

บทที่ 1

การโน้มถ่วง

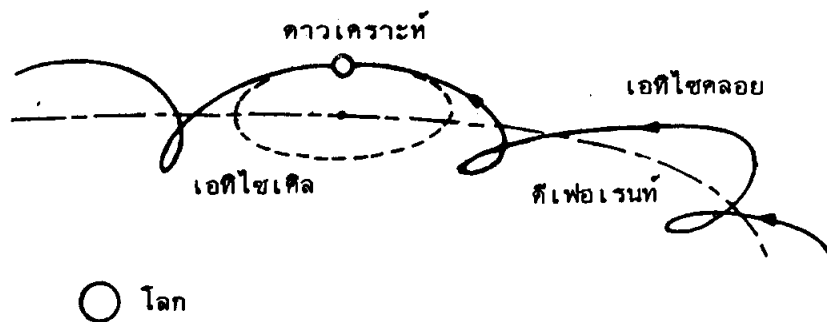
1.1 บทนำ

สิ่งแรกที่มนุษย์เริ่มสนใจ ก็คือการเคลื่อนที่ของเทหฟากฟ้า ได้แก่การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ต่าง ๆ

ในสมัยกรีกเข้าใจว่าโลกมนุษย์เป็นศูนย์กลางของจักรวาล และเทหฟากฟ้าต่าง ๆ หมุนรอบโลก เขาได้จัดลำดับเทหฟากฟ้าที่อยู่ใกล้โลกเรียงตามลำดับดังนี้ ดวงจันทร์, ดาวพุธ, ดาวศุกร์, ดวงอาทิตย์, ดาวอังคาร, ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์

สมมุติฐานข้อแรกที่เกี่ยวข้องกับระนาบการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ก็คือ ดาวเคราะห์เหล่านั้นโคจรเป็นวงกลมร่วมศูนย์กลางกัน โดยมีโลกเป็นจุดศูนย์กลางร่วมตามสมมุติฐานข้อนี้ทำให้การสังเกตปรากฏการณ์ต่าง ๆ เกิดความยุ่งยาก

ในคริสต์ศตวรรษที่สอง นักดาราศาสตร์แห่งอเล็กซานเดรียชื่อ โทเลมี (Ptolemy) ได้ตั้งทฤษฎีเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่อย่างง่าย ๆ โดยถือว่าดาวเคราะห์เคลื่อนที่สม่ำเสมอเป็นวงกลม เรียก เอพิไซเคิล (epicycle) รอบจุดคงที่จุดหนึ่งซึ่งเรียกดีเฟอเรนซ์ (deferent) และในขณะเดียวกัน ดีเฟอเรนซ์ก็เคลื่อนที่รอบโลกด้วย ผลที่เกิดขึ้นก็คือ ทางเดินของดาวเคราะห์จะเป็นเอพิไซคลอย (epicycloid) ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 แสดงเอพิไซคลอย

การตั้งทฤษฎีแบบนี้ก็ยังใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ได้ยาก ทฤษฎีหนึ่งก็คือ ชาวกรีกอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์สัมพันธ์กับโลก โดยใช้โลกเป็นแกนของกรอบอ้างอิง (frame of refernce)

การอธิบายแบบนี้เป็นที่ยอมรับว่าถูกต้องจนกระทั่งศตวรรษที่ 16 นักบวชชาวโปแลนด์ชื่อ นิโคลัส คอเปอร์นิคัส (Nicolaus Copernicus ค.ศ. 1473-1548) ได้เสนอวิธีอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รวมทั้งโลกด้วยว่า จะต้องมีความอาทิตย์เป็นศูนย์กลาง ความจริงความคิดนี้ไม่ได้เป็นความคิดใหม่ เพราะนักดาราศาสตร์กรีกชื่อ อาริสตาร์คัส (Aristarchus) เคยเสนอครั้งหนึ่งแล้วในราวศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสตกาล ตามที่คอเปอร์นิคัสได้กล่าวว่า ทางโคจรของดาวเคราะห์เป็นไปอย่างมีระเบียบ โดยมีดวงอาทิตย์เป็นศูนย์กลาง ดาวพุธ, ดาวศุกร์, โลก, ดาวอังคาร, ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์โคจรรอบดวงอาทิตย์ ส่วนดวงจันทร์โคจรรอบโลก สิ่งที่คอเปอร์นิคัสเสนอใช้ดวงอาทิตย์เป็นกรอบอ้างอิงนี้ ทำให้การอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ง่ายขึ้น

ดวงอาทิตย์เป็นวัตถุที่มีขนาดใหญ่ที่สุดในระบบที่มีการเคลื่อนที่ในระนาบนี้ ในทางปฏิบัติแล้วก็ยังเป็นศูนย์กลางของมวลของทั้งระบบด้วย จึงจัดให้เป็นแกนหลัก และที่จริงก็คือแกนของกรอบนิ่ง (inertial frame) นั่นเอง ความเห็นของคอเปอร์นิคัสสนับสนุนสิ่งที่โจฮันส์ เคปเลอร์ (Johannes Kepler ค.ศ. 1571-1630) ค้นพบ รวมทั้งกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ อันเป็นผลของการวิเคราะห์เกี่ยวกับข้อมูลทางดาราศาสตร์ของไทโช บราเฮ (Tycho Brahe ค.ศ. 1546-1601) กฎนี้เรียกว่า กฎของเคปเลอร์ (Kepler's laws) อันเป็นกฎสำคัญที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ทั้งหลาย กฎเหล่านี้กล่าวไว้ว่า

1. ดาวเคราะห์เคลื่อนที่เป็นวงรี (ellipse) โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่ โฟกัสจุดหนึ่ง
2. เวกเตอร์บอกตำแหน่งของดาวเคราะห์ (position vector) เทียบกับดวงอาทิตย์จะกวาดไปเป็นพื้นที่เท่า ๆ กัน ในช่วงเวลาที่เท่ากัน (กฎข้อนี้เรียกกฎของพื้นที่)
3. กำลังสองของคาบการโคจร (period) จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสามของระยะทางเฉลี่ยจากดาวเคราะห์ถึงดาวอาทิตย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$p^2 = kr_{ave}^3$$

เมื่อ k = ค่าคงที่

ค่าตัวเลขสำคัญต่าง ๆ เกี่ยวกับระบบสุริยะได้รวบรวมไว้ในตาราง 1.1

ตาราง 1.1 ข้อมูลพื้นฐานของระบบสุริยะ

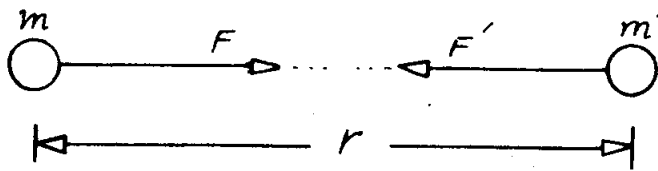
ดวงดาว	รัศมีเฉลี่ย เมตร	มวล กิโลกรัม	คาบของการหมุน รอบตัวเอง วินาที	รัศมีของวงโคจร เมตร	คาบของวงโคจร วินาที	เอกเซนตริซิตี ของวงจร
ดวงอาทิตย์	6.96×10^8	1.99×10^{30}	2.3×10^6	-	-	-
ดาวพุธ	2.34×10^6	3.28×10^{23}	5.03×10^6	5.79×10^{10}	7.60×10^6	0.206
ดาวศุกร์	6.08×10^6	4.87×10^{24}	(2×10^7)	1.80×10^{11}	1.94×10^7	0.007
โลก	6.37×10^6	5.98×10^{24}	8.62×10^4	1.49×10^{11}	3.16×10^7	0.017
ดาวอังคาร	3.36×10^6	6.44×10^{23}	8.86×10^4	2.28×10^{11}	5.94×10^7	0.093
ดาวพฤหัสบดี	6.98×10^7	1.90×10^{27}	3.54×10^4	7.78×10^{11}	3.74×10^8	0.049
ดาวเสาร์	5.82×10^7	5.68×10^{26}	3.61×10^4	1.43×10^{12}	9.30×10^8	0.051
ดาวมฤตยู	2.37×10^7	8.67×10^{25}	3.85×10^4	2.87×10^{12}	2.66×10^9	0.046
ดาวเกตุ	2.24×10^7	1.05×10^{26}	5.69×10^4	4.50×10^{12}	5.20×10^9	0.004
ดาวยม	(3.00×10^6)	(5.37×10^{24})	(?)	5.91×10^{12}	7.82×10^9	0.250
ดวงจันทร์	1.74×10^6	7.34×10^{22}	2.36×10^6	3.84×10^8	2.36×10^6	0.055

หมายเหตุ 1. ตัวเลขในวงเล็บแสดงค่าที่ยังไม่แน่นอน

2. คาบของวงโคจรของดวงจันทร์เป็นเวลาการหมุนรอบโลก

1.2 กฎของการโน้มถ่วง

ถัดมาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน กฎข้อที่สองของนิวตัน และการค้นพบที่น่าจะนับได้ว่ายิ่งใหญ่ที่สุดในวิชาฟิสิกส์ก็น่าจะได้แก่กฎแห่งการโน้มถ่วง (law of universal gravitation) นั่นคือ แรงกระทำระหว่างกัน (interaction) ที่เกิดขึ้นระหว่างวัตถุ 2 ก้อนไม่ว่าจะเป็นดาวเคราะห์หรืออนุภาคเล็ก ๆ ก่อให้เกิดการเคลื่อนที่ สามารถอธิบายผลอันเป็นการเคลื่อนที่ได้ โดยใช้กฎของเคปเลอร์ กฎนี้นิวตันตั้งขึ้นในปี 1666 แต่ประกาศใช้และตีพิมพ์ลงในหนังสือ Philosophiae Naturalis Principia Mathematica ในปี 1687



รูปที่ 1.2 แรงดึงดูดระหว่าง 2 มวล

ในขั้นแรกนี้จะแสดงว่า จากกฎข้อ 2 ของเคปเลอร์ หรือกฎของพื้นที่ชี้ให้เห็นว่าแรงที่เกิดจากการโน้มถ่วง จะกระทำผ่านจุดศูนย์กลาง นั่นคือ แรงกระทำระหว่างดาวเคราะห์และดวงอาทิตย์กระทำตามแนวเส้นตรงที่ต่อระหว่างเทหวัตถุทั้งสอง

กฎของพื้นที่, โมเมนตัมเชิงมุม, และแรงกระทำผ่านจุดศูนย์กลาง (The law of areas, angular momentum, and central forces) สมมติให้อนุภาคเคลื่อนที่ตามทาง C (รูป 1.3 เมื่อเวลา t อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A และในเวลา $t + dt$ อยู่ที่ B ในเวลา dt เวกเตอร์ที่บอกตำแหน่ง (radius vector) $\vec{r} = \vec{OA}$ กวาดไปได้พื้นที่ OAB ที่แรเงาไว้เป็นรูปสามเหลี่ยม พิจารณาได้จากเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่ง \vec{r} และการขจัด (displacement) $d\vec{r}$ ซึ่ง $= \vec{AB}$ พื้นที่ OAB อาจแทนได้ด้วย เวกเตอร์ $d\vec{A}$ ซึ่งจะหาค่าได้โดยใช้ผลคูณทางเวกเตอร์

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$

ดังนั้นพื้นที่ที่ \vec{r} กวาดไปต่อหน่วยเวลาคือ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

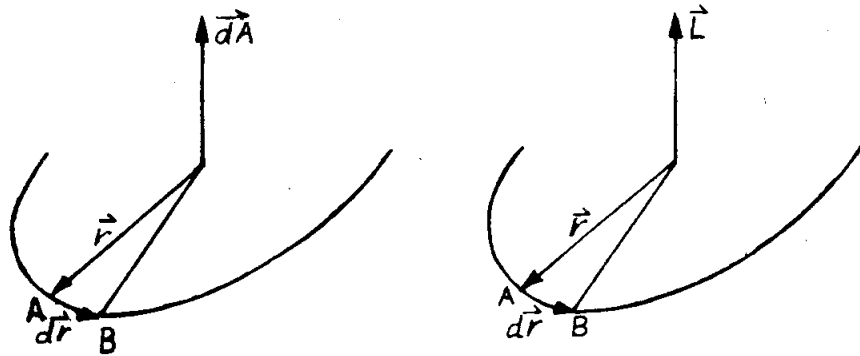
เมื่อ \vec{v} เป็นความเร็วของอนุภาค ถ้ากฎของพื้นที่เป็นจริง (นั่นคือ \vec{r} กวาดไปได้พื้นที่เท่า ๆ กัน ในช่วงเวลาที่เท่ากัน) $\frac{dA}{dt}$ จะต้องคงที่

หมายความว่า $\vec{r} \times \vec{v} = \text{คงที่}$

ดังนั้นเราได้โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคเป็น

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{คงที่}$$

และดังนั้นกฎของพื้นที่ย่อมแสดงว่าโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคมีค่าคงที่ด้วย และนั่นย่อมหมายความว่า แรงกระทำนั้นต้องผ่านจุดศูนย์กลาง



รูป 1.3

ขั้นถัดไป ถ้าเราถือว่า แรงโน้มถ่วงเป็นสมบัติทั่วไปของวัตถุทั้งหลาย แรง F อันเนื่องมาจากการโน้มถ่วงจะเป็นสัดส่วนกับ "ปริมาณ" เนื้อของแต่ละวัตถุ แรง F จึงขึ้นกับมวล m, m'

