

การทดลองที่ 7

เรื่อง โมเมนตัมและการเคลื่อนที่ของปืนใหญ่

จุดประสงค์การเรียนรู้

แสดงกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และการเคลื่อนที่แบบปืนใหญ่ (projectile motion) ได้

เครื่องใช้ในการทดลอง

- จุดทดลองเรื่อง โมเมนตัมและการเคลื่อนที่ของปืนใหญ่ (spring-gun ballistic pendulum)
- ไนบาร์หัด
- กระดาษขาวและกระดาษคาร์บอน
- พื้นอิฐ
- เครื่องชั่ง

ทฤษฎี

โดยนิยามของปืนใหญ่อาจกล่าวได้ว่า ปืนใหญ่คือวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ในอว拉斯 หรือ ในบรรยายกาศโดยไม่มีแรงขับเคลื่อนอีกต่อไป เช่น ลูกนกลดที่ลูกบัวงอกไป ลูกปืนที่ยิงออกไป และการตกของถุงกระเบิด เป็นต้น

โมเมนตัมของวัตถุ (p) นิยามว่า คือ พลกูณของมวลของวัตถุ (m) กับความเร็ว (v) ของวัตถุ

$$p = mv \quad (7.1)$$

ตามกฎอนุรักษ์ของโมเมนตัมแสดงว่า การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของส่วนหนึ่งของระบบ จะเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกันกับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอีกส่วนหนึ่งของระบบ กฎดังกล่าวอาจพิสูจน์ได้จากการกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน(Newton's Law of Motion) ข้อที่ 2 และ 3 ดังนี้

สมมติ มวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1 ไปชนกับวัตถุอีกอันหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งนิ่ง จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ดังนี้นิวตั้น แรงกระทำของวัตถุหนึ่งด้วยแรง f_1 (โดยวัตถุอันที่สอง) และในขณะเดียวกันวัตถุอันแรกจะกระทำให้เกิดแรงต่อวัตถุอันหลังด้วยขนาดเดียวกัน แต่ทิศทางตรงข้าม เป็น $-f_1$ ตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน สำหรับ a_1 และ a_2 เป็นความเร่งของวัตถุทั้งสองตามลำดับ จะได้

$$f_1 = -f_2 \quad \text{และ} \quad m_1 a_1 = -m_2 a_2 \quad (7.2)$$

แรงทั้งสองนี้กระทำต่อกันในช่วงเวลา Δt ดังนั้นจากนิยามของความเร่ง

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} \quad \text{และ} \quad a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t}$$

เมื่อ $\Delta v_1, \Delta v_2$ เป็นการเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุทั้งสอง ตามลำดับ แทนค่าความเร่งของวัตถุทั้งสองนี้ใน (7.2)

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2 \quad (7.3)$$

แต่ละข้างของ (7.3) คือ การเปลี่ยนแปลงโน้มนต์นั้นเอง ดังนั้น (7.3) จึงมีความหมายว่า โน้มนต์ที่หายไปของวัตถุแรกจะมีค่าเท่ากับ โน้มนต์ที่เพิ่มขึ้นในวัตถุอันที่สอง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า “โน้มนต์ทั้งหมดของระบบจะมีค่าคงที่ในระหว่างการชนกัน”

กฎการอนุรักษ์ของโน้มนต์ใช้ได้กับการชนทุกแบบ สำหรับกรณีการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic impact) ซึ่งจะกล่าวในตอนการทดลองต่อไป ก็ใช้หลักอนุรักษ์โน้มนต์ได้ว่า โน้มนต์ของลูกบอลโลหะก่อนการชน (ดูรูปที่ 7.3) จะเท่ากับ โน้มนต์ของลูกบอลโลหะกับลูกตุ้มซึ่งอยู่ติดกันไป ณ ทันทีทันใดภายหลังการชน (ในชุดทดลองเรื่องนี้ ทดลองสติกเพนคูลัม (ballistic pendulum) มีความเร็วต้น (ก่อนการชน) เป็นศูนย์ โน้มนต์ของลูกบอลโลหะ ก่อนการชนมีค่าเท่ากับมวล m คูณกับความเร็วต้นก่อนชน v ภายหลังการชนกัน ไปเรื่อยๆ (ลูกบอลโลหะ) จะติดอยู่ภายใต้ลูกตุ้มนี้จะมีความเร็ว V และมีโน้มนต์ $(M+m)V$ จากกฎการอนุรักษ์ โน้มนต์

$$\begin{aligned} \text{โน้มนต์ทั้งหมดก่อนชน} &= \text{โน้มนต์หลังชน} \\ mv &= (M+m)V \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$v = \frac{M+m}{m} V \quad (7.5)$$

