

บทที่ 5

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งแปรค่าตามเวลา

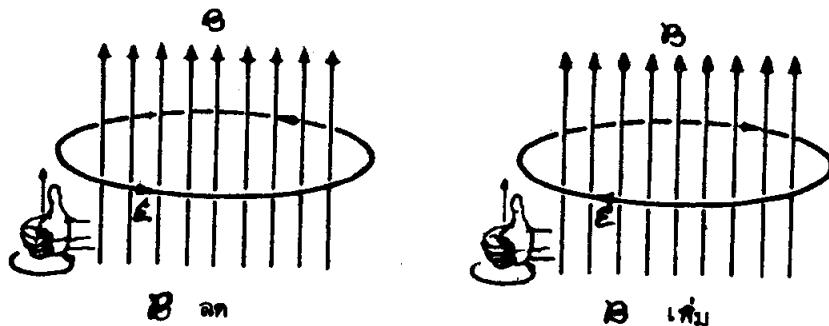
5.1 บทนำ

บทผ่านมาเรารู้จารณาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ไม่แปรค่าตามเวลา หรือซุกซื้อย่างที่ว่าสนามคงที่ ในบทนี้จะพิจารณาสนามที่แปรค่าตามเวลา หมายถึงสนามที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งเราห่วงได้ว่าจะได้พบกับความสับสนหรือไม่ ๆ ในกรณีในหัวข้อ 3.13 เราได้ความสับสนหรือห่วงว่าไฟฟ้าและแม่เหล็กอย่างแยกกันไม่ออกในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ไม่ว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามกฎ เกณฑ์ของสมัทธภาพ (relativity) หรือไม่ ในบทนี้เราจะได้เห็นสนามแม่เหล็กแปรเปลี่ยนได้เมื่อมีสนามไฟฟ้า และในทางตรงข้าม สนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงได้เมื่อมีสนามแม่เหล็ก และมีก็เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีสัมพัทธภาพ กฎเกณฑ์ที่อธิบายปรากฏการณ์ทั้งสองข้างต้นนั้น เรียกกฎของฟาราเดย์-เซนรี และกฎของแอนแพร์-แมกซ์เวลล์

5.2 กฎของฟาราเดย์-เซนรี

ปรากฏการณ์อย่างหนึ่งของปรากฏการณ์แม่เหล็กไฟฟ้าคือ การเกิดกระแสไฟฟ้าโดยการเกี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic induction) ซึ่งค่าว่ากับผู้คนพบเกือบพร้อมกันทั่ว ๆ ที่ไม่ได้รู้ว่ากันมาก่อนหรือ ประมาณ พ.ศ. 1830 ในศิลปาราเตย์และโจเซฟเซนรีค่าว่า กับปรากฏการณ์นี้ การเกี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นหลักในการทำงานของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า หม้อแปลง และเครื่องมืออื่น ๆ ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน สมมุติถืองดงามว่าไฟฟ้าให้เป็นวงปิด แล้ว วงในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็ก ถ้าฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผ่านวงปิดนี้ เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (หมายถึง เมื่อฟลักซ์เปลี่ยนแปลง) จะเกิดกระแสขึ้นในขดลวด เมื่อกระแสเกิดขึ้นย่อมมีให้เห็นว่าเพื่อรักษานิรดิษ ที่เกี่ยวกับ "แรงเคลื่อนไฟฟ้าเมียวน" (induced emf) ประมาณแรงเคลื่อนไฟฟ้า ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้แสดงให้เห็นว่ามีอยู่กับอัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็ก $\frac{d\Phi_B}{dt}$ ด้วยว่า ถ้าอย่างเช่น ถ้าวงแม่เหล็กใกล้ส่วนที่เป็นวงจรปิด แรงเคลื่อนไฟฟ้าจะเกิดขึ้นในวงจร เมื่อมีแม่เหล็ก (หรือ วงจร) เคลื่อนที่ในแนวที่ทำให้จำนวนฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผ่านวงจรเปลี่ยนแปลง แรงเคลื่อนไฟฟ้า ที่เกิดขึ้นมีขนาดมากน้อยขึ้นกับการเคลื่อนที่ของแม่เหล็ก (หรือวงจร) ว่าเร็วหรือช้าปานกลาง ยิ่ง อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์มากขึ้นเท่าไร กระแสจะใหญ่เท่าไร กระแสเมียวนที่เกิดขึ้นก็ยิ่งมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย

พิศทางของแรงเคลื่อนไฟฟ้า เนี่ยวน่า ซึ่งกับพิศทางที่ฟลักซ์แม่เหล็กเพิ่มขึ้นหรือลดลง อาจใช้กฎ มีอยู่ ที่อธิบายพิศทางของแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เกิดขึ้น ดังแสดงในรูป 5.1 นี้ว่าจะแม่เหล็กใน พิศสนามแม่เหล็ก แรงเคลื่อนไฟฟ้าจะมีพิศทางข้าม (หรือ ทวนกัน) กับพิศของน้ำทึบ เมื่อฟลักซ์ มีค่าเพิ่มขึ้น (หรือลดลง)



รูปที่ 5.1 สนามไฟฟ้าที่แปรค่าตามเวลาซึ่งอยู่กับสนามแม่เหล็ก

เพื่อให้เข้าใจง่าย ดูจากรูป 5.1 เมื่อเส้นรอบวง L มีพิศทางห้องกับกฎมีอยู่ว่า เมื่อฟลักซ์ แม่เหล็กเพิ่มขึ้น (นั่นคือ $\frac{d\Phi_B}{dt}$ เป็นบวก) แรงเคลื่อนไฟฟ้าเนี่ยวน่า v_E กระทำในพิศทาง ลับ แต่เมื่อฟลักซ์แม่เหล็กลดลง (นั่นคือ $\frac{d\Phi_B}{dt}$ เป็นลบ) v_E กระทำในพิศทางบวก ดัง ผู้นี้เครื่องหมายของแรงเคลื่อนไฟฟ้าเนี่ยวน่า v_E ซึ่งต้องตรงข้ามกับเครื่องหมายของ $\frac{d\Phi_B}{dt}$ เสมอ การวัดหาค่าแรงเคลื่อนไฟฟ้าเนี่ยวน่า ใช้วิธีเป็นโวลต์ ซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยน แปลงฟลักซ์แม่เหล็กต่อหน่วยเวลา เมื่อใช้เป็น Vs^{-1} ซึ่งเขียนได้ว่า

$$v_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.1)$$

ซึ่งมีที่ว่า กฎของฟาราเดีย-เคนซ์ สำหรับการเนี่ยวน่าแม่เหล็กไฟฟ้า เช่นบรรยายได้ว่า

แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในวงจรปิดที่อยู่ในสนามแม่เหล็กที่แปรค่าใด ๆ จะมีค่าเป็น ค่าลับของอัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงจรนั้นในหนึ่งหน่วยเวลา

การพิสูจน์ว่า สมการ (5.1) เป็นความจริงโดยอาศัยการสังเกตจากหน่วยที่ใช้พบว่ามีความ สอดคล้องที่ราบรื่นว่า v_E มีหน่วยเป็น V หรือ $\text{m}^2 \text{kgs}^{-2} \text{C}^{-1}$ จากหัวข้อ 4.14 เรายรับ

ผลว่า Φ_B มีหน่วยเป็น พบ หรือ $\text{m}^2 \text{kgs}^{-1} \text{C}^{-1}$ และ $d\Phi_B/dt$ ก็จะต้องมีหน่วยเป็น พบ s^{-1} หรือ $\text{m}^2 \text{kgs}^{-2} \text{C}^{-1}$ ดังนั้นหน่วยของปริมาณทางชั้ยมือและข้ามือในสมการซึ่งเป็นหน่วยเดียวกัน จะเห็นว่าทั้งสองข้างของสมการ (5.1) มีหน่วยเหมือนกัน จากสูตร 5.2 ถ้าแบ่งพื้นที่ภาย ในขอบเขตของ L เป็นส่วนย่อย ๆ แต่ละส่วนย่อยจะวางศูนย์แบบเดียวกับกฎเกณฑ์ที่เราเคยกำหนดไว้ พลังแม่เหล็กที่ผุ่งผ่าน L จะเป็น

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds$$

ดังนั้นแรงเคลื่อนไฟฟ้า เป็นศูนย์ลงว่าสนามไฟฟ้า \vec{E} และมีค่าดังสมการ (4.5)

$$v_E = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

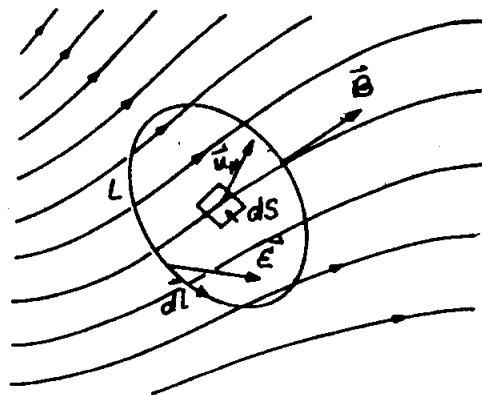
เราอาจเขียนสมการ (5.1) ในรูปใหม่ได้ว่า

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds \quad (5.2)$$

ตอนนี้จะยังไม่สำคัญว่า ทางเดิน L เป็นเส้นทางเดียวกับหัวนำไฟฟ้า เช่น เป็นวงไฟฟ้าที่วงศ์ วงจร และจะพิจารณาเริ่มในขอบเขตของวงจรที่มีสนามแม่เหล็กแปรเปลี่ยนไปตามเวลาดังนั้น สมการ (5.2) จึงกล่าวเป็นค่า朴ตได้ว่า

สนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาแสดงว่ามีสนามไฟฟ้า ซึ่งมีเชอร์คิวเลชันของ สนามไฟฟ้าตามเส้นครบรอบรูปหน้าหรือครบร่วงจร เท่ากับค่าลบของอัตราการแปรเปลี่ยน ตามเวลาของพลังแม่เหล็กที่ผุ่งผ่านผิวในขอบเขตของเส้นรอบรูปนั้น

ถ้าเป็นกฎของฟาราเดีย-โอนซ์เกียวกับการเมื่อยวนแม่เหล็กไฟฟ้าอิกรูปหนึ่ง ซึ่งช่วยให้เราได้ ตัวการณ์การเมื่อยวนแม่เหล็กไฟฟ้าให้ลึกซึ้งไปยังกันถึงความจริงที่ว่า ตราชไปที่สนามแม่ เหล็กเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ก็จะต้องมีสนามไฟฟ้าอยู่ด้วย สนามทั้งสองสัมพันธ์กันดังสมการ (5.2)



รูปที่ 5.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์แม่เหล็กที่เปลี่ยนตามเวลาและเชอร์คิวเลชันไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 5.1 แรงเกลื่อนไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการหมุนนำในขดลวดแบบراب共振มาที่พื้นที่ เป็นจำนวน N รอบ แต่ละรอบล้อมพื้นที่ s วางตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กสับสม่ำ เสมอเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นรูป sine สนามมีลักษณะดังนี้

$$\vec{B} = B_0 \sin \omega t$$

ฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่ของขดลวด 1 รอบคือ

$$\Phi_B = s B = s B_0 \sin \omega t$$

และฟลักซ์ทั้งหมดที่ผ่านขดลวด N รอบ คือ

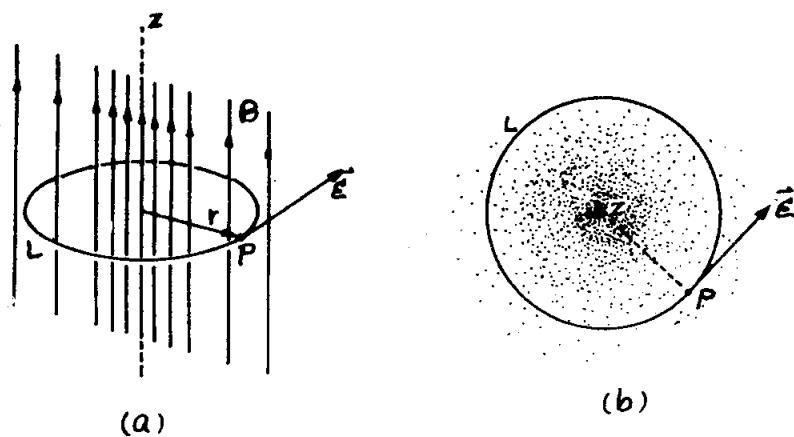
$$\Phi_B = N s B_0 \sin \omega t$$

ใช้สมการ (5.1) จะได้ แรงเกลื่อนไฟฟ้า เหมือนว่า

$$v_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} = N s B_0 \omega \cos \omega t \quad (5.3)$$