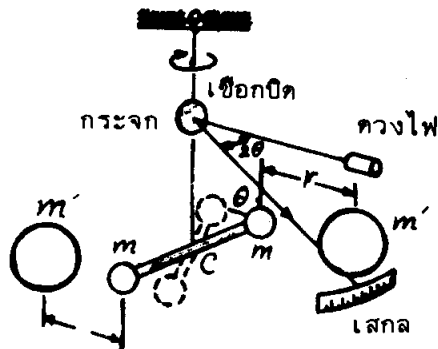
นั่นคือ
$$F = m m' f (r)$$

ในการตัดสินใจว่าแรง F ขึ้นอยู่กับระยะทาง r ซึ่งเราใช้ $f (r)$ ด้วยหรือไม่นั้น เป็นปัญหายากข้อหนึ่ง จะทำได้ก็โดยอาศัยการทดลองวัดแรงกระทำระหว่างมวล m, m' หลายๆ ครั้ง แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่าง F และ r จากข้อมูลที่บันทึกไว้ เครื่องมือที่ใช้วัดต้องไว และคล่องตัวมาก เพราะแรงโน้มถ่วงมีค่าอ่อน นอกจากมวลจะมีค่ามาก เช่น แรงกระทำระหว่างดวงดาว หรือมีระยะนั้นระยะทาง r ต้องสั้น แต่ที่ระยะใกล้กันมากแรงอื่นที่มีค่ามากกว่า การโน้มถ่วงจะบดบังผลที่เกิดจากการโน้มถ่วงไว้เสีย สำหรับผลของการทดลองเราสรุปได้ว่า "แรงกระทำเนื่องจากการโน้มถ่วงเป็นแรงดึงดูดและแปรเปลี่ยนกลับกับกำลังสองของระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสอง"

นั่นคือ $f(r) \propto \frac{1}{r^2}$ เขียนเป็นสมการของแรงโน้มถ่วงได้ว่า

$$F = \gamma \frac{m m'}{r^2} \tag{1.1}$$

เมื่อค่าคงที่ γ ขึ้นกับหน่วยของ F, m, m' และ r จะพิจารณาค่า γ ได้จากการทดลองโดยการวัดแรง F ที่เกิดขึ้นระหว่างมวลที่ทราบค่า และระยะทาง r (รูป 1.4)



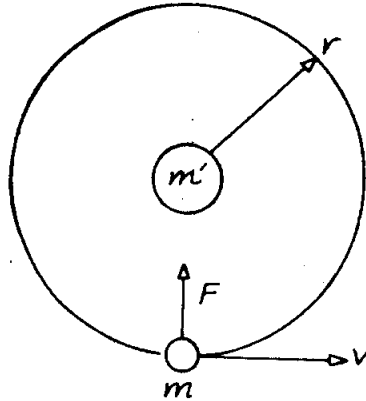
รูปที่ 1.4 Cavendish torsion balance

จะได้ค่า γ ในหน่วย MKSC เป็น

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \text{ (หรือ } \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{)}$$

เราจึงกล่าวถึงกฎของนิวตันเกี่ยวกับการโน้มถ่วง (Newton's law of universal gravitation) ได้ว่า

“แรงโน้มถ่วงระหว่างมวลคู่หนึ่ง เป็นแรงดึงดูดที่กระทำผ่านจุดศูนย์กลาง เป็นสัดส่วนกับมวลของวัตถุ และเป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสองของระยะทางระหว่างมวลทั้งสอง”



รูปที่ 1.5 แสดงอาการของมวล m ภายใต้การโน้มถ่วงของ m'

ในการพิจารณาสมการ (1.1) เราได้กล่าวไว้แล้วว่าแรงกระทำเนื่องจากการโน้มถ่วงระหว่างมวลคู่หนึ่งหาได้จากการทดลอง แต่ไม่จำเป็นที่จะกล่าวว่าแรงโน้มถ่วงเป็นแรงกระทำที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ตามกฎของเคปเลอร์ ความจริงนิวตันไม่ได้พิสูจน์โดยวิธีที่เราทำนี้ แต่ทำในทางกลับกัน อาศัยกฎของเคปเลอร์เพื่อเขียนสมการ (1.1) หาแรงกระทำระหว่างดาวเคราะห์ก่อน แล้วจึงนำไปใช้หาแรงกระทำระหว่างมวลคู่หนึ่ง

วิธีสร้างกฎของแรงของนิวตัน (Newton's derivation of the law of force) กฎของเคปเลอร์ข้อ 1 กล่าวว่าวงโคจรของดาวเคราะห์เป็นวงรี (ellipse) สำหรับกรณีพิเศษเมื่อโฟกัส 2 จุด เคลื่อนใกล้เข้ามาจนซ้อนเป็นจุดเดียวกัน วงรีนั้นก็จะเป็นวงกลม และในกรณีนี้ตามกฎข้อ 2 แรงกระทำจะมีทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะหาแรงสู่ศูนย์กลาง (centripetal force) เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมได้โดยใช้สมการ $F = \frac{mv^2}{r}$ โดยถือว่า

การเคลื่อนที่ของมวล m มี m' เป็นหลักอ้างอิง (รูป 1.5) ดังนั้นแรงกระทำต่อมวล m คือ

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

ที่ถูกต้องแล้วเราต้องแทนมวล m ด้วยปริมาณที่เรียกว่า รีดิวซ์แมส (reduced mass) ของระบบ (system) ที่มีมวล m และ m' ตามสมการ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ การแก้ปัญหานี้ไม่ทำให้ผิดหลักการเบื้องต้น จาก $v = \frac{2\pi r}{P}$ เมื่อ P เป็นเวลาการเคลื่อนที่ครบรอบ จะได้

$$F = \frac{4\pi^2 \mu r}{P^2}$$

สำหรับกรณีพิเศษของกฎข้อ 3 ของเคปเลอร์ ที่การเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีระยะทางเฉลี่ยระหว่างมวล m และ m' เป็นรัศมีของวงกลม r ทำให้เขียนกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์เป็น $P^2 = kr^3$

ดังนั้น $F = \frac{4\pi^2 \mu}{kr^2} \sim \frac{1}{r^2}$ ซึ่งพิสูจน์ได้ว่า ถ้าจะให้ถูกต้องตามกฎของ

เคปเลอร์แล้ว การโน้มถ่วง (gravitational interaction) จะต้อง

เป็นแรงผ่านศูนย์กลาง และเป็นสัดส่วนกลับกับระยะทางกำลังสอง

ตัวนิพจน์เองได้ตรวจสอบความถูกต้องของสมมติฐานของเขาโดยการเปรียบเทียบ

ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) ของดวงจันทร์

กับค่าความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกซึ่งใช้ g เป็นสัญลักษณ์และ

$$g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$$

ความเร่งสู่ศูนย์กลางของดวงจันทร์จะเป็น

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}$$

จากค่า $r = 3.84 \times 10^8$ เมตร และ $P = 2.36 \times 10^6$ วินาที จะได้

$$a = 2.72 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{g}{a} = 3602 \approx (60)^2$$

เนื่องจากรัศมีของโลก $R = 6.37 \times 10^6$ เมตร

$$\text{เราจะได้ } \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{3.84 \times 10^8}{6.37 \times 10^6}\right)^2 \approx (60)^2$$

ดังนั้น $\frac{g}{a} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ จากการคำนวณอย่างหยาบ ๆ พบว่าค่าความเร่งทั้งสอง จะเป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสองของระยะทางระหว่างจุดนั้นกับจุดศูนย์กลางของโลก

ตัวอย่างที่ 1.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งเนื่องจากการโน้มถ่วงและมวลของโลก และการคำนวณมวลของโลก

ลองพิจารณามวล m ที่อยู่บนผิวโลก ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของโลกถึงมวล m มีค่าเท่ากับรัศมีของโลก R ถ้ามวลของโลกเท่ากับ M จากสมการ 1.1 จะได้แรงกระทำบนวัตถุเป็น

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

แรงนี้เป็นแรงแบบที่เคยกำหนดไว้ว่าเป็นน้ำหนัก (weight) ของวัตถุ มีค่าเท่ากับ mg เมื่อ g เป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก ดังนั้น

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

ตัดตัวร่วม m ออก เราได้

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}$$

ผลก็คือจะได้ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกในเทอมของมวลและรัศมีของโลก มวลของวัตถุจะไม่ปรากฏในสมการ ดังนั้น (ถ้าเราไม่คิดความต้านทานของอากาศ) วัตถุทุกชนิดจะตกลงด้วยความเร่งเท่า ๆ กัน ซึ่งตรงกับปรากฏการณ์ที่ได้จากการสังเกต

ถ้าจะหามวลของโลก เราได้ $M = \frac{gR^2}{\gamma}$

โดยการแทนค่า

$$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$$

$$R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

จะได้

$$M = 5.98 \times 10^{24} \text{ กิโลกรัม}$$

ในตัวอย่างนี้เราใช้ระยะทางระหว่างมวล m กับจุดศูนย์กลางของโลก อีกนัยหนึ่งก็คือว่าแรงกระทำต่อมวล m มีค่าเหมือนกับมวลทั้งหมดของโลกรวมกันอยู่ที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งจะพิจารณาอย่างละเอียดในตอน 1.7

ตัวอย่างที่ 1.2 การคำนวณหามวลของดาวเคราะห์ที่มีบริวาร 1 ดวง
ถ้าดาวบริวารมีมวล m เคลื่อนที่รอบดาวเคราะห์มวล M เป็นวงกลมรัศมี r โดยมีเวลา
ของการเคลื่อนที่ครบรอบ P

แรงดึงดูดระหว่างดาวเคราะห์และดาวบริวารจะเป็น

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

แรงนี้จะมีค่าเป็น m เท่าของค่าความเร่งสู่ศูนย์กลางของดาวบริวารซึ่งมีค่าเป็น

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{P^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{4\pi^2 mr}{P^2} = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

ตัดตัวร่วม m ออกได้ค่า

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma P^2}$$

ลองใช้สมการนี้หามวลของโลกดูอีกครั้ง โดยใช้ข้อมูลดังต่อไปนี้

สำหรับดวงจันทร์ $r = 3.84 \times 10^8$ เมตร

และ $P = 2.36 \times 10^6$ เมตร

ถ้าตรงตามผลที่ได้ในตัวอย่าง 1.1 ย่อมเป็นการยืนยันว่าทฤษฎีที่กล่าวมาแล้วถูกต้อง
สูตรนี้ใช้หามวลของดวงอาทิตย์ ได้จากข้อมูลของดาวเคราะห์ต่าง ๆ ได้

1.3 มวลในการเคลื่อนที่และมวลในการโน้มถ่วง

เราได้เคยให้สิ่งกับ (concept) ของ inertial mass ในการคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยเรียกว่า "mass" เพียงคำเดียว ถือว่าใช้ได้ทั่วไปสำหรับอาการทุกชนิดไม่ว่าจะเป็นสสารหรืออนุภาคใด ๆ เช่น อิเล็กตรอน, โปรตอน, นิวตรอน หรือกลุ่มของอนุภาคเหล่านี้ อีกนัยหนึ่งก็คือในบทนี้เราจะพูดถึงแรงกระทำระหว่างกัน ที่เรียกความโน้มถ่วง เพื่อแสดงลักษณะเฉพาะตัวของมันก็จะได้ออกไว้ให้ชัดเจนว่าเป็น "gravitational charge" หรือ "gravitational mass" ซึ่งมีสัญลักษณ์ m_g แล้วเขียนลงในสมการ (1.1) ว่า

$$F = \gamma \frac{m_g m'_g}{r^2}$$

ถ้าเราจะถือว่า ความโน้มถ่วงเป็นสมบัติทั่วไปของสารทุกชนิด ก็จะพิจารณาได้ว่า gravitational mass เป็นสัดส่วนกับ inertial mass และดังนั้นอัตราส่วน

$$K = \frac{\text{gravitational mass, } m_g}{\text{inertial mass, } m}$$

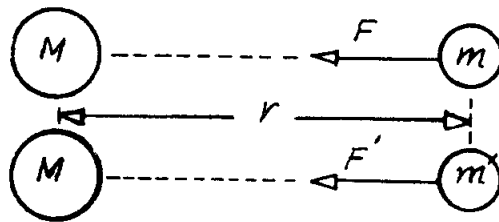
จะมีค่าคงที่สำหรับวัตถุทุกชนิด และอัตราส่วนนี้มีค่า = 1 เมื่อเราเลือกระบบของหน่วยได้ถูกต้อง ดังนั้นเราจึงสามารถใช้ gravitational mass กับ inertial mass เป็นค่าตัวเลขจำนวนเดียวกันได้ และมีคือค่าที่เราใช้ในการคำนวณหาค่าคงที่ γ ค่าคงที่ K ซึ่งเป็นปริมาณประเภทเดียวกับค่าคงที่ γ มีค่าให้เห็นจริงได้จากการทดลองกับวัตถุทุกชนิดด้วยความรอบคอบ และจะพบว่าเป็นสมมุติฐานที่มีเค้าความจริงที่ใช้พิสูจน์ได้ว่าวัตถุทุกชนิดใกล้ ๆ โลกจะตกลงมาด้วยความเร่งเท่ากัน และชี้ให้เห็นจริงว่า inertial และ gravitational mass เป็นค่าเดียวกันภายใต้สมมุติฐานอันนี้ ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกจะเป็น $g = \frac{\gamma M}{R^2}$ ดังได้พิจารณากันแล้วจากตัวอย่าง 1.1 และ g ไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุที่ตกลงมา ถ้า $\frac{m_g}{m}$ แตกต่างจาก 1 เราควรเขียน

$$g = \frac{m_g}{m} \frac{\gamma M}{R^2}$$

และถ้า m_g กับ m ไม่เป็นค่าอันเดียวกันแล้ว ความเร่ง g จะแตกต่างกันไป สำหรับวัตถุแต่ละชนิด ซึ่งค้านกับการทดลอง ดังนั้นต่อไปเราจะใช้คำว่า "มวล" เพียงคำเดียว ให้หมายถึง inertial และ gravitaional mass เพราะมีค่าไม่แตกต่างกัน