เนื่องจากผลของการชนทำให้เพนคุลัมซึ่งมีตัวไปร์เจกไทล์ติดอยู่เคลื่อนที่ในแนวเส้นโถงโดยมีจุดที่ยึดเพนคุลัมเป็นจุดศูนย์กลาง ดังนั้นจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วงจะเปลี่ยนไปอยู่ในระดับสูงกว่าเดิมเป็นระยะ h ถ้ารู้ระยะทางนี้ก็จะหา V ได้ ระหว่างพลังงานของระบบ ณ ทันทีทันใดหลังการชน จะต้องเท่ากับพลังงานศักย์ที่เพิ่มขึ้นของเพนคุลัมเมื่อจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วงเปลี่ยนไปอยู่ ณ ตำแหน่งสูงๆ

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh \quad (7.6)$$

เมื่อ g คือ ค่าความเร่งแห่งความโน้มถ่วง ณ ที่ทำการทดสอบ

$$\text{จะได้ } V = \sqrt{2gh} \quad (7.7)$$

สมการ (7.7) ทำให้เราหา V ได้ และเมื่อซึ่ง M, m แล้วแทนค่าต่างๆ ลงใน (7.5) ก็จะหา v ได้

เราอาจทดสอบค่าความเร็วต้น v ของตัวไปร์เจกไทล์ที่หาได้จาก (7.5) ได้โดยวัดระยะทางตามแนวคิ่ง ระยะตามระดับที่ไปร์เจกไทล์เคลื่อนที่เมื่อยิงไปร์เจกไทล์ในแนวระดับด้วยความเร็ว v และปล่อยให้ตกอย่างอิสระ ในกรณีเช่นนี้ความเร็วในแนวระดับจะคงที่ (คือความต้านทานของอากาศทึบไป) โดยที่ความเร็วในแนวคิ่งอันมีผลจากแรงโน้มถ่วงซึ่งทำให้แนวคิ่งมีความเร่งคงที่ไม่มีผลต่อความเร็วในระดับ และขณะเดียวกัน ความเร็วในแนวระดับก็ไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวคิ่งอย่างอิสระโดยไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวระดับ แต่การเคลื่อนที่จริงของไปร์เจกไทล์นั้นเป็นผลรวมของความเร็วในแนวระดับที่คงที่กับความเร็วในแนวคิ่งที่มีความเร่งสนับสนุนอันเนื่องมาจากการโน้มถ่วง ดังนั้นในช่วงเวลา t ที่ไปร์เจกไทล์ตกถึงพื้นจะได้ระยะตามแนวระดับ

