยืด ตัวแปร x มีค่า = X − a. ส่วน k คือค่าคงที่หรือความแข็งแกร่ง (Stiffness) ของสปริง. อนุภาคมวล m อาจผูกติดกับสปริงในแนวราบหรือในแนวดิ่งก็ได้ ดังรูป 3.3 (a) และ 3.3 (b)



(a) (b)

รูป 3.3 Ilustrating the linear harmonic oscillastor by mean of a block of mass m and a spring (a) Horizontal motion; (b) Vertical motion

เมื่อนำอนุภาคมวล m ผูกติดกับสปริงในแนวราบ ดังรูป 3.3(a) แรงที่กระทำต่ออนุภาคเป็นไปตามสมการ (3.71) แต่เมื่อเรานำอนุภาคมวล m มาผูกติดกับสปริงในแนวดิ่ง ดังรูป 3.3(b) แรงรวมทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคนี้ คือ

$$F = -k\ (X - a) + mg \qquad (3.72)$$

เครื่องหมายบวก แสดงว่าเป็นการเคลื่อนที่ลงข้างล่าง (เช่นเดียวกับตอนที่แล้ว) ในกรณีนี้ ตำแหน่งสมดุลย์ของสปริงจะไม่เหมือนกับกรณีของการเคลื่อนที่ในแนวราบ กล่าวคือตำแหน่งสมดุลย์จะเปลี่ยนไปเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก. ถ้าไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ มีเฉพาะแรงดึงดูดของโลกเพียงอย่างเดียวที่กระทำต่ออนุภาคมวล m นี้ เราสามารถกำหนดได้ว่า $x = X - (a + \frac{mg}{k})$ และเมื่อเราเขียนสมการ (3.72) ใหม่ โดยให้อยู่ในกรอบของ x. เราจะได้แรงคืนตัวของสปริงในแนวดิ่ง เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ในแนวราบหรือสมการ (3.71) คือ $F = -kx$.

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน และสมการ (3.71) เราสามารถหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ทั้งในแนวราบและแนวดิ่งได้เหมือนกัน คือ

$$m\ddot{x} = -kx,$$

หรือ

$$m\ddot{x} + kx = o. \tag{3.73}$$

จากที่เราได้ศึกษาฟิสิกส์ทั่วไปมาแล้ว เราทราบได้ทันทีว่า สมการ (3.73) คือ สมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคอย่างง่ายนั่นเอง . สมการนี้เรานำไปใช้ประโยชน์และแก้ปัญหาโจทย์ทางกลศาสตร์ได้มากมาย เช่น กรณีของเพนดูลัมอย่างง่าย (Simple pendulum) หรือการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา, Physical pendulum, torsion pendulum, และในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้าเกี่ยวกับวงจรของไฟฟ้า ๆ

การแก้สมการ (3.73) สามารถทำได้หลายวิธี. วิธีหนึ่งของการแก้สมการนี้ โดยการใช้ trial method ซึ่ง ฟังก์ชั่น Ae^{qt} เป็น trial solution, เมื่อ q เป็นค่าคงที่ที่ต้องการหา. ถ้า $x = Ae^{qt}$ เป็นจริง, ดังนั้นสำหรับทุก ๆ ค่าของ t จากสมการ (3.73) คือ

$$m\frac{d^2(Ae^{qt})}{dt^2} + k(Ae^{qt}) = o,$$

หลังจากตัดพวก Common factors ออกไป สมการจะอยู่ในลักษณะของ auxiliary equations (สมการออกซิเลียรี)

$$mq^2 + k = o$$

นั่นคือ

$$q = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_o \tag{3.74}$$

เมื่อ $i = \sqrt{-1}$, และ $\omega_o = \sqrt{k/m}$ สำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นในช่วงนี้ การแก้ปัญหาต้องทราบทฤษฎีในการแก้ปัญหาเพิ่มเติม (นั่นคือ, ถ้า f_1 และ f_2 เป็น Solutions, แล้ว $f_1 + f_2$ ก็เป็น Solutions ด้วย). ดังนั้นการแก้ปัญหาทั่วไป (general solution) ของสมการ (3.73) คือ

$$x = A_+ e^{i\omega_o t} + A_- e^{-i\omega_o t} \tag{3.75}$$

สมการ (3.75) หาได้จากการอธิบายค่า x ในลักษณะของสมการ (3.74) กล่าวคือในการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคนั้น

$$x = A_+ e^{i\omega_o t}, \qquad x = A_= e^{-i\omega_o t}$$

จากสมการ (3.75) อีกครั้ง, เมื่อ $e^{iu} = \cos u + i \sin u$, เราสามารถเปลี่ยนฟอร์มของสมการ (3.75) ได้เป็น

$$x = a \sin \omega_o t + b \cos \omega_o t \tag{3.76}$$

หรือ

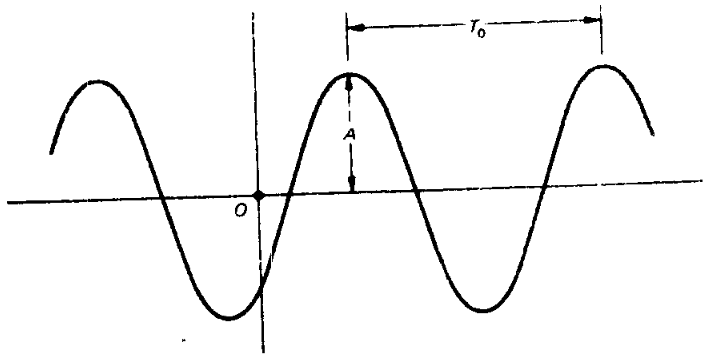
$$x = A \cos (\omega_o t + \theta_o) \tag{3.77}$$

ค่าคงที่จากการอินทิเกรตของสมการ (3.76), (3.77) หาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น และสมการทั้งสองนี้คือคำตอบหรือการแก้ปัญหาของสมการ (3.73)

การแก้สมการ (3.73) เราอาจใช้วิธีอื่น ๆ ก็ได้ ดังได้กล่าวมาแล้วว่าวิธีนี้เป็นเพียงวิธีหนึ่งเท่านั้น. สำหรับค่าคงที่ ω_o นั้นเรียกว่าความถี่เชิงมุม (angular frequency), เมื่อค่า x มีค่ามากที่สุดเรียกว่าช่วงกว้าง (Amplitude) หรือ A. ค่าคงที่ของ A ในสมการ (3.76) คือ $(a^2 + b^2)^{½}$ ส่วน θ_o คือมุมเฟสเริ่มต้น (initial phase angle).

ถ้า T_o คือคาบเวลา (period) ของการแกว่งครบ 1 รอบ ดังรูป 3.4 ดังนั้น คาบเวลาของการแกว่งครบ 1 รอบวงกลม (2π เรเดียน) คือ

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.78}$$



รูป 3.4 กราฟของระยะขจัด x กับเวลา t ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค

ถ้าความถี่เชิงเส้น (linear frequency) ของการแกว่งคือ f_o ซึ่งหาได้จากจำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ต่อหนึ่งหน่วยเวลานั้น

$$\omega_o = 2\pi f_o ,$$

และ

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \tag{3.79}$$

ตัวอย่าง 3.6 แท่งสี่เหลี่ยมมวล m ดึงสปริงใหม่อันหนึ่งให้ยืดออกได้เป็นระยะรวมเท่ากับ b. ถ้าแท่งสี่เหลี่ยมนี้ดึงสปริงลงในแนวดิ่ง เป็นระยะทาง 1 จากตำแหน่งสมดุลย์ (ในแนวดิ่ง) โดยเริ่มปล่อยแท่งสี่เหลี่ยมเมื่อเวลา $t = o$, จงหาผลลัพธ์ของการ

เคลื่อนที่ในเทอมฟังก์ชั่นของเวลา t.