วิธีที่จะเปรียบเทียบมวลของวัตถุ 2 ก้อน มักใช้วัตถุก้อนที่ 3 เป็นหลัก พิจารณามวล m, m' วางอยู่ห่างจากมวล M ที่ใช้เป็นหลัก เป็นระยะทาง r เท่า ๆ กัน ตามรูปที่ 1.1 จากสมการ (1.1) แรงที่กระทำต่อมวล m และ m' จะเป็น

$$F = \frac{\gamma Mm}{r^2} \quad \text{และ} \quad F' = \frac{\gamma Mm'}{r^2}$$



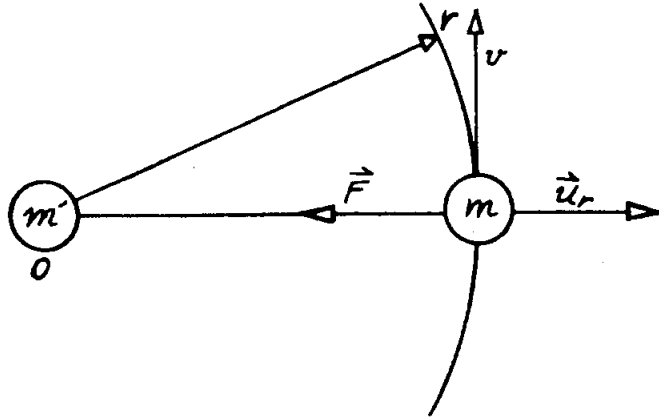
รูป 1.6 วิธีเปรียบเทียบมวล m, m' โดยอาศัยมวล M เป็นมวลที่สาม

อัตราส่วนของแรงทั้งสองเป็น $\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$ ดังนั้นถ้าเรามีวิธีการเปรียบเทียบแรงโดยไม่จำเป็นต้องวัดแต่ละแรงได้แล้ว ความสัมพันธ์ข้างต้นนี้ก็จะเป็วิธีที่ใช้เปรียบเทียบแล้ววัดมวลเหล่านั้นได้ นั่นคือ หลักของเครื่องชั่งที่เรานำมาวล M ซึ่งเป็นมวลของโลกเป็นหลัก เมื่อเครื่องชั่งได้ภาวะสมดุล แรง 2 แรงย่อมมีค่าเท่ากัน และมวลก็ควรจะมีค่าเท่ากันด้วย เราเลือกใช้วิธีที่กล่าวไว้ในเรื่องการวัดมวลโดยใช้เครื่องชั่ง

1.4 พลังงานศักย์ในการโน้มถ่วง

เนื่องจากการโน้มถ่วงที่คำนวณตามสมการ (1.1) มีทิศศูนย์กลางและขึ้นกับระยะทางเท่านั้น ซึ่งเป็นแรงประเภทที่เรียกว่า conservative force เราจึงจะพิจารณาพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วงไปพร้อม ๆ กัน

ถ้าให้ออร์จินของโคออดิเนตอยู่ที่ m' และพิจารณาเพียงแต่แรงที่กระทำบนมวล m (รูปที่ 1.7) เขียนด้วยเวกเตอร์ \vec{F} เพราะเป็นแรงดึงดูดจึงมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ \vec{r}



รูปที่ 1.7 ทิศทางของแรงโน้มถ่วงที่ m ตรงกันข้ามกับยูนิตเวกเตอร์ \vec{u}_r

$$\vec{r} = \vec{OA} = r \vec{u}_r$$

เมื่อ \vec{u}_r เป็นเวกเตอร์ มีความยาว 1 หน่วย เรียกยูนิตเวกเตอร์ ในทิศทาง OA และดังนั้นแทนที่จะใช้เป็นปริมาณสเกลาร์ดังสมการ (1.1) เราเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ว่า แรงกระทำบนมวล m

$$F = \frac{\gamma m m' \hat{r}}{r^2} \quad (1.2)$$

แรงนี้จะให้ความหมายว่ามีพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วงเกิดขึ้นกับมวล m และ m' ดังสมการต่อไปนี้เป็นพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วง ของระบบที่มีทั้งมวล m และ m' จะเป็น

$$E_p = -\frac{\gamma m m'}{r} \quad (1.3)$$

เมื่อ E_p คือ พลังงานศักย์ของการโน้มถ่วง ส่วนพลังงานรวมของระบบที่มีมวล m m' ซึ่งมีแรงโน้มถ่วงจะเป็น

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \gamma \frac{m m'}{r} \quad (1.4)$$

สำหรับระบบที่มีจำนวนอนุภาคมากกว่าสอง และมีแรงโน้มถ่วง (gravitational interaction) พลังงานรวมของระบบจะเป็น

$$E = \sum_{\text{ทุกอนุภาค}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{\text{ทุกคู่}} \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

พิสูจน์สมการ (1.3) แรงโน้มถ่วง (gravitational force) เท่ากับเกรเดียนท์ (gradient) ของพลังงานศักย์ และมีค่าเป็นลบนั้นคือ

$$F = -\text{grad } E_p \quad \text{หรือ} \quad F = -\frac{dE_p}{ds}$$

ในกรณีที่แรงกระทำเข้าสู่จุดศูนย์กลางและกระทำไปตามแนวรัศมี พลังงานศักย์จะขึ้นกับค่า r เท่านั้น

$$\text{ดังนั้น} \quad E_r = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$\text{จากสมการ (1.2)} \quad E_r = -\gamma \frac{m m'}{r^2} \quad \text{และ}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \gamma \frac{m m'}{r^2}$$

โดยอินทิเกรต กำหนดพลังงานศักย์ เป็น 0 ที่ระยะไกลมากจะได้

$$\int_0^{E_p} dE_p = \gamma m m' \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \gamma m m' \left(-\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r$$

ดังนั้นพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วงของระบบซึ่งประกอบด้วย มวล m และ m' จึงเป็น

$$E_p = - \gamma \frac{m m'}{r}$$

1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานและการเคลื่อนที่เป็นวงโคจร

พิจารณา 2 อนุภาคที่มีมวล m และ m' ในกรณีที่มี m' มีค่ามากกว่า m มาก ($m' \gg m$) ดังนั้นจึงถือได้ว่า m' จะมีตำแหน่งศูนย์กลางมวลของกลุ่มมวล (center of mass) ของระบบ และถือได้ว่า m' อยู่นิ่งในกรอบอ้างอิง C(C-frame of reference) นั่นคือ $v' = 0$ ดังนั้นสมการของพลังงานรวมของระบบเขียนได้ว่า

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m'}{r} \quad (1.5)$$

ถ้า m เคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เป็นวงกลมรอบ m' แรงที่กระทำบนมวล m เขียนได้ดังสมการ

$$F_N = \frac{m v^2}{r}$$

แทนค่า F_N ด้วยแรงโน้มถ่วง จากสมการ (1.1) จะได้

$$\frac{m v^2}{r} = \gamma \frac{m m'}{r^2}$$

คูณด้วย $\frac{1}{2}$ ทั้งสองข้าง ดังนั้น

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m m'}{r}$$

และสมการ (1.5) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$E = - \gamma \frac{m m'}{2r} \quad (1.6)$$

เห็นได้ว่า พลังงานรวมเป็นค่าลบ ทุกวงโคจรที่ครบวงรี (elliptical orbits) จะมีพลังงานรวมเป็นค่าลบ ($E < 0$) ถ้าเรากำหนดว่าพลังงานศักย์เป็นศูนย์เมื่อวัตถุอยู่ห่างกันเป็นอนันต์ ในวงโคจรปกติแล้วพลังงานจลน์ ไม่มากพอที่จะทำให้อนุภาคหลุดออกจากวงโคจรไปอยู่ถึงระยะอนันต์ ซึ่งหมายความว่า พลังงานจลน์เปลี่ยนแปลงไปเป็นพลังงานศักย์ และเอาชนะแรงโน้มถ่วง (gravitational attraction) ได้ในกรณีนี้จะเห็นได้จากสมการ (1.5)

เพราะที่ระยะอินฟินิตี้ เทอมที่สองในสมการนี้จะเป็นศูนย์และได้สมการรูปใหม่เป็น

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

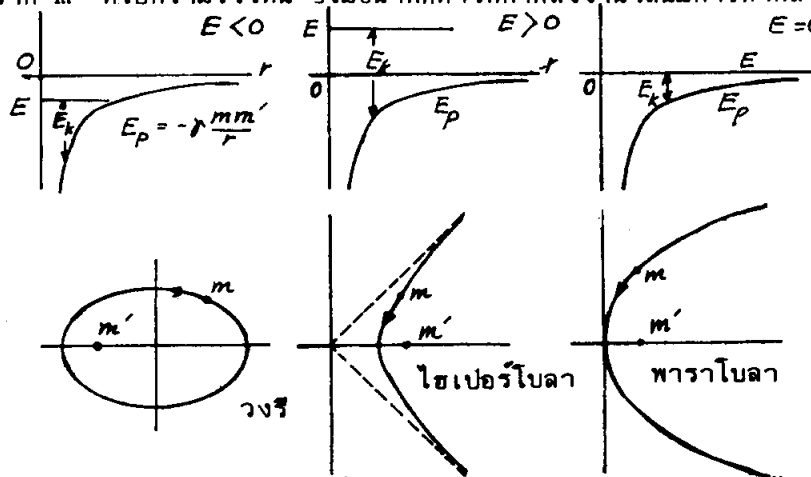
ถ้า E เป็นลบ สมการนี้จะเป็นจริงไม่ได้

แต่ถ้าพลังงานเป็นบวก ($E > 0$) อนุภาคจะเคลื่อนที่ไปถึงระยะอินฟินิตี้ แล้วยังเหลือพลังงานจลน์อีกบ้าง จากสมการ (1.5) ถ้าเราให้ $r = \infty$ และให้ความเร็วที่อินฟินิตี้เป็นพลังงานรวมที่ระยะนั้นจะเป็น

$$E = \frac{1}{2} mv_\infty^2 \quad \text{หรือ} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (1.7)$$

จากสมการนี้อาจจะพูดได้อีกนัยหนึ่งว่า เดิมมวล m ห่างจาก m' มาก เมื่อขยับ m ไปยัง m' ด้วยความเร็ว v_∞ เรียกว่า velocity of approach ได้พลังงานรวมซึ่งพิจารณาจากสมการ (1.7) มีความหมายว่า เมื่อ m เข้าใกล้ m' พลังงานศักย์ของมันจะลดลง เป็นค่าลบมากขึ้นและพลังงานจลน์จะเพิ่มขึ้นจนมีค่ามากที่สุดที่จุดที่สามารถเข้าใกล้ที่สุด ซึ่งขึ้นกับโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค แล้วจากนั้นมันจะเริ่มถอยห่างออกไปและพลังงานจลน์จะลดลงเป็นลำดับและถ้ายิ่งห่างมากขึ้น ก็จะมีความเร็วใกล้ v_∞ เข้าทุกที ทางเดินจะเป็นทางโค้งและพิสูจน์ได้ว่าเป็นไฮเปอร์โบล่า

ในกรณีพิเศษที่พลังงานรวมเป็นศูนย์ ($E = 0$) เป็นกรณีที่น่าสนใจ เพราะตามสมการ (1.7) แสดงว่า อนุภาคนำจะอยู่นิ่งที่ระยะอินฟินิตี้ ($v_\infty = 0$) แต่วงโคจรยังเป็นทางโค้งไฮเปอร์โบล่า แทนที่จะเป็นพาราโบล่า อากาการเช่นนี้จะตรงกับลักษณะของมวล m เมื่อถูกปล่อยที่ระยะไกลจาก m' ด้วยความเร็วต้น ซึ่งมีขนาดที่ทำให้ค่าพลังงานจลน์มีค่าเท่าพลังงานศักย์

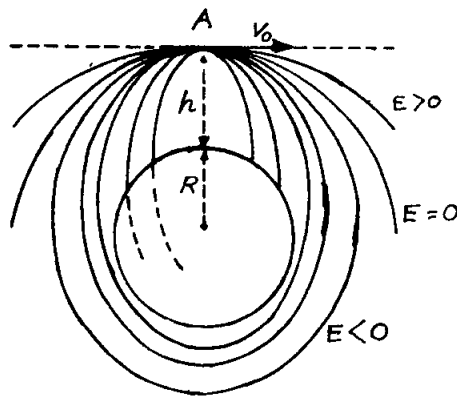


รูปที่ 1.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานรวมกับแนวทางการเคลื่อนที่ภายใต้กฎกำลังสองผกผัน

รูป 1.8 แสดงกรณีที่เป็นไปได้ 3 กรณีด้วยกัน ซึ่งให้เห็นว่าในแต่ละกรณีแสดงค่าพลังงานทั้งหมด, พลังงานศักย์, พลังงานจลน์ และแบบวงโคจรไว้พร้อม

จากผลดังกล่าวเป็นหลักฐานสำคัญยิ่งในการส่งดาวเทียมเข้าสู่วงโคจร สมมุติส่งดาวเทียมขึ้นไปจากโลก หลังจากขึ้นไปถึงระยะสูงสุด สมมุติให้เป็น h แล้วใช้กำลังขับเคลื่อนสุดท้ายที่จุด A ทำให้เกิดความเร็วตามแนวระดับ $= v_0$ (รูป 1.9) พลังงานรวมของดาวเทียมที่จุด A จะมีค่าตามสมการ

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R + h}$$



รูปที่ 1.9 รูปแสดงทางเดินของอนุภาคเมื่อขว้างออกไป ด้วยความเร็ว v_0 ที่ระดับสูง h ตามแนวระดับ

วงโคจรจะเป็นรูปวงรี, พาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลาขึ้นกับค่าของ E ว่าจะเป็นลบ ศูนย์หรือบวก ในทุกกรณีถือว่าจุดศูนย์กลางของโลกเป็นจุดโฟกัสของทางเคลื่อนที่ ถ้าพลังงานน้อยเกินไปวงโคจรจะเป็นรูปวงรีและจะมีแนวตัดกับผิวโลก ดาวเทียมจะตก แต่ถ้า E มีค่ามากพอที่จะคงเคลื่อนที่เป็นวงโคจรปิด หรือหนีไปพ้นจากโลกแล้วแต่ค่า v_0 และ h