ซึ่งให้เห็นว่า แรงเกลื่อนไฟฟ้าเหมือนว่าที่เกิดขึ้นจะประเปลี่ยนกลับไปกลับมาแบบสั่นหรือ สับด้วยความสัมภัยกับสนามแม่เหล็ก

ตัวอย่างที่ 5.2 ในบริเวณที่ว่างแห่งที่มีสนามแม่เหล็กในแนวราวนานกับแกน Z ซึ่งเป็นแกน สมมาตร หมายถึงสนาม B ปกติ ที่ระยะทาง x จากแกน Z จะขึ้นอยู่กับระยะทางโดยมีข้อต่อ จุดลงตาม x และประเปลี่ยนตามเวลา ให้ก้านวัตถุทางสนามไฟฟ้า E ที่แต่ละจุดในบริเวณนั้น



รูปที่ 5.3 สนามไฟฟ้าเกิดจากสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

รูปที่ 5.3(a) และรูป 5.3(b) แสดงภาพด้านข้างของลามาด้วยสีเขียว ที่ให้เราเห็นว่าสนามไฟฟ้า \vec{E} จะซึ่งกับระยะทาง x เท่านั้นและที่แต่ละจุด สนามไฟฟ้าซึ่งจากกับสนามแม่เหล็ก B และรัศมี r ผูกได้ว่า เลี้ยวเร็วของลามาไฟฟ้า \vec{E} เป็นวงกลมร่วมศูนย์กลางที่มีศูนย์กลางอยู่บนแกน z เราเลือกเส้นทาง L แบบสมการ (5.2) ซึ่งเป็นวงกลมวงหนึ่งจะได้

$$v_E = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E (2\pi r)$$

ดังนั้นเมื่ออาศัยสมการ (5.1) จะได้

$$E (2\pi r) = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.4)$$

ค่าเฉลี่ยของสนามแม่เหล็ก B_{ave} ในบริเวณที่ s มีค่าเป็น

$$B_{ave} = \frac{\Phi_B}{s} \quad \text{หรือ} \quad \Phi_B = B_{ave} s$$

ในการนี้ $s = \pi r^2$ จึงได้ $\Phi_B = B_{ave} (\pi r^2)$

ดังนั้นใช้สมการ (5.4) คำนวณสนามไฟฟ้าที่ระยะ r นับจากแกนได้

$$\vec{E} = - \frac{1}{2} r \left(\frac{dB_{ave}}{dt} \right) \quad (5.5)$$

$$\text{ถ้าสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ, } B_{\text{ave}} = B$$

ตัวอย่างที่ 5.3 เบตาตรอน (betatron) ผลจากตัวอย่าง 5.2 ใช้เป็นหลักในการออกแบบเครื่องเร่งอิเลกตรอน ที่เรียกว่าเบตาตรอน สร้างขึ้นเมื่อ ค.ศ. 1941 โดยนักฟิสิกส์ชาวอเมริกันชื่อ ดี. เคิลส์ (D. Kerst) มีหลักการธรรมดามาก คือ เมื่อยิงอิเลกตรอน (หรืออนุภาคที่มีประจุไฟฟ้า) เข้าไปในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กซึ่งมีการแปรค่าและมีลักษณะสมมาตร อิเลกตรอนจะถูกเร่งด้วยสนามไฟฟ้า E ที่เกิดตามม้าวัย ดังสมการ (5.2) หรือสมการ (5.5) เมื่อยิงอิเลกตรอนมีความเร็วเพิ่มขึ้น สนามแม่เหล็ก B จะทำให้ทางเดินของมันเบนไปด้านขวาของเส้นทางเดิม ดังนั้นหลังจากการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ในการเคลื่อนที่แต่ละรอบอิเลกตรอนมีพลังงานเพิ่มขึ้น ดังนั้นหลังจากการเคลื่อนที่แล้วท้ายๆ รอบ ก็จะถูกเร่งจนมีพลังงานค่าใหม่ ยิ่งหมุนมากรอบ พลังงานก็จะยิ่งมากขึ้น

ในการศึกษาปัญหานี้โดยละเอียด ให้พิจารณาอิเลกตรอนที่จุด P (รูป 5.3) ถ้าปรับทุกอย่างให้อยู่ในภาวะพร้อมที่อิเลกตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ได้ สนามไฟฟ้าจะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวเดิมสัมผัสวง ซึ่งจะคำนวณได้ดังนี้

$$m \frac{dv}{dt} = F_T$$

$$\text{และแรงตามแนวเส้นสัมผัส } F_T = -eE$$

$$\text{ใช้สมการ (5.5) จะได้ } m \frac{dv}{dt} = -eE = \frac{1}{2} er \left(\frac{d\beta_{\text{ave}}}{dt} \right) \quad (5.6)$$

ที่จะทำให้การเคลื่อนที่เป็นวงกลมได้นั้น สนามแม่เหล็กจะต้องเป็นส่วนก่อให้เกิดความเร่งสูญญากาศ ขนาดของแรงสูญญากาศ, ตามสมการ (3.4) คือ

$$F_N = \beta e v \quad \text{ใช้ } \frac{mv^2}{r} = F_N \quad \text{เราจะได้}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \beta e v \quad \text{หรือ } mv = \beta e r \quad (5.7)$$

หากำการแปรตามเวลา โดยให้ r เป็นค่าคงที่ เพราะเป็นรัศมีของวงทางเดิน เราจะได้

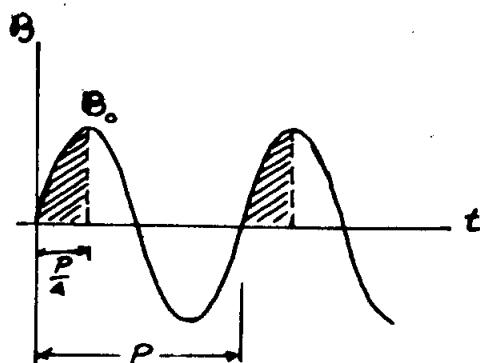
$$m \frac{dv}{dt} = e r \frac{d\beta}{dt}$$

เมื่อเปรียบเทียบความลับพันธ์ข้างต้นกับสมการ (5.6) จะสรุปได้ว่า สภาวะจะเป็นลำดับชั้นของส่วนที่จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้ารวมกับสนามแม่เหล็ก ศูนย์กลางอยู่ที่ $x = 0$ และ $y = 0$ สนามแม่เหล็กจะต้องเป็น

$$B = \frac{1}{2} B_{ave}$$

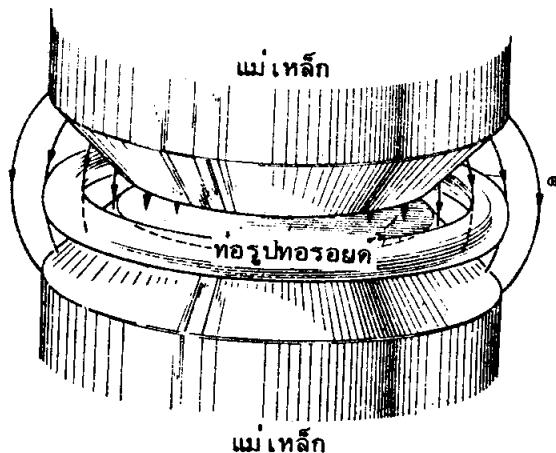
เมื่อ B_{ave} เป็นค่าเฉลี่ยของ B ในบริเวณที่ล้อมด้วยทางเดิน L และมีค่าเป็นภาวะที่บังคับว่าสนามแม่เหล็ก B จะต้องเปลี่ยนแปลงตามค่าของระยะในแนวซึ่งมีนับจากแกน การแปรเปลี่ยนค่า B ตาม x นี้ ผู้จารย์ได้จากการทดลองที่ว่า การเคลื่อนที่ต้องแน่นอน เป็นวงกลมคงเดิม มั่นคง เมื่อกำหนดรัศมีของวงโคจรตามที่ต้องการแล้ว แรงที่กระทำบนอิเล็กตรอนจะต้องเป็นไปในลักษณะที่ว่า ถ้าการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนถูกกรอบกวนแม่เพียงเล็กน้อย นั่นคือ ถ้ากฎผลักดันจากด้านหนึ่งของวงโคจร ไปยังด้านหนึ่ง แรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็กที่กระทำบนอิเล็กตรอน จะพยายามปรับให้กลับมาอยู่ในวงโคจร ที่ถูกต้อง

โดยที่นำไป สนามแม่เหล็ก B แปรเปลี่ยนด้วยความเร็วเชิงชุนค่าหนึ่ง ศูนย์กลางสมการ (5.6) และ (5.7) ของอิเล็กตรอนถูกเร่งแต่เพียงขณะที่สนามแม่เหล็กเพิ่มขึ้นเท่านั้น อีกนัยหนึ่ง เมื่อจากในทางปฏิบัติ เราอาจใช้อิเล็กตรอนเข้าไปด้วยโน้มเนียนที่มีความเร็วคงที่ หมายถึงยังเข้าไปเมื่อสนามแม่เหล็กเป็นศูนย์ หมายความว่า เพียงในช่วง $\frac{1}{4}$ ของคลา ของการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กเท่านั้นที่เหมาะสมสำหรับเร่งอิเล็กตรอน ช่วงเวลาของก่อเร่งได้แสดงให้เห็นในส่วนที่เป็นพื้นที่แรเงา ในรูป 5.4



รูปที่ 5.4 ช่วงเวลาที่ใช้เร่งประจุในเบต้าตรอน

เครื่องเบต้าตรอนที่ใช้ปฏิกัดศักดิ์สัมภានจริง ๆ นั้น ประกอบด้วยห่อรูปหอรอยด์ (รูป 5.5) วางในสนามแม่เหล็กที่เกิดจากแม่เหล็กซึ่งมีขั้วตามรูปแบบไว้ เพื่อให้มีการเปลี่ยนแปลงของ



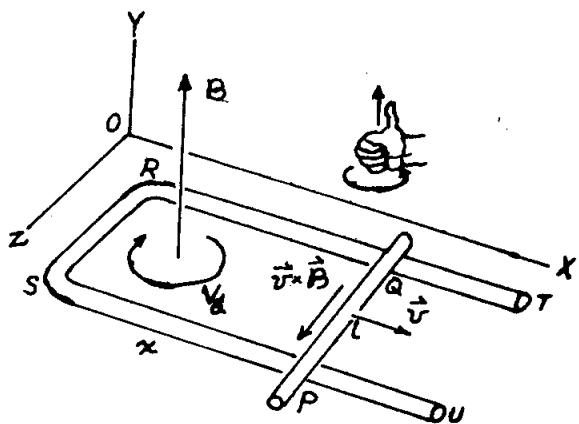
รูปที่ 5.5 แสดงส่วนประกอบสำคัญของ เบต้าตรอน

สนามแม่เหล็ก B ตาม x มีค่าถูกต้องตามสมการ (5.8) และคงอยู่ในสถานะเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ต้องยิงอิเลกตรอนเข้าไปเมื่อเริ่มช่วงเร่ง และจะเห็นไปเล็กน้อยที่ตอนปลายของช่วงนั้น ซึ่งทำให้มันชนได้ตรงเป้าหมาย อิเลกตรอนจะถูกพลังงานจนนำไปเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและทรอยไปเป็นพลังงานภายใต้ของเป้าที่ปรากฏเป็นความร้อนซึ่น ได้มีผู้สร้างเบต้าตรอนให้มีพลังงานสูงถึง 350 MeV เพื่อใช้ศึกษาปฏิกิริยาโนว่าเลียร์แบบต่าง ๆ ซึ่งเป็นต้นกำเนิดรังสีที่ใช้รักษาโรคมะเร็ง