<u>วิธีทำ</u> สิ่งแรกที่เราต้องหาคือค่าคงที่ของสปริง ในขณะที่มวล m ถูกดึงให้ยืดออกเป็นระยะรวม b ซึ่งมวล m อยู่ในลักษณะสมดุลย์แบบสถิตย์ (Static equilibrium), ดังนั้นจากสมการ (3.48) และสมการ (3.71) เราได้

$$f = -mg = -kb$$

ดังนั้น

$$k = \frac{mg}{b}$$

ความถี่เชิงมุมของการแกว่ง (oscillate) คือ

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

ในการหาค่าคงที่สำหรับสมการของการเคลื่อนที่, จากสมการ (3.77)

$$x = A \cos (\omega_o t + \theta_o)$$

ซึ่งเราทราบว่า ที่เวลา $t = o$,

$$x = 1 \quad \text{และ} \quad x = o$$

แต่ในเวลา t ใด ๆ

$$x = -A \omega_o \sin (\omega_o t + \theta_o)$$

ซึ่งค่าคงที่

$$A = 1 \quad \text{และ} \quad \theta_o = 0$$

ดังสมการของการเคลื่อนที่ในเทอมฟังก์ชั่นของเวลา คือ

$$x = 1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{b}}\ t \right)$$

<u>ตอบ</u>

3.8 พิจารณาพลังงานของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิค (ENERGY CONSIDERATIONS IN HARMONIC MOTION)

กรณีการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรงคืนตัว $F = -kx$. เมื่อเราต้องการคำนวณหาค่าของงาน W ซึ่งเกิดจากแรงภายนอก F^{ext} ที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลย์ $(x = o)$ ไปยังตำแหน่ง x ใด ๆ. เราทราบว่า $F^{ext} = -F = kx$, ดังนั้นงานที่เกิดขึ้น คือ

$$W = \int F^{ext}\, dx = \int_0^x (kx)\, dx = \tfrac{1}{2} kx^2$$

ค่าของงานในที่นี้ คือ ค่าของพลังงานศักย์ของสปริงนั่นเอง

$$V(x) = W = \tfrac{1}{2} kx^2. \tag{3.80}$$

ดังนั้น $F = -\frac{dv}{dx} = -kx$, ดังนิยามของสมการ (3.37). พลังง่านรวม E คือ ค่าของพลังงานจลน์ บวกกับพลังงานศักย์

$$E = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 \tag{3.81}$$

เมื่อเราแก้สมการ (3.81) หาค่าความเร็วในเทอมฟังก์ชั่นของระยะขจัด x เราได้

$$\dot{x} = \left(\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.82)$$

สมการ (3.82) สามารถอินทิเกรต โดยกำหนดให้เวลา t เป็นฟังก์ชั่นของ x ได้, ดังนี้ :

$$t = \frac{dx}{\sqrt{(2E/m) - (k/m)x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cos^{-1} \left(\frac{x}{A}\right) + C$$

เมื่อ

$$A = \frac{2E}{k}$$

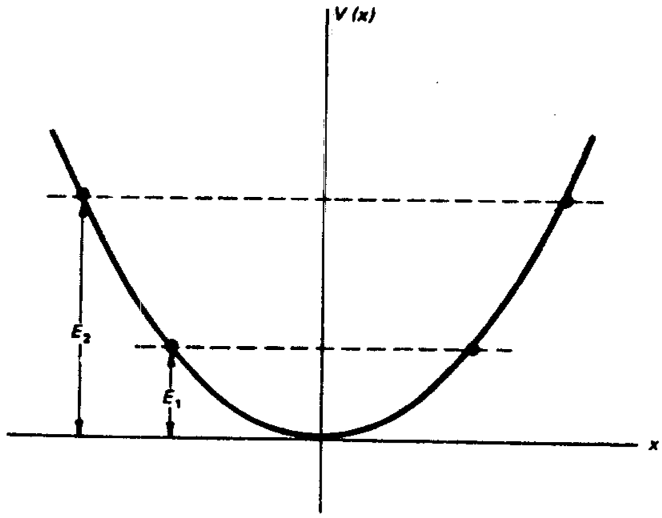
และ C คือค่าคงที่จากการอินทิเกรต. ถ้าเราแก้สมการเพื่อหาค่า x ในลักษณะฟังก์ชั่นของเวลา เราจะได้ความสัมพันธ์แบบเดียวกับรูป 3.1. แต่ถ้าเราใช้ค่าของ A ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (3.81) โดยให้ค่าของ x มีค่าระหว่าง $\sqrt{2E/k}$ กับ $-\sqrt{2E/k}$ เพื่อจะได้ค่าของ x หรือความเร็วที่เป็นจริง. นี่เป็นการอธิบายรูป 3.5 ซึ่งแสดงในรูปของพลังงานศักย์ V(x) และจุดกลับของการเคลื่อนที่สำหรับค่าของพลังงานรวมที่แตกต่างกัน

จากสมการ (3.81) หรือสมการของพลังงาน จะเห็นว่า $\dot{x}$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อระยะขจัด x = o ซึ่ง $\dot{x}$ ก็คือความเร็วที่มีค่ามากที่สุด v_{max} นั่นเอง. ดังนั้น เราทราบว่า

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

หรือ

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad A = \omega_o A \tag{3.83}$$

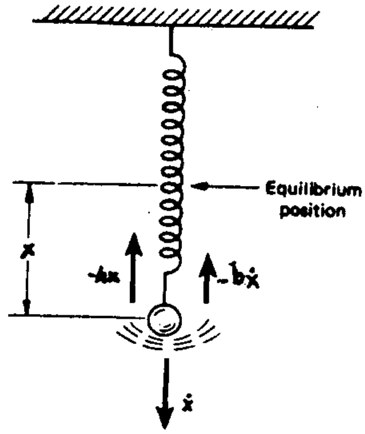


รูป 3.5 Graph of the potential energy function of the harmonic oscillartor. The turning points defining the amplitude are shown for two vallues of the totel energy

3.9 การเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิค (DAMPED HARMONIC MOTION)

จากตอน 3.7 และ 3.8 เราถือว่าเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ใด ๆ ที่ไม่มีแรงเสียดทานจากภายนอกเลย แต่ตามความเป็นจริงแล้ว การเคลื่อนที่ของวัตถุต่าง ๆ เช่นมวล m ที่ผูกติดกับสปริง หรือการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา ไม่ใช่จะสามารถเคลื่อนที่ต่อไปได้อย่างไม่หยุดยั้ง ช่วงกว้าง (Amplitude) ของการแกว่งกลับไปกลับมาจะค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ ทั้งนี้เนื่องจากมีแรงเสียดทานหรือแรงหน่วง (damping froce) มาต้านการเคลื่อนที่ แรงหน่วงหรือแรงเสียดทานอาจจะมาจากแรงในลักษณะต่าง ๆ เช่น แรงเสียดทานของอากาศ แรงเสียดทานที่เกิดจากของเหลวหรือของไหล หรือแรงภายในของวัตถุเอง เราทราบแล้วว่าขนาดของแรงเสียดทานมักเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็ว แต่มีทิศทางตรงกันข้าม. ตัวอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิค คือรูป 3.6, ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ของมวล m ที่ผูกติดกับสปริงในแนวดิ่ง โดยมี