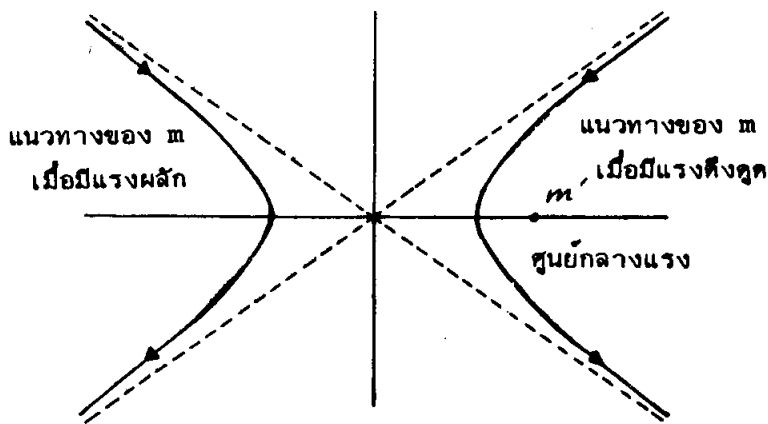
เหตุผลเช่นเดียวกันนี้ใช้อธิบายทางโคจรของดาวบริวาร เช่นดวงจันทร์ได้ และที่เห็นชัดก็คือ ดาวที่มีวงโคจรร่วมระบบกัน จะต้องมียุทธศาสตร์เป็นค่าบวก โดยทั่วไปแล้วเราต้องการเครื่องขับเคลื่อนเพื่อปรับทางเดินของดาวเทียมหลังจากปล่อยขึ้นแล้ว

ควรทราบว่า ไฮเปอร์โบลามี 2 ส่วนที่เหมือนกัน และจากการคำนวณแรงดึงดูดแบบกำลังสองผกผัน (inverse square attractive force) แสดงค่าเพียงส่วนเดียว รอบจุดซึ่งกำหนดเป็นศูนย์กลางของการดึงดูด ที่ได้อธิบายไปแล้วได้แก่ส่วนขวาตามรูป 1.10 ถ้าแรงผลัก มีสมการของแรงเป็น $F_r = +\frac{C}{r^2}$ แล้ว วงโคจรจะเหมือนกับส่วนซ้ายของรูป 1.10 ในกรณีของแรงผลักพลังงานศักย์จะเป็น

$$E_p = +\frac{C}{r}$$

และเป็นค่าบวก ดังนั้น พลังงานรวมจะมีค่า $E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{C}{r}$

และเป็นบวกเสมอ ซึ่งจะไม่ปรากฏเป็นวงโคจรครบรอบแต่ปรากฏเป็นทางโคจร

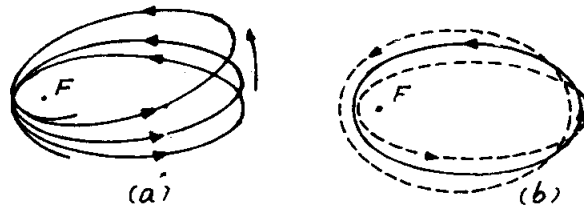


รูปที่ 1.10

การเบนจากรนาบโคจร

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นแนวทางให้พิจารณารายละเอียดของการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าเราถือว่าการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ ไม่ได้รับอิทธิพลจากดาวเคราะห์อื่น ๆ และเทพ่ากฟ้าใด ๆ หรือพูดอีกนัยหนึ่งก็คือ วงโคจรของโลกหรือดาวเคราะห์อื่น ๆ ควรจะเป็นวงรี (ellipse) แต่ ถ้าไม่มีแรงอื่นนอกจากแรงจากดวงอาทิตย์ที่กระทำต่อดาวเคราะห์เหล่านั้น อย่างไรก็ตามก็ดาวเคราะห์อื่น ๆ ก็ยังคงอยู่จึงทำให้วงจรของ

ดาวเคราะห์ถูกรบกวน เราสามารถคำนวณการรบกวนได้อย่างถูกต้อง โดยอาศัยเทคนิคพิเศษซึ่งเป็นวิทยาศาสตร์สาขาหนึ่งเรียก celestial mechanics การรบกวนนี้เราแยกได้เป็น 2 ลักษณะ ลักษณะหนึ่ง ก็คือทางเดินของดาวเคราะห์ที่เป็นวงรีแต่ไม่เป็นวงปิดโดยที่แกนประธาน (major axis) ของวงรี (ellipse) หมุนอย่างช้ารอบจุดโฟกัสซึ่งหมายถึงตำแหน่งของดวงอาทิตย์ ลักษณะนี้เรียก advance of perihelion (รูป 1.11 a) อีกลักษณะหนึ่ง ก็คือ การเปลี่ยนแปลง eccentricity ของวงรี ที่เป็นจังหวะ หมายถึงเพิ่มขึ้นและลดลงจากค่าเฉลี่ยของมันในช่วงเวลาที่เท่า ๆ กัน ดังแสดงในรูป 1.11 (b) การเปลี่ยนแปลงนี้เกิดขึ้นอย่างช้า ๆ ในกรณีของโลก ช่วงเวลานี้มีขนาดเป็นตัวเลขถึง 10^5 ปี (ความยาวของวง (arc) เปลี่ยนไปประมาณ 21 ฟุต ต่อศตวรรษสำหรับอาการของ perihelion) แต่ถึงกระนั้นมันจะยังทำให้เกิดปรากฏการณ์ที่สังเกตเห็นได้ โดยเฉพาะในการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ของสภาพดินฟ้าอากาศของโลก, การเปลี่ยนแปลงนี้ นักภูมิศาสตร์ผู้ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับชั้นต่าง ๆ ของเปลือกโลก เป็นผู้สังเกตพบ



รูปที่ 1.11 การเบนจากระนาบโคจร (ขยายเกินความจริงเพื่อความเข้าใจ)
(a) แกนวงรีหมุน (b) รูปวงเปลี่ยนแปลงกลับไปมา

ตัวอย่างที่ 1.3 หาค่าความเร็วต่ำสุดของจรวดที่เร็วพอเพื่อออกไปพ้นโลก และเข้าสู่ห้วงอวกาศ (escape velocity)

เพื่อให้วัตถุไปถึงอินฟินิตี้ได้ พลังงานทั้งหมดจะต้องเป็นศูนย์หรือเป็นบวก และเป็นที่แน่ชัดว่า ความเร็วจะต้องเท่ากับความเร็วเพื่อให้พลังงานรวมเป็นศูนย์เป็นอย่างน้อย ดังนั้นจากสมการ (1.5) ซึ่งพลังงานเท่ากับศูนย์และเรียก M ว่าเป็นมวลของโลก, R เป็นรัศมี และ v_e เป็นความเร็วหลุดพ้น (escape velocity) ของจรวด เราเขียนได้ว่า

$$E = \frac{1}{2} m v_e^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0$$

ซึ่งจะให้ค่าความสัมพันธ์ระหว่าง v_e และ R ที่สถานีส่งจรวด ดังนั้นความเร็วหลุดพ้นจากโลกจึงเป็น

$$v_e = \sqrt{2\gamma M/R} = 1.13 \times 10^4 \text{ ms}^{-1} \quad (1.8)$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ 40,700 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือประมาณ 25,280 ไมล์ต่อชั่วโมง จะเห็นได้ว่าความเร็วหลุดพ้นไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุ อย่างไรก็ตามแรงขับเคลื่อนที่ต้องการเพื่อเร่งวัตถุจนกระทั่งมีความเร็วเท่าความเร็วหลุดพ้น จะต้องขึ้นกับมวลของวัตถุด้วย และนี่เป็นเหตุผลที่อธิบายว่าทำไมจรวดหนัก ๆ และดาวเทียมดวงใหญ่จึงต้องการเครื่องขับเคลื่อนกำลังสูงมาก

เมื่อถึงวัตถุออกไปจากโลกด้วยความเร็ว v_e ตามสมการ (1.8) จะมีความเร็วเป็นศูนย์เมื่อถึงอินฟินิตี้ ถ้าความเร็วมากกว่า v_e วัตถุจะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วค่าหนึ่งที่ยินฟินิตี้ ถ้าใช้ความเร็วน้อยกว่า v_e วัตถุจะกลับตกลงมายังพื้นโลกอีก นอกเสียจากว่า วัตถุนั้นจะถูกส่งเข้าสู่วงโคจรโดยจรวดก่อนถัดไป และทิศทางของความเร็วเปลี่ยนแปลง ดังอธิบายได้ตามรูป (1.9)

สิ่งสำคัญ (concept) ของความเร็วหลุดพ้น ยังมีประโยชน์ในการพิจารณาแก๊สที่หลุดพ้นจากบรรยากาศของโลก ถ้าเราถือว่าแก๊สที่ประกอบเป็นบรรยากาศนั้นอยู่ในสภาพสมดุลทางความร้อน ค่า v_{rms} (root mean square velocity) ของโมเลกุลมีค่าตามสมการต่อไปนี้

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (1.9)$$

v_{rms} ของแก๊สที่พบในบรรยากาศของโลก ที่อุณหภูมิเฉลี่ยของ

ไฮโดรเจน คือ 1908 ms^{-1}	ออกซิเจน คือ 477 ms^{-1}
ฮีเลียม คือ 1350 ms^{-1}	ไนโตรเจน คือ 510 ms^{-1}
คาร์บอนไดออกไซด์ คือ 407 ms^{-1}	

แก๊สทุกชนิดมี v_{rms} น้อยกว่าค่า v_e มาก ดังนั้นเราจึงอาจสรุปได้ว่า ไม่มีโมเลกุลของแก๊สใด ๆ เอาชนะแรงดึงดูดของโลก และหนีออกไปพ้นโลกได้ ซึ่งเป็นการสรุปที่ยังไม่ถูกต้องนัก

ค่าความเร็ว v_{rms} เป็นค่าเฉลี่ยของความเร็ว หมายความว่า ยังมีโมเลกุลอีกจำนวนหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าหรือน้อยกว่า v_{rms} ดังได้เคยทราบมาแล้ว แม้ว่า v_{rms} น้อยกว่า v_e แต่ก็ยังมีโมเลกุลจำนวนหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วซึ่งเท่ากับหรือมากกว่า v_e ได้ และโมเลกุลเหล่านี้จะหนีไปจากโลก โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าโมเลกุลเหล่านี้อยู่ในชั้นบรรยากาศส่วนบน จากตัวเลขที่คำนวณมาแล้ว เราจะเห็นได้ว่ามีผลต่อแก๊สเบามากกว่าแก๊สหนักและเป็น

เหตุผลที่ว่า ทำไมในบรรยากาศของเราจึงมีไฮโดรเจนและฮีเลียมน้อย จากการคาดคะเนโดยอาศัยแรงโน้มถ่วงว่า ไฮโดรเจนหนีออกไปพ้นโลก ด้วยอัตราประมาณ 1.3×10^{22} อะตอมต่อวินาที ซึ่งเทียบเป็นค่าประมาณ 600 กิโลกรัมต่อปี ตัวเลขนี้มีใช้จำนวนแท้จริงที่โลกสูญเสียไฮโดรเจน จำนวนที่เสียไปทั้งหมดอาจจะแตกต่างกันออกไปซึ่งแล้วแต่กระบวนการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

สำหรับดาวพุธ (Mercury) ค่าความเร็วหลุดพ้น (escape velocity) น้อยกว่าของโลกมากดังนั้นจึงสันนิษฐานได้ว่า ดาวพุธไม่มีบรรยากาศเหลือห่อหุ้มอยู่เลย เช่นเดียวกับดวงจันทร์ ส่วนดาวศุกร์ (Venus) มีความเร็วหลุดพ้นเท่า ๆ กับของโลก ของดาวอังคาร (Mar) เป็น $\frac{1}{6}$ เท่าของโลก ดังนั้นบรรยากาศจึงยังเหลืออยู่บ้าง แต่ก็ยังเป็นเพียงส่วนน้อย ความจริงความดันบรรยากาศบนดาวอังคารน้อยกว่าบนโลกมาก ส่วนดาวเคราะห์อื่น ๆ นั้น ความเร็วหลุดพ้นมากกว่าของโลก ดังนั้นมันจึงยังเหลือบรรยากาศดั้งเดิมของมันอยู่ แต่อย่างไรก็ดี ส่วนประกอบของบรรยากาศของดาวเคราะห์นั้นก็แตกต่างจากของโลกด้วย

ตัวอย่างที่ 1.4 ความเร็วที่วัตถุตกกระทบผิวโลกเมื่อปล่อยลงมาจากตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลกเป็นระยะทาง r ความเร็วเดิมของวัตถุเท่ากับ v ศูนย์จึงมีพลังงานรวมทั้งสิ้นเป็น $E = -\gamma \frac{mM}{r}$

เมื่อ m เป็นมวลของวัตถุ, M เป็นมวลของโลกซึ่งมีรัศมี R

ให้ v เป็นความเร็วเมื่อวัตถุตกถึงผิวโลก

ที่ผิวโลกมีพลังงานรวมทั้งสิ้นเป็น $E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{R}$

จากหลักการอนุรักษ์ของพลังงาน (conservation of energy) และละทิ้งความเสียดทานเนื่องจากอากาศ โดยถือว่ามิต้านน้อย จะได้