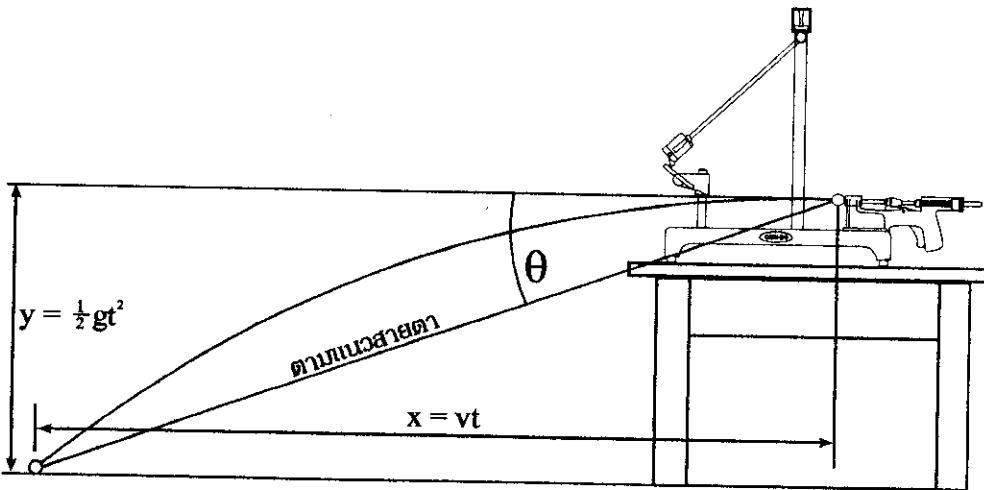
$$x = vt \quad (7.8)$$

และได้ระยะตามแนวคิ่ง

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (7.9)$$

โดยการคำนวณ t ออกจาก 2 สมการนี้ และถือว่า x, y เราสามารถวัดได้ เรายังคงใช้ความเร็วต้นได้คือ

$$v = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.10)$$



รูป 7.2 แสดงระยะตามแนวคิ่งและแนวระดับของปืนไรเฟล

จากรูป 7.1 แนวสายตา (line of sight, LOS) ทำมุม θ กับแนวระดับเรียกมุมนี้ว่า มุมยก (angle of elevation) โดยเรขาคณิตจะได้

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{v\sqrt{2y/g}} \quad (7.11)$$

$$= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{gy}{2}}$$

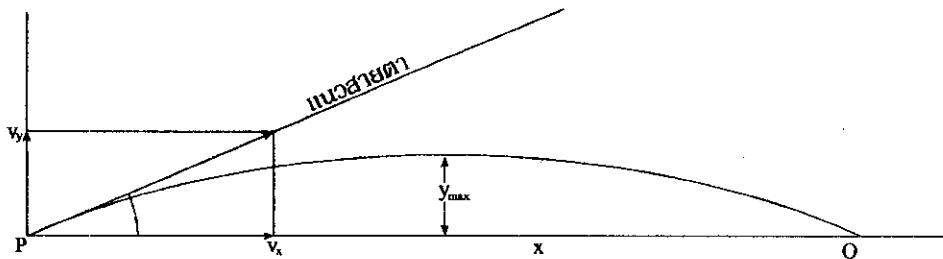
ในกรณีที่ปืนไรเฟลเคลื่อนที่โดยทำมุมยก (angle of elevation) ϕ กับแนวระดับ เช่น ขึ้นบันได หรือขั้นชุดทดลองบนพื้นอิฐเพื่อยิงถูกนกโลหะในแนวทำมุมยกกับเส้นระดับ หรือการตี ลูกเบสบอล (baseball) ทันทีที่ตัวปืนไรเฟลถูกยิงออกไปที่จุด P จะมีแรงโน้มถ่วงกระทำ จึงถูก เร่งด้วยความโน้มถ่วงให้ทดลองสู่พื้นในแนวที่ต่ำกว่า LOS แนวการเคลื่อนที่ของปืนไรเฟลจะ เป็นรูปโค้งพาราโบลา (parabola) โดยไม่คิดถึงความต้านทานเนื่องจากอากาศและตกสู่พื้นที่จุด Q ซึ่งอยู่ในแนวระดับเดียวกับจุด P ได้ระยะตามแนวระดับเป็น x ระยะสูงสุดที่ปืนไรเฟลขึ้นไป ได้คือ y_{max} เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ขึ้นจะเท่ากับเวลาที่ทดลองมา ความเร็วในแนวระดับ v_x คงที่ และความเร็วในแนวคิ่ง v_y ที่จุด Q และ P มีค่าเท่ากัน (ตัดความต้านทานของอากาศทิ้งไป)

ดังนั้น จะได้ระยะตามแนวระดับคือ

$$x = \frac{v^2 \sin 2\phi}{g} \quad (7.12)$$

$$\text{เมื่อ } v = \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\phi}} \quad (7.13)$$

