บทที่ 2
พื้นฐานของกลศาสตร์แบบนิวตัน
(ELEMENTS OF NEWTONIAN MECHANICS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานทางกลศาสตร์ของนิวตันในแบบทั่ว ๆ ไป เพื่อที่จะได้เข้าใจเรื่องราวของวิชากลศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์กับวิชาอื่น ๆ ในทางฟิสิกส์ ตลอดจนเรื่องราวเกี่ยวกับกฎการเคลื่อนที่และกฎความโน้มถ่วงเอกภพของนิวตัน เพื่อจะได้นำไปใช้ประโยชน์ได้อย่างถูกต้อง.

2.1 กลศาสตร์, วิทยาศาสตร์ที่แท้จริง, (MECHANICS, AN EXACT SCIENCE)

เมื่อเรากล่าวว่าวิชาฟิสิกส์เป็นวิทยาศาสตร์ที่แท้จริง เราหมายความว่ากฎของมันได้แสดงในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งบรรยายและทำนายผลของปริมาณการวัดที่แน่นอน ประโยชน์ของทฤษฎีปริมาณทางฟิสิกส์ไม่เพียงแต่ใช้ในทางปฏิบัติ แต่ยังสามารถทำนายและควบคุมปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้ถูกต้องอีกด้วย. โดยการเปรียบเทียบผลการวัดที่แน่นอนกับการทำนายผลหลาย ๆ อย่างของทฤษฎีก็จะทำให้เราทราบว่าทฤษฎีนั้นถูกต้องหรือไม่ และสามารถตัดสินใจได้ว่าควรจะมีการเปลี่ยนแปลงหรือแก้ไขอย่างไรบ้าง. การอธิบายเหตุการณ์หนึ่งสามารถอธิบายออกได้เป็นหลายลักษณะเสมอ และถ้าเป็นเช่นนั้นแล้วการตัดสินใจว่าทฤษฎีถูกต้องก็จะทำได้อย่างลำบาก แต่ถ้าทฤษฎีใดสามารถให้ผลการวัดที่สามารถคาดคะเนตัวเลขที่สำคัญถึง 4 หรือ 5 ตัว ทฤษฎีนั้นก็อาจจะไม่ผิดไปจากความจริงมากนัก อย่างไรก็ตามมีหลายกรณีด้วยกัน ที่ผลการวัดระหว่างทฤษฎีและความถูกต้องต่างกันเพียงเล็กน้อยซึ่งอาจจะมีการพัฒนาไปสู่ทฤษฎีใหม่ ๆ ขึ้นมาได้ ข้อแตกต่างเพียงเล็กน้อยนี้บางครั้งไม่อาจตรวจพบได้ ถ้าเรามีความพอใจกับเหตุการณ์ที่ปรากฏออกมา.

สัญญลักษณ์ที่ปรากฏในสมการที่แสดงถึงกฎทางวิทยาศาสตร์จะต้องแทนด้วยปริมาณซึ่งสามารถแสดงในเทอมของตัวเลข ดังนั้นแนวความคิดที่ถูกต้องเกี่ยวกับวิทยาศาสตร์จะถูกพัฒนา จนสามารถให้ความหมายเป็นจำนวนที่แน่นอน ถ้าเราให้นิยามของปริมาณ (เช่นมวล) ซึ่งระบุอย่างแน่นอนว่าค่าปริมาณนั้น ๆ กำหนดในทุกกรณีอย่างไร การสังเกตคุณลักษณะของความหมายของมันอาจจะเป็นประโยชน์ แต่ไม่เพียงพอเท่ากับนิยาม ในด้านข้อเท็จจริงมันไม่น่าจะเป็นไปได้ที่จะให้นิยามที่แน่นอน

เหมาะสมของทุก ๆ แนวความคิดปรากฏในทฤษฎีทางฟิสิกส์ แม้กระนั้นเมื่อเราเขียนลงในสมการทางคณิตศาสตร์โดยสมมติว่าสัญญลักษณ์ที่ปรากฏในสมการมีความหมายแน่นอน และพยายามทำให้ชัดเจนและแน่นอนเท่าที่จะเป็นไปได้ และจดจำหัวข้อหรือจุดที่ไม่แน่นอน ไม่ชัดเจน. บางครั้งแนวความคิดใหม่สามารถจะให้นิยามในเทอมของความหมายอื่นซึ่งเป็นที่รู้จักโดยไม่มีปัญหา ตัวอย่างเช่น

โมเมนตัม = มวล x ความเร็ว

เป็นนิยามที่ถูกต้องและสมบูรณ์ของ "โมเมนตัม" โดยหาจาก "มวล" และ "ความเร็ว" แต่นิยามประเภทนี้จะใช้ไม่ได้ในทุกรูปแบบของทฤษฎี นอกเสียจากว่าเราจะเริ่มต้นจากแนวความคิดขั้นต้นซึ่งทราบความหมายอยู่แล้ว แนวความคิดแรกที่นำมาใช้ในทฤษฎีจะไม่สามารถนำมาใช้ในกรณีนี้ นอกเสียจากว่าเราไม่ทราบจะเอาอะไรมาใส่ไว้ทางขวามือของสมการ ความหมายนี้สามารถเข้าใจได้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยวิธีการซึ่งมีอยู่นอกทฤษฎีทางฟิสิกส์ เช่น เราจะใช้นิยามอันหนึ่งครั้งแล้วครั้งเล่าจนเข้าใจความหมายนั้นอย่างชัดเจน เช่นเดียวกับเด็กที่เริ่มหัดพูดหรือนักฟิสิกส์ใหม่ก็เช่นกัน. เราอาจจะได้นิยามของเทอมทั้งหมดอย่างคร่าว ๆ จากการสังเกตและการทดลอง โดยทั่วไปแล้วหน่วยของจำนวนที่สามารถวัดได้ เช่น แรง, มวล และอื่น ๆ อาจจะถูกนิยามด้วยวิธีการอย่างหนึ่งอย่างใดเพื่อทำการวัดหน่วยนั้น หรือในขั้นต้น เราอาจจะให้นิยามอย่างคร่าว ๆ หลังจากนั้นจึงมีการตัดสินใจเกี่ยวกับความหมายนั้น โดยการใช้กฎและหลักฐานที่เรากำหนดขึ้นเพื่อแสดงผลของทฤษฎีในรูปแบบของการทดลอง. ข้อเสียข้อหนึ่งก็คือเราไม่สามารถแน่ใจได้เลยว่าแนวความคิดของเรานั้นถูกต้อง จึงต้องอาศัยประสพการณ์ช่วยในการตัดสินใจ

