บทที่ 1
เวกเตอร์และจลศาสตร์ของอนุภาค
(VECTORS AND KINEMATICS OF A PARTICLE)

ในบทนี้เป็นการศึกษาเรื่องพื้นฐานเกี่ยวกับเวคเตอร์และจลศาสตร์ของอนุภาคเพื่อประโยชน์ในการศึกษาเรื่องราวของฟิสิกส์ในบทต่อ ๆ ไป

1 . 1 ปริมาณเวกเตอร์ (VECTOR QUANTITY)

ถ้าจะแบ่งปริมาณต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์ เราสามารถแบ่งได้เป็น 2 ปริมาณ คือ ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) กับปริมาณ เวก เตอร์ (Vector quantity)

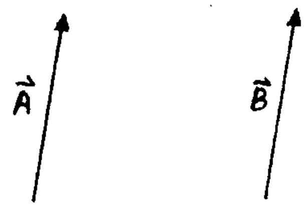
ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณที่แสดงเฉพาะขนาด (magnitude) เพียงอย่างเดียว เช่น เวลา, อุณหภูมิ, อัตราเร็ว (speed), และระยะทาง (distance) เป็นต้น. ส่วนปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่แสดงทั้งขนาดและทิศทาง (direction) เช่น แรง (force), โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum), ความเร็ว (velocity), และระยะขจัด (displacement) เป็นต้น. อย่างไรก็ตามในเรื่องของเวกเตอร์นี้จะกล่าวถึงเท่าที่จำเป็นเท่านั้น เพราะเป็นเรื่องราวทางคณิตศาสตร์ซึ่งเราสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากวิชาคณิตศาสตร์โดยตรง.

ให้ $\vec{A}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ใด ๆ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วยสัญลักษณ์

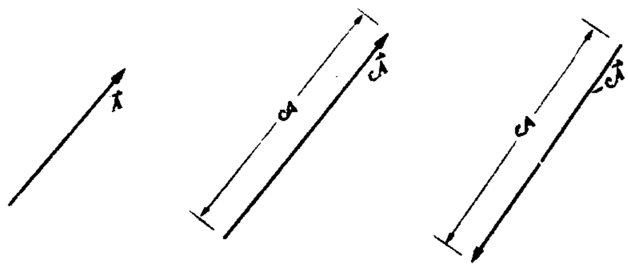
$$A = |\vec{A}| \tag{1.1}$$

เวกเตอร์สองเวกเตอร์เท่ากัน เมื่อมีขนาดเท่ากันและมีทิศไปทางเดียวกัน

$$\vec{A} = \vec{B} \tag{1.2}$$



รูป 1.1 การเท่ากันของเวกเตอร์สองเวกเตอร์



รูป 1.2 นิยามของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (c > o)

จากนิยามของรูป 1.2 สรุปต่อไปได้คือ

$$|c\vec{A}| = |c| \ |\vec{A}| \tag{1.3}$$

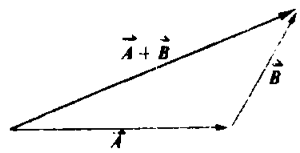
$$(cd)\ \vec{A} = c\ (d\vec{A}) \tag{1.4}$$

สมการ (1.4) เมื่อ d เป็นปริมาณสเกลาร์ ในบางครั้งเราอาจเจอการคูณกันระหว่างปริมาณเวกเตอร์กับปริมาณสเกลาร์ เพื่อความสะดวกเราสามารถสลับตำแหน่งระหว่างปริมาณสเกลาร์ c ใด ๆ กับปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ ได้

$$c\vec{A} = \vec{A}c \tag{1.5}$$

1.2 การบวกและการลบเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ เราหาผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ และของเวกเตอร์หลาย ๆ เวกเตอร์ ได้โดยการคำนวณหรือวิธีง่าย ๆ โดยการเขียนรูปแล้ววัดคำตอบ ดังรูป 1.3 และรูป 1.4, การหาค่าผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์หรือหลาย ๆ เวกเตอร์ โดยวิธีการเขียนรูปอาจมีค่าคลาดเคลื่อนได้ ถ้าจะให้ได้ค่าที่ถูกต้องแท้จริง ก็ต้องใช้วิธีคำนวณ เพื่อความเข้าใจได้ง่ายควรมีรูปประกอบ ดังรูป 1.3



รูป 1.3 นิยามการบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์

เราคำนวณหาค่าขนาดของ $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{C}| = C$ ได้โดยใช้กฎ cosine

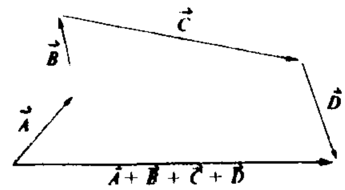
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \tag{1.6}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง A กับ B เราคำนวณหาทิศทางของเวกเตอร์ A + B โดยใช้กฎของ sine คือ

$$\frac{A}{\text{sine ของมุมตรงข้ามด้าน } A} = \frac{B}{\text{sine ของมุมตรงข้ามด้าน } B} = \frac{C}{\text{sine ของมุมตรงข้ามด้าน } C} \tag{1.7}$$

เมื่อต้องการคำนวณหาค่าผลบวกของเวกเตอร์ หลาย ๆ เวกเตอร์ (ดังรูป 1.4) ทำได้โดยการหาค่าผลบวกของเวกเตอร์ทีละคู่ กล่าวคือ เมื่อได้ค่าผลบวกของ $\vec{A} + \vec{B}$ แล้ว ต่อไปก็หาค่าผลบวกของ

$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ แล้วจึงหาค่าสุดท้าย $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) + \vec{D}$ ตามลำดับ



รูป 1.4 การบวกเวกเตอร์หลาย ๆ เวกเตอร์

จากหลักการบวกเวกเตอร์ ตามที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า การบวกเวกเตอร์เป็น Commutative และ associative laws คือ

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.8}$$

และ

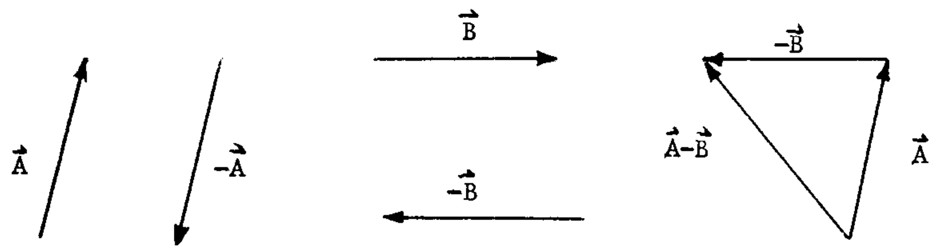
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \tag{1.9}$$

และจากนิยามรูป 1.2, รูป 1.3 พิสูจน์ได้อีกว่า การบวกเวกเตอร์เป็น distributive laws

$$c\,(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B} \tag{1.10}$$

$$(c + d)\,\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A} \tag{1.11}$$

การลบเวกเตอร์ : ในการลบเวกเตอร์เราใช้วิธีการเดียวกับการบวกเวกเตอร์ แต่แตกต่างกันที่ทิศทาง (direction) กล่าวคือเวกเตอร์ลบนั้นมีทิศตรงข้ามกับเวกเตอร์บวก ดังรูป 1.5



รูป 1.5 ทางซ้ายมือแสดงการลบเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์บวกแต่มีทิศตรงกันข้าม ส่วนทางขวามือเป็นการลบเวกเตอร์ $(\vec{A} - \vec{B})$

1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (UNIT VECTOR)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย, เราใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับแสดงทิศทางของเวกเตอร์ใด ๆ กล่าวคือ ถ้า $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกน x, y, z ตามลำดับ ในคาร์ทีเซียน โคออดิเนต (Cartesian Coordinates) ดังนั้น องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ คือ

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \tag{1.12}$$

และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ คือ

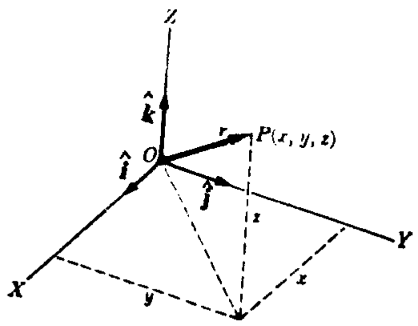
$$|\vec{A}| = A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