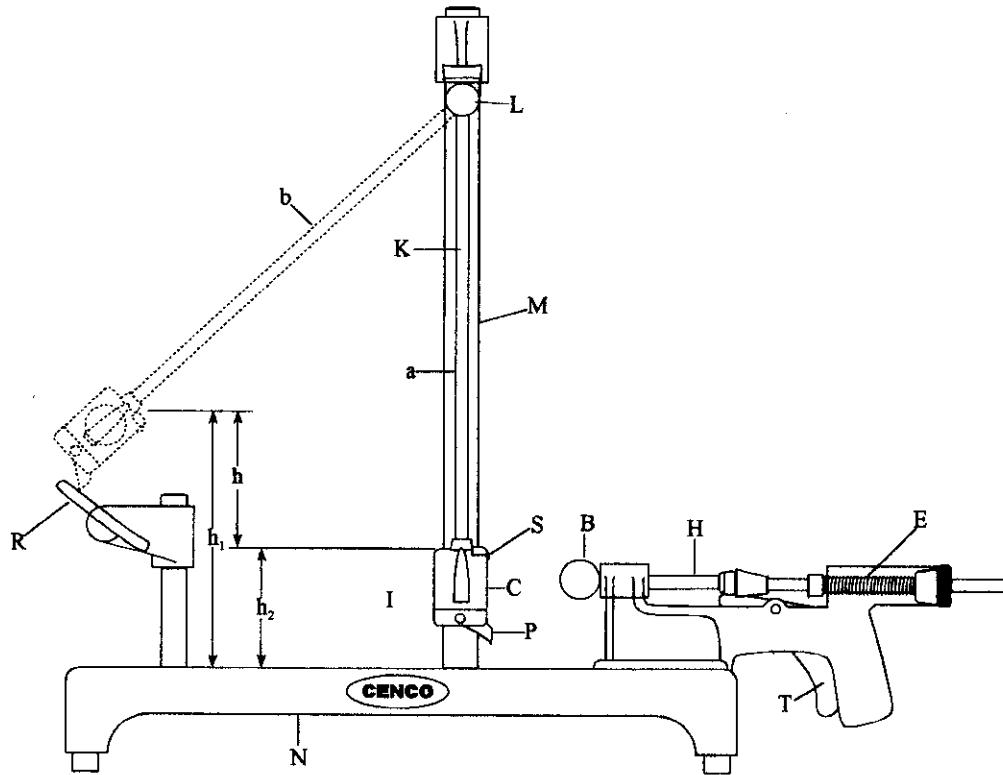
$$\text{จะได้ } y_{\max} = \frac{v^2 \sin^2 \phi}{2g} \quad (7.14)$$



รูปที่ 7.2 ไปร์เจกไทล์เคลื่อนที่โดยทำมุน กับแนวระดับ

ชุดทดลองเรื่อง ไมเมนตัมและการเคลื่อนที่ของ ไปร์เจกไทล์ ประกอบด้วยบอร์ดลิสติกเพน คูลัม และบีนสปริงสำหรับยิงลูกบล็อกโลหะ ตัวเพนคูลัมมีลูกศุमทรงกระบอก C ข้างในกล่องเพื่อรับลูกปืนจากบีนสปริง และแขวนไว้ด้วยท่อแข็งแรงแต่เบา K โดยที่ท่อ K นี้แขวนไว้กับหลัก M ซึ่งตั้งจากอยู่กับฐาน N สามารถถอดตัวเพนคูลัมออกได้ถ้าคลายสกรู L นอกจากนี้ยังอาจหมุนปรับสกรูนี้เพื่อให้เพนคูลัมแก่งได้อย่างอิสระ โดยมีความเสียดทานน้อยมาก ตัวไปร์เจกไทล์ เป็นลูกบล็อกโลหะทองเหลือง B เมื่อยิงเข้าไปในลูกศุम จะถูกยึดไว้ด้วยสปริง S ในลักษณะที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง (center of gravity) ของระบบลูกศุมจะซึ่งแสดงจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง

เมื่อยิงไปร์เจกไทล์เข้าไปในลูกศุม เพนคูลัมจะแกว่งขึ้นและลิ้นสปริง P จะไปขัดกับร่างรูปโครง R ที่ระยะสูงสุดที่เพนคูลัมจะเคลื่อนขึ้นไปได้ ราง R นี้มีผิวเป็นชั้นฟันและเป็นรูปโครงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในแนวแกนของเพนคูลัม



รูปที่ 7.3 Spring – Gun Ballistic Pendulum

วิธีทดลอง

ตอนที่ 1 คำนวณความเร็วต้นของโปรเจกไทล์ โดยบันลือสติกเพนคูลัม

1. จัดเครื่องมือให้อยู่ใน位子 ยึดเครื่องมือให้แน่นและให้อยู่ในแนวระดับ
2. ยืดลูกศุ่นให้ติดกับราง R ก่อน แล้วจึงจัดปืนสปริงให้พร้อมที่จะยิง โดยเอาลูกปืนใส่ในปลายเท่ง H แล้วดันเข้าไปเพื่อให้สปริง E อัดเข้ามีแรงดันที่จะยิงลูกปืนให้พุ่งไปข้างหน้าเมื่อลั่นไกปืน T และมีความเร็วต้นของลูกปืนเท่าๆ กันทุกครั้ง
3. ปล่อยลูกศุ่นออกจากราง เพื่อให้เพนคูลัมแขวนห้อยอย่างอิสระ เมื่อเพนคูลัมอยู่ใน位子แล้ว จึงลั่นไกปืน ลูกปืนจะวิ่งเข้าไปในลูกศุ่นด้วยความเร็วค่าหนึ่งซึ่งทำให้เพนคูลัมแกว่งเปลี่ยนตำแหน่งจาก (a) ไปยัง (b) (ดูรูปที่ 7.3) และเกาะอยู่บนราง R เมื่อจะเอารูกปืนออกให้ใช้นิ้วดันสปริง S เข้าไป ลูกปืนจะหลุดออกมานำ ทำการทดลอง 5 ครั้ง วัดค่า h_1 , h_2 และหาค่า h โดย $h = h_1 - h_2$ และหาค่า h เลี้ยง

4. หมุนเกลียว L ออกเพื่อชั่งน้ำหนักของเพนคุณต้ม (M) และน้ำหนักของลูกปืน (m) แล้วเก็บ เข้าที่เดิมให้เรียบร้อย (สำหรับข้อนี้ไม่ต้องทำ เนื่องจากได้ชั่งແລະ ติดค่าของ M, m ไว้ที่เครื่องมือ แล้ว)

5. จากข้อมูลที่ได้นำไปคำนวณหาความเร็วต้นของ โปรเจกไพล์ โดยใช้สมการ (7.5) และ (7.7) (ใช้ h เมตร)

ตอนที่ 2 คำนวณความเร็วต้นของ โปรเจกไайл์ โดยวัดระยะตกลง ระยะในแนวระดับ

1. ยืดลูกศุमให้อยู่ที่ระดับ R ตลอดการทดลองนี้ (คูณ 7.1) เพื่อให้ลูกปืนที่ถูกยิงออกไป เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ

2. จัดกระดาษขาวธรรมดาวางบนกระดาษคราฟบอน และให้กระดาษคราฟบอน แล้ววาง กระดาษรองข้างใต้อิกหอยๆ แผ่น เพื่อกันลูกปืนกระแทกพื้นแรงๆ กระดาษชุดนี้จะบันทึก ตำแหน่งของลูกปืนที่ตกถึงพื้น

3. ยิงลูกปืน แล้ววัดระยะ x, y (ตามรูปที่ 7.1) ทำการทดลอง 5 ครั้ง (ระวังอย่าให้ ลูกปืนหาย)

4. คำนวณหาค่าความเร็วต้นของลูกปืนจากสมการ (7.10) และมุม θ จากสมการ (7.11)

ตอนที่ 3 เปรียบเทียบ y_{max} (ทดลอง) กับ y_{max} (ทฤษฎี)

1. ยืดชุดทดลองให้แน่นกับพื้นอีียง จัดปืนยิงให้อยู่ในลักษณะที่ระนาบในแนวระดับของ พื้นผิวที่ลูกปืนตก เป็นระนาบเดียวกับตอนที่ลูกปืนถูกยิงออกไป (คูณที่ 7.2)

2. จัดพื้นอีียงให้ทำมุม $\phi = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ กับแนวระดับ ทดลองยิงลูกปืน 3 ครั้ง ต่อมุม ϕ 1 ค่า วัดระยะตกลงในแนวระดับ และวัดระยะสูงสุดที่ลูกปืนจะขึ้นไปได้ (y_{max}) โดย คาดคะเนด้วยสายตา แล้วหาค่า เมตร