ตามประวัติศาสตร์ กลศาสตร์เป็นจุดเริ่มต้นสาขาหนึ่งของฟิสิกส์และพัฒนามาเป็นศาสตร์ที่แท้จริง กฎของคานและกฎของของไหลในสภาวะสถิตเป็นที่รู้จักของนักวิทยาศาสตร์ชาวกรีกก่อนศตวรรษที่ 3 ของ คริสตศักราช. การพัฒนาอย่างมากมายของวิชาฟิสิกส์ในสามร้อยปีที่ผ่านมา เริ่มต้นโดยการค้นพบกฎของกลศาสตร์ (The law of mechanics) โดยกาลิเลโอและนิวตัน. กฎของกลศาสตร์กำหนดสูตรโดยนิวตันในกลางศตวรรษที่ 17. กฎของไฟฟ้าและแม่เหล็กแมกซ์เวลล์ (Jame clerk maxwell) เป็นผู้กำหนดสูตรในประมาณ 200 ปีต่อมา หลังจากนั้นก็กลายเป็นทฤษฎีพื้นฐานของฟิสิกส์ยุคเก่า (classical physics). Relalivistic ฟิสิกส์เริ่มต้นจาก

ผลงานของไอสไตน์ ในปี คศ. 1905 และฟิสิกส์ควอนตัม (quantum physics) มีพื้นฐานจากการทดลองของ Heisenberg และ Schroedinger ในปี คศ. 1925–1926 ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงและกำหนดกฎเกณฑ์ของกลศาสตร์ และ electrodynamics ในแบบความคิดของฟิสิกส์ยุคใหม่ อย่างไรก็ตามฟิสิกส์ยุคใหม่ก็ยังมีพื้นฐานของฟิสิกส์ยุคเก่า และยังคงจำเป็นที่จะต้องเข้าใจหลักของกลศาสตร์และ electrodynamics แบบเก่าในการศึกษาเกี่ยวกับ Relativistic และฟิสิกส์ควอนตัม ยิ่งไปกว่านั้นกฎของกลศาสตร์ยังสามารถประยุกต์ไปใช้ทางวิศวกรรมศาสตร์และดาราศาสตร์ได้อีกด้วย นอกเสียจากว่าความเร็วของวัตถุหรืออนุภาคมีความเร็วใกล้เคียงหรือมากกว่าความเร็วของแสง หรือเมื่อวัตถุมีขนาดใหญ่มากหรือมีระยะทางมาก ๆ มาเกี่ยวข้อง กลศาสตร์ relativistic จะให้ผลบางอย่างเหมือนกับกลศาสตร์แบบเก่าที่จริงมันต้องเป็นเช่นนั้น เพราะว่าเรารู้จากประสพการณ์ว่ากลศาสตร์แบบเก่าให้ผลที่ถูกต้องในกรณีปกติ ในทำนองเดียวกันกลศาสตร์ควอนตัม (quantum mechanics) ก็เกี่ยวกับกลศาสตร์แบบเก่าด้วย ยกเว้นเมื่อเรานำไปประยุกต์ใช้กับระบบขนาดโมเลกุลหรือเล็กกว่านี้ ตามความจริงแล้วหลักการขั้นพื้นฐานในการกำหนดสูตรใหม่ของทฤษฎีทางฟิสิกส์นั้นจำเป็นจะต้องสอดคล้องกับทฤษฎีเก่า เมื่อนำไปใช้กับเหตุการณ์ซึ่งทฤษฎีเก่าเคยพิสูจน์ว่าถูกต้องมาก่อนแล้ว.

กลศาสตร์เป็นการศึกษาเรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุ กลศาสตร์อาจแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะ คือ จลศาสตร์ (kinematics), พลศาสตร์ (dynamics), และสถิตศาสตร์ (statics) จลศาสตร์เป็นการศึกษาและบอกลักษณะของการเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้ของวัตถุ, พลศาสตร์เป็นการศึกษากฎที่ใช้กำหนดการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นไปได้ในระหว่างการเคลื่อนที่ทุกกรณีที่กำหนด ในทางพลศาสตร์เราจะมีแนวความคิดเกี่ยวกับแรง ปัญหาการเคลื่อนที่แบบพลศาสตร์ คือ การกำหนดระบบทางฟิสิกส์สำหรับการเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรงที่กำหนด, สถิตศาสตร์เป็นการศึกษาเรื่องของแรงและระบบของแรง โดยที่ระบบของแรงกระทำต่อวัตถุที่หยุดนิ่ง.

2.2 จลศาสตร์, ลักษณะของการเคลื่อนที่ (KINEMATICS, THE DESCRIPTION OF MOTION)

กลศาสตร์เป็นวิทยาศาสตร์ที่ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ สิ่งแรกเราจึงต้องอธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ เป็นการง่ายที่จะอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดียว นั่นคือ ขนาดและโครงสร้างภายในของวัตถุไม่เป็นปัญหาสำหรับการพิจารณา ตัวอย่าง เช่น โลกเราซึ่งสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นอนุภาคเดียว สำหรับปัญหาการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ แต่ไม่ถูกต้องเสมอไปสำหรับปัญหาบนผิวโลก. เราสามารถอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่เกี่ยวกับตำแหน่งของอนุภาคโดยการระบุจุดในสเปซ ซึ่งทำได้โดยกำหนดโคออดิเนตขึ้นมา 3 ตัวในแกนที่เราใช้กันเป็นส่วนใหญ่ คือ regtancular coordinates สำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (บทที่ 3) เราใช้โคออดิเนตเพียง 1 ตัวเท่านั้น. เราระบุโคออดิเนตในลักษณะฟังก์ชั่นของเวลา กล่าวคือ

$$
\begin{aligned}
&1 - \text{มิติ} \quad : \quad x(t) \\
&2 - \text{มิติ} \quad : \quad x(t),\ y(t) \qquad\qquad (2.1) \\
&3 - \text{มิติ} \quad : \quad x(t),\ y(t),\ z(t)
\end{aligned}
$$

ปัญหาพื้นฐานของกลศาสตร์แบบเก่า คือ การหาวิธีที่จะกำหนดฟังก์ชั่นซึ่งระบุตำแหน่งของวัตถุในรูปฟังก์ชั่นของเวลา ความหมายทางฟิสิกส์เกี่ยวกับฟังก์ชั่น $x(t)$ คือ การจำกัดกฎที่จะบอกว่าเราวัดโคออดิเนต x ของอนุภาคในเวลา t ได้อย่างไร สมมติว่าเราทราบความหมายของ $x(t)$ เราสามารถหาความเร็ว v_x ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของเวลา t ในแนวแกน x ได้ คือ