5.3 การเห็นยานนำแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากการเคลื่อนที่อันหนึบระหว่างหัวตัวนำและสนามแม่เหล็ก

กฎของการเห็นยานนำแม่เหล็กไฟฟ้า หังสมการ (5.2) แสดงให้ทราบได้ว่าในบริเวณนั้นมีสนามไฟฟ้า เมื่อมีสนามแม่เหล็กซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เกิดมีอนตั้งสมการ (5.1) ที่แสดงว่ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า เมื่อพลังแม่เหล็กที่ผ่านวงจรนั้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา จากการค้นคว้าพบความสำคัญของประการที่นี้ว่า จะมีผลเช่นเดียวกัน ถ้าพลังแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องมาจากเลี้นรอนรูป L มีการแปรเปลี่ยนไป แม้ว่าจะไม่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา เราจะพิจารณากรณีธรรมชาติเพียง 2 กรณีคือ

(ก) ศวนำเคลื่อนที่ พิจารณาศวนำที่จดให้อยู่ในสภาพรูป (5.6) มีศวนำ PQ เคลื่อนที่ในทิศตั้งฉากกับความเร็วของมันเองด้วยความเร็ว v ทิ้งที่ยังสัมผัสรอยกับ RT และ SU ช่วง $PQRS$ เป็นระบบฐานปางจรปิด กับทิ้งกារหนตให้มีลักษณะแม่เหล็กสม่ำเสมอ \vec{B} ในทิศตั้งจากกับระนาบของระบบนี้



รูปที่ 5.6 แรงเคลื่อนไฟฟ้าเนียวนำในศวนำไฟฟ้าที่กำลังเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก

แหล่งประจุ q ในศวนำ PQ ที่เคลื่อนที่ได้รับแรง $q\vec{v} \times \vec{B}$ ที่มีทิศทางตามแนว QP ดังสมการ (3.1) ในขณะเดียวกันยื่อมพูดได้ว่า แรงที่กระทำต่อประจุนี้ให้ลักษณะไฟฟ้าเทียบเท่า E_{eq} (equivalent electric field) ที่เขียนได้เป็นสมการว่า

$$q \vec{E}_{eq} = q\vec{v} \times \vec{B} \text{ หรือ}$$

$$\vec{E}_{eq} = \vec{v} \times \vec{B}$$

เมื่อจาก ซึ่ง และ \vec{B} ตั้งฉากกัน สนามไฟฟ้า E_{eq} จะมีขนาดดังนี้

$$E_{eq} = v B$$

ถ้า $PQ = 1$ มีความต่างศักดิ์ไฟฟ้าระหว่าง P และ Q ซึ่งคำนวณได้จาก $E_{eq} 1$ หรือ B_{v1} ส่วน QR , RS และ SP ไม่มีแรงกระทำเพราะไม่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้น เชอร์คิวเลชันของ E_{eq} (หรือแรงเคลื่อนไฟฟ้า V_E) ในวงจร $PQRS$ ก็คือ B_{v1} และ นั่นก็คือ

$$v_E = -B v_l$$

ที่มีเครื่องหมายลบเพริ่ง v_E มิติทางตรงกันข้าม E_{eq} เมื่อเล้นตั้งจากของระนาบของทางเดินอยู่ร่วมแนวกับ \vec{B} อีกนัยหนึ่ง ถ้าเรากำหนดความยาว SP ด้วยอักษร x ผ่านที่ของ PQRS ก็คือ lx และฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่าน PQRS คือ

$$\Phi_B = \int_{PQRS} \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds = B lx,$$

การแปรเปลี่ยนฟลักซ์ต่อหน่วยเวลา ก็คือ

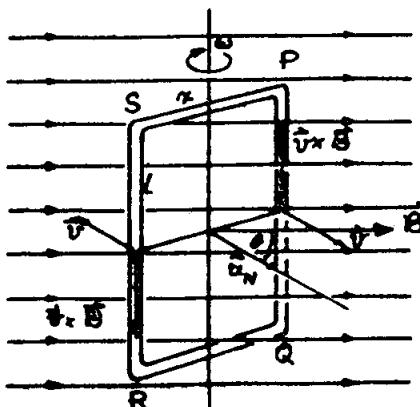
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} (B lx) = B l \frac{dx}{dt} = B lv$$

เพริ่ง $\frac{dx}{dt} = v$ หันนั้นค่าแรงเคลื่อนไฟฟ้า v_E ที่คำนวณได้ข้างต้นจะเป็น

$$v_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{ตามสมการ (5.1)}$$

(ข) ขคลวคทมุน ในหัวอย่างที่ 2 ศึกษาข้อความว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าทมุนอยู่ในสนามแม่เหล็กลมว่า เสมอ \vec{B} ด้วยความที่เขิงมุน ω (รูป 5.7) เมื่อเล้นตั้งจากกับหน้าตัดของขดลวดวงจรตามทิศ n_N ทำมุน $\theta = \omega t$ กับสนามแม่เหล็ก \vec{B} ทุกจุดบน PQ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ขึ้นเป็นผลให้เกิดสนามเดียบเท่า $E_{eq} = v B \sin \theta$ มิติทางจาก Q ไป P มีสนามไฟฟ้าขนาด

$$E_{eq} = v B \sin \theta$$



รูปที่ 5.7 รคพ. ในขคลวคทมุนในสนามแม่เหล็ก

ในท่านองเดียวกัน ที่สำคัญๆ บน RS ติดทางและขนาดของ $\vec{r} \times \vec{B}$ มีทิศจาก S ไป R เหมือนกันและจะพบว่า $\vec{r} \times \vec{B}$ ตั้งฉากกับ RQ และ PS กับทั้งไม่มีความต่างสัก iota ระหว่าง S กับ P และระหว่าง R กับ Q ดังนั้นค่า $PQ = RS = 1$, เชอร์ติวะเลข์ของสนามไฟฟ้าเทียบเท่า E_{eq} รอบ PQRS หรือแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่ได้ศูนย์

$$v_E = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{eq} (PQ + SR) = 2lvB \sin \theta$$

ด้าน PS และ RQ ไม่มี v_E เกิดเสริมขึ้น เพราะ \vec{E}_{eq} ตั้งฉากกับ $d\vec{l}$ ดังที่แสดงไว้แล้ว ถ้า $x = SP$ ประชุใน PQ และ SR จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี $\frac{1}{2}x$ ดังนั้น

$$v = \omega \left(\frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2}\omega x$$

เมื่อ $s = lx$ เป็นพื้นที่ของวงจร และ $\theta = \omega t$ จะเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} v_E &= 2l \left(\frac{1}{2}\omega x \right) B \sin \omega t \\ &= \omega B (lx) \sin \omega t \\ &= \omega Bs \sin \omega t \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นค่าแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเหนี่ยวนำในวงจรยังเป็นผลจากคลาดทุมนในสนามแม่เหล็ก ยกนัยหนึ่งพัลลกซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงจรเป็น

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \vec{B} \cdot \vec{n}_N s = Bs \cos \theta \\ &= Bs \cos \omega t \\ - \frac{d\Phi_B}{dt} &= \omega Bs \sin \omega t \text{ ดังนั้นจึงเท่ากับ } v_E \end{aligned}$$

ข้อต่อไปเราจะศูนย์ให้เห็นจริงได้ว่าแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นเป็นผลจากการเคลื่อนที่ของศูนย์ และจะค้นหาได้โดยใช้สมการ (5.1) หรือ (5.2) แทนสมการ (3.1) และ (4.5)

แม้ว่าการพิจารณาที่แล้วมา จะเป็นการหาค่าแรง เคลื่อนไฟฟ้า เนี่ยวนำจากคลาดที่มีรูปร่างเฉพาะแบบ แต่การคำนวณอย่างละเอียดก็จะแสดงให้เห็นว่าไม่ว่าข้อคลาดใด ๆ ก็จะมีกฎเกณฑ์กล่าวได้ เช่นเดียวกันดังนี้

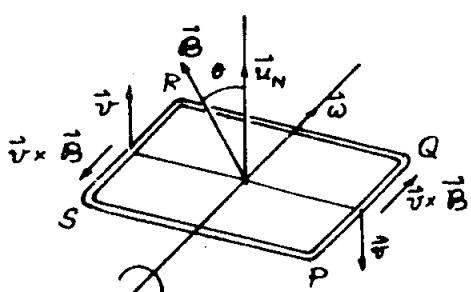
กฎของการเนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า

$$v_E = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

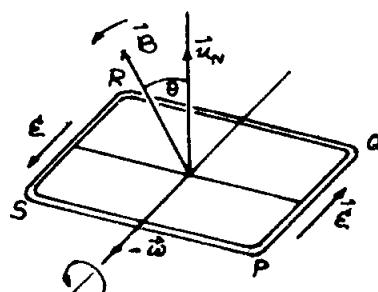
ใช้ได้เมื่อมีการแปรเปลี่ยนฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_B ขึ้น เมื่อมากจากการเปลี่ยนแปร สนามแม่เหล็ก \vec{B} หรือวงจรเคลื่อนที่ หรือการแปรรูปวงจร หรือห้องส่องอย่าง สำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่กำลังทำการคำนวณหา

5.4 การเนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าและหลักของสมพัทธภาพ

แม้จะไม่กล่าวถึงความจริงเกี่ยวกับกฎของการเนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าดังกล่าวไว้ในสมการ (5.1) และ (5.2) นั้น ซึ่งแสดงผลเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็ก เมื่อมากจากการเปลี่ยน แปรสนามแม่เหล็ก หรือการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางตาม เรายังมีข้อแตกต่างทางด้านลักษณะทาง กายภาพที่เชื่อถือได้อยู่อีก 2 ทางด้วยกันดังนี้ เมื่อผู้สังเกตเห็นว่ามีการแปรเปลี่ยนฟลักซ์แม่เหล็ก ที่พุ่งผ่านวงจรซึ่งก่อว่าคงที่ในสายตาของเข้า เมื่อมากเปลี่ยนแปรสนามแม่เหล็ก \vec{B} เข้า ทำการวัดสนามไฟฟ้า E ในขณะนั้นได้เทียบกันกับ \vec{B} ดังในสมการ (5.2) และเข้ากว่า มีสนามไฟฟ้า โดยการวัดแรงที่กระทำบนประจุ "ท่อญี่ปุ่น" ในสายตาของเข้า แต่ถ้าผู้สังเกต พนกการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่เมื่อมากศูนย์เคลื่อนที่เทียบกับฟลักซ์แม่เหล็ก หรือใน สายตาของฟลักซ์แม่เหล็ก ผู้สังเกตจะไม่พบว่ามีสนามไฟฟ้าใด ๆ แต่จะรู้ได้ว่ามีแรงเคลื่อน ไฟฟ้า เมื่อมากแรง ดู $v \times \vec{B}$ ที่สนามแม่เหล็กมีต่อประจุของศูนย์ที่กำลังเคลื่อนที่ ตามสมการ (3.1)