3. คำนวณค่า y_{max} (ทฤษฎี) เปรียบเทียบกับค่า y_{max} (ทดลอง) เมื่อเท่านี้ 2 โดยใช้ ค่า x เมตร

เมื่อทดลองเสร็จแล้วเวลาเก็บชุดทดลองต้องดูว่าไม่ได้ขึ้นไปบันทึก ไว้แล้วให้เก็บลูกปืน ไว้ในลูกศุम จากนั้นจึงส่งคืนห้องทดลอง

สรุปประเด็นสำคัญ

แนวการเคลื่อนที่อย่างอิสระของวัตถุในอากาศเป็นรูปโถงแบบพาราโบลา เนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวตั้งให้ยกสูงพื้น ส่วนการชนกันระหว่างวัตถุเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ไม่เม่นดัน

กิจกรรมการเรียน

1. จัดชุดทดลองตามที่กำหนดในวิธีการทดลอง
2. บันทึกผลการทดลองในตารางให้ถูกต้องและชัดเจน
3. สรุปผลการทดลองพร้อมกับตอบคำถามท้ายบทให้ครบถ้วน

แบบทดสอบการทดลองที่ 7

1. การทดลองเรื่องการเคลื่อนที่ของ/projectile ที่ต้องใช้อุปกรณ์อะไรบ้าง
 1. ลูกน้ำล้ำสำหรับขว้างไป
 2. ลูกปืนและปืนสปริง
 3. ลูกกระเบิดสำหรับขว้างไป
 4. ลูกทุกข้อ
2. การเคลื่อนที่ของ projectile ทำให้ปริมาณใดทางฟิสิกส์มีค่าคงที่
 1. แรงขับเคลื่อน
 2. ความเร็วในแนวระดับ
 3. ความเร็วในแนวศีรษะ
 4. ลูกทุกข้อ
3. ขณะที่วัดค่าเคลื่อนที่ของอิสระอยู่ในอากาศมีแรงกระทำใดที่เกี่ยวข้อง
 1. แรงเสียดทาน
 2. แรงโน้มถ่วง
 3. ข้อ 1 และข้อ 2 ลูก
 4. ไม่มีแรงกระทำใดๆ
4. การหาความเร็วต้น (v) ของวัตถุก่อนชน อาศัยหลักการใดทางฟิสิกส์
 1. กฎอนุรักษ์โมเมนตัม
 2. การคงตัวของพลังงาน
 3. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
 4. กฎความโน้มถ่วง
5. ค่าความเร็วต้น (v) ของ projectile เกี่ยวข้องกับการวัดระยะต่างๆ ในกรณีใด
 1. ลูกปืนชนกับลูกศุนย์
 2. ลูกปืนตกอย่างอิสระ
 3. ลูกปืนทำมุมยก, ϕ
 4. ข้อ 2 และ 3 ลูก
6. ความสัมพันธ์ที่ใช้หาความเร็วต้น (v) ในข้อ 5 คืออะไร
 1. $(M = m) / m$
 2. $(M = m) / Vm$
 3. $(2gh)^{1/2}$
 4. $1/2(M + m)V^2$
7. ระยะต่างๆ ที่ขึ้นอยู่ในข้อ 5 คืออะไร
 1. ระยะตกถึงพื้น
 2. ระยะไกลสุดในแนวระดับ
 3. ระยะสูงสุดในแนวศีรษะ
 4. ลูกทุกข้อ
8. ความสัมพันธ์ที่ใช้หาความเร็วต้น (v) ในข้อ 5 คืออะไร
 1. $x(g / 2y)^{1/2}$
 2. $(xg / \sin 2\phi)^{1/2}$
 3. $(2gy / \sin^2 \phi)^{1/2}$
 4. ลูกทุกข้อ
9. ในการตกลงย่างอิสระจะหามุมกดได้จากความสัมพันธ์ใด
 1. $\tan^{-1} 1 / (v(gy / 2)^{1/2})$
 2. $\sin^{-1}(xg / v^2)$