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.2)$$

ในทำนองเดียวกัน

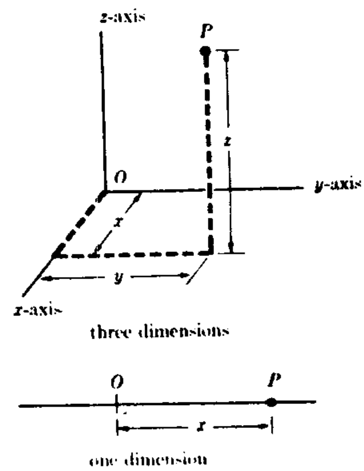
$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

ตอนนี้เราสามารถหาความเร่งในแต่ละแกน คือ a_x, a_y, a_z ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของความเร็วของแต่ละแกนเทียบกับเวลา กล่าวคือ

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (2.3)$$

$$a_z = \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$



รูป 2.1 Rectargular coordinates specifying the position of a particle p relative to on origin 0

การนำระบบโคออดิเนตมาใช้ เราต้องดูถึงความเหมาะสมเกี่ยวกับรูปร่างของวัตถุหรืออนุภาคว่าอยู่ในลักษณะอย่างไร มีการเคลื่อนที่แบบไหน ไม่จำเป็นว่าเราจะต้องใช้ regtangular coordinates เสมอไป เพราะบางครั้ง regtangular coordinates อาจไม่สะดวกที่จะใช้ได้ เราจึงต้องใช้ระบบโคออดิเนตแบบอื่น (ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1) เช่น ทรงกลม เราใช้ spherical coordinates เป็นต้น

2.3 พลศาสตร์. มวลและแรง (DYNAMICS. MASS AND FORCE)

จากประสพการณ์ทำให้เราเชื่อว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุจะถูกควบคุมโดยอัตรกิริยาระหว่างวัตถุเองและสิ่งที่อยู่รอบ ๆ ตัวมัน การสังเกตลักษณะการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์และการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเรียบทำให้เราได้ความคิดว่าการเปลี่ยนความเร็วของวัตถุเกิดขึ้นจากอันตรกิริยาของวัตถุและสิ่งรอบ ๆ ตัวมัน, วัตถุที่อยู่โดดเดี่ยวสำหรับทุก ๆ อัตรกิริยาจะมีความเร็วคงที่ ด้วยเหตุนี้เองการกำหนดกฎทางพลศาสตร์ เราจึงมุ่งความสนใจไปยังความเร่ง.

เรามาจินตนาการเกี่ยวกับอันตรกิริยาของวัตถุ 2 อัน และวัตถุที่อยู่โดดเดี่ยวซึ่งเกิดจากอันตรกิริยาของสิ่งรอบตัวมัน โดยการจินตนาการอย่างสังเขปของเด็กชายสองคน ที่มีขนาดคนละขนาด (ไม่จำเป็นจะต้องมีขนาดเท่ากัน) เล่นชักกะเย่อกันบนผิวเรียบของน้ำแข็งที่แข็งเกร็ง. แม้ว่าไม่มีการกระทำระหว่างวัตถุ 2 อันใด ๆ จะสามารถอยู่ในลักษณะโดดเดี่ยวได้อย่างสมบูรณ์เนื่องจากอันตรกิริยาของวัตถุอื่น ๆ แต่สิ่งนี้ก็เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดของจินตนาการสำหรับการยอมรับกฎทางคณิตศาสตร์แบบง่าย ๆ. ถ้าเราวัดโคออดิเนต x_1 และ x_2 ของวัตถุทั้งสองในแนวของความเร่งได้ แล้ว

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = -k_{12} \tag{2.4}$$

เมื่อ k_{12} เป็นค่าคงที่ที่เป็นบวกของวัตถุ 2 ชิ้นที่เกี่ยวข้องกัน เครื่องหมายลบแสดงถึงความจริงที่ว่าความเร่งทั้งสองจะมีทิศทางตรงกันข้าม

เรายังพบว่าโดยทั่วไปวัตถุที่ใหญ่หรือมีน้ำหนักมาก จะถูกเร่งขึ้นได้น้อยจากความจริงเราทราบว่าอัตราส่วนของ k_{12} เป็นสัดส่วนโดยตรงกับน้ำหนักของวัตถุ ที่ 2 ต่อวัตถุที่ 1 และความเร่งจากอันตรกิริยาของวัตถุทั้งสองเป็นสัดส่วนผกผันกับน้ำหนัก สิ่งที่กล่าวมานี้เป็นแนวทางสำหรับที่จะให้ความหมายของคำว่า "มวล" ของวัตถุในเทอมของความเร่ง. เราให้วัตถุมาตรฐานเป็นหนึ่งหน่วยของมวลสำหรับมวลของวัตถุอื่น ๆ เราหาได้จากอัตราส่วนของความเร่งของหนึ่งหน่วยมวลต่อความเร่งของวัตถุอื่น ๆ เมื่อวัตถุทั้งสองนั้นมีอันตรกิริยาต่อกัน :

$$m_i = k_{1i} = -\ddot{x}_1/\ddot{x}_2 \qquad (2.5)$$

เมื่อ m_i เป็นมวลของวัตถุ i, และวัตถุ 1 เป็นหนึ่งหน่วยมวลมาตรฐาน. เพื่อว่าสมการ (2.5) อาจเป็นนิยามที่มีประโยชน์ อัตราส่วน k_{12} ของความเร่งของวัตถุทั้งสองต้องมีข้อกำหนดที่แน่นอน

สิ่งสำคัญอีกอย่างคือ แนวความคิดของมวลที่เป็นอิสระของวัตถุซึ่งถูกกำหนดให้เป็นมวลหนึ่งหน่วยในความหมายที่ว่าอัตราส่วนของมวล 2 มวลจะเป็นอันเดียวกันโดยไม่มีปัญหาว่าหนึ่งหน่วยของมวลจะถูกกำหนดอย่างไร นี่เป็นความจริงเพราะว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ได้ค้นพบจากการทดลอง ระหว่างอัตราส่วนของความเร่งซึ่งนิยามโดยสมการ (2.4) ของวัตถุใด ๆ 3 อัน คือ

$$k_{12}\ k_{23}\ k_{31} = 1 \qquad (2.6)$$

สมมติว่าวัตถุ 1 เป็นหนึ่งหน่วยของมวล ดังนั้นวัตถุ 2 และวัตถุ 3 จะมีอันตรกิริยาซึ่งกันและกัน เราหาความสัมพันธ์นี้ได้จากสมการ (2.4), (2.6) และ (2.5) ดังนี้