1.4 เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (POSITION VECTOR)

เวกเตอร์ที่สำคัญอีกอันหนึ่งคือ เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ = op ของจุด p ซึ่งมีโคออดิเนต (x, y, z) ดังรูป 1.6 ย่อมได้

$$op = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.14}$$

เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด p(x, y, z)



รูป 1.6 เวกเตอร์บอกตำแหน่ง

ตามรูป 1.6 ถ้าให้ α, β , r เป็นมุมที่เวกเตอร์บอกตำแหน่ง r ทำมุมกับแกน x, y, z ตามลำดับ, แล้ว direction cosine มีนิยามว่า

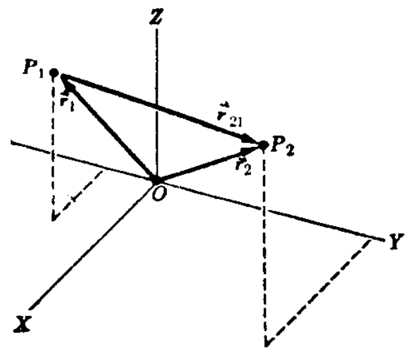
$$\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.15}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.16}$$

$$\cos r = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.17}$$

เมื่อทราบค่าโคออดิเนตของจุด p ก็สามารถใช้ direction cosine หาค่าของมุมทั้งสามได้

1.5 เวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพัทธ์ (RELATIVE POSITION VECTOR)



รูป 1.7 เวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพัทธ์

ตามรูป 1.7 เวกเตอร์บอกตำแหน่งสัมพันธ์ของจุด 2 จุด, P_1 และ P_2 คือ r_{21} และ r_{12} ซึ่งจากรูป 1.7 เราทราบว่า

$$OP_2 = OP_1 + P_1 P_2$$

ดังนั้น

$$\vec{r}_{21} = P_1 P_2 = OP_2 - OP_1$$

$$= \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (1.18)$$

ขอให้สังเกตุว่า $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ และจากสมการ (1.18) เราได้สูตรระยะทางระหว่างจุด 2 จุด คือ

$$r_{21} = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

ซึ่งมันคือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_{21}$ นั่นเอง

1.6 การคูณเวกเตอร์

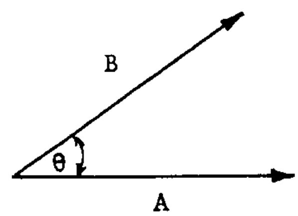
การคูณเวกเตอร์มี 2 แบบ คือ แบบที่หนึ่งเมื่อเวกเตอร์สองเวกเตอร์คูณกันแบบเวกเตอร์แล้ว ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณสเกลาร์ เรียกว่า ผลคูณสเกลาร์ ส่วนแบบที่สองเมื่อเวกเตอร์สองเวกเตอร์คูณกันแบบเวกเตอร์แล้วผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณเวกเตอร์ เรียกว่า ผลคูณเวกเตอร์. เรื่องของการคูณเวกเตอร์นี้มีประโยชน์อย่างมาก สำหรับการอธิบายเรื่องราวของฟิสิกส์ด้วยภาษาคณิตศาสตร์

1.6.1 ผลคูณสเกลาร์ (SCALAR PRODUCT OR DOT PRODUCT OR INNER PRODUCT)

ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์, คือ A และ B ใด ๆ มีนิยามว่า เป็นปริมาณสเกลาร์ที่ได้จากการคูณ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กับ cosine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง และเขียนเป็นสัญลักษณ์ ดังนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \; ; \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \qquad (1.20)$$

ทางขวามือของสมการ (1.20) อ่านว่า เวกเตอร์ $\vec{A}$ dot เวกเตอร์ $\vec{B}$



รูป 1.8 มุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์

ตัวอย่างการนำนิยาม (1.20) มาใช้ประโยชน์ในทางฟิสิกส์ เช่น ในเรื่องของงาน (work) กรณีที่แรงกระทำ F ทำมุม θ กับระยะทาง

$$W = F\,S \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

และจากนิยามของผลคูณสเกลาร์ (1.20) สามารถพิสูจน์เป็นกฎต่าง ๆ ได้ คือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{(Commutative law)} \tag{1.21}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad \text{(Distributive law)} \tag{1.22}$$

$$c\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) = c(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (c\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})c,$$ เมื่อ c เป็นปริมาณสเกลาร์ (1.23)

ถ้า $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, แล้ว $\vec{A} = \vec{B} = 0$ หรือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (1.24)

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \tag{1.25}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \tag{1.26}$$

และนิยามของผลคูณสเกลาร์ สามารถอธิบายในเทอมของ Components ได้อีก คือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.27}$$

เมื่อ $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ และสมการ (1.27) พิสูจน์ได้โดยการใช้สมการ (1.25 และ 1.26)

1.6.2 ผลคูณเวกเตอร์ (VECTOR PRODUCT OR CROSS PRODUCT OR OUTER PRODUCT)

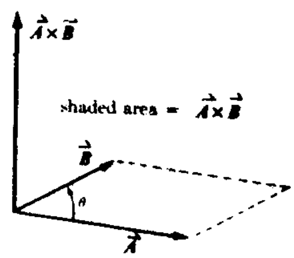
ผลคูณของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์, คือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีนิยามว่าเป็นเวกเตอร์ ซึ่งขนาดของมันหาได้จากผลคูณของขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ กับ sine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง, ซึ่งมีทิศตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เขียนเป็นสัญญลักษณ์ว่า $\vec{A} \times \vec{B}$ (อ่านว่า $\vec{A}$ cross $\vec{B}$) และมีค่าดังนี้

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta , \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{1.28}$$

หรือ

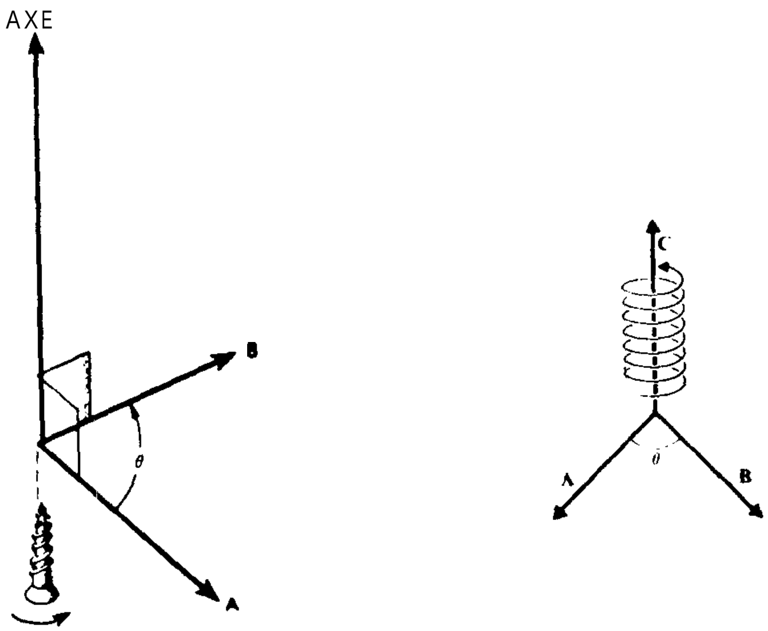
$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \, \hat{u}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{1.29}$$

สมการ (1.29) เมื่อ $\hat{u}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งใด ๆ



รูป 1.9 นิยามของผลคูณเวกเตอร์

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\hat{u}$ ใด ๆ ที่ใช้แสดงทิศทางของ $\vec{A} \times \vec{B}$ นั้นเป็นแบบระบบมือขวาหรือแบบเกลียวขวา (right-handed system) กล่าวคือ ถ้าหมุนเกลียวจาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$ ผ่านไปเป็นมุม θ เกลียวจะเคลื่อนพุ่งตรงเข้าไปในทิศ $\vec{A} \times \vec{B}$ เรียกว่า เกลียวหมุนขวา ดังรูป 1.10



<u>รูป 1.10</u> เวกเตอร์ $\vec{A},\vec{B}$ และ $\vec{A} \times \vec{B}$ แบบเกลียวขวา

จากนิยาม (1.28), (1.29) ของผลคูณเวกเตอร์ สามารถนำไปพิสูจน์เป็นกฎต่าง ๆ แบบผลคูณสเกลาร์ คือ