3. $\sin^{-1}(2gy)$
4. ถูกทุกข้อ
10. การยิงลูกปืนให้ทำมุมยก $20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ และ 45° กรณีใดจะให้ระยะทางสูงสุดในแนวดิ่งและไกลสุดในแนวระดับ
1. 45° 2. 40° 3. 30° 4. 20°
- แนวตอบ
1. 2 2. 2 3. 3 4. 1 5. 4
6. 2 7. 4 8. 4 9. 1 10. 1

บันทึกผลการทดลอง
เรื่อง ไมเมนต์มและการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์

ผู้รายงาน ชื่อ.....	เลขรหัส.....
ผู้ร่วมรายงาน 1. ชื่อ.....	เลขรหัส.....
2 ชื่อ.....	เลขรหัส.....
3 ชื่อ.....	เลขรหัส.....
4 ชื่อ.....	เลขรหัส.....
ทำการทดลองวันที่ เดือน พ.ศ. Section กลุ่ม.....	

อาจารย์ผู้ควบคุมปฏิบัติการ _____

มวลของระบบถูกตื้น = กรัม มวลของลูกปืน = กรัม
 ตอนที่ 1

ครั้งที่	h_1 (ซ.ม.)	h_2 (ซ.ม.)	$h = h_1 - h_2$ (ซ.ม.)	สำหรับคำนวณหาค่า V และ v (ซ.ม./วินาที)
1				
2				
3				
4				
5				
เฉลี่ย				

.....

ตอนที่ 2

ครั้งที่	ระยะแนวระดับ x (ซ.ม.)	ระยะตก y (ซ.ม.)	สำหรับคำนวณหาค่า v และ θ (ซ.ม./วินาที)
1			
2			
3			
4			
5			
เฉลี่ย			

ตอนที่ 3

มุมยก(ϕ)	ระยะแนวระดับ x (ซ.ม.)	y_{max} (ทดสอบ) (ซ.ม.)	สำหรับคำนวณหาค่า y_{max} (ทฤษฎี) เฉลี่ย (ซ.ม.)
20°	1. 2. 3. เฉลี่ย	1. 2. 3. เฉลี่ย	เกลี้ยงคลาด = %
30°	1. 2. 3. เฉลี่ย	1. 2. 3. เฉลี่ย	เกลี้ยงคลาด = %
40°	1. 2. 3. เฉลี่ย	1. 2. 3. เฉลี่ย	เกลี้ยงคลาด = %

ตัวอย่างการคำนวณหาค่า เวลา (t) และ ความเร็วต้นของโปรเจคไทล์ (v)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

สรุปและวิจารณ์

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตอบคำถามท้ายการทดลอง

1. บอกรเหตุผลที่ทำให้ค่า v ที่ได้จากการทดลองตอนที่ 1 และ 2 แตกต่างกันไปบ้าง

.....
.....
.....
.....

2. จากกฎเกณฑ์ทางพิสิกส์ข้อใดที่แสดงว่าความเร็วของวัตถุในแนวระดับมีค่าคงที่

.....
.....
.....
.....

3. โดยข้อมูลที่ได้จากการวัดและคำนวณ จงหา

- 3.1 พลังงานจลน์ของระบบ ณ ทันทีทันใดก่อนชน

.....
.....
.....
.....

- 3.2 พลังงานจลน์ของระบบ ณ ทันทีทันใดหลังชน

.....
.....
.....
.....

3.3 เพาะเหตุให้ค่าของ 3.1 และ 3.2 จึงต่างกัน

.....
.....
.....
.....
.....

3.3 หาเบอร์เซ็นต์ความแตกต่างของ 3.1 และ 3.2

.....
.....
.....
.....
.....

3.4 งพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของผลัังงานตนที่หายไปดังกล่าวข้างต้น สามารถหาได้จาก อัตราส่วนระหว่างมวลของเพนคลั้ม ต่อผลรวมของมวลลูกปืนกับเพนคลั้ม (โดยการแทนค่าและ คิดเป็นร้อยละ นำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในข้อ 3.4)

.....
.....
.....
.....
.....

4. จงหาเวลาในการเคลื่อนที่ของประเทศไทย โดยใช้สมการ (7.9)

.....
.....
.....
.....
.....

5. งพิสูจน์ว่า ถ้ามุนยกเป็น 45 องศา จะได้ระยะทางแนวระดับมีค่านากที่สุด

.....
.....
.....
.....
.....