แรงเสียดทานของอากาศคอยต้านการเคลื่อนที่ ทำให้ค่าของ A ลดลงไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งเป็นศูนย์ และพลังงานรวมก็จะลดลงเช่นกัน



รูป 3.6 The damped harmonic oscillator

จากรูป 3.6 ถ้าแรงเสียดทานของอากาศ = $-bv$ = $-b\dot{x}$, ดังนั้นสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิค คือ (ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับสมการ (3.73)

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x},$$

หรือ

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = o. \qquad (3.84)$$

การแก้สมการหาค่า x ของสามการ (3.84) เราใช้วิธีการเดียวกันกับการแก้สมการหาค่า x ในสมการ (3.73) ที่แล้วมา, โดยใช้วิธีการของ trial solution ซึ่งเอกโพเนนเชียลฟังก์ชั่น **(exponential function)** Ae^{qt} เป็น trial solution . นี่คือสมการของการแก้ปัญหา สำหรับทุก ๆ ค่า t, ถ้า

$$m \frac{d^2 (A e^{qt})}{dt^2} + b \frac{d}{dt} (A e^{qt}) + k(A e^{qt}) = 0 \qquad (3.85)$$

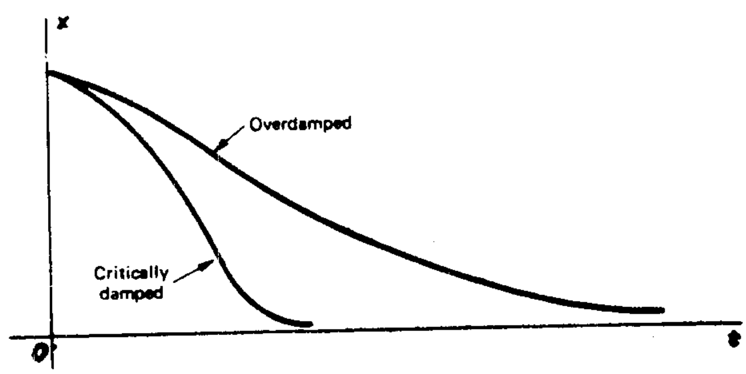
เมื่อ q อยู่ในฟอร์มของสมการออกซิเลียรี (auxiliary equetions) เราได้

$$mq^2 + bq + k = 0$$

ค่าของ q หาได้จากสูตรของควอดแรทิก (quadratic formular) ที่รู้จักกันดี คือ

$$q = \frac{-b \pm (b^2 - 4mk)^{\frac{1}{2}}}{2m} \qquad (3.86)$$

เมื่อเราแทนค่าคงที่ เพื่อหาค่า q ในสมการ (3.86) จะเห็นว่าค่าของ q ขึ้นอยู่กับรู้ทสองของ $b^2 - 4mk$. ดังนั้นในการหาค่า q เราแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี คือ : (a) $b^2 > 4mk$, (b) $b^2 = 4mk$, และ (c) $b^2 < 4mk$. ทั้งสามกรณีนี้ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุในแต่ละกรณีจะแตกต่างกันไป. ในกรณี (a) และ (b), ซึ่งเราเรียกว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบ Over damping และ critical damping ค่าของ q ที่เป็นจริงนั้นจะมีเฉพาะค่าที่เป็นลบ ดังนั้นจึงไม่มีการออสซิลเลตเกิดขึ้นสำหรับกรณีที่ $b^2 > 4mk$ และ $b^2 = 4mk$ และระยะขจัด x ของทั้งสองกรณีจะลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ (ตามความสัมพันธ์กับเวลา t) หรือการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นมันจะเคลื่อนที่เข้าหาตำแหน่งสมดุลย์เพียงอย่างเดียว จนกระทั่งเวลานานพอ มันก็จะอยู่ตรงตำแหน่งสมดุลย์ (x = o). การเคลื่อนที่ในกรณี (a) และ (b) แตกต่างกัน ตรงที่กรณี (a) นั้นค่าของ x จะลดลงอย่างช้า ๆ และเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลย์ช้ากว่ากรณี (b), ดังรูป 3.7



รูป 3.7 **Graph of displacement versus time for the overdamped and critically damped cases of the harmonic oscillator**

กรณีของ over damped เรากำหนดค่าคงที่สองค่าของ q คือ $-r_1$ และ $-r_2$ ซึ่งได้จากสมการ (3.86). ดังนั้นสมการการแก้ปัญหาทั่วไป (general solution) อาจเขียนได้เป็น

$$x = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t} \tag{3.87}$$

สำหรับกรณีของ critically damped ซึ่งค่าของ $b^2 = 4mk$ นั้น. สมการการแก้ปัญหาทั่วไปจะอยู่ในฟอร์ม

$$x = e^{-rt} (A_1 + A_2 t) \tag{3.88}$$

เมื่อ $r = \frac{b}{2m}$, และสมการ (3.88) นี้อาจหาได้จากการแทนค่าโดยตรง.

ในกรณีที่แรงเสียดทานมีค่าน้อยพอสำหรับ $b^2 < 4mk$ ซึ่งอยู่ในกรณี (c) และเราเรียกว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบ Underdamping ในกรณีนี้ q มีค่าเป็นจริงทั้งบวกและลบ. ค่ารูทสองของ $b^2 - 4mk$ ในสมการ (3.86) เป็นค่าสมบูรณ์, ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่สำหรับการแก้ปัญหาทั่วไปคือ

$$x = A_+ e^{(-r + i\omega_1 t)} + A_- e^{(-r - i\omega_1)t}, \tag{3.89}$$

เมื่อ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} \tag{3.90}$$

หลังจากใช้สูตร $e^{iu} = \cos u + i \sin u$, เราพบว่าสามารถเขียนสมการ (3.89) เป็น

$$x = e^{-rt} \left(A_+ e^{i\omega_1 t} + A_- e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$= e^{-rt} \left[(iA_+ - i A_-) \sin \omega_1 t + (A_+ + A_-) \cos \omega_1 t\right]$$

หรือ

$$x = e^{-rt} \left(a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t\right) \qquad (3.91)$$

เมื่อ $a = i(A_+ - A_-)$ และ $b = A_+ - A_-$ และจากสมการ (3.91) เราสฤมารถเขียนสมการของการแก้ปัญหาได้อีกแบบ คือ

$$x = A\, e^{-rt} \cos (\omega_1 t + \theta_o) \qquad (3.92)$$

เมื่อ $A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ และ $\theta_o = -\tan^{-1} (b/a)$