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad \text{(Commutative lay not valid)} \qquad (1.30)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad \text{(Distributive law)} \qquad (1.31)$$

$$c(\vec{A} \times \vec{B}) = (c\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (c\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})c,$$

เมื่อ c เป็นปริมาณสเกลาร์ (1.32)

ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} = o$ แล้ว $\vec{A}$ หรือ $\vec{B} = o$ หรือ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน (1.33)

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \qquad (1.34)$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \text{ และ } \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}, \ \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}. \tag{1.35}$$

เมื่อเวกเตอร์ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

เราสามารถเขียนผลคูณเวกเตอร์ $(\vec{A} \times \vec{B})$ ในรูปของ determinant คือ

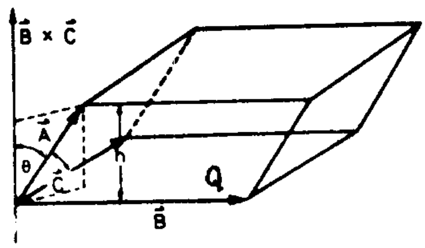
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \tag{1.36}$$

1.7 ผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์, ผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ (SCALAR TRIPLE PRODUCTS, VECTOR TRIPLE PRODUCTS)

ในตอนที่แล้วได้กล่าวถึงการคูณเวกเตอร์ในแบบของการ dot และการ cross ของเวกเตอร์เพียง 2 เวกเตอร์ ในตอนนี้จะกล่าวถึงการคูณเวกเตอร์ในแบบเดียวกัน แต่เป็นของเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์

1.7.1 ผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (SCALAR TRIPLE PRODUCTS) คือ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ นิยามว่า มีค่าเท่ากับ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ ซึ่งค่าสมบูรณ์ของสเกลาร์นี้จะเท่ากับปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มีด้านของสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็น $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ดังรูป 1.11 และ 1.12.



รูป 1.11 ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

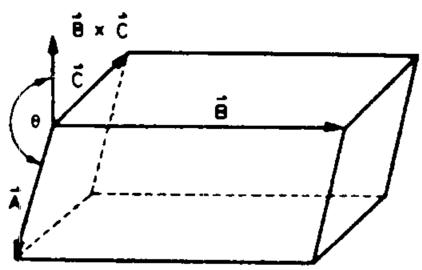
ให้ Q เป็นพื้นที่ฐาน $= |\vec{B} \times \vec{C}|$

h เป็นความสูงของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{A}|\,|\cos\theta|$ โดยที่ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B} \times \vec{C}$

ดังนั้น ถ้า V เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จะได้ $V = hQ = |\vec{A}| \cdot |\vec{B} \times \vec{C}|\ |\cos\theta|$ (1.37)

จากสมการ (1.37) ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (ตามรูป 1.11) ค่า $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) > 0$

แต่ถ้า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (ตามรูป 1.12) ค่า $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) < 0$



รูป 1.12 ปริมาตรของรูปทรง สี่เหลี่ยมด้านขนานโดยที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

คุณสมบัติที่สำคัญบางอย่างของผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ คือ

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \qquad (1.38)$$

ถ้า $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = 0$ (1.39)

ถ้าเวกเตอร์คู่ใดคู่หนึ่งของผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์เท่ากันจะได้ว่า

$$\vec{A} \cdot \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{B} = \vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = 0 \qquad (1.40)$$

ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ และ

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

แล้ว

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.41)$$

<u>ตัวอย่าง 1.1</u> จงพิสูจน์สมบัติผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ของสมการ (1.41)

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \right] \left[(B_yC_z - B_zC_y)\hat{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\hat{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\hat{k} \right]$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1.2</u> กำหนดให้ $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$ และ $\vec{C} = \hat{i} - \hat{j}$ จงหาค่าของผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(0 + 1) - 2(0 - 1) - 1(0 - 1)$$

$$= 4$$

<u>ตอบ</u>

1.7.2 ผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ (VECTOR TRIPLE PRODUCTS) คือ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ มีนิยามว่า มีค่าเท่ากับ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ค่านี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ ผลลัพธ์จึงต้องมีทิศทางด้วยแบบเดียวกับผลคูณเวกเตอร์, และทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B} \times \vec{C}$ ค่าสมบูรณ์ของผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ในรูปของดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) คือ

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (B_yC_z - B_zC_y)\hat{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\hat{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z-B_zC_y & B_xC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x \end{vmatrix} \qquad (1.42)$$

คุณสมบัติที่สำคัญบางอย่างของผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์มีดังนี้

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \qquad (1.43)$$

สมการ (1.43) นี้ บางทีเรียกว่า กฎ BAC - CAB

แต่ $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \;=\; \vec{B}\,(\vec{A} \cdot \vec{C}) \;-\; \vec{A}\,(\vec{B} \cdot \vec{C})$ (1.44)

จากสมการ (1.43) และ (1.44) สรุปได้ว่า

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \qquad (1.45)$$

$$\hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{j}) = \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad (1.46)$$

และ $$(\hat{i} \times \hat{i}) \times \hat{j} = 0 \qquad (1.47)$$

สมการ (1.46) และ (1.47) เป็นคุณสมบัติพิเศษที่น่าสนใจของผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์

<u>ตัวอย่าง 1.3</u> ใช้ค่าเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ ที่กำหนดให้ ในตัวอย่าง 1.2 จงหาค่าของผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\hat{j} + \hat{k})(1 - 2) - (\hat{i} - \hat{j})\,(2 - 1)$$

$$= -\hat{i} - \hat{k}$$

หรือ

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{i} - \hat{k}$$ <u>ตอบ</u>

1.8 เกรเดียนต์, ไดเวอเจนซ์และเคิร์ล (CRADIANT, DIVERGENCE AND CURL)

ในตอนนี้จะกล่าวถึงเรื่องของเกรเดียนต์, ไดเวอเจนซ์และเคิร์ล ในเชิงนิยามพอสังเขปเท่านั้น ส่วนใหญ่เรื่องราวของคณิตศาสตร์เหล่านี้เรานำไปใช้แก้ปัญหาทางแม่เหล็กไฟฟ้าเสียมากกว่าทางกลศาสตร์ และวิชาแม่เหล็กไฟฟ้าคงจะกล่าวถึงเรื่อง เกรเดียนต์, ไดเวอเจนซ์และเคิร์ล อีก.

สิ่งแรกที่ต้องทราบ คือ ความหมายของสัญญลักษณ์ เวกเตอร์ดิฟเฟอเรนเชียล " $\vec{\nabla}$ " (อ่านว่า del)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad (1.48)$$

เราจึงให้นิยามหรือความหมายของเกรเดียนต์, ไดเวอเจนซ์และเคิร์ล แต่ละอย่างได้ดังนี้

1.8.1 เกรเดียนต์ ($\vec{\nabla}\psi$)

ให้ $\psi(x, y, z)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชั่นใด ๆ ดังนั้น

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \qquad (1.49)$$

สมการ (1.49) คือ gradient ของ ψ หรืออาจเขียนย่อ ๆ เป็น grad ψ ก็ได้

1.8.2 ไดเวอเจนซ์ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

ให้ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ใด ๆ ดังนั้น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \cdot (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.50)$$

นิยาม สมการ (1.50) เรียกว่า devergence ของ A ค่านี้เป็นปริมาณสเกลาร์ และอาจเขียนย่อ ๆ ว่า div A ก็ได้

<u>ตัวอย่าง 1.4</u> จงหาค่า divergence ของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 3.$$

<u>ตอบ</u>

1.8.3 เคิร์ล $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$

ให้ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ใด ๆ ดังนั้น

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \times (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

$$(\text{หรือ}) \quad = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (1.51)$$

สมการ (1.51) คือ นิยามหรือความหมายของ Curl A

ในเรื่องของเกรเดียนต์ ไดเวอเจนซ์และเคิร์ล มีคุณสมบัติที่สำคัญและควรจำไว้เช่น

$$\text{div curl } A = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \qquad (1.52)$$

และ

$$\text{Curl grad } \psi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi) = 0 \qquad (1.53)$$

1.9 การดิฟเฟอเรนซิเอทและการอินทิเกรทของเวกเตอร์ (DIFFERENTIATION AND INTEGRATION OF VECTORS)

เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ อาจอยู่ในรูปฟังก์ชั่นของปริมาณสเกลาร์เช่นเวลา t กล่าวคือทุก ๆ ค่าของ t อยู่ในรูปของ $\vec{A}(t)$ หรือเขียนในลักษณะของแต่ละแกน (Components) คือ

$$\vec{A} = \vec{A}(t) = \left[A_x(t),\ A_y(t),\ A_z(t)\right] \qquad (1.54)$$

ตัวอย่างที่พบได้บ่อยในเรื่องของเวกเตอร์เป็นฟังก์ชั่นของเวลา เช่น ความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ : $\vec{v}(t)$. และเราอาจหาค่าอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ โดยนิยามทางคณิตศาสตร์ เมื่อเทียบกับเวลา t

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \tag{1.55}$$

และอาจให้ความหมายค่าอนุพันธ์ของเวกเตอร์ในเทอมของแกน (component) ได้อีก คือ

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt}\right) = \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

คุณสมบัติที่สำคัญบางอย่างที่ได้จากการดิฟเฟอเรนชิเอทของเวกเตอร์ซึ่งพิสูจน์ได้จากวิธีการทางคณิตศาสตร์ และจากนิยาม (1.54), (1.55) คือ

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}, \tag{1.56}$$

$$\frac{d}{dt}(c\,\vec{A}) = \frac{dc}{dt}\vec{A} + c\frac{d\vec{A}}{dt}, \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นปริมาณสเกลาร์} \tag{1.57}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}, \tag{1.58}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{1.59}$$

<u>ตัวอย่าง 1.5</u> จงพิสูจน์ สมการ (1.57)

<u>วิธีทำ</u>

$$\left[\frac{d}{dt}(c\vec{A})\right]_x = \frac{d}{dt}(c\vec{A})_x$$

$$= \frac{d}{dt}(c A_x)$$

$$= \frac{dc}{dt} A_x + c\frac{dA_x}{dt}$$

$$= (\frac{dc}{dt}\vec{A})_x + (c\frac{d\vec{A}}{dt})_x$$

$$= (\frac{dc}{dt}\vec{A} + c\frac{d\vec{A}}{dt})_x$$

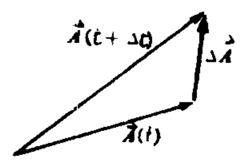
ดังนั้น $\frac{d}{dt}(c\vec{A}) = \frac{dc}{dt}\vec{A} + c\frac{d\vec{A}}{dt}$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 1.5 เป็นการพิสูจน์คุณสมบัติที่ได้จากการดิฟเฟอเรนชิเอทของเวกเตอร์ ส่วนคุณสมบัติอื่น ๆ เช่น สมการ (1.58) เราสามารถพิสูจน์ได้โดยวิธีการทางคณิตศาสตร์เช่นกัน ดังตัวอย่าง 1.6

<u>ตัวอย่าง 1.6</u> จงพิสูจน์ สมการ 1.58

<u>วิธีทำ</u>

ให้ Δ เป็นสัญลักษณ์แสดงถึงค่าที่เพิ่มขึ้นของฟังก์ชั่นใด ๆ ระหว่างเวลา t และ $t + \Delta t$; ค่าที่เพิ่มขึ้น $\Delta\vec{A}$ ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ดังรูป 1.13



รูป 1.13 เวกเตอร์ที่เพิ่มขึ้น $\Delta\vec{A} = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)$

โดยการใช้นิยามของ Δ, และกฎของเวกเตอร์พีชคณิต เราได้

$$\frac{\Delta(\vec{A} \cdot \vec{B})}{\Delta t} = \frac{(\vec{A} + \Delta\vec{A}) \cdot (\vec{B} + \Delta\vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})}{\Delta t}$$

$$= \frac{(\Delta\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot (\Delta\vec{B}) + (\Delta\vec{A}) \cdot (\Delta\vec{B})}{\Delta t}$$

$$= \frac{(\Delta A) \cdot \vec{B}}{\Delta t} + \frac{\vec{A} \cdot (\Delta\vec{B})}{\Delta t} + \frac{(\Delta\vec{A} \cdot \Delta\vec{B})}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\Delta\vec{B}}{\Delta t} + \frac{(\Delta\vec{A}) \cdot (\Delta\vec{B})}{\Delta t}$$

เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ เทอมสุดท้ายทางขวามือมีค่าเป็นศูนย์ และเทอมที่เหลือกลายเป็น

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

<u>ตอบ</u>

การเคลื่อนที่ใน 3 มิติ เรามักพบเสมอว่าปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ มีค่ากำหนดทุก ๆ จุดในสเปซ (space) ซึ่งแสดงโดยระยะพิกัด (Coordinates) ตามแกน x,y, และ z ดังนั้นตำแหน่งของสเกลาร์ฟังก์ชั่น คือ

$$\mu(r) = \mu(x, y, z)$$

และตำแหน่งของเวกเตอร์ฟังก์ชั่น คือ

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z) = \left[A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z) \right]$$

เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งดังสมการ (1.14). ตัวอย่างของตำแหน่งของสเกลาร์ฟังก์ชั่นเช่น พลังงานศักย์ (Potential energy) $V(x, y, z)$ ของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ใน 3 มิติ ส่วนตัวอย่างของเวกเตอร์ฟังก์ชั่นที่เป็นไปได้มีมากมาย เช่น แรง $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, โมเมนตัมเชิงมุม (Angular momentum) $\vec{L} = \vec{L}(x, y, z)$ เป็นต้น

ถ้าเรากำหนดส่วนโค้ง (Curve) C ใน Space แล้วหาค่าเวกเตอร์ฟังก์ชั่น $\vec{A}$ ใด ๆ ที่จุดต่าง ๆ ของส่วนโค้งนี้ เราสามารถพิจารณาเส้นอินทิกรัล (line integral) ของเวกเตอร์ A ตามส่วนโค้ง C :

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

การหาค่า line integral เราสมมติว่า ส่วนโค้ง C แบ่งออกเป็นส่วนย่อยหลาย ๆ ส่วนและแต่ละส่วนย่อยแสดงด้วยเวกเตอร์ $d\vec{r}$ และทุก ๆ ส่วนย่อยเท่ากัน. ตัวอย่างเช่น การหาค่าของงาน (Work) W ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $\vec{F}$ ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวิถีโค้งตามส่วนโค้ง C

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

กรณีของงานที่เกิดจากแรงคงตัวทำให้เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงเป็นระยะขจัด $\vec{S}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

ซึ่งเป็นเรื่องพื้นฐานทั่วไป แต่ก็สามารถอธิบายการหางานตามส่วนโค้ง C ของแต่ละส่วนย่อย $d\vec{r}$ ได้ โดยให้ ds เป็นขนาดของเวกเตอร์ $d\vec{r}$ งานของแต่ละแรงส่วนย่อยคือ $dw = F\,ds$, เมื่อคิดทั้งหมดของส่วนโค้งก็จะได้เป็น $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

ถ้าเวกเตอร์บอกตำแหน่ง r เป็นไปตามสมการ (1.14)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

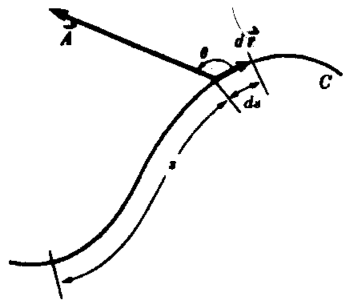
ดังนั้น
$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \tag{1.60}$$

เมื่อ dx, dy, dz คือ ระยะพิกัดที่แตกต่างกันของส่วนย่อย (Segment). ถ้า S เป็นระยะทางที่วัดตามส่วนโค้งจากจุดเริ่มต้นที่กำหนด. เราสามารถอธิบาย line integral ในรูปแบบอินทีกรัลธรรมดาของระยะพิกัด S:

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int A \cos\theta \, ds \tag{1.61}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ $d\vec{r}$ (ดังรูป 1.14).สูตรของสมการ (1.61) การหาค่าอินทีกรัล จำเป็นต้องทราบค่า A และ cos θ ในฟังก์ชั่นของ S. และจากสมการ (1.60) เราอาจหาค่าอินทีกรัลได้เช่นเดียวกัน คือ