ผู้สังเกตบุคหนึ่ง
เทียบกับสนามแม่เหล็ก



ผู้สังเกตบุคหนึ่ง
เทียบกับวงจร

รูปที่ 5.8

จะเป็นไปได้อย่างไรที่ว่า ปรากฏการณ์ที่ต่างกัน และในมีความสัมพันธ์ต่อกันโดย จะมีผลปรากฏเดียวกัน ลักษณะเช่นนี้ ไม่ใช่เรื่องที่เกิดขึ้นกัน แต่เป็นเรื่องของหลักสัมพัทธภาพ (relativity) จะไม่ยุคถึงการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์โดยละเอียดในที่นี้ แต่เราจะพิจารณา จากจุดที่เป็นปัญหา ก่อน มาลองพิจารณากรณีที่บุคลากรุ่นตามรูป 5.7 ในกรอบอ้างอิงซึ่งหนึ่งกล่าวว่า สนามแม่เหล็ก \vec{B} คงที่ (รูป 5.8 a) และวงจรหมุนด้วยความเร็วเชิงชุน ดัง ไม่มีสนามไฟฟ้า แต่มีแรงกระทำให้ปั๊มน้ำเลือกตระอนในวงจร ดังสมการ (3.1)

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

ดังผู้สังเกตอยู่ที่กรอบอ้างอิงซึ่งเคลื่อนที่ไปกับวงจร จึงเห็นวงจรด้านข้างอยู่มืด แต่เห็นสนามแม่เหล็ก \vec{B} หมุนอยู่ด้วยความเร็วเชิงชุน - ดัง (รูป 5.8 b) ซึ่งได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้นบนน้ำเลือกตระอนในวงจร กับสนามไฟฟ้า \vec{E} ดังนี้ของมาจากการเปลี่ยนแปลงนามัย เหล็ก ตามกฎของการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้ามีความสัมพันธ์ดังสมการ (5.2)

เราจึงสรุปได้ว่า การทดลองเพื่อศึกษากฎของการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า เมื่อมีการแปลงนามัย เหล็กนั้น ก็คือการกล่าวถึงความถูกต้องของหลักสัมพันธ์ภายนั้นเอง

5.5 ศักดิไฟฟ้าและการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า

ในหัวข้อ 4.4 เราเห็นแล้วว่า เซอร์คิวเลชันของสนามไฟฟ้ามีค่าคงที่ (static electric field) รอบวงจรปิดใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์ คุณสมบัติข้อนี้เขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

และเมื่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีค่าแปรตามเวลา สมการซึ่งบันทึกจะเป็นจริงไปไม่ได้ ดังนั้นเราจึงมีสมการ (5.2) มาแทนที่ นั่นคือ

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds$$

ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่า สำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรตามเวลา เซอร์คิวเลชันของสนามไฟฟ้า จะไม่เป็นศูนย์ และสนามไฟฟ้าจะไม่เป็นค่าลบของเกรเดียนของศักดิไฟฟ้า ($E \neq -\text{grad } V$) ข้อนี้ไม่ได้หมายความว่าความจริงที่เกี่ยวกับศักดิจะใช้ไม่ได้ในกรณีนี้ เพียงแต่ว่าจะต้องปรากฏในรูปอื่น ความจริงเราต้องการศักดิเป็นสองรูปด้วยกัน คือ แบบสกalar เหมือนที่ใช้ในกรณีค่าคงที่รูปหนึ่ง อีกรูปหนึ่งเป็นรูปของเวคเตอร์ เราจะไม่มีโอกาสใช้ศักดิไฟฟ้าถูกกล่าวในที่นั้นอย่างแน่นอน

เพียงแต่ให้ผู้อ่านได้ทราบไว้ ซึ่งกล่าวถึงในที่นี้ เพื่อเพิ่มความระมัดระวังเกี่ยวกับการศึกษา
สนามที่มีค่าคงที่ เมื่อจะเปลี่ยนจากสนามที่ไม่ประจำตามเวลาเป็นสนามที่ประจำตามเวลา

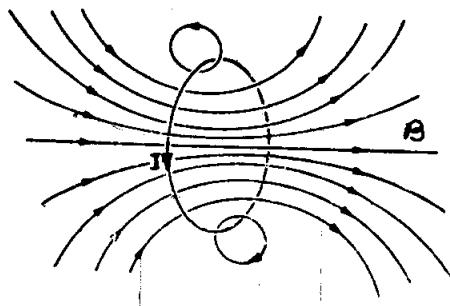
5.6 การเห็นใจว่าง่ายใน

เชิงทางจาระที่มีกระแส I ไหลผ่าน (รูป 5.9) ตามกฎของแอมป์เร กระแสที่ทำให้เกิด
สนามแม่เหล็ก ณ จุดใด ๆ เป็นสัดส่วนกับ I เราจะค้นพบว่าฟลักซ์แม่เหล็กขึ้นเมื่อมาจากแม่เหล็ก
ที่ผ่านผ่านวงจรมีกระแส I เราเรียกว่าฟลักซ์ภายใน "self flux" ใช้สัญลักษณ์ Φ_I เป็น
สัดส่วนกับกระแส I ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\Phi_I = LI \quad (5.10)$$

สมประสิทธิ์ L ขึ้นกับปริมาณสำนวนที่มีทรงเรขา และเรียกว่าค่าเหนี่ยววนนำภายใน (self inductance) ของวงจร มีหน่วยเป็น Wb.A^{-1} เรียกหน่วยนี้ว่า เบนรี่ เพื่อเป็นเกียรติแก่รัศวกร
ชาวอเมริกัน ชื่อ约瑟夫 เบนรี่ (1779-1878) ใช้ศวย่าว่า H ดังนั้น

$$H = \text{Wb.A}^{-1} = \text{m}^2.\text{kg.C}^2$$

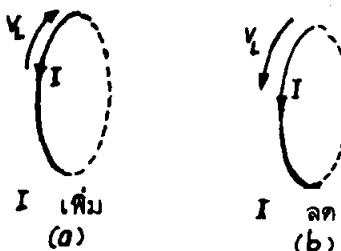


รูปที่ 5.9 ฟลักซ์แม่เหล็กในวงจร

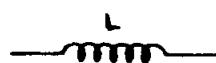
ถ้ากระแส I เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_I ที่ผ่านวงจรก็จะเปลี่ยนด้วย และ
ตามกฎของการเหนี่ยววนนำแม่เหล็กไฟฟ้า แรงเคลื่อนไฟฟ้าในวงจรเกิดขึ้นจากการเหนี่ยววนนำที่
เป็นผลมาจากการเหนี่ยววนนำแม่เหล็กไฟฟ้า เรียกการเหนี่ยววนนำภายใน รวมสมการ (5.1)
และ (5.10) เข้าด้วยกัน เราได้สมการสำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยววนนำที่เกิดขึ้นเอง (self-induced emf.) เป็น

$$v_L = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{หรือ} \quad v_L = - L \frac{di}{dt} \quad (5.11)$$

เครื่องหมายลงชี้ให้เห็นว่า เกิดขึ้นในทางตรงข้ามกับการเปลี่ยนแปลง กระแสเพิ่มขึ้น di/dt จะเป็นบวก และ v_L จะต้านกระแส (รูป 5.10 a) ดังนั้น ถ้ากระแสลดลง di/dt เป็นลบ และ v_L เกิดในทิศทางเดียวกันกับกระแส (รูป 5.10 b) แรงโน้มถ่วงไฟฟ้าเหนี่ยววนที่เกิด



รูปที่ 5.10 ทิศทางของการเหนี่ยววนนำภายใน



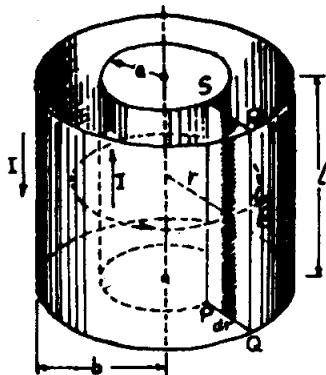
รูปที่ 5.11 สัญลักษณ์ของการเหนี่ยววนนำภายใน

ขึ้นเองจะกระทำในทิศทางตรงข้ามกับการเปลี่ยนแปลงกระแสเสมอ

ในแผนภาพที่ใช้แสดงให้เห็นว่า ศูนย์มีค่าความเหนี่ยววนนำอยู่ด้วยอย่างชัดเจน สัญลักษณ์ของการเหนี่ยววนนำภายในเขียนได้ดังรูป 5.11 อย่างไรก็ตาม จะต้องเข้าใจว่า ค่าความเหนี่ยววนนำภายในของศูนย์จะไม่เข้มข้นอยู่ ณ จุดใดจุดหนึ่งโดยเฉพาะแต่เป็นสมบัติของศูนย์ทั้งสิ้น

ตัวอย่างที่ 5.4 การเหนี่ยววนนำภายในของวงจรที่ปูะกอบด้วยแผ่นโลหะรูปทรงกระบอก 2 อัน ร่วมกัน มีรัศมี a และ b แต่ละอันมีกระแส I ในทิศทางตรงกันข้าม (รูป 5.12) ข้อง่วงระหว่างทรงกระบอกทั้งสองบรรจุด้วยสารที่มีเพอร์เมอเรลติกซ์ μ ดังตัวอย่างที่ 4.9 สามารถแม่เหล็กที่เกิดขึ้นที่ข่องว่างระหว่างทรงกระบอกทั้งสอง สำหรับกระแสในแบบนี้ คำนวณได้จากสมการ

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$



รูปที่ 5.12

ส่วนบวกร่วมอื่น นอกจากนั้น มีค่าเป็นศูนย์ทุกแห่ง

ในที่นี้ใช้ μ แทน μ_0 ที่เคยใช้ในหัวข้อ 4.9 μ ก็ต้องคำนึงถึงการมีผลต่อของส่วนบวกร่วมที่บรรจุในช่องระหว่างระหว่างทรงกระบอกทึ่งสอง แบบเดียวกันกับที่เคยกล่าวในหัวข้อ 4.18 การที่จะทำการเห็นได้ยากใน จะต้องหาผลรวมแม่เหล็กที่ทุ่งผ่านส่วนของด้านนำเข้า PQRS, ที่มีความยาว 1 เสี้ยก่อน ถ้าเราแบ่งส่วนหักล้าวให้เป็นแถบเล็ก ๆ กว้าง dr. พื้นที่ของแต่ละแถบจะเป็น $1dr$ สนามแม่เหล็ก B หักจากกัน PQRS หักนั้น

$$\begin{aligned}\Phi_I &= \int_{PQRS} B ds = \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right) (1dr) \\ &= \frac{\mu I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$

หักนั้นการเห็นได้ยากใน ของส่วนที่มีความยาว 1 หรือ

$$L = \Phi_I / I = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (5.12)$$

และการเห็นได้ยากในต่อหน่วยความยาวจะเป็น $\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

5.7 ผลลัพธ์ของส่วนแม่เหล็ก

ในหัวข้อ 2.11 เราได้เห็นแล้วว่าตัวต้องการให้มีกระแส I ให้ผ่านความต่างศักย์ V จะต้องมีกำลังงาน หรือพลังงานต่อหน่วยเวลาเป็นจำนวน VI เมื่อเป็นกระแสในวงจรปิดเรา

ต้องใช้แรงค์สื่อนไฟฟ้าแทนความต่างศักย์ V ดังนั้นจึงได้

$$\text{กำลังในวงจรปิด} = \text{แรงค์สื่อนไฟฟ้า} \times \text{กระแส}$$

ในการอธิบายของกระแสเนื่องจากมีบาน้ำที่เกิดขึ้นภายใน (self-induced current) รคฟ. (emf) หรือ $v_L = -L \frac{dI}{dt}$ รคฟ. นี้ด้านต่อการเปลี่ยนแปลงของกระแส ดังนั้นเพื่อทำให้เกิดกระแส ตามต้องการจะต้องให้พลังงานจากภายนอก

$$\text{อัตราของพลังงานที่ป้อนให้} = -v_L I = \left(L \frac{dI}{dt} \right) I$$

ให้ V มีค่าเป็นลบ เพราะเราทำการคำนวณพลังงานที่ป้อนให้กับวงจร เราอาจตีความหมายของสมการนี้ได้ว่า จะต้องป้อนพลังงานด้วยอัตราที่พอเพียงที่จะให้เกิดสนามแม่เหล็กจากกระแส จำนวนนี้ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานแม่เหล็กซึ่งเกิดจากการแสกน์หรือ

$$\frac{dE}{dt} = LI \frac{dI}{dt} \quad (5.13)$$

พลังงานแม่เหล็กที่ต้องการใช้ในการเพิ่มกระแสจากศูนย์จนถึงค่า I คือ

$$E = \int_0^E dE \text{ และ } \int_0^I LI dI \text{ หรือ } E = \frac{1}{2} LI^2 \quad (5.14)$$

shawyayang เช่น วงจรในshawyayang ที่ 5.4 พลังงานแม่เหล็กของส่วนที่มีความยาว l ใช้สมการ (5.12) ได้

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu L}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2 = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (5.15)$$

ดังจะแสดงให้เห็นต่อไปว่า พลังงานแม่เหล็ก E จะหาได้โดยการคำนวณจากสมการ

$$E = \frac{1}{2\mu} \int B^2 dv \quad (5.16)$$

ซึ่งเป็นผลรวมทั่วทุกส่วนในบริเวณซึ่งมีสนามแม่เหล็ก และ dv เป็นส่วนย่อยของปริมาตรของส่วนที่ล้อมรอบในบริเวณดังกล่าว เราจะตีความหมายของสมการ (5.16) ได้ดังนี้คือพลังงานที่ใช้ไปในการก่อให้เกิดกระแสนั้นมีลักษณะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ ซึ่งเขียนให้ว่า ในปริมาตร dv มีพลังงาน ($B^2 / 2\mu$) dv และพลังงานต่อ 1 หน่วยปริมาตรที่ลักษณะอยู่ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กคือ

$$E = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (5.17)$$

เรียกว่าความหนาแน่นของพลังงานแม่เหล็ก (magnetic energy density).