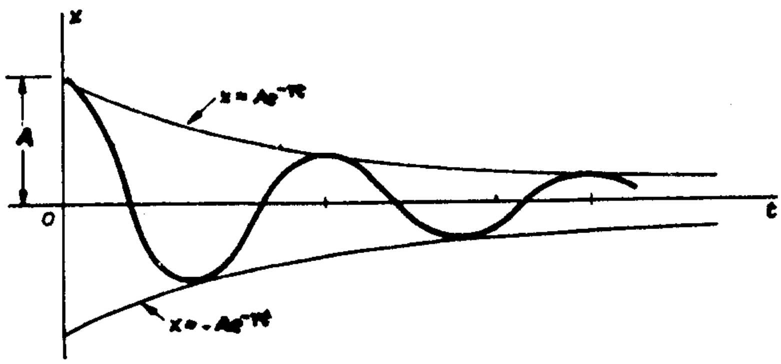
ฟอร์มที่เป็นจริงของสมการ (3.92) แสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่แบบ Undetdamping มีการออสซิลเลต และค่าของช่วงกว้าง (Amplitude) Ae^{-rt} นั้นมีนจะค่อย ๆ ลดลงโดยสัมพันธ์กับเวลาที่เพิ่มขึ้น. ยังมีข้อแม้อีกว่าความถี่เชิงมุมของการออสซิลเลต ω_1 ต้องมีค่าน้อยกว่าความถี่เชิงมุม ω_o (ความถี่ตอนที่ไม่มีการแดมพ์) เราเรียกความถี่ ω_o ว่า ความถี่ตามธรรมชาติ (natural frequency)

ในกรณีที่เกิดการแดมพ์เบา ๆ กล่าวคือ กรณีที่ r มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ ω_o เราได้ความสัมพันธ์โดยประมาณ

$$\omega_1 \approx \omega_o - \frac{r^2}{2\omega_o} \qquad (3.93)$$

สมการนี้อธิบายได้จาก ค่าทางขวามือของสมการ (3.90) โดยทฤษฎีไบโนเมียล (binonaid theorem) และคิดเฉพาะค่าของสองเทอมแรกเท่านั้น

การพรอทกราฟระหว่างระยะขจัด x กับเวลา t เพื่อแสดงลักษณะการเคลื่อนที่ในกรณีของ Under damped นี้ ดูได้จากรูป 3.8



รูป 3.8 Graph of displacement versus time for the underdamped harmonic oscillartor

จากสมการ (3.92) เราทราบว่ามีค่าอยู่สองค่าคือ $x = Ae^{-rt}$ และ $x = -Ae^{-rt}$ ซึ่งเป็นส่วนโค้งในการล้อมรอบลักษณะการเคลื่อนที่แบบ Under damped. เพราะว่าค่าของ cosine มีค่าระหว่าง +1 กับ -1 หรือ -1 กับ +1, ณ ค่าของ cosine นี้เราให้เป็นจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ของส่วนโค้งที่ถูกล้อมรอบ. ทุก ๆ ส่วนโค้งของการเคลื่อนที่จะแตะกับเส้นล้อมรอบทุก ๆ ครึ่งหนึ่งของคาบเวลา (period) หรือ $\frac{\pi}{\omega_1}$, จนกระทั่ง $x = o$ หรือวัตถุไม่มีการเคลื่อนที่ต่อไป.

พิจารณาเรื่องของพลังงาน (Energy Considerations) พลังงานทั้งหมดของการเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์ในเวลา t ใด ๆ เท่ากับพลังงานจลน์ $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ บวกด้วยพลังงานศักย์ $\frac{1}{2} kx^2$:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

เราพบว่าในกรณีที่ไม่มีการแดมพ์นั้น ค่าของพลังงานรวมคงที่ แต่ในกรณีของการเคลื่อนที่เมื่อเกิดการแดมพ์นั้นค่าของพลังงานรวมจะไม่คงที่, เราหาได้โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการของพลังงานรวม (ข้างบน) เทียบกับเวลา ทำให้เราทราบว่าอัตราการเปลี่ยนของพลังงาน E คือ

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{x}\,\dot{x} + k\,\dot{x}\,x = (m\,\ddot{x} + kx)\,\dot{x}$$

แต่, จากสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิค

$$m\,\ddot{x} + k\,x = -\,b\dot{x}$$

ดังนั้น

$$\frac{dE}{dt} = -\,b\,\dot{x}^2 \qquad (3.94)$$

ค่าทางขวามือของสมการ (3.94) เป็นลบเสมอ, และสมการนี้แสดงให้เห็นถึงอัตราการเปลี่ยนของพลังงานซึ่งต้องสูญเสียไปเนื่องจากความร้อนของการเสียดสี.

ตัวอย่าง 3.7 อนุภาคมวล m ผูกติดไว้กับสปริงที่มีค่าคงที่ = k. ถ้าการเคลื่อนที่ของมวล m นี้เกิดการแดมพ์ขึ้น โดยที่ $r = \frac{\omega_o}{4}$ จงหาค่าของความถี่ธรรมชาติ.

วิธีทำ จากสมการ (3.90)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\omega_o^2}{16}} = \sqrt{\omega_o^2\left(1 - \frac{1}{16}\right)}$$

$$= \omega_o\sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{15}{16}}$$

ตอบ

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> จากตัวอย่าง 3.7, จงหาอัตราส่วนของช่วงกว้าง (Amplitude) ของสองการออสซิลเลตที่ต่อเนื่องกัน

<u>วิธีทำ</u> อัตราส่วนของ Amplitude ทั้งสองคือ

$$\frac{A\,e^{-rT_1}}{A} = e^{-rT_1}$$

เมื่อ

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

แทนค่า ω_1 และ ω_o จากตัวอย่าง 3.7

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_o}\sqrt{\frac{16}{15}}$$

$$= \frac{2\pi}{4r}\sqrt{\frac{16}{15}}$$

หรือ

$$rT_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{16}{15}} = 1.56$$

ดังนั้น $\frac{A\,e^{-rT_1}}{A} = e^{-1.56} = 0.21$ <u>ตอบ</u>

3.10 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเมื่อมีแรงกระทำ (FORCED HARMONIC MOTION)

ในตอนนี้ เราจะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของแดมพ์ฮาร์โมนิค ออสซิลเลเตอร์ที่เกิดจากแรงฮาร์โมนิค (harmonic force) ภายนอก, ถ้าเราสมมติให้แรงภายนอกนี้คือ F^{ext} ซึ่งมีความถี่เชิงมุม ω และมีค่าอัมปลิจูดหรือช่วงกว้างที่แน่นอนเท่ากับ F_o. ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการของแรงนี้ได้เป็น

$$F^{ext} = F_o \cos (\omega t + \theta) ,$$

โดยการใช้ฟอร์มของเอกโพเนนเชียล เราสามารถหาสมการที่ให้ความสะดวกยิ่งขึ้นคือ

$$F^{ext} = F_o e^{i(\omega t + \theta)}$$

ในการเคลื่อนที่แบบแดมพ์ฮาร์โมนิคนี้ แรงรวมทั้งหมดที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่มีอยู่สามแรง คือ แรงคืนตัวของสปริง $-kx$, แรงหน่วง (damping force) $- b\dot{x}$, และแรงภายนอก F^{ext}. จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน ดังนั้นสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการเคลื่อนที่ คือ

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F^{ext}$$

หรือ

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F^{ext} = F_o e^{i(\omega t + \theta)} \qquad (3.95)$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น (3.95) นี้ ประกอบด้วย ผลบวกของแรง 2 พวก คือ พวกแรกเป็นแรงคืนตัวของสปริง $-kx$ กับแรงหน่วง $-b\dot{x}$ ซึ่งสมการดิฟเฟอเรนเชียลของมันคือ $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = o$ หรือสมการ (3.84) ของตอนที่แล้ว, ส่วนพวกที่สองมีแรงเพียงแรงเดียว คือ F^{ext} ที่เรากำหนดค่าความถี่เชิงมุมเป็น ω และมีช่วงกว้างของการออสซิลเลตที่แน่นอนเป็น F_o.