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2/\ddot{x}_3 &= -k_{23} \\ &= -1\ (k_{12}\ k_{31}) \\ &= -k_{13}\ /\ k_{12} \\ &= -m_3/m_2 \qquad (2.7)\end{aligned}$$

ในที่สุดจะไม่มีการกล่าวถึงวัตถุ 1 ซึ่งเป็นมวลหนึ่งหน่วยมาตรฐาน ด้วยเหตุนี้อัตราส่วนของมวล 2 มวลใด ๆ จึงเป็นลบ และผกผันกับอัตราส่วนของความเร่ง โดยไม่เกี่ยวข้องกับมวลหนึ่งหน่วยที่กำหนด

จากสมการ (2.7) เราได้ อันตรกิริยาระหว่างมวล 2 มวลเป็น

$$m_2 \ddot{x}_2 = - m_1\ddot{x}_1 \tag{2.8}$$

นี่คือ ปริมาณที่สำคัญ (มวล x ความเร่ง) และเราเรียกปริมาณนี้ว่าเป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุ ความเร่งของวัตถุในสเปซซึ่งมี 3 องค์ประกอบ แต่ละองค์ประกอบของแรงที่กระทำต่อวัตถุ คือ

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z} \tag{2.9}$$

แรงที่กระทำต่อวัตถุมีหลายชนิด เช่น แรงทางไฟฟ้า, แรงแม่เหล็ก, แรงโน้มถ่วง เป็นต้น

2.4 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (NEWTON'S LAWS OF MOTION)

นิวตัน (Sir Isaac Newton, คศ. 1642–1727) เป็นคนแรกที่สรุปกฎที่เกี่ยวกับแรงและการเคลื่อนที่ไว้ 3 ข้อ โดยอาศัยการสังเกตของเขาและผู้อื่นประกอบ และเราเรียกกฎนี้ว่า "กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน" ซึ่งมีใจความดังนี้

1. อนุภาคอิสระจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยอัตราเร็วคงตัว หรือมิฉนั้นก็อยู่นิ่งกับที่ (ความเร็วเป็นศูนย์)
2. อัตราเวลาของการเปลี่ยนโมเมนตัมของอนุภาคย่อมเท่ากับแรงที่กระทำบนอนุภาคนั้น.
3. เมื่ออนุภาค 2 อนุภาคกระทำระหว่างกัน แรงบนอนุภาคหนึ่งย่อมเท่ากันและตรงกันข้ามกับแรงบนอีกอนุภาคหนึ่ง

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเราสรุปในรูปของสัญญลักษณ์ได้ดังนี้

กฎข้อที่ 1 : $\vec{F} = 0$ เมื่อ $\vec{a} = 0$

กฎข้อที่ 2: $\vec{F} = m\vec{a}$ หรือ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

กฎข้อที่ 3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้งสามข้อนี้ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อกรอบอ้างอิงเป็นกรอบอ้างอิงอินเนอร์เชีย หรือกรอบอ้างอิงเฉื่อย (inertial frame of reference) และความเร็วของอนุภาคจะต้องไม่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.2 ของความเร็วของแสง. อาจสงสัยว่าทำไมนิวตันจึงต้องเขียนกฎข้อที่ 1 แยกออกจากกฎข้อที่ 2 ถ้าพิจารณาดูให้ดีจะเห็นว่ากฎข้อที่ 1 กรอบอ้างอิงของผู้สังเกต คือ กรอบอ้างอิงอินเนอร์เชียเท่านั้นที่กฎข้อที่ 1 จะเป็นจริง จึงอาจถือว่ากฎข้อที่ 1 เป็นการกำหนดขอบเขตการใช้กฎข้อที่ 2 และ 3 ซึ่งเป็นความจริงในขอบเขตนั้น กฎข้อที่ 2 ยังอาจถือเป็นนิยามของแรงและมวลให้เป็นปริมาณทางกายภาพที่ชัดเจนอีกด้วย แทนที่จะคิดเพียงว่าแรงคือการดึงหรือผลัก และมวลคือสมบัติของความเฉื่อยเท่านั้น จากกฎข้อที่ 2 นี้เราอาจกล่าวได้ว่า แรงคือสิ่งซึ่งเมื่อกระทำตามลำพังจะทำให้มวลมีความเร่งได้ ขนาดของแรงวัดได้จากความสัมพันธ์ตามกฎข้อที่ 2 ส่วนโมเมนตัมในกฎข้อที่สองนั้น เราหาได้จากสมการของแต่ละแกนดังนี้

$$P_x = mv_x , \quad P_y = mv_y , \quad P_z = mv_z . \qquad (2.10)$$

เมื่อ P_x, P_y, P_z และ v_x, v_y, v_z เป็นโมเมนตัมและความเร็วในแนวแกน x, แกน y และแกน z ตามลำดับ.

กฎข้อที่ 3 เกี่ยวกับความสมมาตรในธรรมชาติของแรงระหว่างวัตถุ ดังเช่นโลกดึงดูดดวงจันทร์ด้วยแรงเท่าใด ดวงจันทร์ดึงดูดโลกด้วยแรงเท่ากัน ความจริงข้อนี้มีความสำคัญเช่นกัน เช่นการคงที่ของโมเมนตัมในการชนกันเกี่ยวข้องโดยตรงกับกฎข้อนี้ของแรง.

2.5 ความโน้มถ่วง (GRAVITATION)

เราพอจะทราบว่าการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์และการตกของวัตถุบนโลกอาจเนื่องมาจากคุณสมบัติทางกายภาพของวัตถุที่ดึงดูดซึ่งกันและกัน ผู้ที่กำหนดทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์

นี้เป็นคนแรกคือนิวตัน นิวตันได้แสดงโดยวิธีที่พิจารณาภายหลังว่า การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์อาจจะนับหาปริมาณได้ ถ้าสมมติว่าทุก ๆ คู่ของวัตถุมีแรงกระทำร่วมกันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลและเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสองยกกำลังสอง

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2} \qquad (2.11)$$

เมื่อ m_1, m_2 เป็นมวลของวัตถุทั้งสอง, r เป็นระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสอง, และ G คือค่านิจโน้มถ่วง ซึ่งจากการทดลองมีค่าเป็น

$$G = (6.675 \pm 0.005) \times 10^{8} \ \ cm^{3} - sec^{-2}\ g^{-1} \qquad (2.12)$$