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \tag{1.62}$$



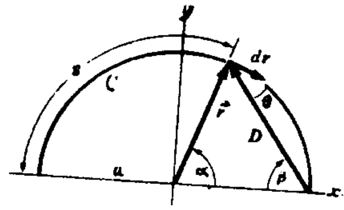
รูป 1.14 Elements involved in the line integral

อีกวิธีหนึ่งที่สะดวกมาก ในการแสดงให้เห็นถึงส่วนโค้งใน Space ได้โดยการกำหนด 3 ระยะพิกัด (x, y, z) หรือในลักษณะของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชั่นของสัญญลักษณ์ S ซึ่งต้องทราบค่าแน่นอนของระยะพิกัดที่จุดใด ๆ ของส่วนโค้ง. บ่อยครั้งเหมือนกันที่ไม่จำเป็นต้องใช้สัญญลักษณ์ S เมื่อเราวัดระยะทางจากจุดเริ่มต้นใด ๆ ได้ ดังรูป 1.14 และสมการ (1.61) สัญญลักษณ์ S อาจเป็นเวลาก็ได้ ในกรณีที่อนุภาคกำลังเคลื่อนที่ไปยังจุดที่กำหนดให้ใด ๆ ของส่วนโค้ง C. ถ้าเราทราบค่า $\vec{A}(r)$ และ $\vec{r}(S)$ ดังนั้น line integral สามารถหาค่าได้จากสูตร.

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) ds$$

$$= \int \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds}\right) ds \qquad (1.63)$$

ตัวอย่าง 1.7 การคำนวณของ line integral จงหางานของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ในครึ่งวงกลมซึ่งมีรัศมี a จากจุดเริ่มต้นในระนาบ xy ที่เกิดจากการกระทำของแรงโดยตรงที่จุด (x = a, y = 0) และเป็นปฏิภาคกับระยะทางของอนุภาคจากจุด (a,o) (ดังรูป 1.15)



รูป 1.15

วิธีทำ

วิธีที่ 1 : จากรูปเราทราบความสัมพันธ์

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha), \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{1}{2}\alpha$$

$$D^2 = 2a^2(1 - \cos\alpha), \quad D = 2a \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{F} = -k\vec{D}, \quad F = kD = 2ka \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$S = a(\pi - \alpha)$$

จากความสัมพันธ์ เราสามารถหาค่าของงานโดยใช้สมการ (1.61) :

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{S=0}^{\pi a} F \cos\theta \, ds$$

$$= - \int_{\alpha=\pi}^{0} 2ka^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

$$= 2\, ka^2$$ <u>ตอบ</u>

<u>วิธีที่</u> 2 : คำนวณโดยใช้สมการ (1.63), เราอธิบาย $\vec{r}$ และ $\vec{F}$ ตามส่วนโค้งให้เป็นฟังก์ชั่นของสัญญลักษณ์ α :

จากรูป $x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$

$$F_x = k\,D\cos\beta = 2\,ka\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= ka\,(1 - \cos\alpha),$$

$$F_y = -\,kD\sin\beta = -\,2\,ka\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= -\,ka\sin\alpha$$

จากสมการ (1.63) ดังนั้น ค่าของงานคือ

$$W = \int \vec{F}\,.\,d\vec{r}$$

$$= \int_{\alpha=\pi}^{0} \left(F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$= \int_{\pi}^{0} \left[-\,ka^2\,(1 - \cos\alpha)\sin\alpha - ka^2\sin\alpha\cos\alpha\right] d$$

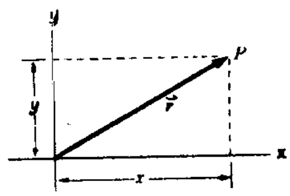
$$= \quad ka^2 \int_0^{\pi} \sin \alpha \quad dx$$

$$= \quad 2\ ka^2$$

<u>ตอบ</u>

1.10 จลศาสตร์ในระนาบ (KINEMATICS IN A PLANE)

จลศาสตร์ เป็นวิทยาศาสตร์ซึ่งอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ ที่เป็นไปได้ของระบบทางกลศาสตร์ โดยไม่รวมถึงกฎเกณฑ์การเคลื่อนที่ในลักษณะของพลศาสตร์ (dynamics). การศึกษาเรื่องจลศาสตร์ของอนุภาคในระนาบนี้ เราเริ่มพิจารณาจากเวกเตอร์บอกตำแหน่ง ($\vec{r}$) ของอนุภาค, และทางเดินของอนุภาค. วิธีการนี้สามารถหาค่าความเร็วและความเร่งได้ จากตัวแปรของแกน (Components)



รูป 1.16 Position vector and regtangular coordinates of a point p in a plane

วิธีง่ายที่สุดสำหรับแสดงตำแหน่งของอนุภาคในระนาบ คือการใช้แกนสองแกนที่ตั้งฉากกันและแสดงตำแหน่งของอนุภาคใด ๆ โดยระยะพิกัด x,y ด้วย Regtangular Coordinates. ซึ่งวิธีนี้ตำแหน่งของอนุภาค p คือ $\vec{r} = (x,y)$ ดังรูป 1.16

เมื่อเราทราบวิธีแสดงตำแหน่งของอนุภาคแล้ว ต่อไปจะพิจารณาถึงทางเดินของอนุภาคในระนาบส่วนโค้งอันหนึ่งในระนาบ xy อาจกำหนดให้ y เป็นฟังก์ชั่นของ x, หรือ x เป็นฟังก์ชั่นของ y กล่าวคือ

$$y = y(x) \tag{1.64}$$

หรือ

$$x = x(y) \tag{1.65}$$

จากสมการ (1.64) และ (1.65) จะเห็นว่าไม่สะดวกสำหรับหลาย ๆ กรณี ตัวอย่าง เช่น เมื่อส่วนโค้งนั้นกลับมาที่เดิมอีกเป็นครั้งที่สอง, เราอาจต้องกำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y เป็น

$$f(x,y) = 0 \qquad (1.66)$$

แบบของส่วนโค้งที่กล่าวมานี้ เช่น การเคลื่อนที่เป็นวงกลม ซึ่งสมการของมัน คือ

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$ เมื่อ a เป็นรัศมีของวงกลม

มีอยู่วิธีหนึ่ง (ในหลาย ๆ วิธี) ที่ให้ความสะดวกมาก โดยการแสดงส่วนโค้งในเทอมของสัญลักษณ์ s ใด ๆ คือ

$$x = x(s), \quad y = y(s) \qquad (1.67)$$

หรือ $\vec{r} = \vec{r}(s)$

ค่า s จะมีเพียงค่าเดียว ที่ทุก ๆ จุดของส่วนโค้ง. เมื่อ s เป็นตัวแปร, ตำแหน่ง x(s), y(s) ทางเดินของอนุภาคไม่เป็นส่วนโค้ง. สัญลักษณ์ s อาจเป็นระยะทางซึ่งวัดตามส่วนโค้ง จากจุดเริ่มต้นที่กำหนดให้. สมการของวงกลมสามารถอธิบายในเทอมของสัญลักษณ์ θ โดยอยู่ในฟอร์ม

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างแกน x และรัศมี a ไปยังจุด (x,y) ของวงกลม. ถ้า s เป็นระยะทางที่วัดรอบวงกลม เราได้

$$x = a\cos\frac{s}{a}$$

$$y = a\sin\frac{s}{a}$$

ปัญหาหรือโจทย์ส่วนใหญ่ในทางกลศาสตร์ ตัวสัญญลักษณ์มักเป็นเวลา, กรณีพิเศษของสมการ (1.67) ไม่ใช่เป็นทางเดินตามส่วนโค้งของอนุภาคเพียงอย่างเดียว แต่เป็นอัตราทางเดินตามขวางของอนุภาคด้วย. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่รอบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ v ตำแหน่งของอนุภาคในเวลา t ใด ๆ คือ

$$x = a\cos\frac{vt}{a}$$

$$y = a\sin\frac{vt}{a}$$

และถ้าการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีทางเดินตามสมการ (1.67), เราสามารถหาการเคลื่อนที่ที่แน่นอนของอนุภาคได้ โดยกำหนด s เป็นฟังก์ชั่นของเวลา s(t) หรือวิธีการโดยตรงคือ