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{r}$$

หาค่า v^2 ได้ $v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

หรืออาจจะใช้ค่าที่ได้จากตัวอย่าง 1.1 ซึ่งมี $g = \gamma M/R^2$

เราจะได้ $v^2 = 2R^2 g \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

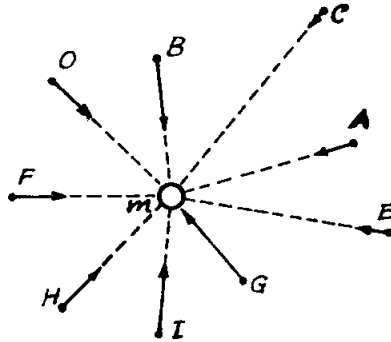
สมการนี้ยังใช้หาค่าความสูง r ที่วัตถุขึ้นได้เมื่อยิงจากผิวโลกด้วยความเร็ว v ถ้าปล่อยวัตถุลงมาจากระยะทางไกลมาก ๆ ค่า $\frac{1}{r}$ จะน้อยมากเมื่อเทียบกับ $\frac{1}{R}$ เราจะได้

$$v_{\infty} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 1.13 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความเร็วหลุดพ้น ที่คำนวณได้ตามสมการ(1.8) ไม่เป็นที่น่าประหลาดใจที่ได้ค่าความเร็วเป็นตัวเลขเดียวกัน เพราะปัญหานี้เป็นบทกลับของปัญหาในตัวอย่าง 1.3 ค่าตัวเลขที่ได้เป็นค่าประมาณของความเร็วของพวกสะเก็ดดาว (meteorite) ที่ตกกระทบผิวโลก

1.6 สนามของการโน้มถ่วง

สมมุติวางมวล m และ m' ไว้ใกล้ ๆ กัน (รูป 1.12) เนื่องจากแรงโน้มถ่วง



รูปที่ 1.12 สนามของความโน้มถ่วงเกิดขึ้นจากจุดมวล m

(gravitational interaction) ระหว่าง m , m' m' จะได้รับแรงโน้มถ่วงที่เกิดขึ้นจาก m ไม่ว่าจะวางมวล m' ไว้ที่ใด เขียนได้โดยใช้สมการ (1.2) ว่า

$$\vec{F} = -\frac{\gamma mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

และแต่ละตำแหน่งของ m' , มวล m จะได้รับแรงที่มีค่าเท่ากับที่ m' ได้รับแต่ทิศทางตรงข้าม อย่างไรก็ตามเราจะสนใจแต่เพียงว่า จะมีอะไรเกิดขึ้นแก่ m'

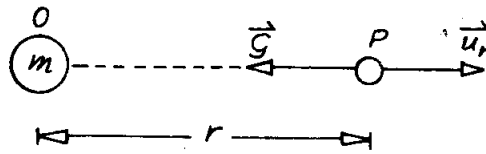
พูดได้ง่าย ๆ ว่ามวล m ทำให้เกิดสถานะทางฟิสิกส์ที่เราเรียก สนามของการโน้มถ่วง (gravitational field) ในบริเวณนั้น และเราจะทราบได้จากแรงที่มวล m ดึงจุดมวลอื่นเช่นมวล m' ให้เข้าสู่บริเวณนั้น ไม่ว่าจะเป็นในบริเวณที่ว่าง (free space) รอบ m หรือแม้ว่าเราจะไม่ใช้ m' เป็นตัวทดลองเพื่อหาสนามก็ตามก็ยังคงมีสนามอยู่ เพียงแต่เรามองไม่เห็น เพราะเราจะรู้สึกว่ามีสนามของการโน้มถ่วงได้ก็เพียงเมื่อเรานำมวลอีกก้อนหนึ่งเข้าไปเท่านั้น

ความเข้มของสนามของการโน้มถ่วง \vec{g} ที่จุด P ที่เกิดขึ้นโดยมวล m มีค่าเท่าแรงกระทำต่อมวลหนึ่งหน่วยที่จุด P ดังนั้น

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\gamma m}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{สนามของการโน้มถ่วง}) \quad (1.10)$$

สนามของการโน้มถ่วง \vec{G} จะมีทิศทางตรงข้ามกับยูนิตเวกเตอร์ \vec{u}_r ซึ่งมีทิศทางจากมวลที่ทำให้เกิดสนามไปยังจุดที่ต้องการทราบความเข้มสนาม หรือพูดอีกนัยหนึ่งก็คือสนามของการโน้มถ่วงมีทิศไปสู่มวลที่ทำให้เกิดสนามนั้น

ในสมการ (1.10) ใช้คำนวณความเข้มของสนามของการโน้มถ่วงที่แต่ละจุดในบริเวณรอบ ๆ m และมีระยะทาง r ห่างจากจุด o ซึ่งมีมวล m วางอยู่ (รูปที่ 1.13) เป็นปริมาณเวกเตอร์ ส่วนแรงโน้มถ่วงกระทำบนมวลใด ๆ ในบริเวณนั้น จะมีค่าเท่าผลคูณระหว่างมวล



รูปที่ 1.13 ความเข้มของสนามของการโน้มถ่วงที่จุด p อันเนื่องมาจากจุดมวล m

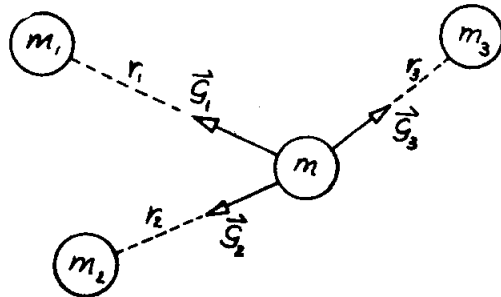
ซึ่งอยู่ในสนามกับค่า \vec{G} ณ ที่นั้น นั่นคือ

$$\vec{F} = (\text{มวลของวัตถุ}) \times \vec{G}$$

จากค่าจำกัดความเราจะเห็นได้ว่า ความเข้มของสนามของการโน้มถ่วงมีหน่วยเป็น Hkg^{-1} หรือ ms^{-2} และอาจเทียบได้กับความเร่ง ลองเปรียบเทียบสมการ (1.10) กับสมการ $\vec{W} = m\vec{g}$ จะได้

$$\vec{g} = \frac{\vec{W}}{m}$$

เราต้องจำไว้ว่าความเร่งของการโน้มถ่วงคือความเข้มของสนามของการโน้มถ่วงที่ผิวโลก



รูปที่ 1.14 ผลรวมของสนามของการโน้มถ่วงที่จุด p จากจุดมวลหลายจุด

สมมติว่าขณะนี้เรามีมวลจำนวนมากให้เป็น m_1, m_2, m_3, \dots ดังรูป (1.14) แต่ละมวลก็จะทำให้เกิดสนามของการโน้มถ่วงของมันเอง แรงทั้งหมดที่กระทำบนวัตถุมวล m ที่จุด P จะเป็น

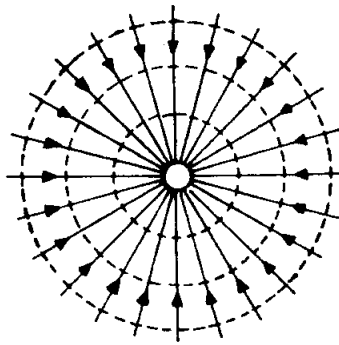
$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \vec{g}_1 + m \vec{g}_2 + m \vec{g}_3 + \dots \\ &= m(\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots) \quad (1.11)\end{aligned}$$

ซึ่ง $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \dots$ คือสนามของการโน้มถ่วงที่เกิดขึ้นโดยแต่ละมวลที่จุด P ที่คำนวณได้ตามสมการ (1.10) ผลรวมของสนามของการโน้มถ่วงที่จุด P จะเป็น

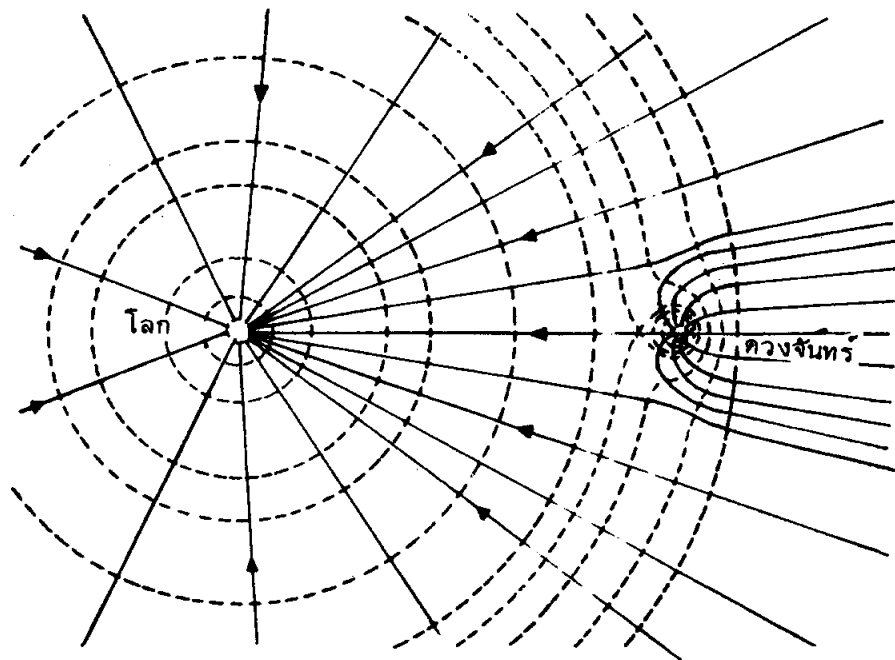
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots$$

ดังนั้น $\vec{F} = m\vec{g}$ หรือ $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ (1.12)

สนามของการโน้มถ่วง เขียนแทนได้ด้วยเส้นแรง (line of force) ขณะที่ทิศทางของเส้นแรงแต่ละเส้นเป็นเส้นสัมผัสของเส้นที่ผ่านจุดที่เรากำลังพิจารณานั้น ความหนาแน่นของเส้นแรงเป็นสัดส่วนกับความเข้มของสนาม รูป 1.15 แสดงลักษณะสนามที่เกิดจากมวลเดี่ยวหรือจุดมวล เส้นแรงจะพุ่งออกตามแนวรัศมี รูป 1.16 แสดงสนามที่เกิดจากสองมวลที่ไม่เท่ากัน เช่น โลกและดวงจันทร์ ดังนั้นเส้นแรงจึงไม่อยู่ในแนวรัศมี และที่จุด A ค่าความเข้มของสนามเป็นศูนย์



รูปที่ 1.15 เส้นแรงและพื้นผิวศักดาเท่าของสนามแห่งความโน้มถ่วงเนื่องจากจุดมวล



รูปที่ 1.16 เส้นแรงและพื้นผิวศักดาเท่าของสนามแห่งความโน้มถ่วงเนื่องจากโลกและดวงจันทร์

1.7 ศักดาของการโน้มถ่วง

ศักดาของการโน้มถ่วงที่จุดใดหมายถึงพลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยมวลที่วางอยู่ในบริเวณที่มีสนามของการโน้มถ่วง (gravitational field) ดังนั้นที่จุดใด ๆ ในสนามของการโน้มถ่วง มวล m ซึ่งมีพลังงานศักย์ E_p จะมีศักดาของการโน้มถ่วงเป็น

$$V = \frac{E_p}{m} \quad \text{หรือ} \quad E_p = mV$$

หน่วยของศักดาของการโน้มถ่วง ก็คือ Jkg^{-1} หรือ m^2s^{-2} จากสมการ (1.3) ซึ่งเขียนค่าของพลังงานศักย์ได้เป็น

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

ถ้าหารด้วย m' จะเห็นว่าศักดาของการโน้มถ่วง ที่จุดห่างจากมวล m เป็นระยะทาง r คือ

$$V = - \frac{\gamma m}{r} \quad (1.13)$$

แทนที่จะเป็นเพียงอนุภาคเดียว เราอาจมีหลาย ๆ มวล ดังในรูป 1.14 ศักดาของการโน้มถ่วง V ที่ P จะเป็น ผลบวกทางสเกลาร์ ดังนี้

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots \\ \text{หรือ} \quad V &= -\gamma \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right) \\ &= -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i} \end{aligned} \quad (1.14)$$

เราเรียก F ว่าแรงโน้มถ่วง (gravitational force) ที่กระทำบนมวล m สัมพันธ์กับพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วง (gravitational potential energy) E_p ของมวลดังสมการ

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p \quad \text{หรือ} \quad F_s = - \frac{dE}{ds}$$

$$\text{แต่} \quad \vec{F} = m \vec{G} \quad \text{และ} \quad E_p = mV$$

ดังนั้น เราอาจเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสนามของความโน้มถ่วง (gravitational field) และศักดาของการโน้มถ่วง V ได้ดังนี้

$$\vec{G} = - \text{grad } V \quad G_s = - \frac{dV}{ds} \quad (1.15)$$

ซึ่ง G_s เป็นองค์ประกอบของ \vec{G} ในแนวเดียวกันกับการขจัด ds สมการ 1.15 แสดงว่า

สนามของการโน้มถ่วงมีค่าเป็นลบ กลับกันกับเกรเดียนท์ของศักดาของการโน้มถ่วง

เมื่อสนามมีทิศทางออกในแนวรัศมี (radial) เช่นในกรณีของมวลขนาดเล็กจนถึงได้ว่าเป็นจุดมวล V จะขึ้นกับ r เท่านั้น และ $\vec{G} = - \frac{dV}{dr}$ เขียนในรูปเวกเตอร์เป็น

$$\vec{G} = - \vec{u}_r \frac{dV}{dr} \quad (1.16)$$

โดยการแทนสมการ (1.13), $V = -\gamma \frac{m}{r}$ ลงในสมการ (1.16) เราได้สมการ (1.10)
 $\mathcal{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$ ซึ่งเป็นสนามของการโน้มถ่วงของจุดมวล

ถ้าอนุภาคมีมวล m เคลื่อนที่จากจุด P_1 ไปยัง P_2 ตามแนวทางใด ๆ สนามของการโน้มถ่วง (gravitational field) ได้ทำงานไปเป็นจำนวน

$$W = E_{P_1} - E_{P_2} = m (V_1 - V_2) \quad (1.17)$$

$V_1 - V_2$ เรียก ความต่างศักย์ของการโน้มถ่วง (gravitational potential difference)