กรณีของวัตถุเล็ก ๆ มวล m ที่ใกล้ ๆ ผิวโลกหรือที่ผิวโลก แรงโน้มถ่วงคือ

$$F = mg \qquad (2.13)$$

เมื่อ

$$g = \frac{G\, M}{R^2} = 980.2 \quad cm - sec^{-2}$$

โดยที่ M เป็นมวลของโลก และ R เป็นรัศมีของโลก ปริมาณ g เป็นขนาดของความเร่ง เราสามารถแสดงจากสมการ (2.11) และ (2.13) ว่าวัตถุที่ตกลงมาอย่างอิสระบนผิวโลกตกลงมาด้วยความเร่ง g

สมการ (2.13) ให้ความสะดวกในทางปฏิบัติโดยวัดมวลมากกว่า การพิจารณาจุดกำเหนิดของนิยาม (1.5) เราอาจจะวัดมวลได้โดยหาแรงโน้มถ่วงของมันจากตาชั่ง หรือโดยการเปรียบเทียบแรงโน้มถ่วงบนวัตถุ กับ มวลมาตรฐานด้วยวิธีทำให้สมดุลหรือนำไปชั่ง.

2.6 หน่วยและขนาด (UNITS AND DIMENSIONS)

ในการจัดระบบของหน่วยในเทอมซึ่งแสดงการวัดทางกายภาพ สิ่งแรกเราเลือกหน่วยมาตรฐานสำหรับใช้เป็นปริมาณพื้นฐานทางฟิสิกส์ (เช่น มวล, ความยาว, และเวลา) เราหาหน่วยของปริมาณอื่น ๆ ในเทอมของหน่วยพื้นฐาน (เช่น หน่วยของความเร็วเป็นหนึ่งหน่วยความยาวหารด้วยหนึ่งหน่วยเวลา). มันเป็นเหมือนเดิมสำหรับการกำหนดมวล ความยาว และเวลาให้เป็นปริมาณพื้นฐานทางกลศาสตร์โดยไม่มีข้อขัดแย้ง เราอาจกำหนดปริมาณพื้นฐานเพียง 3 ปริมาณที่กล่าวมาหรือมากกว่าก็ได้

มีระบบหน่วย 3 ระบบที่ใช้กันอยู่ คือ ระบบ c g s (Centimeter - gram -second), ระบบ m k s (meter - kilogram-second) และระบบอังกฤษ (foot - pound - second) จะเห็นว่าชื่อของมันขึ้นอยู่กับชื่อของหน่วยพื้นฐาน หน่วนสำหรับปริมาณอื่นได้จากนิยามของสมการโดยแทนหน่วยสำหรับหน่วยพื้นฐาน ตัวอย่าง เช่น ความเร็ว โดยสมการ (2.2)

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

ความเร็วกำหนดโดยระยะทางหารด้วยเวลา ด้วยเหตุนี้หน่วยของความเร็วจึงเป็น cm/sec, m/sec, ft/sec ในแต่ละระบบ (ปัจจุบันเราพยายามใช้ระบบหน่วย SI ซึ่งตัดระบบอังกฤษออกไปนั่นเอง)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงหน่วยของแรงใน 3 ระบบ โดยสมการ (2.9) คือ $g - cm - sec^{-2}$, $kg - m - sec^{-2}$, $lb - ft - sec^{-2}$ หน่วยเหล่านี้เรียกชื่อเฉพาะเป็น ไดน์, นิวตัน และ เปาว์แดล. หน่วยของแรงโน้มถ่วงหาได้จากการแทนค่าสมการ (2.9)

$$F_x = \frac{m\ddot{x}}{g}, \quad F_y = \frac{m\ddot{y}}{g}, \quad F_z = \frac{m\ddot{z}}{g} \qquad (2.15)$$

เมื่อ $g = 980.2 \text{ cm} - \sec^{-2} = 9.802 \text{ m} - \sec^{-2} = 32.16 \text{ ft} - \sec^{-2}$ และเป็นความเร่งมาตรฐานของแรงโน้มถ่วงที่พื้นผิวโลก

สมการทางฟิสิกส์ขนาดหรือหน่วยของเทอมที่เพิ่มขึ้นทั้งหมดต้องเท่ากันทั้งสองข้างของสมการ ตัวอย่างเช่น การตรวจหาขนาดของสมการ (2.11) จากการทราบค่าหน่วยของค่าคงที่ G จากสมการ (2.12)

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

เมื่อเราแทนค่าหน่วยของปริมาณในระบบ c g s จะได้

$$g - cm - \sec^{-2} = \frac{(cm^3 - \sec^{-2} - g^{-1})(g)(g)}{cm^2}$$

$$= g - cm - \sec^{-2} \qquad (2.16)$$

การตรวจสอบการเท่ากันของสมการทั้งสองข้างแบบนี้ ไม่ขึ้นอยู่กับระบบของหน่วย เราอาจตรวจสอบได้ใช้ระบบ m k s หรือ ระบบอังกฤษก็ได้ สมการทั้งสองข้างก็ยังคงเท่ากัน หรือเราอาจแสดงให้เห็นในแบบสัญญลักษณ์ของหน่วยพื้นฐานก็ได้ กล่าวคือ ให้ 1, m, t เป็นความยาว, มวล, เวลา ตามลำดับ ดังนั้นหน่วยของแรงแบบสมการ 2.16 คือ

$$ml\ t^{-2} = \frac{(1^3\ t^{-2}\ m^{-1})(m)\ (m)}{1^2} = m\ 1\ t^{-2}$$

ถ้าหน่วยของสมการทั้งสองข้างไม่เท่ากันแสดงว่าสมการนั้นผิดแน่นอน แต่ถ้าหน่วยของสมการทั้งสองเท่ากัน ก็ยังไม่อาจแน่ใจได้เลยว่าสมการนั้นจะถูกต้อง มันอาจเกิดจากความผิดพลาดหรือความบังเอิญก็ได้ เราต้องตรวจสอบความถูกต้องของที่มาของสมการเสียก่อนจึงจะแน่ใจได้ร้อยเปอร์เซ็นต์.