เมื่อมีทั้งสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก เราต้องพิจารณาความหนาแน่นของพลังงานไฟฟ้า (electric energy density) ดังคำนวณได้จากสมการ (4.34) ด้วย และดังนั้นพลังงานทั้งหมดต่อ 1 หน่วยปริมาตรในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ก็คือ

$$E = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (5.18)$$

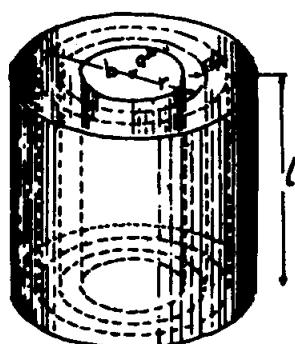
เรียกว่าความหนาแน่นของพลังงานแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic energy density).

การพิจารณาสมการ (5.16)

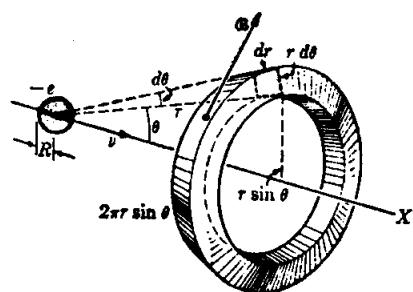
พิจารณาหัวอย่างกรณีของวงจรตามรูป 5.12 ซึ่งน้ำมายืนใหม่ดังรูป 5.13

สนามแม่เหล็กคือ

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$



รูป 5.13



รูป 5.14

ถ้าเลือกส่วนย่อยของส่วนที่เราพิจารณาเป็นเปลือกของรูปทรงกระบอกวัสดุ r มีความหนา dr เราพบว่าปริมาตรของเปลือกทรงกระบอกคือ $dv = (2\pi r)ldr$ แทนค่าลงในสมการ (5.16) ซึ่งที่ควรจะต้องมีลักษณะแม่เหล็กอยู่ในช่วง $r = a$ ถึง $r = b$ เท่านั้น และจะพบว่า

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu} \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r} \right)^2 (2\pi l r dr) \\ &= \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

จะได้ผลเช่นเดียวกับสมการ (5.15) แม้ว่าเราจะได้สมการ (5.16) สำหรับ พลังงานแม่เหล็กโดยใช้วงจรที่มีความสมมาตรอย่างสมบูรณ์ แต่ผลการคำนวณ หักกล่าวกลับใช้ได้ทั่ว ๆ ไป ในที่นี้จะของดไม่กล่าวถึงรายละเอียดในการ คำนวณสำหรับที่จะแสดงว่าเป็นสมการทั่วไป

ตัวอย่างที่ 5.5 พลังงานของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากอิเลกตรอนที่เคลื่อนที่อย่างช้า ๆ

จากหัวข้อ 3.11 เรายาทราบว่า การเคลื่อนที่ของประจุทำให้เกิดสนามแม่เหล็กซึ่งมีเงิน แรงเป็นวงกลมตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ ขนาดของสนามจะหาได้โดยใช้สมการ (3.29) ที่ว่า

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2}$$

ลักษณะอิเลกตรอน $q = -e$ สมมุติว่าเราใช้แบบคร่าว ๆ ของอิเลกตรอนในหัวอย่าง ที่ 4.8 ให้ "รัศมี" ของอิเลกตรอน เป็น R พลังงานของสนามแม่เหล็กภายนอกทิศประจุหา ได้โดยใช้สมการ (5.16) และถือว่าผลที่ได้ มาจากการรวมผลลัพธ์ที่ว่างภายนอกประจุ เราจะ ใช้ส่วนย่อยของปริมาตรเป็นรูปวงแหวน ดังรูป 5.14 มีเงินของรูปเป็น $2\pi r \sin \theta$ และ หน้าตัดของมันมีด้านเป็น dr และ $r d\theta$ ดังนั้น พื้นที่จึงเป็น $r dr d\theta$
ปริมาตรของส่วนย่อยจะเป็น

$dv =$ เส้นขอบรูป \times พื้นที่หน้าศอก

$$= 2\pi r^2 \sin\theta dr d\theta$$

ดังนั้นสมการ (5.16) จะเป็น

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu_0 \int_R^\infty \int_0^\pi \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin\theta}{r^2} \right)^2 2\pi r^2 \sin\theta dr d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{16} q^2 v^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R} \right) v^2 \end{aligned}$$

ผลที่ได้จะเป็นไปได้ค่าพลังงานแม่เหล็กทั้งหมด เพราะเราจะต้องรวมพลังงานที่มาจากการแม่เหล็กภายในอนุภาคที่มีประจุเช้าด้วยกันเสียก่อน หมายถึงว่า เราจะต้องทราบลักษณะการกระจายของประจุภายในอนุภาคเหล่านั้น ไม่ว่าจะเป็นกรณีใด ๆ ผลที่ได้จากข้างบนก็จะให้ปริมาณของพลังงานโดยประมาณได้แล้ว สิ่งที่น่าสนใจที่สุดก็คือ E ซึ่งกับ v^2 ซึ่งมีลักษณะเสียงแบบพลังงานจำนวนของอนุภาค เมื่อันว่าเป็นพลังงานจำนวนของอนุภาคที่มีมวลเป็น

$$m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3R}$$

ในกรณีของอิเลกตรอน, $q = -e$, และ $m = m_e$ ดังนี้

$$m_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3Rc^2}$$

ในที่นี้เราใช้สมการ (3.31), $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ เพื่อลบค่า μ_0 ออกเมื่อหาค่า R จะได้

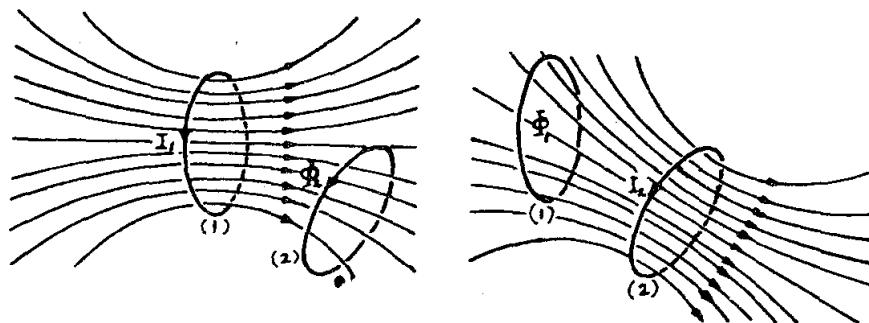
$$R = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right) = \frac{2}{3} r_e$$

โดย r_e เป็นรัศมีของอิเลกตรอน ตั้งค่าจำากัดความในสมการ (4.35) ความจริงนี้จาก การคำนวณอย่างคร่าว ๆ จะได้ค่าเป็นหัวเลขหลักเที่ยวกันกับรัศมีในหัวอย่าง 4.8, ซึ่งได้ $R = \frac{2}{3} r$ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ความถูกต้องของทฤษฎีของเรา เพราะเราทำได้เพียงประมาณขนาดของรัศมีได้ถูกต้องเป็นเลขหลักเที่ยวกันเท่านั้น

เมื่อเรารวมผลที่ได้ขึ้นเข้ากับส่วนอย่างที่ 4.8 ดูจะมีเหตุผลพอที่จะศึกษาได้ว่า พลังงานของอนุภาคที่มีประจุเมื่อยื่นเข้ามายังพลังงานของสนามไฟฟ้าร่วมอยู่ด้วย ขณะที่พลังงานจะเกิดขึ้นเนื่องมาจากพลังงานของสนามแม่เหล็ก ขึ้นต่อมา ก็จะพบเหตุผลที่ชวนให้ศึกษาว่า สนามที่เกิดขึ้นเนื่องจากอินเตอร์แอคชันนี้ ๆ ที่มีอยู่ในธรรมชาติ เป็นผู้สร้างพลังงานของอนุภาคที่อยู่ด้วยและพลังงานจะลับของอนุภาค อย่างไรก็ตี เรายังไม่ทราบว่ามีอินเตอร์แอคชันอะไรบ้างซึ่งทำให้เราสามารถคำศوبห์ถูกต้องในขณะนี้ ความจริงปัญหาที่เราพิจารณาใน หัวข้อที่ 4.8 และในที่นี้ เป็นเรื่องของการคำนวณทางพลังงานในส่วนอิเล็กตรอน (self energy) นั่นเอง

จุดมุ่งหมายของการอภิปรายปัญหานี้ เพื่อให้ผู้อ่านสนใจ ถ้าต้องการรายละเอียดของเรื่องนี้เรามาเป็นต้องใช้เทคนิคของความต้ม เมคานิกต่อไป

5.8 วงจรคู่คุณ



รูป 5.15 ความเห็นใจว่าสืบเนื่อง

พิจารณาวงจร 2 วง เช่น (1) และ (2) ในรูป 5.15 เมื่อกระแส I_1 ไหลในวงจร (1) สนามแม่เหล็กซึ่งเป็นสัดส่วนกับ I_1 จะเกิดขึ้นรอบแนวกระแส และพุ่งผ่านวงจร (2) ผุดได้ว่ามีฟลักซ์-แม่เหล็ก Φ_2 ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ I_1 ซึ่งเชื่อมได้เป็น

$$\Phi_2 = MI_1 \quad (5.19)$$

เมื่อ M เป็นสัมประสิทธิ์ ซึ่งแทนฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงจร (2) ต่อหน่วยกระแสในวงจร (1) ในทำนองเดียวกัน ถ้ากระแส I_2 ไหลในวงจร (2) สนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจะก่อให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_1 ผ่านวงจร (1) ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ I_2 จึงเชื่อมได้เป็น

$$\Phi_1 = MI_2$$

จะสังเกตเห็นได้ในสมการ (5.20) เราเขียนสัมประลักษณ์ M เหมือนในสมการ (5.19) หมายความว่า พลักดันแม่เหล็กที่ผ่านพุ่งสู่วงจร (1) เมื่อจากกระแส 1 หน่วยในวงจร (2) จะมีค่าศูนย์เท่ากับพลักดันแม่เหล็กที่ผ่านพุ่งสู่วงจร (2) อันเมื่อมาจากการแสวงหา 1 หน่วยในวงจร (1) สัมประลักษณ์ M เรียกว่า "ความเนี้ยวนำสำบ贲" (mutual inductance) ของวงจรทั้งสองความเนี้ยวนำสำบ贲ของ M ขึ้นกับสัมประสิทธิ์ปร่างของวงจรและตัวแหน่งของวงจรส่อง ดังในหน่วยเอนรี (henry) เพราะมีค่าเป็น WbA^{-1}