ถ้าลากเส้นผ่านจุดซึ่งมีค่าศักดาของการโน้มถ่วงเท่ากัน เราจะได้พื้นที่เป็นชั้นเรียงกัน เรียกผิวพื้นศักดาเท่า (equipotential surfaces) เช่น ในกรณีของอนุภาคเดี่ยว เมื่อได้ค่าศักดาตั้งสมการ 1.13 แล้ว ผิวพื้นศักดาเท่าเป็นรูปทรงกลมมีรัศมี r ที่แสดงไว้ในรูป 1.15 เป็นเส้นประ เช่นเดียวกับรูป 1.16 ผิวพื้นศักดาเท่าก็ยังคงใช้เส้นประ จะสังเกตได้ว่าในแต่ละกรณี ผิวพื้นศักดาเท่าตั้งฉากกับแนวเส้นแรง จะพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

ลองเลือกจุด 2 จุด ใกล้เคียง ๆ กับผิวพื้นศักดาเท่าผิวเดียวกัน เมื่อเราเคลื่อนอนุภาคจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง พลังงานศักย์จะไม่เปลี่ยนแปลง เพราะ 2 จุดนั้นมีศักดาของการโน้มถ่วงเท่ากัน และดังนั้นงานที่ทำโดยสนามของการโน้มถ่วง (gravitational field) ต่อวัตถุจะเป็นศูนย์ จากความหมายของงานกล่าวไว้ว่า เมื่องานเป็นศูนย์แสดงว่าแรงมีแนวตั้งฉากกับการขจัด ดังนั้นกล่าวได้ว่า "ทิศทางของสนามของการโน้มถ่วง ตั้งฉากกับผิวพื้นศักดาเท่า" หมายความว่า ถ้าเรารู้แนวแรงเราก็สามารถจะเขียนผิวพื้นศักดาเท่าได้เช่นกัน

1.8 สนามของการโน้มถ่วงอันเนื่องมาจากวัตถุทรงกลม

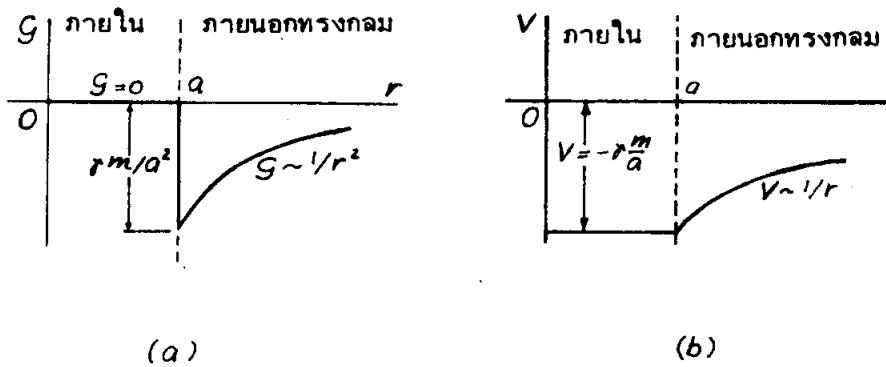
ทุกสูตรที่กล่าวมาแล้วจนถึงบัดนี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับจุดมวลเท่านั้น เมื่อเราใช้ในหัวข้อ 1.5 เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์นั้น เราได้ตั้งข้อกำหนดไว้ว่า ขนาดดาวเคราะห์เล็กมาก เมื่อเทียบกับระยะระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์นั้น และถ้าหากขนาดของมันมีส่วนเกี่ยวข้องจริง ก็อาจจะหาได้โดยใช้หลักเรขาคณิต แล้วนำไปใช้ในสมการ 1.1 ($F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$) ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งของการโน้มถ่วง g ของมวลและรัศมีของโลกในตัวอย่าง 1.1 เรายังคงใช้สมการ 1.1 โดยมีได้คำนึงถึงขนาดและระยะของวัตถุ ลักษณะทางเรขาคณิตก็ก่อปัญหาให้แก่นิวตันจนต้องรื้อการประกาศใช้

กฎแห่งการโน้มถ่วงไว้ถึงประมาณ 20 ปี จนกระทั่งได้พบคำอธิบายที่ถูกต้อง

ครั้งแรกลองพิจารณามวลซึ่งกระจายอย่างสม่ำเสมอบนทรงกลมกลวง (spherical shell) จะแสดงว่าสนามของการโน้มถ่วง และศักดาที่จุดภายนอกทรงกลมซึ่งมีมวลสม่ำเสมอ จะเหมือนกับสนามของการโน้มถ่วงและศักดาของอนุภาคที่มีมวลเท่ากัน และเสมือนว่ามวลไปรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมนั้น ทุกจุดภายในของทรงกลมกลวงมีสนามค่าเป็นศูนย์ และ ศักดามีค่าคงที่ นั่นคือ ถ้า a เป็นรัศมีของทรงกลมกลวง และมีมวล m สนามของการโน้มถ่วง และศักดาที่เกิดขึ้นที่ระยะ r จากจุดศูนย์กลางจะเป็น

$$\vec{g} = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \quad v = -\frac{\gamma m}{r} \quad r > a \quad (1.18)$$

$$\vec{g} = 0, \quad v = -\frac{\gamma m}{a} \quad r < a \quad (1.19)$$



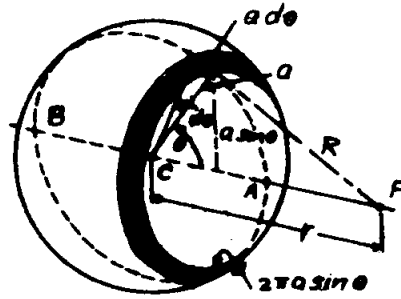
รูป 1.17 การแปรค่าของ G และ V เมื่อเทียบกับระยะทางนับจากศูนย์กลางของทรงกลม

รูปที่ 1.17 แสดงค่าแปรเปลี่ยนของ G และ V กับระยะทางจากจุดกึ่งกลางของทรงกลมกลวง จะเห็นได้ว่า ในตำแหน่งต่าง ๆ กันนับจากจุดกึ่งกลางออกมาจนถึงขอบของทรงกลมค่าของศักดาไม่เปลี่ยนแปลง และที่ผิวของทรงกลม ศักดาไม่เปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันในขณะที่สนามจะเปลี่ยนจากศูนย์เป็น $-\gamma \frac{m}{a^2}$ ทั้งนี้ พบได้ว่าศักดาของการโน้มถ่วงภายในทรงกลมกลวงจะคงที่และเท่ากับค่าที่ผิวด้วย

พิสูจน์ความสัมพันธ์ตามสมการ (1.18) และสมการ (1.19)

ให้รัศมีของทรงกลมกลางเป็น a และ C เป็นจุดศูนย์กลาง r เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง C ถึงจุด P เราจะหาความเข้มของสนามของการโน้มถ่วงที่ P

ครั้งแรกพิจารณาดาวที่ P อยู่ภายนอกทรงกลม ดังรูป 1.18



รูปที่ 1.18 รูปประกอบการคำนวณหาภายนอกมวลที่กระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอ

แบ่งผิวของทรงกลมเป็นวงแหวนแคบ ๆ วงแหวนทุก ๆ วงจะมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง AB รัศมีของแต่ละวงเป็น $a \sin \theta$ และความกว้างเป็น $a d\theta$ ดังนั้นพื้นที่ของวงแหวนนี้จะเป็น

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} &= \text{ความยาว} \times \text{ความกว้าง} \\ &= (2 \pi a \sin \theta) (a d\theta) \\ &= 2 \pi a^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ถ้า m เป็นมวลทั้งหมดที่กระจายอย่างสม่ำเสมอบนผิวของทรงกลม ดังนั้น มวลต่อหน่วยพื้นที่ เป็น $m/4\pi a^2$ และมวลของแหวนนี้จะเป็น

$$\frac{m}{4\pi a^2} (2\pi a^2 \sin \theta d\theta) = \frac{1}{2} m \sin \theta d\theta$$

ทุก ๆ จุดบนวงแหวนห่างจาก P เป็นระยะ R เท่ากัน ดังนั้นเมื่อใช้สมการ 1.14

เราจึงได้ศักดาที่เกิดขึ้นที่ P โดยวงแหวนใดวงหนึ่งเป็น

$$dV = -\gamma \left(\frac{\frac{1}{2} m \sin\theta d\theta}{R} \right) = -\frac{\gamma m}{2R} \sin\theta d\theta$$

จากรูป 1.18 ใช้กฎของโคไซน์ (law of cosine) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta$$

จากการดิฟเฟอเรนเชียล

$$2R dR = 2ar \sin\theta d\theta \text{ หรือ}$$

$$\sin\theta d\theta = \frac{RdR}{ar}$$

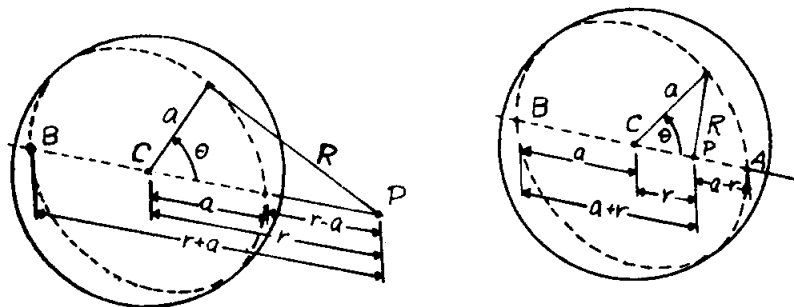
แทนค่าในสมการของ dV ข้างต้น เราจะได้

$$dV = -\gamma \frac{m}{2ar} dR$$

เพื่อให้ได้ศักดาของการโน้มถ่วงทั้งหมด เราต้องหาผลรวมของ V เนื่องจากทุกวง ตลอดทั่วทั้งผิวของทรงกลม ค่าจำกัด (limit) ของ R เมื่อจุด P อยู่นอกทรงกลมเป็น $r + a$ และ $r - a$ ซึ่งตรงกับจุด B และ A ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 1.19(a) ดังนั้น

$$V = -\frac{\gamma m}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{\gamma m}{2ar} (2a) = -\frac{\gamma m}{r}, r > a$$

เป็นศักดาที่จุดที่อยู่ข้างนอกทรงกลมกลวงที่มีเนื้อสม่ำเสมอ (homogeneous spherical shell)



รูปที่ 1.19 การคำนวณศักดาของการโน้มถ่วงที่จุด P ภายนอก (a) และภายใน (b) ทรงกลมกลวง

ถ้าจุด P อยู่ภายในทรงกลมรูปที่ 1.19 (b) ค่าจำกัดของ R จะเป็น $a+r$ และ $a-r$ และคำนวณค่า V ได้ดังนี้

$$V = -\gamma \frac{m}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{\gamma m}{2ar} (2r) = -\frac{\gamma m}{a}, \quad r < a$$

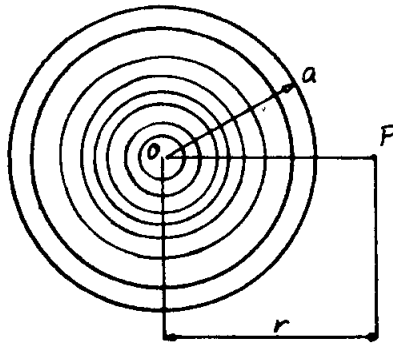
จะเห็นว่าศักดาของการโน้มถ่วงไม่ขึ้นกับตำแหน่งของ P นั่นคือ จะมีค่าคงที่ไม่่ว่า P จะอยู่ที่ใด ๆ ภายในทรงกลม อาศัยสมการ 1.16 คำนวณสนามของการโน้มถ่วงที่จุดภายนอกทรงกลมวงที่มีเนื้อสม่ำเสมอได้เป็น

$$\vec{g} = -\vec{u}_r \frac{\gamma m}{r^2}, \quad r > a$$

และที่ภายในทรงกลมกลางจะได้ $\vec{g} = 0, \quad r < a$

ต่อไปสมมติว่า มวลกระจายอย่างสม่ำเสมอทั่วทรงกลมตัน เช่น ทรงกลมของแข็ง เราอาจจะพิจารณาทรงกลมตันว่า มีลักษณะคล้ายหัวหอมที่ปอกออกได้เป็นชั้น ๆ นั่นคือชั้นของทรงกลมบาง ๆ แต่ละชั้น ทำให้เกิดสนาม ดังสมการ 1.18 และ 1.19

สำหรับจุดภายนอกทรงกลม ดังรูป 1.20 ระยะ r จากจุดกึ่งกลางถึงจุด P จะมีค่าเท่ากันสำหรับทุก ๆ ชั้น เมื่อจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นมวลก็เพิ่มขึ้นอีก ทำให้ได้ผลดังสมการ (1.18) และนั่นคือ

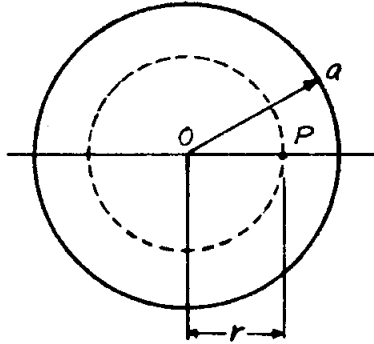


รูปที่ 1.20 คำนวณศักดาแห่งความโน้มถ่วงที่จุดภายนอกทรงกลมตัน

ทรงกลมตันที่มีเนื้อสม่ำเสมอทำให้เกิดสนามของการโน้มถ่วง และศักดาที่จุดภายนอก เหมือนกันกับที่เกิดจากอนุภาค เป็นมวลเดี่ยวรวมตัวกันอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม¹ อย่างไรก็ตามอย่างไรก็ดี