2.7 ปัญหาพื้นฐานบางอย่างของกลศาสตร์ (SOME ELEMENTARY PROBLEMS IN MECHANICS)

ก่อนจะเริ่มต้นการพัฒนาการทางกลศาสตร์บนพื้นฐานของกฎซึ่งจะกล่าวถึงในตอนนี้ ขอเริ่มด้วยการพิจารณาปัญหาบางอย่างเกี่ยวกับพื้นฐานทางกลศาสตร์ เพื่อขจัดข้อสงสัยให้หมดไป

ปัญหาอย่างหนึ่งซึ่งง่ายที่สุดในทางกลศาสตร์ คือ การอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงซึ่งถูกกระทำด้วยแรงคงที่ ถ้ามวลของวัตถุ คือ m และแรงเป็น F ดังนั้นจากกฎการเคลื่อนที่ข้อ 2 ของนิวตัน เราทราบ

$$F = ma \tag{2.18}$$

ดังนั้นค่าคงที่ของความเร่ง คือ

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{2.19}$$

เมื่อคูณสมการ (2.19) ด้วย dt เราได้การเปลี่ยนของความเร็วในระหว่างช่วงเวลาสั้น ๆ dt เป็น

$$dv = \frac{F}{m} dt \tag{2.20}$$

จากการอินทิเกรตสมการ (2.20) เราพบว่าการเปลี่ยนของความเร็วในระหว่างเวลา t คือ

$$dv = \frac{F}{m} dt, \tag{2.21}$$

$$v - v_o = \frac{F}{m} t , \tag{2.22}$$

เมื่อ v_o เป็นความเร็วที่เวลา $t = o$ ถ้า เป็นระยะทางตามเส้นตรงที่วัดจากจุดกำเหนิดแล้ว

$$v = \frac{dx}{dt} = v_o + \frac{F}{m} t . \qquad (2.23)$$

จากการคูณสมการ (2.23) ด้วย x แล้วอินทิเกรตเพื่อหาค่า x:

$$\int_{x_o}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_o + \frac{F}{m} t)\, dt \qquad (2.24)$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \qquad (2.25)$$

เมื่อ x_o แสดงตำแหน่งของวัตถุที่เวลา $t = 0$. เราได้อธิบายการเคลื่อนที่ที่สมบูรณ์. เราสามารถคำนวณจากสมการ (2.25) และ (2.22) เกี่ยวกับความเร็วของวัตถุในเวลา t ใด ๆ และระยะทางที่เคลื่อนที่ไปได้. กรณีวัตถุตกอย่างอิสระใกล้ผิวโลกซึ่งเกิดจากแรงตามสมการ (2.13) ในกรณีนี้ ถ้า x เป็นความสูงของวัตถุที่ตก เราได้

$$F = - mg \qquad (2.26)$$

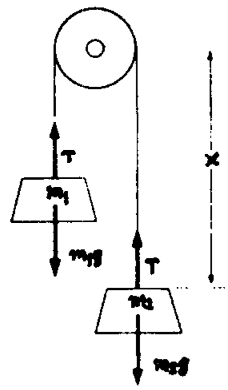
เครื่องหมายลบที่ปรากฏแสดงว่าแรงมีทิศลงข้างล่าง และถ้าเครื่องหมายบวกปรากฏแสดงว่าการเคลื่อนที่มีทิศขึ้นข้างบน. โดยการแทนค่าสมการ (2.26) ในสมการ (2.19), (2.22) และ (2.25), เราได้

$$a = - g, \qquad (2.27)$$

$$v = v_o - gt , \qquad (2.28)$$

$$x = x_o + v_o t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2.29)$$

การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน เราสามารถนำกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันไปใช้ได้มากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง ตัวอย่างเช่น เรื่องของ Atwood's machine ซึ่งมีระบบการเคลื่อนที่ดังรูป 2.2 กล่าวคือ มวล m_1 และมวล m_2 ผูกติดที่ปลายเชือกเส้นหนึ่งซึ่งคล้องผ่านรอก (ไม่คิดแรงเสียดทานระหว่างรอกกับเส้นเชือก)



รูป 2.2 Atwood's machine

ถ้า $m_2 > m_1$ และเส้นเชือกมีความยาวคงที่ตลอดการเคลื่อนที่ โดยแกน x การเคลื่อนที่ของระบบ ดังนั้นความเร็วของมวล m_1 และมวล m_2 คือ

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (2.30)$$

ความเร็ว m_1 ซึ่งเคลื่อนที่ขึ้นข้างบนเป็นบวก ส่วนความเร็ว m_2 เคลื่อนที่ลงข้างล่าง ถ้าเราไม่คิดแรงเสียดทานใด ๆ รวมทั้งแรงเสียดทานของอากาศ แรงที่กระทำต่อมวล m_1 และมวล m_2 คือ

$$F_1 = -m_1 g + T \qquad (2.31)$$

และ

$$F_2 = m_2 g - T \tag{2.32}$$

เมื่อ T เป็นแรงดึงในเส้นเชือก. จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน ทำให้สมการ (2.31) และ (2.32) จึงกลายเป็น

$$-m_1 g + T = m_1 a \tag{2.33}$$

และ

$$m_2 g - T = m_2 a \tag{2.34}$$

เมื่อ a เป็นความเร่งของเส้นเชือกหรือ = $\frac{dv}{dt}$, และโดยการบวกสมการ (2.33) กับ (2.34) เราได้ค่าของความเร่งของเส้นเชือกเป็น

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)} g \tag{2.35}$$

จากการแทนค่าสมการ (2.35) ในสมการ (2.33) หรือสมการ (2.34) เราได้ค่าของแรงดึงในเส้นเชือกเป็น

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{2.36}$$

สมการ (2.35) และ (2.36) คือคำตอบของระบบการเคลื่อนที่ของ Atwood's machine กรณีที่ $m_2 > m_1$, สำหรับกรณีที่ $m_1 = m_2$ เราสามารถหาคำตอบได้ว่า a = o และ

$$T = m_1 g = m_2 g \tag{2.37}$$

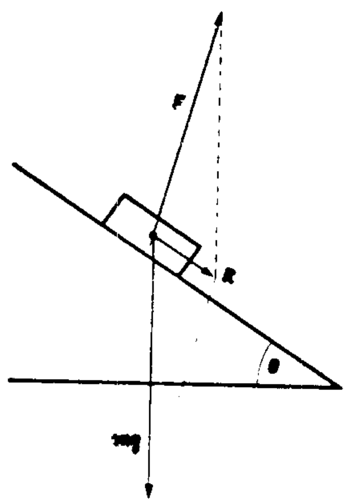
ถ้ามวลทั้งสองอยู่ในลักษณะสมดุลสถิตย์ เราพบว่า ถ้า $m_2 >> m_1$ แล้ว

$$a \doteq g \tag{2.38}$$

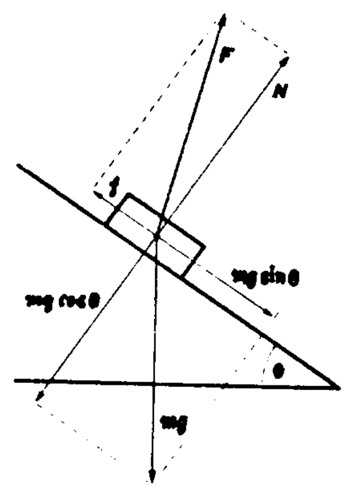
$$T \doteq 2m_1 g \tag{2.39}$$

ผู้อ่านจะต้องยอมรับด้วยตัวเองว่า ผลลัพธ์ในสมการ (2.38) และ (2.39) เป็นไปได้ในกรณีที่กล่าวมานี้.