จะเห็นว่าสมการ (3.95) นั้น เราอาจใช้วิธีการทำนองเดียวกับสมการ (3.84) เพื่อแก้สมการได้ โดยการพยายามอธิบายค่าของ x ให้อยู่ในฟอร์ม :

$$x = A\, e^{i(\omega t + e')}$$

ถ้าค่าที่อธิบายถูกต้อง, เราทราบจากสมการ (3.95) ว่า

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left[A\, e^{i(\omega t + e')} \right] + b \frac{d}{dt} \left[A\, e^{i(\omega t + \theta'} \right] +$$

$$k\, A\, e^{i(\omega t + e')} = F_o\, e^{i(\omega t + \theta)}$$

สำหรับทุก ๆ ค่า t. เมื่อแก้สมการต่อ และโดยการตัดองค์ประกอบธรรมดาทิ้ง เราได้

$$- m\omega^2 A + i\omega b A + kA = F_o\, e^{i(\theta - \theta')}$$

$$= F_o \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$$

ดังนั้น ; โดยการเปรียบเทียบแยกส่วนของค่าจินตะ (imaginary parts) และส่วนของค่าจริง เราได้

$$A(k - m\omega^2) = F_o \cos \psi \tag{3.96}$$

$$b\, \omega\, A = F_o \sin \psi \tag{3.97}$$

เมื่อ ψ เป็นผลต่างของเฟส (Phase difference) หรือมุมเฟส (Phase angle) $\theta - \theta'$ หลังจากหารสมการ (3.97) ด้วยสมการ (3.96), เราได้

$$\tan\psi = \frac{b\,\omega}{k - m\omega} \tag{3.98}$$

โดยการยกกำลังสองสมการ (3.96) และสมการ (3.97) แล้วจับสองสมการนี้บวกกัน, และใช้ค่า $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$ เราพบว่า

$$A^2 (k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2 A^2 = F_o^2$$

แก้สมการหาค่า A ได้

$$A = \frac{F_o}{\left[(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.99}$$

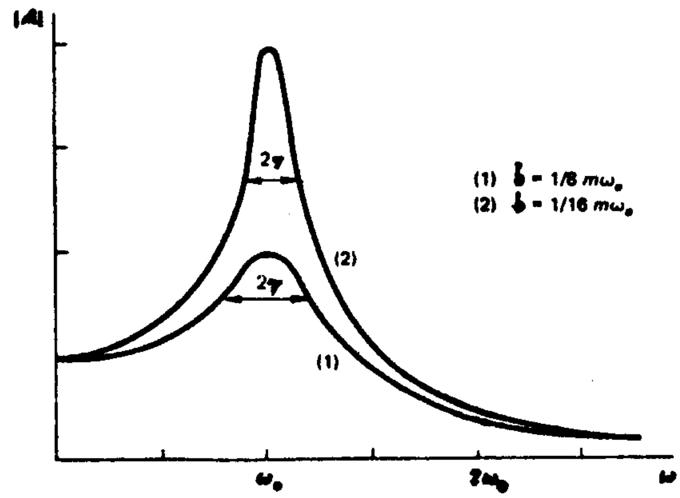
จากที่เราทราบมาแล้วว่า $\omega_o = (k/m)^{\frac{1}{2}}$ และ $r = \frac{b}{2m}$, เราสามารถเขียนสมการ (3.98), และ (3.99) ได้อีกแบบ คือ

$$\tan\psi = \frac{2r\,\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{3.100}$$

และ

$$A = \frac{F_o/m}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\,r^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.101}$$

สมการ (3.101) เป็นความสัมพันธ์ของช่วงกว้าง A กับ driving frequecy ω.



รูป 3.9 Graph of amplitude versus driving frequency

กราฟจากรูป 3.9, แสดงให้เห็นค่าช่วงกว้าง A สมมติว่าค่ามากที่สุดอยู่ตรงตำแหน่ง ความถี่ที่แน่นอน ω_r, เราเรียก ω_r ว่าเป็นความถี่กำทอน (resonant frequency)

การหาค่าความถี่กำทอน ω_r เราคำนวณได้จาก $\frac{dA}{d\omega}$ ของสมการ (3.101) และจัดให้ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับศูนย์. หลังจากแก้สมการของ ω แล้ว เราพบว่าความถี่กำทอนหาได้จาก

$$\omega = \omega_r = (\omega_o^2 - 2r^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.102)$$

ในกรณีที่มีการหน่วงน้อย ๆ (Weak damping) กล่าวคือ เมื่อค่าคงที่ของการหน่วง b มีค่าน้อยมาก, $b << 2\sqrt{m k}$ หรือเท่ากัน. ซึ่งถ้า $r << \omega_o$ เราจะพบว่าความถี่กำทอน ω_r มีค่าใกล้เคียงกับความถี่ที่ไม่มีการหน่วง ω_o. ถ้าเราอธิบายทางขวามือของสมการ (1.102) โดยทฤษฎีไบโนเมียล (binomail Theorem) และคงไว้เฉพาะสองเทอมแรก, เราได้

$$\omega_r \simeq \omega_o - \frac{r^2}{\omega_o}$$

สมการ (3.102) และ (3.103) เมื่อเราเปรียบเทียบกับสมการ (3.90) และ (3.93), จะได้ความถี่ของการออสซิลเลต ω_1 ที่อิสระในการออสซิลเลตด้วยการหน่วง. เราให้ ε เป็นสัญญลักษณ์แทนปริมาณ r^2/ω_o ดังนั้น เราเขียนได้ว่า

$$\omega_1 \simeq \omega_o - \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (3.104)$$

สำหรับค่าโดยประมาณของความถี่ธรรมชาติ, และ

$$\omega_r \simeq \omega_o - \varepsilon \qquad (3.105)$$

สำหรับค่าโดยประมาณของความถี่กำทอน

ช่วงกว้างมากที่สุดของการออสซิลเลต ที่ความถี่กำทอน เราเรียกมันว่า A_{max} และสามารถหาค่า A_{max} นี้ได้จากสมการ (3.101) และ (3.102) ผลลัพธ์ คือ

$$A_{max} = \frac{F_o/m}{2r\sqrt{\omega_o^2 - r^2}}$$

$$= \frac{F_o}{b\sqrt{\omega_o^2 - r^2}} \qquad (3.106)$$

ในกรณีของการหน่วงน้อย ๆ, เราตัดค่า r^2 ทิ้งได้ และเขียนสมการใหม่เป็น

$$A_{max} \simeq \frac{F_o}{2r\, m\omega_o}$$

$$= \frac{F_o}{b\sqrt{\omega_o^2 - r^2}} \qquad (3.107)$$

ฉนั้น ช่วงกว้างของการออสซิลเลตด้วยเงื่อนไขการกำทอน มีค่ามากมาย ถ้าค่าคงที่ของการหน่วงมีค่าน้อยมาก ในทางกลับกัน ถ้าช่วงกว้างมีค่ามาก ค่าคงที่ของการหน่วงก็จะมีค่าน้อย.