๗ จุดที่อยู่ภายในทรงกลมตันที่มีเนื้อสม่ำเสมอ สนามของการโน้มถ่วงจะมีค่าเป็นสัดส่วนกับระยะทางจากจุดกึ่งกลางของทรงกลมถึงจุดนั้น^๖

เหตุผลที่ว่า เหตุใดสนามภายในทรงกลมจึงเพิ่มขึ้นเป็นอัตราส่วนตรงกับระยะทาง r ก็คือ สำหรับจุดที่อยู่ภายใน เช่น จุด P (รูป 1.21) มีเพียงแต่มวลภายในทรงกลมรัศมี $r = OP$

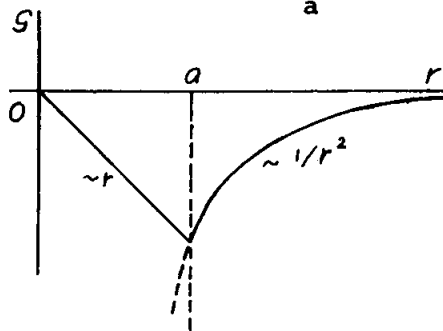


รูปที่ 1.21 คำนวณศักดาแห่งความโน้มถ่วงที่จุดภายในทรงกลม

เท่านั้นที่ทำให้เกิดสนามที่ P ถ้าจุด P เคลื่อนที่ออกไปจากจุดศูนย์กลาง ค่าของสนามซึ่งลดลงตามกฎกำลังสองผกผัน (inverse square law) จะกลับได้รับการทดแทนจากมวลที่เพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นสัดส่วนกับกำลังสามของระยะทาง ดังนั้น ถ้า a เป็นรัศมีของทรงกลมตันเราจะได้

$$\vec{g} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r, \quad r > a \quad (1.20)$$

$$\vec{g} = -\gamma \frac{m r}{a^3} \vec{u}_r, \quad r < a \quad (1.21)$$



รูปที่ 1.22

รูปที่ 1.22 แสดงค่าแปรเปลี่ยนของ \vec{G} ในเทอมของ r สำหรับทรงกลมตันเนื้อสม่ำเสมอ
 ดังรูป ตัวอย่างแบบนี้ได้แก่ค่าแปรเปลี่ยนแปรของน้ำหนักของวัตถุเมื่อมันเคลื่อนที่จากจุดกึ่งกลางของ
 โลกไปยังจุดซึ่งห่างออกไป โดยถือว่าโลกเป็นทรงกลมตันเนื้อสม่ำเสมอ

พิสูจน์ความสัมพันธ์ (1.21) การคำนวณค่าสนามภายในทรงกลมตันเนื้อสม่ำเสมอ
 ลองพิจารณาจุด P ที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทาง r และ $r < a$ เรา
 เขียนทรงกลมรัศมี r ดังรูป 1.21 และสังเกตว่าทรงกลมกลางซึ่งมีรัศมีใหญ่
 กว่า r เหล่านั้นไม่มีอิทธิพลในทางช่วยเสริมให้เกิดสนาม เห็นได้ดังสมการ
 (1.19) เมื่อ P อยู่ข้างใน แต่ทรงกลมทุกชั้นซึ่งมีรัศมีน้อยกว่า r ก่อให้เกิด
 สนาม ดังสมการ 1.18 ให้ m' เป็นมวลภายในทรงกลมที่มีรัศมี OP อาศัย
 สมการ (1.18) สนามที่ P จะมีค่า

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.18)$$

ปริมาตรของทรงกลมเป็น $\frac{4}{3}\pi a^3$ และเนื่องจากเป็นทรงกลมเนื้อสม่ำเสมอ
 มวลต่อหน่วยปริมาตร ก็คือ $\frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ มวล m' ที่อยู่ในทรงกลมรัศมี r ก็คือ

$$m' = \left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}\right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{mr^3}{a^3}$$

แทนค่า m' ในสมการข้างต้น เราจะได้ สนามที่จุดภายในทรงกลมเนื้อสม่ำเสมอว่า

$$\vec{G} = -\gamma \frac{mr}{a^3} \vec{u}_r$$

เห็นได้ว่าสำหรับปัญหาของทรงกลมที่เราพิจารณาในหัวข้อนี้ สนามของการโน้มถ่วงที่จุด
 ใด ๆ จะขึ้นกับระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดศูนย์กลางของทรงกลม แต่ไม่ใช่อยู่ในทิศทางของ
 เส้นตรงที่ต่อระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังจุดนั้น ผลนี้ใช้ได้สำหรับปัญหาที่มีลักษณะสมมาตร ถ้า
 เราจะต้องพิจารณาวัตถุซึ่งไม่มีรูปร่างทรงเรขาคณิตหรือสมมาตรหรือเป็นทรงกลมที่มวลกระจุก
 กระจายไม่สม่ำเสมอ เราย่อมหวังได้ว่า สูตรที่จะได้จะต้องมีค่าของ m อยู่ด้วย แต่สำหรับ
 ปัญหาของทรงกลมเรขาคณิต มีคุณสมบัติที่ขึ้นกับระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดศูนย์กลางเท่านั้น
 การใช้ลักษณะสมมาตรพิจารณาทำให้ปัญหาทางฟิสิกส์ง่ายขึ้น

เราจะต้องทำให้เห็นได้ว่าสมการ (1.1) ซึ่งเป็นจริงในการเขียนแรงโน้มถ่วงระหว่างจุดมวล 2 มวลนั้น จะเป็นจริงสำหรับวัตถุทรงกลม 2 ชิ้นด้วย สมมติว่า เราวางจุดมวล m' ที่ระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของทรงกลมมวล m เป็นระยะ x



รูปที่ 1.23 แรงโน้มถ่วงระหว่างสองทรงกลม

สนามที่เกิดขึ้นที่ m' เนื่องจาก m จะเป็น

$$G = \frac{\gamma m}{x^2}$$

และแรงกระทำต่อมวล m' จะเป็น

$$m'G = \frac{\gamma mm'}{x^2}$$

จากกฎของแรงกิริยาและแรงปฏิกิริยา m' ได้แรงมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกับแรงที่กระทำบนมวล m อธิบายได้ว่า แรงนี้เกิดโดยสนามที่มาจาก m' แต่ไปในขอบเขตที่ m อยู่ ถ้าเราแทน m' ด้วยทรงกลมตันที่มีเนื้อสม่ำเสมอและคงมีมวล m' เท่าเดิม สนามรอบ m' จะยังคงไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นแรงที่กระทำบนมวล m จะยังคงมีอยู่เหมือนเดิมและเท่าเดิม ถ้าเราคงถือหลักของแรงกิริยาแรงปฏิกิริยาที่จะสรุปได้ว่า แรงที่กระทำบนทรงกลมมวล m' ยังคงเหมือนเดิม

นั่นคือ ทรงกลมที่มีมวล 2 ทรงกลมจะดึงดูดซึ่งกันและกัน ตามกฎ (1.1) โดยมี x เป็นระยะทางระหว่างจุดกึ่งกลางของทรงกลมทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 1.4 การแปรเปลี่ยนค่าความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในผิวโลกเป็นระยะทางสั้น ๆ หรือจมลงในผิวโลกเป็นระยะทางสั้น ๆ ถ้าให้ h เป็นความสูงของวัตถุนั้นจากผิวโลก ระยะทางนับจากจุดกึ่งกลางจะเป็น $x = R + h$

ความเข้มของสนามของการโน้มถ่วง ตามสมการ (1.19) คือ

$$g = \frac{y^M}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

ใช้มวลของโลก M แทนค่ามวล m ถือว่า h มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ R และจากการประมาณค่าโดยอาศัยการหาค่าประมาณไบโนเมียลและจากสมการ(1.1)ที่ว่า $g = \frac{y^M}{R^2}$ เราจะได้

$$g = g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = g \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

แทนค่า g และ R จะได้

$$g = (9.81 - 3.06 \times 10^{-6} h) \text{ ms}^{-2}$$

นี่คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกมีค่าเปลี่ยนแปลงไป และน้ำหนักของวัตถุก็แปรเปลี่ยนไปเช่นกัน เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นไปจากผิวโลกเป็นระยะทางเล็กน้อยเท่ากับ h ถ้าแทนที่จะเคลื่อนสูงขึ้น เราเคลื่อนที่เข้าไปภายในโลกเป็นระยะทาง h เราจะได้

$$r = R - h$$

ใช้สมการ (1.21) แล้วแทนค่า m โดย M และ a โดย R เราจะได้

$$\begin{aligned} g &= \frac{y^M (R - h)}{R^2} = \frac{y^M}{R^2} \left(1 - \frac{h}{R}\right) \\ &= g \left(1 - \frac{h}{R}\right) \end{aligned}$$

หรือโดยการแทนค่าเป็นตัวเลขจะได้

$$g = (9.81 - 1.53 \times 10^{-6} h) \text{ ms}^{-2}$$

ดังนั้นในทั้งสองกรณี ค่าความโน้มถ่วงจะลดลง แต่จะลดลงด้วยอัตราที่เร็วกว่าที่ตำแหน่งสูงเหนือผิวโลก และเมื่อตำแหน่งนั้นลึกลงไปจากผิวโลก อัตราการลดลงจะน้อยกว่า ดูรูป 1.20

1.9 หลักการเทียบค่า

จากความจริงที่ว่ามวลเฉื่อยและมวลแห่งความโน้มถ่วง (inertial and gravitational mass) มีค่าเดียวกัน สำหรับวัตถุทุกชนิดทำให้กล่าวได้ว่า

วัตถุทุกชนิด m ที่แห่งเดียวกันที่อยู่ในสนามของการโน้มถ่วงจะมีความเร่งเท่ากัน

ตัวอย่างของความจริงในเรื่องนี้ก็คือ การค้นพบของกาลิเลโอ ที่ว่าวัตถุทุกชนิดตกลงมาซึ่งพื้นโลกด้วยความเร่งเท่ากัน การค้นพบนี้ ดังที่กล่าวมาแล้วในบทพิสูจน์ทางอ้อมก็คือ การพิสูจน์ว่า มวลเฉื่อย และ มวลแห่งความโน้มถ่วง ใช้แทนกันได้

เพื่อพิสูจน์ข้อกล่าวข้างต้น เราเขียนได้ว่า ในสนามของการโน้มถ่วง \mathcal{G} แรงที่กระทำบนมวล m คือ

$$\vec{F} = m \vec{\mathcal{G}}$$

และความเร่งจะเป็น

$$\vec{a} = \vec{F}/m = \vec{\mathcal{G}}$$

ซึ่งไม่ขึ้นกับมวล m ของวัตถุ ที่อยู่ในสนามของการโน้มถ่วงนั้น ค่าความเร่งของวัตถุมีหน่วยเป็น ms^{-2}

ถ้าทำการทดลองในห้องปฏิบัติการซึ่งอยู่ในสนามของการโน้มถ่วง ผู้ทดลองจะสังเกตได้ว่า จากการสังเกตค่าความเร่งร่วมกันนี้ ย่อมถือได้ว่า ห้องปฏิบัติการของเขายู่ในสนามของการโน้มถ่วงด้วย

อย่างไรก็ดี ข้อสรุปดังกล่าวมิใช่เป็นคำอธิบายแต่เพียงอย่างเดียว ที่ใช้อธิบายการมีความเร่งร่วมได้ ดังเช่น เคยกล่าวถึงผู้ทดลองที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง \vec{a}_0 สมพันธ์กับผู้สังเกตที่อยู่กับที่ และ \vec{a} เป็นค่าความเร่งของวัตถุ ซึ่งวัดได้โดยผู้สังเกตที่อยู่กับที่ ดังนั้นความเร่งวัดได้โดยผู้สังเกตที่กำลังเคลื่อนที่ จะเขียนได้เป็น

$$\vec{a}' = \vec{a} = -\vec{a}_0$$

ถ้าวัตถุอยู่อย่างอิสระ ความเร่ง \vec{a} วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่กับที่จะเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าความเร่ง ที่วัดโดยผู้สังเกตที่มีความเร่ง ก็คือ

$$\vec{a} = -\vec{a}_0$$

ดังนั้นวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่อย่างอิสระจะปรากฏแก่ผู้สังเกตที่มีความเร่งว่ามีความเร่งเท่ากับ $-\vec{a}_0$ เป็นปรากฏการณ์ที่คล้ายกับมีสนามแห่งความโน้มถ่วง ซึ่งมีค่าเป็น

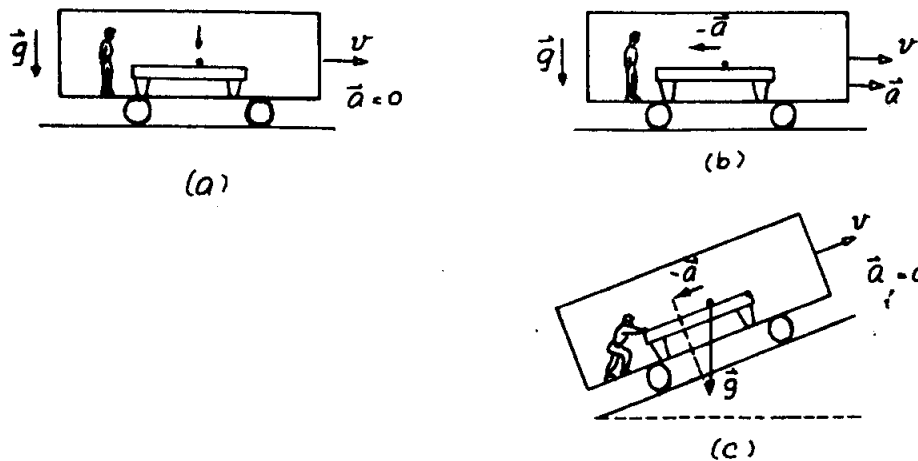
$$\vec{\mathcal{G}} = -\vec{a}_0$$

ดังนั้นเราอาจสรุปได้ว่า

ผู้สังเกตไม่มีทางทราบได้เลยว่า ห้องปฏิบัติการของเขายู่ในสนามของการโน้มถ่วงที่สม่ำเสมอหรือห้องปฏิบัติการของเขากำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง

ข้อความดังกล่าวนี้ คือ หลักของการเทียบค่า (principle of equivalence) เพราะแสดงถึงค่าที่เทียบกันได้ ดังการเคลื่อนที่ในสนามของการโน้มถ่วง และห้องปฏิบัติการของเขากำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง ความโน้มถ่วงและความเฉื่อยมิได้ปรากฏความแตกต่างกันในด้านสมบัติของสสาร แต่ยังมีอีก 2 ข้อที่ต่างกับคุณสมบัติพื้นฐานและสมบัติทั่ว ๆ ไปของวัตถุทุกชนิด

ดังตัวอย่างเช่น ผู้สังเกตใช้ตุ้มน้ำเป็นห้องปฏิบัติการที่เคลื่อนที่เป็นทางตรงตามแนวระดับด้วยความเร็วคงที่ ปิดหน้าต่างด้วยสีดำ ดังนั้นผู้สังเกตจึงไม่สามารถเห็นโลกภายนอกได้



รูปที่ 1.24 กรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเทียบได้กับสนามแห่งการโน้มถ่วง

ดังรูป 1.24 ในการทดลองเขาปล่อยลูกปิลเสียตกลงมา และพบว่าทุกครั้งมันตกลงมาด้วยความเร็วเท่ากัน ซึ่งอาจสรุปได้ว่า เขาอาจจะอยู่ในสนามของการโน้มถ่วงซึ่งมีทิศทางพุ่งลงทางตั้ง ซึ่งเป็นลักษณะปกติ แต่เขาก็อาจจะพูดได้ว่ารถของเขากำลังลอยขึ้นด้วยความเร่งทางแนวตั้ง ในทิศทางตรงข้าม-แต่เท่ากับความเร็วของการเคลื่อนที่ของลูกปิลเสีย ซึ่งหมายถึงลูกปิลเสียจะอยู่อย่างอิสระโดยไม่มีสนามเนื่องจากความโน้มถ่วง

คราวนี้สมมุติว่า ผู้สังเกตวางลูกบอลลงบนโต๊ะที่ตั้งอยู่ในรถ เมื่อผู้สังเกตพบว่า ลูกบอลบนโต๊ะจะถลึงไปทางท้ายรถด้วยความเร่งค่าหนึ่ง อาจสรุปได้ว่า ห้องปฏิบัติการของเขายู่ในสนามของการโน้มถ่วงในแนวระดับ กระทำไปทางท้ายรถหรือห้องปฏิบัติการของเขา ถูกเร่งตามแนวระดับให้พุ่งไปข้างหน้า

การสรุปครั้งที่ 2 นี้ เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นตามปกติ เมื่อพบพนักงานขับรถกำลังเร่งเครื่องให้วิ่งไปข้างหน้า (รูป 1.24b) นอกจากนั้น อาจเป็นกรณีที่รถไฟกำลังวิ่งขึ้นเนินเขา (รูป 1.24c) ในกรณีนี้จะเหมือนกันกับการเกิดสนามของการโน้มถ่วงในแนวขนานกับพื้นรถดังเช่นการเคลื่อนที่ของลูกบอล

ตามหลักของการเทียบค่า ซึ่งกล่าวว่

กฎแห่งธรรมชาติ กล่าวได้ว่า ไม่มีทางที่จะบอกความแตกต่างระหว่างสนามของการโน้มถ่วงที่สม่ำเสมอกับห้องปฏิบัติการของเขากำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่งได้

ข้อความข้างต้นรวมถึงรากฐานของหลักทั่วไปเกี่ยวกับสัมพันธภาพ (general principle of relativity) ซึ่งไอสไตน์เป็นผู้เสนอในปี 1915 จากหลักเกณฑ์ดังกล่าวทำให้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์เขียนขึ้นในแบบที่ไม่ขึ้นกับสภาพของการเคลื่อนที่ของกรอบอ้างอิง อย่างที่เราเห็น ๆ กัน หลักเกณฑ์พื้นฐานของหลักทั่วไปเกี่ยวกับสัมพันธภาพดูออกจะธรรมดาตามาก แต่สูตรต่าง ๆ ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างจะยุ่งยากและจะจดจำไม่ได้ถึงในขั้นนี้

ถ้าเราลองพิจารณากรณีใหม่ในแบบที่ผู้สังเกตมีความเร่งในสนามของการโน้มถ่วงดูบ้าง ความเร่งของวัตถุที่ขึ้นอยู่กับสนามของการโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียวซึ่งวัดได้โดยผู้สังเกตก็คือ

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_0$$

ดังที่ได้แสดงไว้ชัดเจนแล้ว ลองพิจารณากรณีของจรวดที่ถูกเร่งขึ้นจากพื้นโลกเราเขียนได้ว่า

$$\vec{g} = \vec{g}$$

ถ้าเขียน $\vec{a}_0 = -n\vec{g}$ สำหรับความเร่งของจรวดเทียบกับโลก โดยมี n เป็นค่าแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง \vec{a}_0 กับ \vec{g} (เครื่องหมายลบแสดงว่าจรวดถูกส่งขึ้นจากผิวโลก)

ดังนั้น
$$\vec{a} = (n + 1)\vec{g}$$

เป็นค่าความเร่งของวัตถุที่อยู่ภายในจรวดอย่างอิสระสัมพันธ์กับจรวด ตัวอย่างเช่นในจรวดที่ถูกเร่งขึ้นสู่ท้องฟ้าด้วยความเร่งเป็น 4 เท่าของความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก $n = 4$ น้ำหนักของวัตถุทุกชนิดภายในจรวดจะเป็น 5 เท่าของน้ำหนักปกติของวัตถุนั้น น้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเช่นนี้ มีความสำคัญมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อจรวดเริ่มขึ้น ความเร่งของจรวดมีค่าสูงสุด

ตอนนี้พิจารณาอีกสักตัวอย่างหนึ่ง คือ ดาวเทียมที่โคจรรอบโลก ในขั้นนี้

$$\vec{a}_0 = \vec{g}$$

เพราะดาวเทียมเคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงดูดของโลก ในกรณีนี้ $\vec{a}' = \vec{g}$ และวัตถุทุกชนิดภายในดาวเทียมจะอยู่ในสภาพไร้น้ำหนัก เพราะความเร่งที่สัมพันธ์กับดาวเทียมเป็นศูนย์ นี่เป็นเพียงสภาพสัมพันธ์ของการไร้น้ำหนัก เพราะทั้งดาวเทียมและสิ่งที่อยู่ภายในก็เคลื่อนที่ในสนามของการโน้มถ่วงอันเดียวกัน และมีความเร่งเท่ากัน เมื่อเทียบกับดาวเทียมวัตถุภายในจะปรากฏเหมือนวัตถุอิสระ นอกจากจะมีแรงอื่นมากระทำ แต่ในสายตาของผู้สังเกตที่อยู่บนพื้นดินจะเห็นว่าทุกอย่างถูกเร่งโดยสนามของการโน้มถ่วง

กรณีของคนที่อยู่ภายในลิฟท์ ซึ่งกำลังตกลงมาด้วยความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (เพราะลวดเคเบิลขาด) จะอยู่ในสภาพไร้น้ำหนักเมื่อเทียบกับลิฟท์ เช่นเดียวกับในดาวเทียมซึ่งในกรณีนี้

$$\vec{a}'_0 = \vec{g} \quad \text{และ} \quad \vec{a}' = 0$$

ใครจะย้าว่า สภาพไร้น้ำหนักไม่ได้หมายความว่าไม่มีแรงโน้มถ่วง แต่หมายความว่าวัตถุทุกชนิดรวมทั้งวัตถุอื่นที่เป็นกรอบอ้างอิงจะอยู่ในอิทธิพลของสนามของการโน้มถ่วงเดียวกัน ก่อให้เกิดความเร่งเท่ากัน ดังนั้นจึงไม่มีความเร่งสัมพัทธ์ต่อกัน นอกจากจะมีแรงอื่นมากระทำบนวัตถุนั้น ๆ หรือพูดอีกนัยหนึ่งได้ว่า สนามของการโน้มถ่วงจะถูกลบล้างให้หมดไปได้ถ้าผู้สังเกตเคลื่อนที่ผ่านวัตถุด้วยความเร่ง

$$\vec{a}'_0 = \vec{g} \quad \text{เทียบกับแกนเฉื่อย (inertial frame)}$$

1.10 การโน้มถ่วงและแรงระหว่างโมเลกุล

ในตอนต้นของบทนี้เราเห็นแล้วว่าแรงโน้มถ่วงนั้นเพียงพอที่จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่บนระนาบใด ๆ รวมทั้งการเคลื่อนที่ของวัตถุใกล้ผิวโลกได้ เป็นที่น่าสนใจว่าอินเตอแอคชันหรือแรงชนิดเดียวกันนี้ทำให้โมเลกุลรวมกันอยู่เป็นเนื้อสารได้ หรือทำให้อะตอมรวมกันอยู่เป็นโมเลกุลได้อย่างไร

ถ้าเราพิจารณาโมเลกุลธรรมดา เช่น โมเลกุลของไฮโดรเจน ซึ่งประกอบด้วยไฮโดรเจน 2 อะตอม อยู่ห่างกันเป็นระยะทาง $r = 0.745 \times 10^{-10}$ เมตร อะตอมของไฮโดรเจนแต่ละตัวมีมวล $m = 1.673 \times 10^{-27}$ กิโลกรัม ดังนั้นการโน้มถ่วง (gravitational interaction) ระหว่าง 2 อะตอม จะเป็นอะตอมที่มีพลังงานศักย์ E_p ซึ่งเท่ากับ $-\frac{Gmm'}{r}$

$$= -2.22 \times 10^{-54} \text{ J} = -1.30 \times 10^{-35} \text{ อีเล็กตรอนโวลต์ (eV)}$$

อย่างไรก็ดี จากการทดลองได้ค่าพลังงานของโมเลกุลของไฮโดรเจนเป็น $7.18 \times 10^{-19} \text{ J}$ หรือ 4.48 eV . หรือ 10^{35} เท่าของพลังงานของการโน้มถ่วง (gravitational energy)

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า การโน้มถ่วงไม่ใช่แรงที่สามารถยึดเหนี่ยวอะตอมของไฮโดรเจนให้อยู่เป็นโมเลกุลได้ ผลการคำนวณจะเป็นแบบนี้ แม้จะลองใช้โมเลกุลที่ค่อนข้างซับซ้อนก็ตาม

ในกรณีของของเหลว พลังงานที่ต้องการเพื่อทำให้น้ำ 1 โมล (18 กรัม หรือ 6.23×10^{23} โมเลกุล) กลายเป็นไอคือ 4.06×10^3 J ซึ่งถ้าคำนวณจากระยะระหว่างโมเลกุลจริง ๆ แล้วจะได้เพียง 6×10^{-21} J ค่าเฉลี่ยของระยะระหว่างโมเลกุลของน้ำมีค่าราว ๆ 3×10^{-10} เมตร มวลของโมเลกุลจะเป็น 3×10^{-26} กิโลกรัม ตรงกับพลังงานศักย์ของการโน้มถ่วง 2×10^{-52} J ซึ่งยังห่างไกลจากค่าจริงของแรงที่ทำให้น้ำคงสภาพเป็นของเหลวอยู่ได้

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า แรงที่จะทำให้อะตอมรวมตัวกันเป็นโมเลกุล หรือ โมเลกุลรวมตัวทำให้เกิดก้อนสารไม่ใช่แรงโน้มถ่วง ในบทความต่อไป เราจะกล่าวถึงแรงอื่น ๆ ซึ่งดูเหมือนจะเป็นแรงที่ก่อให้เกิดการรวมตัวเช่นนี้ขึ้น นั่นคือ แรงแม่เหล็กไฟฟ้า

อย่างไรก็ตาม การโน้มถ่วงเป็นผลของมวลและเป็นเหตุผลสำคัญมากในการพิจารณาวัตถุที่มีมวลมากแต่เป็นกลางทางไฟฟ้า ดังเช่น ดาวเคราะห์ และเพราะเหตุว่าการโน้มถ่วงจะเป็นแรงปรากฏมากที่สุดที่เราสัมผัสบนผิวโลก ถึงแม้ว่าที่จริงเป็นแรงที่อ่อนที่สุดในธรรมชาติ เป็นแรงที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับชีวิตประจำวัน เป็นจำนวนมาก เช่น น้ำขึ้นน้ำลง ซึ่งขึ้นกับการโน้มถ่วงของดวงจันทร์และดวงอาทิตย์กับโลกเท่านั้น

ปริมาณ	ค่าจำกัดความ	ความสัมพันธ์
ความเข้มของสนามแห่งความโน้มถ่วง และศักดาแห่งความโน้มถ่วง	$\vec{G} = \vec{F}/m$ $V = E_F/m$	$G = -\text{grad } V$ $G_r = -dV/ds$
สนามแห่งความโน้มถ่วง และศักดาแห่งความโน้มถ่วงซึ่งเกิดจากจุดมวล	$\vec{G} = -\vec{u}_r \frac{m}{r^2}$ $V = -\gamma \frac{m}{r}$	$\vec{G} = -\vec{u}_r \frac{dV}{dr}$ $G = -dV/dr$
งานที่กระทำต่ออนุภาค	$W = m (V_1 - V_2)$	
พลังงานทั้งหมดของอนุภาค	$E = \frac{1}{2} mv^2 + mV$	

ตาราง 1.2