ถ้ากระแส I_1 เป็นปัจจุบันแล้ว พลักดัน Φ_2 ที่พุ่งผ่านวงจร (2) จะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย และ รคฟ. (emf) v_{M_2} จะถูกเนี้ยวนำให้เกิดขึ้นในวงจรนี้ ซึ่งจะคำนวณได้จาก

$$v_{M_2} = - M \frac{dI_1}{dt} \quad (5.21)$$

ในการเขียนสมการนี้ เราถือว่าวงจรมีปร่างแน่นอนและมีตัวแหน่งที่อยู่แน่นอน ทำให้ M คงที่ ในทำนองเดียวกัน ถ้ากระแส I_2 เป็นปัจจุบันแล้ว รคฟ. v_{M_1} ที่ถูกเนี้ยวนำให้เกิดขึ้นในวงจร (1) จะมีค่าเป็น

$$v_{M_1} = - M \frac{dI_2}{dt} \quad (5.22)$$

เป็นเหตุผลที่ว่าทำไม M จึงเรียกว่า การเนี้ยวนำสำบ贲 เป็นมันแสดงผลหรืออิทธิพลที่เกิดขึ้นจากกันและกัน หรือผลที่เกิดขึ้นระหว่างวงจรส่อง และนอกไปจากนั้นถ้าวงจรเปลี่ยนไป สัมประสิทธิ์กัน เป็นผลให้เกิดการแปรค่า M รคฟ. ก็จะถูกเนี้ยวนำให้เกิดขึ้นในชุดวงจรส่อง เช่นกัน

ปรากฏการณ์ของการเนี้ยวนำสำบ贲 ซึ่งให้เห็นว่ามีการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างวงจรทั้งสอง เมื่อกระแสเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เราจึงนัดให้ว่าวงจร 2 วง ก่อให้เกิดอานาจแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยกัน เครื่องมือเครื่องใช้ที่เกี่ยวกับความเนี้ยวนำสำบ贲นี้และเห็นกันทั่วไปนั้นเป็นธรรมชาติก็คือ หัวแปลง (transformer) (ดูรายบ่ำ 5.7) เครื่องแสดงการเนี้ยวนำสำบ贲นี้ของแบบชนิดก็คือ การส่งสัญญาณจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่งโดยการแพร่คลื่นในวงจรที่มีชื่อเรียกว่า ผู้ส่งสัญญาณ (transmitter) วงจรนี้จะมีผลต่ออิทธิพลที่ควบคู่กันอยู่ ซึ่งมีชื่อเรียกว่าผู้รับสัญญาณ (receiver) ตั้งในกรีดของโทรเลข วิทยุ โทรศัพท์ เคราร์ ฯลฯ การอธิบายการทำงานของเครื่องมือเหล่านี้ต้องการเทคนิคที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งผู้สนใจจะศึกษาต้นๆ ได้

ลึกลับที่สำคัญที่สุดและเป็นรากฐานของการเนี้ยวนำสำบ贲นี้ก็คือ สามารถแลกเปลี่ยนพลังงานกันได้ระหว่างวงจรสู่หนึ่งโดยสนาณแม่เหล็กไฟฟ้า อาจซุกได้ว่า สนาณแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งเกิดขึ้น

จากกระแสในวงจรทำหน้าที่เป็นตัวนำส่งพลังงาน โดยส่งงานผ่านไปในทิว่างจากวงจรนี้ไปยังอีกวงจรหนึ่ง

แต่การเหนี่ยวนำสืบเมื่อระหว่างวงจรทั้งสอง เป็นปรากฏการณ์ที่หายาก เป็นผลจากแรงกระทำระหว่างแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ ยังเป็นตัวกระแผลนั่นเอง ดังนั้นเราจึงสรุปจากปรากฏการณ์ของการเหนี่ยวนำสืบเนื่องจาก อันเดอร์แอดซ์ทั้งหมดแม่เหล็กไฟฟ้า ระหว่างอนุภาคที่มีประจุหางนี้ คือ การแลกเปลี่ยนพลังงานโดยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของอนุภาคคู่นั้น

เมื่ออนุภาคที่มีประจุ 2 อนุภาคเคลื่อนที่เพราเรอันเดอร์แอดซ์ทั้งหมดแม่เหล็กไฟฟ้า หลักการอนุรักษ์พลังงานในที่นี้จะต้องรวมถึงพลังงานของสนามด้วย จึงต้องเขียนใหม่ว่า พลังงานทั้งหมด ของระบบอนุภาคที่มีประจุ 2 อนุภาค ที่มีแรงกระทำต่อกันจะเป็น

$$E \approx \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{\text{field}} \quad (5.23)$$

ซึ่ง 2 เทอมแรกเป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของอนุภาคคู่นั้น ส่วน E_{field} เป็นพลังงานที่เกิดขึ้นจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของมัน อาจจะพิสูจน์ได้ว่า ภายใต้สภาวะคงที่ (หรือมีการเปลี่ยนแปลงช้ามาก ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ) E_{field} จะแทนพลังงานศักย์

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}$$

เนื่องมาจากการถูกบีบหัวว่าง 2 ประจุ

ผลรวมของ 3 เทอมในสมการ (5.23) มีค่าคงที่ระหว่างที่อนุภาคทั้งสองมีการเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงม้ากระทำจากภายนอก

ตัวอย่างที่ 5.6 ความหนี่ยนนำสืบเมื่อของระบบอันประกอบด้วยคลาดที่มี N รอบ พันตัวบนโซลินอยด์รูปวงแหวน (toroidal solenoid) ที่มีลักษณะไว้แล้ว ก รอบต่อหน่วยความยาว และพื้นที่ภาคศูนย์กลางเป็น S (รูป 5.16) วิธีนี้ที่เราจะคำนวณหาค่าความหนี่ยนนำสืบเมื่อได้ จากการหาผลกซ์แม่เหล็กที่ผ่านโซลินอยด์ เมื่อมีกระแสไหลผ่านคลาด หรืออีกวิธีนี้ โดยการหาผลกซ์แม่เหล็กที่ผ่านคลาด เมื่อมีกระแสไหลผ่านโซลินอยด์ก็ได้ ถ้าเราใช้วิธีที่สอง ซึ่งง่ายกว่าวิธีแรก ลองนึกถึงตัวอย่าง 4.10 ในกรณีที่เป็นโซลินอยด์รูปวงแหวน สนามแม่เหล็กจะรวมตัวกันเพียงภายในมีค่าคงที่ต้องการ (5.40) คือ

$$\mathcal{B} = \mu_0 n I$$

ฟลักซ์แม่เหล็ก ที่ผ่านผ่านภาคตัดขวางใด ๆ ของโซลินอยด์ คือ

$$\Phi_B = Bs = \mu_0 nSI$$

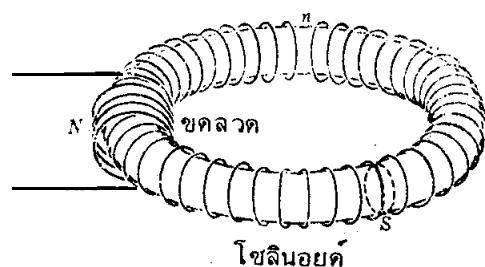
เมื่อ S เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางของโซลินอยด์ ได้ผล เหมือนกับฟลักซ์ที่ผ่านแต่ละรอบของคลาดแม้ว่าพื้นที่ภาคตัดขวางจะใหญ่ขึ้น ดังนั้น ฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านขดลวดจึงเป็น

$$\Phi_{coil} = N\Phi_B = \mu_0 nNSI$$

เปรียบเทียบกับสมการ (5.19) จะได้ค่าความเหนี่ยวนำสิบเนื้องของระบบเป็น

$$M = \mu_0 nNS$$

ในห้องทดลองใช้แบบนี้กันอย่างแพร่หลาย เมื่อต้องการหาค่าความเหนี่ยวนำสิบเนื้องมาตรฐาน



รูปที่ 5.16

ตัวอย่างที่ 5.7

หม้อแปลงประกอบด้วยคลาด 2 ขด ควบคู่กัน เรียกชุดคลาดปฐมภูมิและชุดคลาดทุติยภูมิ เมื่อ มี รคฟ. ที่แปรค่าได้ในชุดคลาดปฐมภูมิ จะก่อให้เกิด รคฟ. ในชุดคลาดทุติยภูมิ ตามปกติแล้ว เรา พิสูจน์ชุดคลาดปฐมภูมิและชุดคลาดทุติยภูมิรอบแกนเหล็ก (รูป 5.17) เพื่อให้ฟลักซ์แม่เหล็กที่เกิดขึ้น รวมตัวกันในบริเวณแกน ๆ เมื่อแปรค่า รคฟ. V_p ที่ให้กับชุดคลาดปฐมภูมิซึ่งมีจำนวน N_p รอบ ทำให้มีกระแสและจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเกือนที่แกนเหล็ก

ถ้า Φ เป็นฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านชุดคลาดปฐมภูมิ 1 รอบ ฟลักซ์ทั้งหมดที่ผ่านชุดคลาดปฐมภูมิ จะเป็น $N_p \Phi$ และเขียนได้ว่า

$$V_p = - N_p \frac{d\Phi}{dt}$$

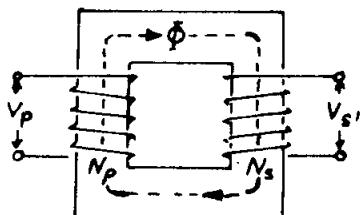
ฟลักซ์จำนวนเดียวที่จะผ่าน N_s รอบของขดลวดทุกเส้นด้วย หันนั้น รคพ. ที่เกิดขึ้นในขดลวดที่บูรณาจักรเป็น

$$V_s = -N_s \frac{d\phi}{dt}$$

อัตราส่วนของ รคพ. ในขดลวดทั้งสองจะเป็น

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

ซึ่งหมายความว่า รคพ. ที่ปราบภายในขดลวดทุกเส้นจะมากกว่า หอน้อยกว่า รคพ. ที่ป้อนให้กับขดลวดปฐมภูมิ เป็นสัดส่วนกับ $\frac{N_s}{N_p}$ เมื่อ $\frac{N_s}{N_p}$ มากกว่าหนึ่ง (น้อยกว่าหนึ่ง) เราเรียกว่าเป็นหม้อแปลงชีน (แปลงลง)

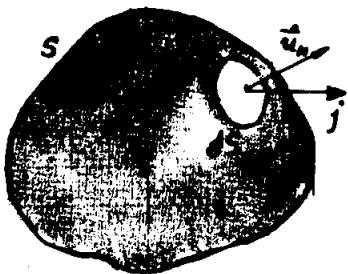


รูปที่ 5.17 หม้อแปลง

ทฤษฎีได้กล่าวในที่มีเป็นแบบที่คิดอย่างง่าย ๆ โดยมีไดคัมป์ฟิล์ดต่าง ๆ เช่น ฟลักซ์ที่สูญหายไป พลังงานที่สูญหายไป ความแตกต่างของเฟล และรวมทั้งผลลัพธ์เนื่องจากความต้านทานภายในอกรที่ต่อทางขดลวดทุกเส้นด้วย

5.9 หลักแห่งการอนุรักษ์ของประจุ

ในหัวข้อ 2.8 เรายังได้อธิบายกันแล้วว่า ความจริงประจุไฟฟ้ามีค่าคงที่ ซึ่งนัยหนึ่งก็คือไม่ว่ากระบวนการใด ๆ ที่เกิดขึ้นในศึกษา จำนวนประจุทั้งหมดจะต้องมีค่าคงเดิมค่ากล่าวนี้อาจแสดงเป็นปริมาณได้ ซึ่งมีประโยชน์มาก พิจารณาดิฉันท์ S (รูป 5.18) โดยให้ ๆ เป็นประจุทั้งหมดภายในผิวปีกนั้น ๆ เวลาหนึ่งเวลาใด เนื่องจากนี้หากเราทำการสำรวจพิจารณา เป็นแบบไนโตรด ดังนั้น ประจุไม่ยุ่งนึง (เช่น อิเล็กตรอนในโลหะหรือในพลาสม่า) เคลื่อนที่ภายในส่วนกลางบ้าง