เมื่อ เราพิจารณาถึงกรณีการออสซิลเลตด้วยค่าคงที่ของการหน่วงน้อยมาก $r << \omega_o$ นั้น, การอธิบายสำหรับค่าช่วงกว้างที่แน่นอนในสมการ (3.101) เราสามารถหาค่าเพื่อนำไปแทนค่าในสมการนี้ คือ

$$\omega_o^2 - \omega^2 = (\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega)$$

$$\approx 2\omega_o(\omega_o - \omega)$$

$$r\omega \approx r\omega_o$$

และเมื่อเราแทนค่า A_{max} ในสมการ (3.101) ด้วย เราได้สมการของช่วงกว้างในฟอร์ม :

$$A = \frac{A_{max}\, r}{(\omega_o - \omega)^2 + r^2} \qquad (3.108)$$

สมการ (3.108) แสดงให้เห็นว่า เมื่อ $|\omega - \omega_o| = r$ หรือ, ถ้า

$$\omega = \omega_o \pm r$$

แล้ว

$$A^2 = \frac{1}{2} A^2_{max}$$

นั้น, หมายความว่า r เป็นการวัดจากส่วนกว้างของส่วนโค้งกำทอน (resonance curve) ฉนั้น 2r ความถี่แตกต่างระหว่างจุดใด ๆ สำหรับพลังงานที่ลดลง โดยองค์ประกอบของ $\frac{1}{2}$ จากพลังงานของการกำทอน ทั้งนี้เนื่องจากพลังงานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ A^2 ดังได้อธิบายไว้แล้วตามรูป 3.10

อีกทางหนึ่งของการระบุส่วนชันของการกำทอนที่ยอดแหลมของกราฟ เราให้อยู่ในเทอมของตัวสัญญลักษณ์ Q และเรียกมันว่า quality factor ของระบบกำทอน และค่าของมันหาได้จาก

$$Q = \frac{\omega_r}{2r} \tag{3.109}$$

หรือ, สำหรับการหน่วงเบา ๆ

$$Q \simeq \frac{\omega_o}{2r}$$

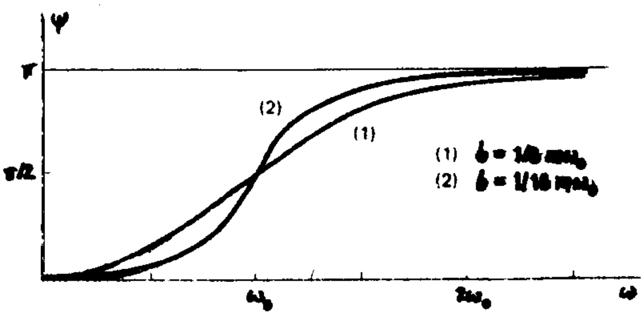
ดังนั้น ส่วนกว้าง $\Delta\omega$ ที่ตำแหน่ง ครึ่งหนึ่งของพลังงาน มีค่าโดยประมาณ

$$\Delta\omega = 2r \simeq \frac{\omega_o}{Q}$$

และ, เมื่อ $\omega = 2\pi f$,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{\Delta f}{f_o} \simeq \frac{1}{Q} \tag{3.110}$$

ผลต่างของเฟส ψ ระหว่างการกระทำจากแรงภายนอกกับการโต้ตอบซึ่งหาได้จากสมการ (3.100). เมื่อนำสมการนี้มาพรอท (plot) โดยให้ ψ เป็นฟังก์ชั่นของ ω, ดังรูป 3.10



รูป 3.10 Graph of phase angle versus driving frequency

จากรูป 3.10 จะเห็นว่าผลต่างของเฟสมีค่าน้อยสำหรับ ω ที่มีค่าน้อย และมีการโต้ตอบของเฟสกับ driving force ที่ความถี่กำทอน, ψ มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $\frac{\pi}{2}$ เฟสของการโต้ตอบเป็น 90 องศา จึงไม่มีการโต้ตอบจากเฟสกับ driving force ที่การ กำทอนนี้. สุดท้ายสำหรับ ω ที่มีค่ามาก ค่าของ ψ เข้าสู่ π ทำให้การเคลื่อนที่ของระบบเป็น 180 องศา จะไม่มีการตอบโต้ของเฟสกับ driving force อีกเลย.

ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่าของความถี่กำทอน (resonance frequecy) และ quality factor สำหรับการออสซิลเลตที่เกิดการแดมพ์ ตามตัวอย่าง 3.7

วิธีทำ จากสมการ (3.102) ความถี่กำทอน คือ

$$\omega_r = (\omega_o^2 - 2r^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\omega_o^2 - \frac{2\omega_o^2}{16})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \omega_o \sqrt{7/8}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{7/8}$$ <u>ตอบ</u>

จากสมการ (3.109) quality factor คือ

$$Q = \frac{\omega_r}{2r}$$

$$= \frac{\omega_o (7/8)^{\frac{1}{2}}}{2(\omega_o/4)}$$

$$= 2 \sqrt{7/8} = 1.87$$ <u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่าง 3.10</u> จากตัวอย่าง 3.9, ถ้า driving frequency = $\frac{\omega_o}{2}$ จงคำนวณหา มุมเฟส (phase angle) ψ

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.100) มุมเฟส คือ

$$\tan \psi = \frac{2 r \omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{2r \frac{\omega_o}{2}}{\omega_o^2 - (\frac{\omega_o}{2})^2}$$

จากตัวอย่าง 3.8 เราทราบ $x = \frac{\omega_o}{4}$, ดังนั้น

$$\tan \psi = \frac{2\left(\frac{\omega_o}{4}\right)\left(\frac{\omega_o}{2}\right)}{\omega_o^2 - \left(\frac{\omega_o}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1/4}{3/4}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$$= 18.5^\circ$$

<u>ตอบ</u>

แบบฝึกหัดบทที่ 3

3.1 a) A certain jet engine at its maximum rate of fuel intake develops a constant thrust (force) of 3000 lb-wt. Given that it is operated at maximum thrust during take-off, calculate the power (in horsepower) delivered to the airplane by the engine when the airplane's velocity is 20 mph. 100 mph. and 300 mph (1 horsepower = 746 watts).

b) A piston engine at its maximum rate of fuel intake develops a constant power of 500 horsepower. Calculate the force it applies to the airplane during take-off at 20 mph, 100 mph, and 300 mph.

3.2 A particle of mass m is subject to a constant force F. At t = 0 it has zero velocity. Use the momentum theorem to find its velocity at any later time t. Calculate the energy of the particle at any later time from both Eqs. (3.7) and (3.8) and check that the results agree.

3.3 A particle of mass m at rest at t = 0 is subject to a force $F(t) = F_o \sin^2 \omega t$.

a) Sketch the form you expect ofor v(t) and x(t). for several periods of oscillation of the force.

b) Find v(t) and x(t) and compare with your sketch.