เมื่อมีแรงหลาย ๆ แรงกระทำต่อวัตถุ ความเร่งของมันหาได้จากผลบวกของเวกเตอร์ของแรงที่กระทำ และแรงใด ๆ เราสามารถแตกให้อยู่ในลักษณะขององค์ประกอบของแรงของแต่ละได้ แรงที่อยู่ในลักษณะเช่นนี้เป็นอีกกรณีหนึ่งของการนำกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันมาใช้ ตัวอย่างเช่น วัตถุมวล m เคลื่อนที่ลงบนระนาบเอียงซึ่งเอียงเป็นมุม θ กับแนวระดับ ดังรูป 2.3



รูป 2.3 Force acting on a brick sliding down an incline



รูป 2.4 Resolution of for as into component parallel and perpende cular to the incline

จะเห็นว่ามีแรง 2 แรงที่กระทำต่อแท่งอิฐ (brick) แรงหนึ่งคือน้ำหนัก mg จากแท่งอิฐ ส่วนอีกแรงเป็นแรง F ซึ่งเป็นแรงที่ระนาบกระทำต่อแท่งอิฐ เมื่อแท่งอิฐเคลื่อนที่ลง แรงลัพธ์ R ที่กระทำต่อแท่งอิฐ คือ

$$R = ma \tag{2.40}$$

เมื่อแท่งอิฐมีความเร่งในทิศทางเดียวกับแรงลัพธ์ R แสดงให้เห็นว่าถ้าวัตถุเคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียง โดยไม่มีการกระโดดจากพื้นเอียงแล้วแรงลัพธ์ R ที่ได้ต้องมีทิศทางตามพื้นเอียง เพื่อหาค่า R เราแก้ปัญหาของแรงโดยการแตกแรงดังรูป 2.4 กล่าวคือ เราแตกแรง F ออกเป็น 2 แรงคือ แรงปฏิกิริยาตั้งฉาก N กับแรง f ที่ขนานกับระนาบและมีทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ เกิดขึ้นจากความเสียดทานระหว่างแท่งอิฐกับพื้นระนาบหรือเราเรียกว่าแรงเสียดทาน จากการแตกแรงดังรูป 2.4 เราได้

$$R = mg \sin \theta - f \tag{2.41}$$

$$0 = N - mg \cos \theta \tag{2.42}$$

ถ้าแรงเสียดทาน f เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก N เราได้ว่า

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta \tag{2.43}$$

เมื่อ μ เป็นสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน. จากสมการ (2.43), (2.41) และ (2.40) เราสามารถคำนวณค่าของความเร่งได้เป็น

$$a = g (\sin \theta - \mu \cos \theta) \tag{2.44}$$

จากสมการ (2.44) เราสามารถคำนวณหาความเร็วและตำแหน่งของมวล m ได้ในลักษณะเป็นฟังก์ชั่นของเวลา. ตามตัวอย่างที่ได้กล่าวมานี้เราให้วัตถุเคลื่อนที่ลงตามระนาบเอียงโดยมีความเร่ง ถ้าเราจะพิจารณาอีกกรณีหนึ่งของตัวอย่างนี้ คือ กรณีที่วัตถุหยุดนิ่งกับที่ (หรือเคลื่อนที่ลงด้วยอัตราเร็วคงตัว) กล่าวคือให้วัตถุอยู่ในลักษณะสมดุล เนื่องจากแรงเสียดทาน ดังนั้น แรงเสียดทานขณะที่วัตถุหยุดนิ่งจะมีค่ามากที่สุด เป็น

$$f \le \mu_s N \tag{2.45}$$

เมื่อ μ_s เป็นสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตย์ และมีค่ามากกว่า μ เสมอ ในกรณีนี้ R เป็น 0 และ

$$f = mg \sin \theta \le \mu_s mg \cos \theta \tag{2.46}$$

ตามสมการ (2.46) มุม θ ใด ๆ ของระนาบเอียงจะต้องไม่ใหญ่กว่ามุม θ_r ซึ่งเป็นมุมที่จำกัดให้วัตถุหยุดนิ่งอยู่ได้บนระนาบเอียง นั่นคือ

$$\tan \theta \le \tan \theta_r = \mu_s \tag{2.47}$$

กรณีวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ v ความเร่งที่เกิดขึ้นจะเป็นความเร่งสู่ศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีขนาดเป็น

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.48}$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน แรงสู่ศูนย์กลางจึงมีค่าเป็น

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \tag{2.49}$$

สังเกตว่า mv^2/r ไม่ใช่แรงหนีศูนย์กลาง เพราะแรงหนีศูนย์กลางมีทิศออกจากศูนย์กลางซึ่งตรงกันข้ามกับแรงสู่ศูนย์กลาง F ที่กล่าวมา.

ตัวอย่างของการเคลื่อนแบบวงกลมภายใต้แรงสู่ศูนย์กลาง เช่น วิถีโคจรของดวงจันทร์รอบโลก ซึ่งเกือบเป็นวงกลม (ถือว่าเป็นวงกลม) และเราสมมติว่าที่จุดศูนย์กลางของโลกเราอยู่ในสภาพนิ่ง จากสมการ (2.11) ดังนั้น แรงที่กระทำต่อดวงจันทร์ คือ

$$F = \frac{G M m}{r^2} \tag{2.50}$$

เมื่อ M เป็นมวลของโลก และ m เป็นมวลของดวงจันทร์ เราสามารถอธิบายแรงนี้ในเทอมของรัศมี R ของโลก และความเร่ง g ของแรงโน้มถ่วงที่ผิวของโลก โดยการแทนค่า G M จากสมการ (2.14) ดังนั้นสมการ (2.50) กลายเป็น

$$F = \frac{mg R^2}{r^2} \tag{2.51}$$

อัตราเร็วของดวงจันทร์ คือ

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2.52}$$

เมื่อ T เป็นคาบเวลาของการโคจรครบ 1 รอบ และโดยการแทนสมการ (2.51), (2.52) ในสมการ (2.49) เราสามารถหาค่าของ r ได้เป็น