รูปที่ 5.18 กระแสไฟฟ้าผ่านผิวหน้าที่หุ้ม คือ ไว

ผ่านเข้าหรือออกผ่านผิว S บ้าง บางทีก็มีประจุวิ่งออกนอกผิวมากกว่า เข้าภายในผิวทำให้ประจุ ภายนอกในผิว S ลดลง บางทีก็อาจเป็นไปในทางตรงกันข้าม ประจุวิ่งเข้ามากกว่าออก ทำให้ประจุทั้งหมดเพิ่มขึ้น และถ้าฟลักซ์ของประจุที่ผ่านเข้าสู่ S เท่าส่วนที่พุ่งออก ประจุทั้งหมดคงจะต้องมีค่าเท่าเดิม หลักของการอนุรักษ์ประจุคงล้าวว่า

$$\begin{aligned} \text{ประจุที่หายไป} &= \text{ฟลักซ์ของประจุที่พุ่งออกจากผิว} - \text{ฟลักซ์ของประจุที่พุ่งเข้าสู่ผิว} \\ &= \text{ฟลักซ์ของประจุที่พุ่งออกจากผิวทั้งหมด } \end{aligned} \quad (5.24)$$

ฟลักซ์ของประจุที่ออกจากผิว S ทั้งหมดคงท่อน่วยเวลา เป็นปริมาณของประจุทั้งหมดที่ผ่านผิวต่อหน่วยเวลา (นั่นคือกระแสผ่านผิว) หรือคุณได้ว่า ประจุที่หายไปต่อ 1 หน่วยเวลาภายนอกในผิวปิด S คือ $-\frac{dq}{dt}$ เช่นในรูปแสดงการอนุรักษ์ค่า Strom ได้ว่า

$$-\frac{dq}{dt} = I_{cs} \quad (5.25)$$

อักษร cs ที่เดินท้ายอักษร I ใช้แสดงว่า เป็นผิวปิด สมการข้างบนแสดงถึงหลักของการอนุรักษ์ของประจุ ภายนอกให้ล้มเหลวคือว่าไม่สามารถจะสร้างประจุขึ้นใหม่หรือทำลายประจุให้สูญหายไปได้ ตามกฎของ เก้าส์สำหรับสนามไฟฟ้าดังที่แสดงไว้ในสมการ (4.8) มีความหมายว่า ประจุทั้งหมดในผิวปิด มีปริมาณที่เช่นกันให้ในรูปของสนามไฟฟ้าที่ผิวนั้นคือ

$$q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N \cdot dS$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N \cdot dS$$

แทนผลที่ได้มาในสมการ (5.25) จะได้

$$I_{cs} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds = 0 \quad (5.26)$$

เป็นสมการแสดงหลักแห่งการอนุรักษ์ของประจุในแบบที่รวมกฎของเกาส์เข้าไว้ด้วย เมื่อสนา�คงที่ ปริมาณ $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds$ จะไม่เปลี่ยนเวลา ดังนั้น เมื่อคำนวณค่าส่วนที่เปลี่ยนเวลา จึงเป็นศูนย์ เป็นผลให้

$$I_{cs} = 0 \quad (\text{สำหรับสนาમคงที่}) \quad (5.27)$$

หมายความว่า ในสนาમคงที่ประจุจะไม่เพิ่มขึ้นหรือหายไป ไม่ว่าจะเป็นด้วยเหตุผลใด ๆ ในบริเวณนั้น ดังนั้นกระแสและทิศทางดีฟุ่งผ่านผิวปิดจะเป็นศูนย์

5.10 กฎของแม่เหล็กไฟฟ้า - แม่เหล็ก

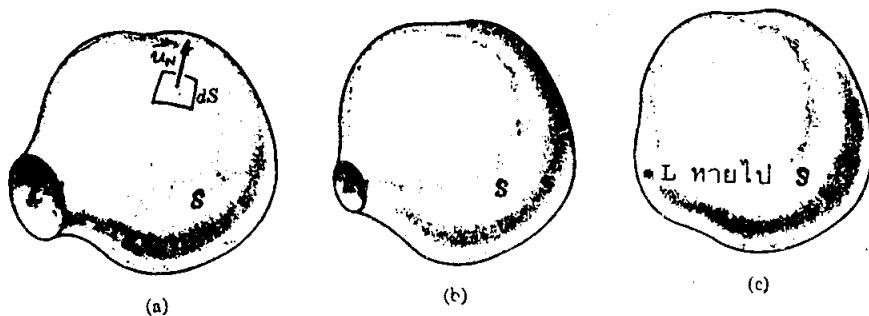
กฎของพาราเดย์-เอนรี ดังสมการ (5.2) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนาમแม่เหล็กและสนาમไฟฟ้า ตามเหตุการณ์ที่เปลี่ยนแปลงในบริเวณนี้ ๆ ความสัมพันธ์อันใกล้ชิดกันระหว่างการเปลี่ยนแปลงสนาમไฟฟ้า และสนาમแม่เหล็ก แสดงว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงสนาમไฟฟ้า และสนาມแม่เหล็ก ในหนึ่งหน่วยเวลา ที่ดำเนินเหตุการณ์ เทียบกัน จะสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิดด้วย ดังนั้นจากสมการ (5.2) เช่นได้ดังนี้

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds \quad (\text{กฎของพาราเดย์-เอนรี})$$

เป็นสมการที่ใช้แสดงความเกี่ยวข้องของเชอร์คิวเลชันของสนาમไฟฟ้า กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์ของสนาમแม่เหล็ก เราหวังได้ว่าจะได้สมการที่คล้ายกันนี้แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างเชอร์คิวเลชันของสนาມแม่เหล็ก กับอัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ของสนาມไฟฟ้า เท่าที่ผ่านมาจนถึงปัจจุบันเราทราบแล้วว่า เชอร์คิวเลชันของสนาມแม่เหล็กทำได้จากกฎของแม่เหล็กตามสมการ (4.37)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (5.28)$$

แต่สมการนี้ไม่แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ของสนาມไฟฟ้า แค่ก็ไม่น่าแปลกใจ เพราะสมการนี้ได้มาเมื่อศตวรรษที่ 19 เป็นค่าคงที่ อย่างไรก็ต้อง เมื่อใช้กับสนาમที่เปลี่ยนตามเวลาด้วยก็อาจจะต้องการปรับปรุงแก้ไขกฎของแม่เหล็กเสียใหม่



รูปที่ 5.19 แสดงเส้นรอบรูป L ที่ทดสอบลงจนเป็นจุด

ในขณะนี้กฎของแอมเปอร์ในรูปสมการ (5.28) ใช้กับผิว S ที่มี L เป็นเส้นรอบรูปและผิว S จะเป็นส่วนเล็กที่แน่นอนตราบใดที่ L ยังคงเป็นเส้นรอบรูปอยู่ ถ้าเส้น L ทดสอบลงบริเวณ $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ก็จะน้อยลงด้วย (รูป 5.19) และถ้า L ยิ่งสั้นลงจนเป็นจุด ผิว S จะกลายเป็นผิวปิด จากกฎของแอมเปอร์ทั้งในสมการ (5.28) ก็จะพบว่า $I_{CS} = 0$ ดังที่เราใช้วัสดุ cs เติมไว้ได้คำเพื่อเน้นให้ทราบว่าใช้กับผิวปิด ผลที่ได้มีจะเหมือนกับสมการ (5.27) สำหรับการอนุรักษ์ของประชารูป เมื่อสนามคงที่ อย่างไรก็ตามเราทราบว่า เมื่อสนามไม่คงที่ แต่แปรไปตามเวลา สมการ (5.27) จะใช้ไม่ได้อีกต่อไป จึงต้องเลือกสมการ (5.26) ซึ่งเป็นสมการที่รวมกฎของเก้าส์เข้าไปด้วย มาใช้แทนรูปที่สอง นี่คือการยืนยันเกี่ยวกับที่เคยลงทะเบียนว่า ถ้ามีสนามที่แปรเปลี่ยนตามเวลา กฎของแอมเปอร์น่าจะต้องมีการแก้ไข

อาศัยสมการ (5.26) เราจะต้องแทน I ในสมการ (5.28) ด้วย

$$I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds$$

เมื่อ I เป็นกระแสที่ผ่านผิว S ผลที่ได้จึงเป็น

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds] \quad (5.29)$$

เรียกว่ากฎของแอมเปอร์-แมกซ์เวลล์

เปรียบเทียบสมการนี้กับกฎของแอมเปอร์ในสมการ (5.28) สมการ (5.29) จะลดรูปลงมาเป็นกฎของแอมเปอร์ เมื่อสนามคงที่ เพราะเหตุผลที่เป็นศูนย์ และจะกลายเป็นรูปสมการ (5.26) เมื่อเส้น L ทดสอบเข้าจนเป็นจุด ผิว S จึงเป็นผิวปิด และในสมการทางด้านข้างมือเป็นศูนย์

คงเห็นได้ว่า สมการนี้ใช้ได้กับทุกภาวะเท่าที่กล่าวมาแล้ว

เท่าที่ผ่านมาจนบัดนี้เราได้ใช้วิธีทางคณิตศาสตร์เพื่อให้กฎของแม่เหล็กประดิษฐ์ที่เกี่ยวกับแม่เหล็กและกระแสไฟฟ้า แต่ในปัจจุบันนี้เราสามารถพูดได้ล่วงหน้าว่า เป็นจริงตามนั้น ข้อพิสูจน์ที่ดีที่สุดคือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีปรากฏอยู่ทั่วไป

บุคคลแรกที่แนะนำว่าจะมีการปรับปุ่งเพิ่มเติมกฎของแม่เหล็ก ให้เป็นแบบที่เห็นชัดต้น คือนักฟิสิกส์ชาวอังกฤษชื่อ เจมส์ เคลริก แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell 1831-1879) เมื่อปลายศตวรรษที่แล้วมา ตั้งนัยสมการ (5.29) จึงได้ชื่อว่ากฎของแม่เหล็กแมกซ์เวลล์ (Ampere Maxwell law) แมกซ์เวลล์ปรับปุ่งสมการนี้โดยอาศัยคณิตศาสตร์มากกว่าการทดลอง ที่จริงแล้วมีการทดลองที่ช่วยพิสูจน์ความถูกต้องแมกซ์เวลล์หลังจากนั้น เพียงไม่กี่ปี

จากสมการ (5.29) เราจะเห็นได้ว่า ผลจากสนามไฟฟ้าที่ประตามเวลาที่ ช่วยให้ เกิดกระแส I เพิ่มขึ้นเป็นจำนวน $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds$ แมกซ์เวลล์ตีความหมายของ เหตุนี้ว่า เป็นกระแสที่เกิดเพิ่มขึ้น และเรียกว่า กระแสเดลส์เพลส เมนต์ (displacement current) อย่างไรก็ตามค่าว่า "กระแสเดลส์เพลส เมนต์" ทำให้เกิดความไขว้ข้าว เพราะ ไม่มีกระแส เช่นนั้นเกิดขึ้นจริง ๆ และในสมการ (5.29) ก็เพียงแสดงความเกี่ยวพันธ์ระหว่าง \vec{E} , \vec{B} และกระแส I ที่แต่ละจุดในที่ว่างบริเวณนั้นเท่านั้น

กฎของแม่เหล็ก (สมการ 5.28) กล่าวถึงกระแสที่มีค่าคงที่กับสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจาก กระแสจำนวนนั้น กฎของแม่เหล็กแมกซ์เวลล์ (สมการ 5.29) ใช้อธิบายถูกไปอีกขั้นหนึ่งและซึ ให้เห็นว่า สนามไฟฟ้าที่ประตามเวลา ก็ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเพิ่มขึ้นได้อีก เช่นในกรณีที่ไม่มี กระแส นั่นคือ $I = 0$ เราได้