3.4. A high-speed proton of electric charge e moves with constant speed v_o in a straight line past an electron of mass m and charge-e, initially at rest. The electron is at a distance a from the path of the proton.

a) Assume that the proton passes so quickly that the electron does not have time to move appreciably from its initial position until the proton is far away. Show that the component of force in a direction perpendicular to the line along which the proton moves is

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\varepsilon_o (a^2+v_o^2 t^2)^{3/2}} \text{ (mks units)}$$

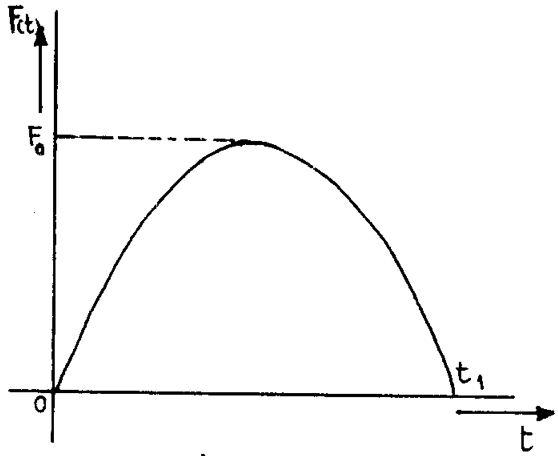
where t = 0 when the proton passes closest to the electron.

b) Calculate the impulse delivered by this force.

c) Write the component of the force in a direction parallel to the proton velocity and show that the net impulse in that direction is zero

d) Using these results, calculate the (approximate) final momentum and final kinetic energy of the electron.

e) Show that the condition for the roiginal assumption in part (a) to be valid is $(e^2/4\pi\varepsilon_o) << \frac{1}{2}mv_o^2$



รูป 3.11 Force in ploblem 3.5

3. 5. A particle of mass m, initial velocity v_o is subject beginning at $t = 0$ to a force F(t) as sketched in Fig 3.11

a) Make a sketch showing F(t) and the expected form of v(t) and x(t).

b) Devise a simple function F(t) having this form, and find x(t) and v(t).

3. 6. A particle of mass m is initially at rest. A force F is applied that increases quadratically with time: $F = ct^2$. Find v and x as functions of t.

3. 7. A particle of mass m is initially at rest. A constant force F_o acts on the particle for a time t_o. The force then suddenly doubles to the value $2F_o$ and remains constant at this value. Find the total distance the particle travels in a time $2t_o$.

3. 8. A particle of mass m is initially at rest. A constant force F_o acts on the particle for a time t_o. The force then increases linearly with time such that after an additional interval t_o the force is equal to $2F_o$. Show that the total distance the particle goes in the totla time

$2t_o$ is (13/6) $F_o t_o^2/m$.

3. 9. A particle of mass m is initially a rest at time $t = 0$. A linearly increasing force $F = ct$ is applied to the particle for a time t_o. The force then decreases linearly with time dropping to zero at time $t = 2t_o$ Find the total distance the particle goes in this time.

3. 10. A block slides on a horizontal surface which has been lubricated with a heavy oil such that the block suffers a viscous resistance that varies as the square root of the speed:

$$f(v) = - cv^{1/2}$$

If the initial speed of the block is v_o at time $t = 0$, find the values of v and x as functions of the time t.

3. 11. A block is projected up an inclined plane with initial speed v_o. If the inclination of the plane is θ, and the coefficient of sliding friction between the plane and the block is μ, find the total time required for the block to return to the point of projection.

3. 12. A particle of mass m is released from rest a distance b from a fixed origin of force that attracts the aprticle according to the inverse square law

$$F(x) = -kx^{-2}$$

Show that the time required for the particle to reach the origin is

$$\pi \left(\frac{mb^3}{8k}\right)^{1/2}$$

3.13. The force acting on a particle varies with the distance x according to the power law

$$F(x) = -kx^n$$

a) Find the potential energy function.

b) If $v = v_o$ at time $t = 0$ and $x = 0$, find v as a function of x.

c) Determine the turning points of the motion.

3.14. A particle initially at rest is subject, beginning at $t = 0$, to a force

$$F = F_o e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta).$$

a) Find its motion.

b) How does the final velocity depend on θ, and on ω ? Hint: The algebra is simplified by writing $\cos(\omega t + \theta)$ in terms of complex exponential functions.

3.15. A boat with initial velocity v_o is slowed by a frictional force

$$F = -be^{\alpha v}$$

a) Find its motion.

b) Find the time and the distance required to stop.

3.16. A boat is slowed by a frictional force $F(v)$. Its velocity decreases according to the formula

$$v = C(t - t_1)^2,$$

where C is a constant and t_1 is the time at which it stops. Find the force $F(v)$.

3.17. The engine of a racing car of mass m delivers a constant power P at full throttle. Assuming that the friction is proportional to the velocity, find an expression for $v(t)$ if the car accelerates from a standing start at full throttle. Does your solution behave correctly as $t \to \omega$?

3.18. a) A body of mass m slides on a rough horizontal surface. The coefficient of static friction is μ_s, and the coefficient of sliding friction is μ. Devise and analytic function $F(v)$ to represent the frictional force which has the proper constant value at appreciable velocities and reduces to the static valud at very low velocities.

b) Find the motion under the force you have devised if the body starts with an initial velocity v_o.

3.19 A particle of mass m is repelled from the origin by a force inversely proportional to the cube of its distance from the origin. Set up and solve the equation of motion if the particle is initially at rest at a distance x_o from the origin.

3.20. A mass m is connected to the origin with a spring of constant k, whose length when relaxed is l. The restoring force is very nearly proportional to the amount the spring has been stretched or compressed so long as it is not stretched or compressed very far. However, when the spring is compressed too far, the force increases very rapidly, so that it is impossible to compress the spring to less than half its relaxed length. When the spring is stretched more than about twice its relaxed length, it begins to weaken, and the restoring force becomes zero when it is stretched to very great lengths.

a) Devise a force function F(x) which represents this behavior. (Of course a real spring is deformed if stretched too far, so that F becomes a function of its previous history, but you are to assume here that F depends only on x.)

b) Find V(x) and describe the types of motion which may occur.

3.21. A particle of mass m is acted on by a force whose potential energy is

$$V = ax^2 - bx^3.$$

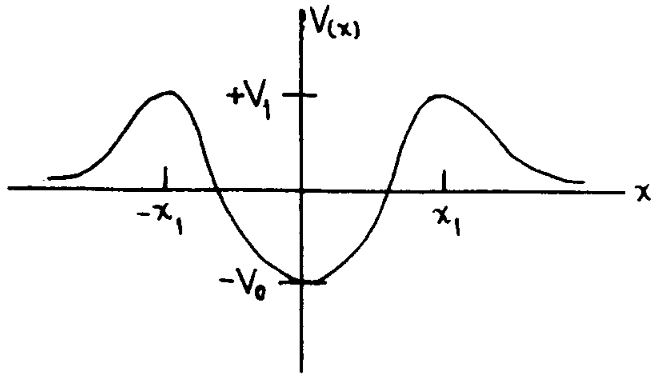
a) Find the force

b) The particle starts at the origin x = 0 with velocity v_o. Show that, if $v_o < v_o$ where v_c is a certain critical velocity, the particle will remain confined to a region near the origin. Find v_c

3. 22. An alpha particle in a nucleus is held by a potential having the shape shown in Fig. 3.12

a) Describe the kinds of motion that are possible.

b) Devise a function $V(x)$ having this general form and having the value $-V_o$ and V_1 at $x = 0$ and $x = \pm x_1$, and find the corresponding force.