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1.68}$$

หรือ

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.69}$$

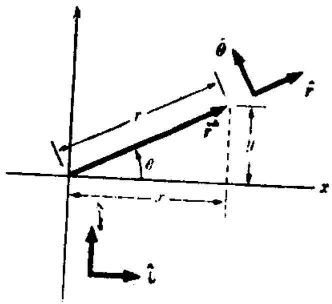
ความเร็วและความเร่ง หาได้จาก

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{j} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \tag{1.70}$$

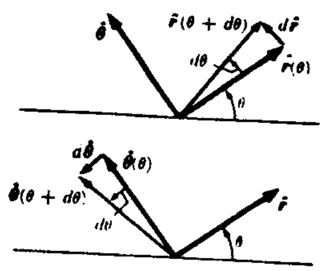
หรือในแต่ละแกน : $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ (1.71)

และ $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} \qquad (1.72)$$

หรือในแต่ละแกน : $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ (1.73)



รูป 1.17 plane polar coordinates



รูป 1.18 Increments in the vector r and θ

โพลาร์ โคออดิเนต (Polar coordinates) ดังรูป 1.17 ให้ความสะดวกในการอธิบายและแก้ปัญหาโจทย์ได้มากมาย. ระยะพิกัด (Coordinates) r,θ มีความสัมพันธ์กับระยะพิกัด x,y ตามสมการ

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.74}$$

และ

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.75}$$

เรากำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $r,\hat{\theta}$ ในลักษณะทิศทางของการเพิ่มขึ้นของ r และ θ ด้วยวิธีการเดียวกัน (ดังรูป 1.18). เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r},\hat{\theta}$ เป็นฟังก์ชั่นของมุม θ และมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i},\hat{j}$ ดังสมการ

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \tag{1.76}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \tag{1.77}$$

สมการ (1.76), (1.77) ทำได้จากรูป 1.17, และโดยการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการ (1.76) และ (1.77) เราได้สูตรที่สำคัญ คือ

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \tag{1.78}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \tag{1.79}$$

สมการ (1.78), (1.79) อาจหาจากการศึกษารูป 1.18 ก็ได้. เวกเตอร์บอกตำแหน่ง r กำหนดให้อยู่ในเทอมของโพลาร์ โคออดิเนตด้วยวิธีธรรมดา คือ

$$\vec{r} = r\,\hat{r}(\theta) \tag{1.80}$$

เราอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคในโพลาร์ โคออดิเนต โดยให้ r และ θ เป็นฟังก์ชั่นของเวลา t ดังนั้น เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ก็หาค่าโดยให้เป็นฟังก์ชั่นของเวลา $\vec{r}(t)$ ด้วย. เราจึงหาความเร็วได้จาก :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\hat{r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \tag{1.81}$$

ความเร็วของแต่ละแกน ในทิศทางของ $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$:

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r\,\dot{\theta} \tag{1.82}$$

สมการของความเร่ง คือ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\hat{r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} \tag{1.83}$$

ความเร่งในแต่ละแกน คือ

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{1.84}$$

เทอม $r\dot{\theta}^2 = \frac{v_\theta^2}{r}$ เรียกว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง เกิดขึ้นในขณะที่กำลังเคลื่อนที่ในทิศทางของ θ. ถ้า $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ การเคลื่อนที่จะเป็นวงกลม และ $a_r = \frac{-v_\theta^2}{r}$ ส่วนเทอม $2\dot{r}\dot{\theta}$ บางครั้งเรียกว่า ความเร่งคอริโอลิส (Coriolis acceleration)

1.11 จลศาสตร์ใน 3 มิติ (KINEMATICS IN THREE)

เรื่องของจลศาสตร์ใน 3 มิติ เราพัฒนาเพิ่มเติมให้ต่อเนื่องกับตอนที่แล้ว (จลศาสตร์ใน 2 มิติ) โดยกำหนดระยะพิกัด (Coordinates) x,y,z อยู่ในแกนของ regtangular Coordinates, หรือกำหนดโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = (x,y,z)$ ทางเดินของอนุภาคอาจแสดงอยู่ในฟอร์มของสองสมการด้วย x,y, และ z :

$$f(x,y,z) = 0, \quad g = (x,y,z) = 0 \tag{1.85}$$

แต่ละสมการแสดงถึงส่วนโค้งของผิว. ทางเดินของอนุภาคเป็นทางเดินของเส้นโค้งของผิวสองเส้นที่ตัดกัน. ทางเดินนี้อาจแสดงในลักษณะของสัญญลักษณ์ร่วมได้ด้วย.

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \tag{1.86}$$

เราหาความเร็วและความเร่งใน 3 มิติได้ดังนี้

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \tag{1.87}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}\ ,\quad v_y = \frac{dy}{dt}\ ,\quad v_z = \frac{dz}{dt}\ , \tag{1.88}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\ , \tag{1.89}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.90}$$

ส่วนใหญ่เรามักใช้ Cartesian coordinates สำหรับการแก้ปัญหาโจทย์ เฉพาะกรณีเมื่อศึกษาให้ลึกลงไปอีก บ่อยครั้งเหมือนกันที่เราจำเป็นต้องใช้ spherical polar coordinates และ Cylindrical polar coordinates. Cylindrical polar coordinates (ρ,ψ,z) เรากำหนดดังรูป 1.19, หรือจากสมการ

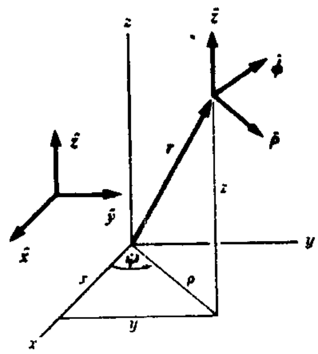
$$x = \rho\cos\psi,\quad y = \rho\sin\psi,\quad z = z, \tag{1.91}$$

และโดยการกลับกัน,

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{(x^2 + y)^{\frac{1}{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$z = z \tag{1.92}$$



<u>รูป 1.19</u> Cylindrical polar coordinates

(หมายเหตุ : ในช่วงต่อไปของบทที่ 1 นี้ เราใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ แทน $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ตามลำดับ เพื่อความเข้าใจและศึกษาได้สะดวกขึ้น)

ระบบเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\rho}$, $\hat{\psi}$, $\hat{z}$ อยู่ในทิศทางของการเพิ่มขึ้นของ ρ, ψ, z ตามลำดับ ดังรูป 1.19. สำหรับ $\hat{z}$ คงที่ แต่ $\hat{\psi}$ และ $\hat{\rho}$ เป็นฟังก์ชั่นของ ψ, เช่นเดียวกับระนาบโพลาร์โคออดิเนต [สมการ (1.76), (1.77)] :

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \psi + \hat{y} \sin \psi, \tag{1.93}$$

$$\hat{\psi} = -\hat{x} \sin\psi + \hat{y} \cos \psi, \tag{1.94}$$

และในทำนองเดียวกันอีกกับสมการ (1.78), (1.79)

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\psi} = \hat{\psi} \tag{1.95}$$

$$\frac{d\hat{\psi}}{d\psi} = -\hat{\rho} \tag{1.96}$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง r สามารถอธิบายในฟอร์มของ cylindrical coordinates

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \tag{1.97}$$

จากสมการ (1.95) และ (1.96), และจากการดิฟเฟอเรนชิเอท เราสามารถหาความเร็วและความเร่งได้ คือ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\psi}\,\hat{\psi} + \dot{z}\,\hat{z}, \tag{1.98}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\psi}^2)\ \hat{\rho} + (\rho\ddot{\psi} + 2\dot{\rho}\dot{\psi})\ \hat{\psi} + \ddot{z}\,\hat{z} \tag{1.99}$$

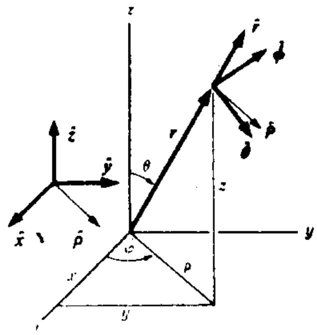
เมื่อเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\hat{z}, \hat{\psi}, \hat{\rho}$ ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ สามารถอธิบายในเทอมของแกน (Components) ตาม $\hat{z}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\rho}$:

$$\vec{A} = A_{\rho}\,\hat{\rho} + A_{\psi}\hat{\psi} + A_{z}\hat{z} \tag{1.100}$$