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N \cdot ds \quad (5.30)$$

(กฎของแม่เหล็ก-แมกซ์เวลล์ เมื่อไม่มีกระแส)

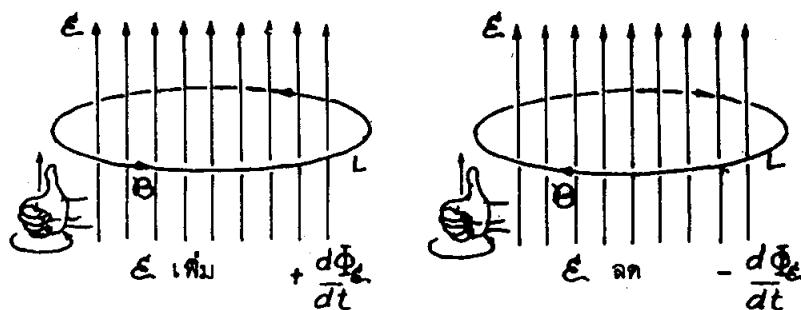
เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าที่ประตามเวลา และสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้น จากกระแสนั้นได้ชัดเจนขึ้น กล่าวว่าได้ว่า

สนามไฟฟ้าที่ประตามเวลา บวกให้ทราบว่า สนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งเดียวกัน เช่น เซอร์คิวเลชันของสนามแม่เหล็กตาม เส้นรอบรูป เป็นส่วนของชั้นรากร การเปลี่ยนแปลงลักษณะไฟฟ้าที่ผ่านผิวภายนอกในเส้นรอบรูปนั้น

คงจะจำกว่า เซอร์คิวเลชันของสนามแม่เหล็กตามเส้นรอบรูป L หรือ แรงแม่เหล็ก (magnetomotive force) ใช้เครื่องหมาย \mathcal{N} ขึ้นต่อไปให้ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิว L ที่มีเส้นรอบรูป L เป็น Φ_L เราอาจเขียนสมการ (5.30) ได้ในรูป

$$\mathcal{E}_B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_L}{dt}$$

ซึ่งเทียบได้กับสมการ (5.1) ซึ่งเป็นกฎของการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า



รูปที่ 5.20 สนามแม่เหล็กเกิดจากสนามไฟฟ้าที่แปรค่าตามเวลา

ทิศทางของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่มีพิศสัมพันธ์กัน ได้แสดงไว้ในรูป 5.20 หมายถึงสนามไฟฟ้าที่แปรค่าตามเวลาอย่างลम្អา เสมอ ถ้าสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้น (ลดลง) แนวการเรียงตัวของเส้นแรงแม่เหล็กจะ เหมือนกัน (ตรงกันข้าม) กับที่ได้แสดงไว้ในรูปตามทิศของมือขวา เมื่อนิ้วหัวแม่มือออกทิศทางสนามไฟฟ้า ผู้อ่านควรลองเปรียบเทียบผลที่ได้กับรูป 5.1

กฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์ ดังในสมการ (5.29) ต่างจากกฎของฟาราเดีย-เซนซ์ ดังในสมการ (5.2) ในท้าย ๆ การแก้กราฟิกในสมการ (5.29) เราเม้มของกระแสไฟฟ้า แต่ในสมการ (5.2) ไม่มีเม้มของกระแสแม่เหล็ก ซึ่งตรงกับความจริงที่ว่าไม่มีข้อแม่เหล็กชีสระ ในธรรมชาติ ในกรณีที่สองอัตราการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้าในหนึ่งหน่วยเวลา มีเครื่องหมายเป็นบวกในสมการ (5.29) แต่ฟลักซ์แม่เหล็กมีเครื่องหมายเป็นลบในสมการ (5.2) ผู้อ่านควรจะลองหาหน่วยของ $\epsilon_0 \mu_0$ เพื่อความเข้าใจที่ศึกษา

5.11 สัมการของแมกนีติกฟิลด์

ในตอนนี้จะยังคงเรื่องสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ก็ครึ่งหนึ่ง เรายาทราบแล้วว่าแรงกระทำแบบหนึ่ง ที่สำคัญกว่า แรงแม่เหล็กไฟฟ้า (*electromagnetic interaction*) เกิดขึ้นระหว่าง อนุภาคหลักๆ ที่ประกอบกัน เป็นสาร เป็นส่วนที่แสดงสมบัติของอนุภาคที่เรียกว่า “ประจุไฟฟ้า” เพื่อ ขอขยายแรงแม่เหล็กไฟฟ้า ระยะเด่นอย่าง “สนามแม่เหล็กไฟฟ้า” ซึ่งประกอบด้วยปริมาณเวคเตอร์ \vec{B} เวคเตอร์ ศูนย์ ลงนามไฟฟ้า \vec{E} และสนามแม่เหล็ก \vec{B} ทำให้แรงกระทำบนประจุไฟฟ้า เป็น

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.31)$$

ในทางกลับกัน เราอาจหาค่าของสนามไฟฟ้า \vec{E} และสนามแม่เหล็ก \vec{B} ได้โดยอาศัยการณา ชา กต า ณ ท น ง ของ ห ว ป ร ะ จ ุ เ อ ง และการเคลื่อนที่ของมัน (หรือกระแส) การแยกสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นองค์ประกอบย่อยทางไฟฟ้าและแม่เหล็ก ขึ้นกับการเคลื่อนที่สัมพันธ์ระหว่างผู้สั่ง เกต กับประจุ ๆ ที่ทำให้เกิดสนาม

นอกจานั้นสนาม \vec{E} และ \vec{B} ยังมีความสัมพันธ์กันโดยตรง ซึ่งทราบได้จากกฎของ แม่เปร์-แมกนีติกฟิลด์ และกฎของ พาราเดย์-เซนต์ ความสัมพันธ์เหล่านี้ได้แสดงไว้เป็น 4 กฎ ที่วายกันดังที่ได้เคยวิเคราะห์มาแล้วในบทก่อน และเช่นสูปไว้ให้ในตาราง 5.1 และ

ทฤษฎีของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ บันรวมไว้แล้วในกฎทั้ง 4 นี้ รวมเรียกว่า สัมการของ แมกนีติกฟิลด์ (*Maxwell's equation*) เพราะแมกนีติกฟิลด์ซึ่งเป็นผู้ตั้งสูตรทั้งสี่นั้น จะเห็นว่า สัมการต่อไป รวมทั้งสมการ (20.31) รวมกันเป็นรากฐานของทฤษฎีของแรงแม่เหล็กไฟฟ้า ประจุไฟฟ้า q และกระแส I ได้ซึ่ว่า เป็นต้นกำเนิดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เพราะถ้าทราบ q และ I แล้วอาศัยสัมการของแมกนีติกฟิลด์ เราสามารถคำนวณค่า \vec{E} และ \vec{B} ได้

ตาราง 5.1 สัมการของแมกนีติกฟิลด์

- | | |
|---|---|
| 1. กฎของเกอส์สำหรับสนามไฟฟ้า
สมการ 4.8 | $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds = q / \epsilon_0$ |
| 2. กฎของเกอส์สำหรับสนามแม่เหล็ก
สมการ 4.42 | $\oint \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds = 0$ |
| 3. กฎของพาราเดย์-เซนต์
สมการ 5.2 | $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_N ds$ |
| 4. กฎของแม่เปร์-แมกนีติกฟิลด์
สมการ 5.29 | $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left\{ I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_N ds \right\}$ |

เราต้องไม่ลืมว่า กฎของเก้าส์สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามสมการ (4.8) และ (4.42) ที่เรารู้กันมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เป็นสมการสำหรับสนามคงที่ อย่างไรก็ตามในที่นี่เราก็ได้รวมเข้าไว้ในทฤษฎีที่รวมถึงสนามที่แปรตามเวลาด้วยแล้ว ผู้อ่านอาจจะสงสัยว่าเราคงจะแก้ไขสมการในทำนองเดียวกันกับที่ทำกับกฏของแม่เหล็ก เพื่อให้ใช้กับปัญหาที่แปรตามเวลาได้ ค่าตอบคือที่ไม่ได้ ได้พบแล้วว่า 4 กฎ ในสุดข้างต้นสามารถพิสูจน์ผลการทดลองได้ และเหตุผลที่ใช้ประกอบการสร้างสูตรคงที่กับผลการทดลอง หันนี้กฏของเก้าส์ทึบสองกฏ จะยังคงเหมือนเดิม เมื่อใช้กับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แปรตามเวลา

สิ่งที่น่าสนใจคือ กฏของฟาราเดีย-เชนรี และกฏของแม่เหล็ก-แมกซ์เวลล์ เป็นสมการที่แสดงความเชื่อมโยงระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ที่ไม่ปรากฏในสมการสำหรับสนามคงที่ (ตาราง 4.4) ในการศึกษาขั้นสูงต่อไปจะพบว่าสมการของแมกซ์เวลล์ใช้อธิบายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้

สมการของแมกซ์เวลล์ คงใช้ได้ดีในกรณีที่เกี่ยวกับทฤษฎีสัมพัทธภาพ เพราะมันจะคงรูปสมการเดิมเมื่อจัดการแบบปรูปแบบลอเรนซ์ (Lorentz transformation) หมายถึงรูปสมการไม่เปลี่ยนไปเมื่อจัดการด้วยตัว x, y, z และเวลา t จะเปลี่ยนแปลงไปก็ตาม การแบบปรูปแบบลอเรนซ์ และสนาม E กับ B จะเปลี่ยนไปตามสมการ (3.34) การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ต้องการความรู้ที่เกินกว่าที่เราทราบขณะนี้จึงจะเว้นไว้ก่อน ไม่กล่าวถึงในที่นี่

แรงกระทำทางแม่เหล็กไฟฟ้าที่ก่อศูนย์ศักดิ์จะเห็นจากสมการของแมกซ์เวลล์ เป็นการคันพับที่ยังไห้กับสุคทางฟิสิกส์ เพราะทำให้เห็นว่าแรงกระทำเหล่านี้รวมกันเป็นหนึ่ง แยกจากกันไม่ได้ เป็นแรงกระทำ (interaction) แบบที่เราสามารถเข้าใจได้ชัดเจนที่สุด เช่นเป็นรูปสมการคณิตศาสตร์ได้ชัดเจน นับว่าเป็นโชคของมนุษย์เรา เพราะในความศรีลัยปัจจุบันเราได้แปลงความคิดให้เป็นจริงโดยอาศัยความเข้าใจแรงแม่เหล็กไฟฟ้า นำมารังสรรค์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันของเรา

ควรเป็นที่เข้าใจว่า สมการของแมกซ์เวลล์มีขอบเขตจำกัด เช่นกัน สมการนี้จะใช้อธิบายได้ดีเมื่อเป็นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นระหว่างกลุ่มประจุจำนวนมาก เช่นสายอากาศที่ก่อสร้างส่งคลื่นวิทยุ วงจรไฟฟ้าและแม่เหล็กกระแสงอะตอมหรือไมโครกูลที่มีประจุ แต่พบว่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าระหว่างอนุภาคหลักมูล (โดยเฉพาะที่มีพลังงานสูง) จะคำนวณได้จากรัฐที่ต่างหากไป ดังกล่าวที่อธิบายกฏของความสัมมนาด้วยเกลียดที่เรียกว่า Quantum electrodynamics เราจะไม่กล่าวถึงวิชาชีวนี้ในหนังสือเล่มนี้ แม้ว่าจะมีข้อจำกัดต่าง ๆ ก็ตาม เรายังสามารถใช้สมการของแมกซ์เวลล์อธิบายแรงแม่เหล็กไฟฟ้าระหว่างอนุภาคหลักมูลโดยประมาณได้ถูกต้อง รึซึ่นเรียกว่า Classical electrodynamics และเราจะใช้รัฐนี้ในหนังสือเล่มนี้ เมื่อเราต้องการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และโครงสร้างของวัสดุ