รูป 3.12

3. 23. The velocity of a particle of mass m varies with the displacement x according to the equation

$$v = \frac{b}{x}$$

Find the force acting on the particle as a function of x.

3. 24. Given that the force acting on a particle is the product of a function of the distance and a function of the velocity: $F(x,v) = f(x)\, g(v)$. Show that the differential equation of motion can be solved by integration. If the force is a product of a ffunction of distance and a function of time, can the equation of motion be solved by simple integration ? Can it be solved if the force is a product of a function of time and a function of velocity ?

33. 25. The force acting on a particle of mass m is given by

$$F = kvx$$

in which k is a constant. The particle passes through the origin with speed v_o at time $t = 0$. Find x as a function of t.

3. 26. A particle of mass m is subject to a force given by

$$F = B\left(\frac{a^2\quad 28a^5\quad 27a^8}{x^2\quad x^5\quad x^8}\right).$$

The particle moves only along the positive x-axis.

a) Find and sketch the potential energy. (B and a are positive.)

b) Describe the types of motion which may occur. Locate all equilibrium points and determine the frequency of small oscillations about any which are stable.

c) A particle starts at $x = 3a/2$ with a velocity $v = -v_o$, where v_o is positive. What is the smallest value of v_o for which the particle

may eventually escape to a very large distance ?
Describe the motion in that case. What is the maximum velocity the particle will have ? What velocity will it have when it is very far from its starting point ?.

3.27. A particle is subject to a force

$$f \quad F = -kx + \frac{a}{x^3}$$

a) Find the potential V(x), describe the nature of the solutions, and find the solution x(t).

b) Can you give a simple interpretation of the motion when $E^2 \gg ka$?

3.28. Find the solution for the motion of a body subject to a linear repelling force $F = kx$. Show that this is the type of motion to be expected in the neighborhood of a point of unstable equilibrium.

3.29. The potential energy for the force between two atoms in a diatomic molecule has the approximate form:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

where x is the distance between the atoms and a,b are positive constants.

a) Find the force.

b) Assuming one of the atoms is very heavy and remains at rest while the other moves along a straight line, describe the possible motions.

c) Find the equilibrium distance and the period of small oscillations about the equilibrium position if the mass of the lighter atom is m.

3.30. A particle of mass m moves in a potential well given by

$$V(x) = \frac{-V_o a^2(a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}$$

a) Sketch V(x) and F(x).

b) Discuss the motions which may occur. Locate all equilibrium points and determine the frequency of small oscillations about any that are stable.

c) A particle starts at a great distance from the potential well velocity velocity v_o toward the well. As it passes the point x = a, it suffers a collision with another particle, during which it loses a fraction x of its kinetic energy. How large must x be in order that the particle thereafter.

3.31. A projectile is fired vertically upward with an initial velocity v_o. Find its motion, assuming a frictional drag proportional to the square of the velocity. (Constant g.)

3.32. Starting with $e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$, obtain formulas for sin 2θ, cos 2θ in terms of sin θ, cos θ.

3\. 33. Find the motion of a body projected upward from the earth with a velocity equal to the escape velocity. Neglect air resistance.

3\. 34. Find the general solutions of the equations:

a) $m\ddot{x} + b\dot{x} - kx = 0,$

b) $m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0.$

Discuss the physical interpretation of these equations and their solutions assuming they are the equations of motion of a particle.

3.35. A mass m subject to a linear restoring force $-kx$ and damping $-bx$ is displaced a distance x_o from equilibrium and released with zero initial velocity. Find the motion in the under damped, critically damped, and overdamped cases.

3.36. A particle executing simple harmonic motion of amplitude A passes through the equilibrium position with speed v_o. What is the period of oscillation oscillation ?

3.37. Two particles of mass m_1 and m_2, respectively, undergo simple harmonic motion of amplitude A_1 and A_2. If the total energy of particle 1 is twice that of particle 2, what is the ratio of their periods: T_1/T_2 ?

3.38. A particle undergoing simple harmonic motion has a speed v_1 when the displacement is x_1 and a speed v_2 when the displacement is x_2. Find the period and the amplitude of the motion in terms of the quantities given.

3.39. Two springs having stiffness k_1 and k_2, respectively, are used in a vertical position to support a single object of mass m. Show that the angular frequency of oscillation is $(k_1 + k_2)/m^{\frac{1}{2}}$ if the springs are tied in parallel, and $k_1k_2/(k_1 + k_2)m^{\frac{1}{2}}$ if the springs are tied in series.

3.40. A spring of stiffness k supports a box of mass M in which is placed a block of mass m. If the system is pulled downward a distance d from the equilibrium position and then released, find the force of reaction between the block and the bottom of the box as a function of time. For what value of d will the block just begin to leave the bottom of the box at the top of the vertical oscillations ? Neglect any air resistance.

3.41. The time average of a function f(t) is defined by the expression

$$(f) = \frac{1}{T} \int_{c}^{T} f(t)\, dt$$

Show that the time average (over one period) of the kinetic energy of an undamped harmonic oscillator is equal to the time average of the potential energy.

3.42. Show that the ratio of two successive maxima in the displacement of a damped harmonic oscillator is constant. Note: The maxima do not occur at the points of contact of the desplacement curve with the curve Ae^{-rt}.

3.43. Given that the amplitude of a damped harmonic oscillator drops to 1/e of its initial value after n complete cycles. Show that the ratio of period of oscillation to the period of the same oscillator with no damping is given by

$$\frac{T}{T_o} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

3.44. The terminal speed of a freely falling ball is 16 ft per sec. When the ball is supported statically by a light elastic cord, the cord stretches by 2 ft. If the ball is made to undergo vertical oscillations, what is the period ? Assume a linear law of air resistance.

3.45. In the above problem, find the number of oscillations such that the amplitude drops to one percent of the initial amplitude.

3.46. Find the natural frequency and the resonance frequency of the ball in Problem 3.24. Find also the quality factor Q of the system.

3.47. Show that the driving frequency ω, for which the amplitude of a driven harmonic oscillator is one-half the amplitude at the resonant frequency, is approximately $\omega_o \pm r$ 3.

3.48. Find the driving frequency for which the speed of the forced harmonic oscillator is greatest. Hint: Maximize the quantity $v_{max} = \omega A(\omega)$.

3.49. Show that the quality factor Q of a driven harmonic oscillator is equal to the factor by which the response at zero driving frequency must be multiplied to give the response at the resonance frequency.

33.50. Solve the differential equation of motion fo the harmonic oscillator subject to a damped harmonic driving force of the form

$$F_{ext} = F_o e^{-bt} \cos(\omega t)$$

3.51. An undamped harmonic oscillator (b = 0), initially at rest, is subject beginning at t = 0 to an applied force $F_o \sin \omega t$. Find the motion x(t).

3.52. Use the above result to find the steady-state motion of a damped harmonic oscillator that is driven by a periodic square-wave force of amplitude F_o. In particular, find the relative amplitudes of the first three terms A_1, A_3, and A_5 of the response function x(t) in the case that the third harmonic, 3ω, of the driving frequency coincides with the resonance frequency of the oscillator. Let the quality factor Q = 100.

B. 53. A critically damped harmonic oscillator with mass m and spring constant k, is subject to an applied force $F_o \cos \omega t$. If, at $t = 0$, $x = x_o$ and $v = v_o$, what is $x(t)$?