ต้องอย่าลืมว่า เมื่อ $\hat{\rho}$ และ $\hat{\psi}$ เป็นฟังก์ชั่นของ ψ, กลุ่มขององค์ประกอบ $(A_{\rho}, A_{\psi}, A_{z})$ เป็นจุดที่กำหนดแน่นอนใน space สำหรับแสดงตำแหน่งของเวกเตอร์ A ใด ๆ, หรืออย่างน้อยที่สุดต้องกำหนดจุดที่แน่นอนของระยะพิกัด ψ. ด้วยเหตุนี้ องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน Cylindrical coordinates และในความเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ระบบของ Curvilinear coordinates ไม่ได้ขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ของตัวมันเองเพียงอย่างเดียว แต่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของอนุภาคใน space ด้วย. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นฟังก์ชั่นของสัญญลักษณ์ เช่นเวลา t แล้วเราสามารถคำนวณค่าของอนุพันธ์ (derivative) โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการ (1.100), แต่ก็ต้องระวังในการให้ความหมายของตัวแปร $\hat{\rho}$ และ $\hat{\psi}$, ถ้าหากตำแหน่งของเวกเตอร์เป็นการเปลี่ยนแปลงของเวลาด้วย (ตัวอย่างเช่น, ถ้า $\vec{A}$ เป็นแรงกระทำต่ออนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่) :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_\rho}{dt} - A_\psi \frac{d\psi}{dt}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{dA_\psi}{dt} + A_\rho \frac{d\psi}{dt}\right)\hat{\psi} + \frac{dA_z}{dt}\hat{z} \qquad (1.101)$$

สูตรสมการ (1.98) และ (1.99) เป็นกรณีเฉพาะของสมการ (1.101). สูตรสำหรับ $\frac{d\vec{A}}{dt}$ เราสามารถหาในกรณีของโพลาร์โคออดิเนตใน 2 มิติได้อีกด้วย.



รูป 1.20 Spherical polar coordinates

Spherical polar coordinates (r, θ, ψ) เรากำหนดดังรูป 1.20 หรือจากสมการ

$$x = r \sin\theta \cos\psi , \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta. \qquad (1.102)$$

การอธิบายสำหรับ x และ y เป็นไปตามการกำหนด $\rho = r \sin\theta$, และโดยการใช้สมการ (1.91) ; สูตรของ z ศึกษาได้จากรูป 1.20 ทำนองเดียวกัน

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{z} \qquad (1.103)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\psi}$ เหมาะสำหรับ Spherical coordinates ดังแสดงในรูป 1.20, เมื่อ ψ เป็นเวกเตอร์เช่นเดียวกับ Cylindrical coordinates. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\rho}$ ได้นำมาใช้ด้วยโดยมีความสัมพันธ์กับ $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$. เรากำหนดว่า $\hat{z},\hat{\rho},\hat{r},\hat{\theta}$ ทั้งหมดนี้มีทิศทางอยู่ในระนาบในแนวตั้ง (vertical) เดียวกัน. จากรูป 1.20 และสมการ (1.93),(1.94), เราได้

$$\hat{r} = \hat{z}\cos\theta + \hat{\rho}\sin\theta = \hat{z}\cos\theta + \hat{x}\sin\theta\cos\psi + \hat{y}\sin\theta\sin\psi, \tag{1.104}$$

$$\hat{\theta} = -\hat{z}\sin\theta + \hat{\rho}\cos\theta = -\hat{z}\sin\theta + \hat{x}\cos\theta\cos\psi + \hat{y}\cos\theta\sin\psi, \tag{1.105}$$

และ $$\hat{\psi} = -\hat{x}\sin\psi + \hat{y}\cos\psi \tag{1.106}$$

โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท สมการ (1.104), (1.105), และ (1.106) เราพบว่า

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\psi}\sin\theta, \tag{1.107}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\psi} = \hat{\psi}\cos\theta, \tag{1.108}$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\psi} = -\hat{\rho} = -\hat{r}\sin\theta - \hat{\theta}\cos\theta \tag{1.109}$$

ใน Spherical coordinates เวกเตอร์บอกตำแหน่ง r คือ

$$\vec{r} = r\,\hat{r}\;(\theta,\psi) \tag{1.110}$$

จากการดิฟเฟอเรนชิเอทและการใช้สมการ (1.107), (1.108), และ (1.109), เราได้ความเร็วและความเร่ง ดังนี้

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + (r\,\dot{\psi}\sin\theta)\hat{\psi} \quad (1.111)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\,\theta^2 - r\dot{\psi}^2\sin^2\theta)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\psi}^2$$
$$\sin\theta\cos\theta)\,\hat{\theta} + (r\dot{\psi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\psi}\sin\theta$$
$$+ 2r\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta)\,\hat{\psi} \quad (1.112)$$

กลุ่มของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\psi}$ ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใด ๆ มีองค์ประกอบในเทอมของแกน spherical :

$$\vec{A} = A_r\,\hat{r} + A_\theta\,\hat{\theta} + A_\psi\,\hat{\psi} \quad (1.113)$$

เหมือนเช่นเคยองค์ประกอบต่าง ๆ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ $\vec{A}$ เพียงอย่างเดียว แต่มันขึ้นอยู่กับตำแหน่งของอนุภาคด้วย. ถ้า $\vec{A}$ และตำแหน่งของมันเป็นฟังก์ชั่นของเวลา t ดังนั้น

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta\,\frac{d\theta}{dt} - A_\psi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)\hat{r}$$
$$+ \left(\frac{dA_\theta}{dt} + A_r\,\frac{d\theta}{dt} - A_\psi\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)\hat{\theta}$$
$$+ \left(\frac{dA_\psi}{dt} + A_r\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} + A_\theta\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\right)\hat{\psi}. \quad (1.114)$$

แบบฝึกหัด บทที่ 1

1.1 Prove, on the basis of the geometric definitions of the operations of vector algebra, the following equations. In many cases a diagram will suffice. (a) Eq. (1.10) (b) Eq. (1.22) (c) Eq. (1.31) (d) Eq. (1.32)

1.2 Prove, on the basis of the algebraic definitions of the operations of vector algebra in terms of components, the following equatioms :
(a) Eq. (1.11) (b) Eq. (1.22) (c) Eq. (1.31)

1.3 Prove the following inequalities. Give a geometric and an algebraic proof (in terms of components) for each :

(a) $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

(b) $|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq |\vec{A}|\ |\vec{B}|$

(c) $|\vec{A} \times \vec{B}| \leq |\vec{A}|\ |\vec{B}|$

1.4 For the same vectors as in Problem 1.5, express in $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ form

(a) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

(b) $\vec{A} \times \vec{B}$

(c) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

1.5 Given two vectors $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$. Find

(a) the value of $|\vec{A} - \vec{B}|$

(b) the value of $\vec{A} \cdot \vec{B}$

(c) the angle between $\vec{A}$ and $\vec{B}$

1.6 Find the length of the projection of the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ on the vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

1.7 The vector $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ is perpendicular to the vector $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + q\hat{k}$. What is the value of q ?

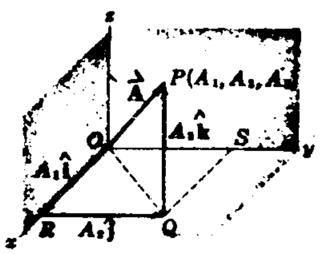
1.8 Given $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. Find

(a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ and $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

(b) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ and $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

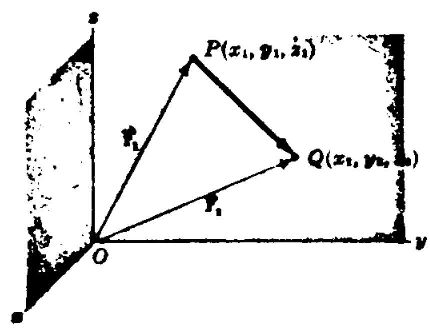
1.9 Fine the value of $\left[(\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{i} + \hat{k})\right] \cdot \left[(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k})\right]$

1.10 Prove that the magnitude A of the vector $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ is $\vec{A} = \left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right)^{1/2}$ Sec Fig 1.21



รูป 1.21

1.11 Determine thevector having the initial point $P(x_1, y_1, z_1)$ and the terminal point $Q(x_2, y_2, z_2)$ and find its magnitude. See Fig 1.22



รูป 1.22

1.12 If $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ and $\vec{B} = B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}$, prove that $\vec{A} \cdot \vec{B}$ $= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

1.13 Two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are given by

$\vec{A} = 2i + 4j + 6k$

$\vec{B} = 3i - 3j - 5k$

Compute the scalar and vector products $\vec{A} \cdot \vec{B}$ and $\vec{A} \times \vec{B}$

1.14 Show that

(a) $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = A^2 - B^2$

(b) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$

The associative laws needed here,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

and

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

may easily be verified (if desired) by expansion in cartesian components

1,15 Given the three vectors,

$$\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k},$$

$$\vec{Q} = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{R} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}.$$

find two that are perpendicular and two that are parallel or antiparalle.