$$r^3 = \frac{g R^2 T^2}{4\pi^2} \tag{2.53}$$

สมการ (2.53) นี้เป็นสมการแรกที่นิวตันใช้ตรวจหากฎกำลังสองผกผันของความโน้มถ่วง มันไม่ถูกต้องนักเพราะว่าวงโคจรของดวงจันทร์ไม่เป็นวงกลมอย่างแท้จริง และโลกก็ไม่ได้อยู่นิ่งกับที่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจรของดวงจันทร์ แต่เราก็สามารถทราบค่าโดยประมาณของสมการ (2.53) ได้ กล่าวคือ ถ้าเราแทนค่าคงที่ต่าง ๆ ที่ทราบจากการวัดในสมการ (2.53) คือ

$$g = 980.2 \quad \mathrm{cm - sec}^{-2}$$

$$R = 6{,}368 \quad \mathrm{km}$$

$$T = 27\frac{1}{3} \quad \mathrm{days}$$

เราจะได้

$$r = 383{,}000 \quad \mathrm{km.}$$

ซึ่งค่าที่แท้จริงของระยะทางของดวงจันทร์จากโลก ตามการวัดแบบใหม่ คือ

$$r = 385{,}000 \quad \mathrm{km.}$$

ค่าของ r และ R ตามแบบของนิวตัน แม้จะมีข้อผิดพลาดไปบ้าง แต่เราก็ไม่ปิดตายที่จะยอมรับกฎเกณฑ์และทฤษฎีของเขา.

แบบฝึกหัดบทที่ 2

2.1 Compute the gravitational force of attraction between an electron and a proton at a separation of 0.5 A (1A = 10^{-8} cm). Compare with the electrostatic force of attraction at the same distance.

2.2 The coefficient of viscosity η is defined by the equation

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{ds}$$

where F is the frictional force acting across an area A in a moving fluid, and dv is the difference in velocity parallel to A between two layers of fluid a distance ds apart, ds being measured perpendicular to A. Find the units in which the viscosity η would be expressed in the foot-pound-second, cgs. and mks systems. Find the three conversion factors for converting coefficients of viscosity from one of these systems to another.

2.3 A fluid flows through a cylindrical pipe of length/and radius a. A pressure difference ΔP (force per unit area) causes a flux Φ (volume per second) to flow through the pipe. Assume that ΔP is proportional to / and depends otherwise only on Φ, on the radius a of the pipe, and on the viscosity η and where η is defined in Problem 2.1 Show from dimensional considerations that ΔP must also be peoportional to η and to Φ and inversely proportional to a^4.

2.4 A system of units often used by mechanical engineers chooses, in addition to the foot and the second, a third fundamental unit of force, the pound-weight (usually just called pound). The unit of mass is then a derived unit, based on Eqs. (2.9), and is called the slug. Express the slug in terms of the fundamental units (ft. lb-wt. sec). Express the slug in terms of pounds in the foot-pound-second system. Find the gravitational constant G in the foot-pound-weight-second system.

2.5 A motorist is approaching a green traffic light with speed v_o, when the light turns to amber.

a) If his reaction time is τ, during which he makes his decision to stop and applies his foot to the brake, and if his maximum braking deceleration is a, what is the minimum distance S_{min} from the intersection at the moment the light turns to amber in which he can bring his car to a stop ?

b) If the amber light remains on for a time t before turning red, what is the maximum distance s_{max} from the intersection at the moment the light turns to amber such that he can continue into the intersection at speed v_o without running the red light?

c) Show that if his initial speed v_o is greater than

$$v_{o_{max}} = 2a(t - \tau).$$

there will be a range of distances from the intersection such that he can neither stop in time nor continue through without running the red light.

d) Make some reasonable estimates of τ, t, and a, and calculate $r_{o_{max}}$ in miles per hour. If $v_o = \frac{2}{3} v_{o_{max}}$ calculate s_{min} and s_{max}.

2.6 A boy of mass m pulls (horizontally) a sled of mass M. The coefficient of friction between sled and snow is μ.

a) Draw a diagram showing all forces acting on the boy and on the sled.

b) Find the horizontal and vertical components of each force at a moment when boy and sled each have an acceleration a.

c) If the coefficient of staic friction between the boy's feet and the ground is μ, what is the maximum acceleration he can give to himself and the sled, assuming traction to be the limiting factor ?

2.7 A floor mop of mass m is pushed with a force F directed along the handle, which makes an angle θ with the vertical. The coefficient of friction with the floor is μ.

a) Draw a diagram showing all forces acting on the mop.

b) For given θ, μ, find the force F required to slide the mop with uniform velocity across the floor.

c) Show that if θ is less than the angle of repose (as defined by Eq.(2.47)). the mop cannot be started across the floor by pushing along the handle. Neglect the mass of the mop handle.

2.8 A box of mass m slides across a horizontal table with coefficient of friction μ. The box is connected by a rope which passes over a pulley to a body of mass M hanging alongside the table. Find the acceleration of the system and the tension in the rope.

2.9 The brick shown in Figs. 2.3 and 2.4 is given an intial velocity v_o up the inclin. The angle θ is greater than the angle of repose. Find the distance the brick moves up the incline, and the time required for it to slide up and back to its original position.

2.10 A curve in a highway of radius of curvature r is banked at an angle θ with the horizontal. If the coefficient of friction is μ_s, What is the maximum speed with which a car can round the curve without skidding ?

2,11 Assuming the earth moves in a circle of radius 93,000,000 miles, with a period of revolution of one year. Find the mass of the sun in tons.

2.12 a) Compute the mass of the earth from its radius and the values of g and G.

b) Look up the masses and distances of the sun and moon and compute the force of attraction between earth and sun and between earth and moon. Check your results by making a rough estimate of the ratio of these two forces from a consideration of the fact that the former causes the earth to revolve about the sun once a year, whereas the latter causes the earth to wobble in a small circle, approximately once a month, about the common center of gravity of the earth-moon system.

2.13 The sun is about 25,000 light years from the center of the galaxy, and travels approximately in a circle at a speed of 175 mi/sec. Find the approximate mass of the galaxy by assuming that the gravitational force on the sun can be calculated as if all the mass of the galaxy were at its center. Express the result as a ratio of the galactic mass to the sun's mass. You do not need to look up either G or the sun's mass to do this problem if you compare the revolution of the sun around the galactic center with the revolution of the earth about the sun.