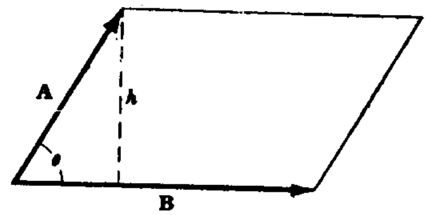
1.16 Using the vectors

$$\vec{P} = \hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta$$

$$\vec{Q} = \hat{i} \cos \psi - \hat{j} \sin \psi$$

$$\vec{R} = \hat{i}\cos\psi + \hat{j}\sin\psi$$

1.17 Prove that the area of a parallelogram with sides $\vec{A}$ and $\vec{B}$ is $|\vec{A} \times \vec{B}|$ See fig 1.23.



รูป 1.23

1.18 Find the volume of a parallelepiped with sides $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{B} = \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$.

1.19 Prove that $\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$. Hint : Differentiate the expression $\vec{A}.\vec{A} = A^2$ with respect to t.

1.20 Prove that

$$\frac{d}{dt}\vec{r}.(\vec{v} \times \vec{a}) = \vec{r}.(\vec{v} \times \dot{\vec{a}})$$

where $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

1.21 If $\vec{A} = 2t^2\hat{i} + 3t\hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{B} = \hat{i}\cos\omega t + t^2 k$ find

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \text{ and } \frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$$

as functions of t.

1.22 Prove the vector identity $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$.

1.23 Two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ represent concurrent sides of a parallelogram. Prove that the area of the parallelogram is $|\vec{A} \times \vec{B}|$.

1.24. Prove vectorially that an angle inscribed in a semicircle is a right angle.

1.25. Show that

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \times \vec{C}).$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{D})\, \vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})\, \vec{D}.$$

1.26. Show that the magnitude of a vector is unchanged by a rotation. Use the matrix

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

for a rotation about the z axis through an angle θ.

1.27. The two sets of vectors a,b,c, and a', b', c', are said to be reciprocal if $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = 1$ and all other mixed dot products like $a \cdot b' = 0$. Show that $c' = (a , b)/Q$, $a' = (b \times c)/Q$, $b = (c \times a)/Q$ where $Q = a \cdot (b \times c)$,

1.28. Verify the expansion of the triple vector product

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

by direct expansion in cartesian coordinates.

1.29. Prove that $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ is the volume of the parallelepiped whose edges are $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ with positive or negative sign according to whether a right-hand screw rotated from $\vec{A}$ toward $\vec{B}$ would davance along $\vec{C}$ in the positive or negative direction, $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ are any three vectors not lying in a single plane.

1.30. The coordinates of the three vertices of a triangle are (2,1,5), (5,2,8) and (4,8,2). Compute its area by vector methods.

1.31. If four vectors $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, and $\vec{d}$ all lie in the same plane, show that

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$$

Hint. Consider the directions of the cross-product vectors.

1.32. For a particle miving in a circular orbit $\vec{r} = \hat{i} r \cos \omega t$,

(a) evaluate $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

(b) Show that $\vec{r} + \omega^2 \vec{r} = 0$

The radius $\vec{r}$ and the angular velocity ω are constant.

1.33. Show that

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

1.34. Show, by differentiation components. that

(a) $\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$,

(b) $\frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$,

just like the derivative of the product of two algebraic functions.

1.35. Prove $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$

Hint. Treat as a triple scalar product.

1.36. If $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are constant vectors, show that

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{r}) = \vec{A} \times \vec{B}.$$

1.37. The electrostatic field of a point q is

$$\vec{E} = \frac{q}{4\P\omega 0} \quad \frac{\vec{r}_o}{\vec{r}^2}$$

Calculate the divergence of $\vec{E}$.

1.38. Show, by expansion of the surface integral, that

$$\lim_{\int d\vec{r} \to 0} \frac{\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{V}}{\int d\vec{r}} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

H'nt. Choose the volume to be a differential volum, dx dy dz.

1.39. Evaluate

$$\frac{1}{3} \int_S \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$$

over the unit cube defined by the point (0,0,0) and the unit intercepts on the positive x-, y-, and z-axes. Note that (a) $\vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$ is zero for the surfaces and (b) each of the three remaining surfaces contributes the same amount to the integral.

1.40. Three vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$, and $\vec{C}$ are given by

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{k} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

Compute the values of $\vec{A}$, $\vec{B} \times \vec{C}$ and $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ and $\vec{B}(\vec{C} \times \vec{A})$

1.41. With ψ a scalar function show that

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})\psi = r^2\nabla^2\psi = -r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

1.42. Using the properties of the vector symbol $\vec{\nabla}$, derive the vector identities :

$$\text{curl (curl } \vec{A}) = \text{grad (div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

$$u \text{ grad } v = \text{grad } (uv) - v \text{ grad } u.$$

Then write out the x-components of each side of these equations and prove by direct calculation that they are equal in each ease. (One must be very careful, in using the first identity in curve linear coordinates, to take proper account of the dependence of the unit vectors on the coordinates.)

1.43. If $\phi = x^2yz^3$ and $\vec{A} = xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2y\hat{k}$, find (a) $\vec{\nabla}\phi$ (b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, (c) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, (d) div $(\phi\vec{A})$, (e) curl $(\phi\vec{A})$.

1.44. Evaluate $\displaystyle\int_{u=1}^{2} \vec{A}(u)\, du$ if $\vec{A}(u) = (3u^2 - 1)\hat{i} + (2u - 3)\hat{j} + (6u^2 - 4u)\hat{k}$.

1.45. a) A particle in the xy-plane is attracted toward the origin by a force $\vec{F} = k/y$, inversely proportional to its distance from the x-axis. Calculate the work done by the force when the particle moves from the point $x = 0$, $y = a$ to the point $x = 2a$, $y = 0$ along a path which follows the sides of a rectangle consisting of a segment parallel to the x-axis from $x = 0$, $y = a$ to $x = 2a$, $y = a$, and a vertical segment from the latter point to the x-axis.

b) Calculate the work done by the same force when the particle moves along an ellipse of semiaxes a, 2a, Hint : Set $x = 2a \sin \theta$, $y = a \cos \theta$

1.46. Find the $\hat{r}$- and $\hat{\theta}$- components of $d\vec{a}/dt$ in plane polar coordinates, where $\vec{a}$ is the acceleration of a particle.

1.47. Find the components of $d^2 \vec{A}/dt^2$ in cylindrical polar coordinates, where the vector $\vec{A}$ is a function of t and is located at at moving point.

1.48. Find the components of $d^3 \vec{r}/dt^3$ in spherical coordinates.

1.49. Resolve the cartesian unit vectors into their spherical polar components.

$$\hat{i} = r_o \sin\theta \cos\psi + \theta_o \cos\theta\, \psi - \psi_o \sin\psi$$

$$\hat{j} = r_o \sin\theta \sin\psi + \theta_o \cos\theta \sin\psi + \psi_o \cos\psi$$

$$\hat{k} = r_o \cos\theta - \theta_o - \theta_o \sin\theta$$

1.50. If a vector finction $\vec{F}$ depends on both space coordinates (x,y,z) and time t, show that

$$d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{F} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\,dt,$$

1.51. A particle is moving through space. Find the spherical coordinate components of its velocity and acceleration:

1.52. Ecpress $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ in spherical polar coordinates.

1.53. Calculate curl $\vec{A}$ in cylindrical coordinates.