บทที่ 7
ความยืดหยุ่นและการเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต

เค้าโครงเรื่อง

7.1 ความเค้นและความเครียด

ความเค้นเฉือน ความเค้นอัด และความเค้นดึง

ความเครียดดึง ความเครียดอัด ความเครียดเฉือน และความเครียดปริมาตร

7.2 มอดุลัสของความยืดหยุ่น

มอดุลัสของญัง มอดุลัสเฉือน มอดุลัสเชิงปริมาตร และสภาพอัดได้

7.3 ค่าคงตัวของแรง

ค่าคงตัวของแรงหรือความแข็งตึงหรือค่าคงตัวของความยืดหยุ่น

7.4 การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

การเคลื่อนที่แบบเป็นคาบและปริมาณที่เกี่ยวข้อง

7.5 การเคลื่อนที่ของมวลยึดติดกับสปริง

พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของสปริง

7.6 ลูกตุ้มอย่างง่าย

สมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่เชิงมุม

7.7 ลูกตุ้มฟิสิกัล

การแกว่งภายใต้แรงโน้มถ่วง

7.8 ลูกตุ้มชนิดบิด

ทอร์กคืนตัวและสมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

7.9 วงจรออสซิลเลเตอร์

วงจรไฟฟ้าแอลซีและสมการการออสซิลเลต

7.10 การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด

การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดในกรณีที่เคลื่อนที่ไปทางเดียวกันโดยมีความถี่เท่ากัน และในกรณีที่เคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากกันโดยมีความถี่เท่ากัน

การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำจากภายนอกซึ่งมีลักษณะเป็นคาบ ถ้าความถี่ของแรงกระทำเท่ากับความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แรงกระทำจะถ่ายทอดพลังงานแก่ออสซิลเลเตอร์ได้สูงสุด

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบททนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. อธิบายความหมายของปริมาณที่แสดงถึงการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ เช่น ความเค้น ความเครียด และมอดุลัสของความยืดหยุ่นได้
2. แสดงกราฟของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะกระจัดกับเวลา ความเร็วกับเวลา และความเร่งกับเวลาได้
3. ระบุตัวอย่างปรากฏการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกิดจากการแทรกสอดและการสั่นพ้องได้
4. แสดงวิธีคำนวณหาปริมาณทางฟิสิกส์ที่กล่าวไว้ในบทนี้ ตามตัวอย่างที่ให้ไว้และแบบฝึกหัดข้างท้ายบทได้

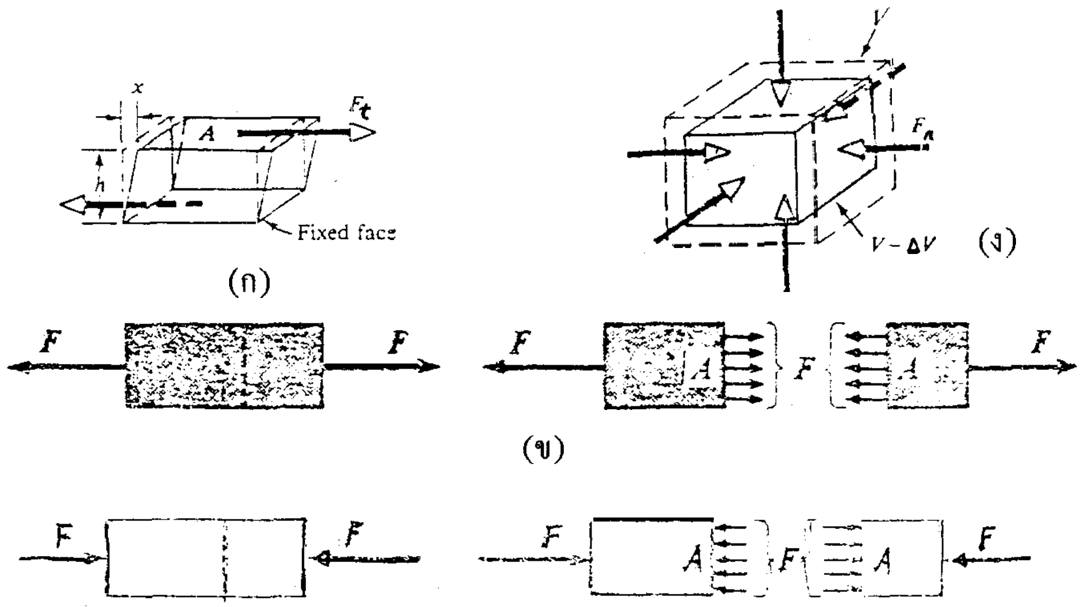
ในบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุ "แข็งเกร็ง" โดยสมมติว่า วัตถุนั้นไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างและขนาดเมื่อถูกแรงกระทำจากภายนอก ซึ่งเป็นข้อสมมติเพื่อให้สะดวกในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ แต่ในความเป็นจริงสสารหรือวัตถุทุกชนิดย่อมเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือขนาดได้เมื่อมีแรงกระทำ เช่น ยืด หด หรือบิดตัว ในบทนี้จะกล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์สำหรับใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือขนาดต่อไป

7.1 ความเค้นและความเครียด (stress and strain)

ความเค้น

เมื่อวัตถุซึ่งมีพื้นที่ภาคตัด A ได้รับแรงกระทำ F ดึงปลายทั้งสองข้างไว้ โดยแรง F เท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม พิจารณารอยตัดใด ๆ ในแนวตั้งฉากกับความยาว ดังรูปที่ 7.1 ตามเส้นประเนื่องจากทุกส่วนของแท่งวัสดุอยู่ในสภาพสมดุล ส่วนที่ตั้งฉากทางขวาจะดึงทางซ้ายด้วยแรง F และส่วนทางซ้ายก็จะดึงทางขวาด้วยแรง F เท่ากันเช่นกัน

แรงดึงนี้จะกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดภาคตัด A ดังแสดงด้วยลูกศรขนาดสั้นในรูป ดังนั้น จึงจะได้คำนิยามสำหรับความเค้นว่าคือ



รูปที่ 7.1 (ก) ความเค้นเฉือน (ข) ความเค้นดึง (ค) ความเค้นอัด (ง) ความเค้นปริมาตร

อัตราส่วนระหว่างแรง F ต่อพื้นที่ภาคตัด A ดังนี้

$$\text{ความเค้น} = \frac{F}{A} \qquad \text{.......7.1}$$

ความเค้นมีหน่วยเป็นนิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) เนื่องจากแรงกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัด เราจึงเรียกเป็น ความเค้นตั้งฉาก (normal stress)

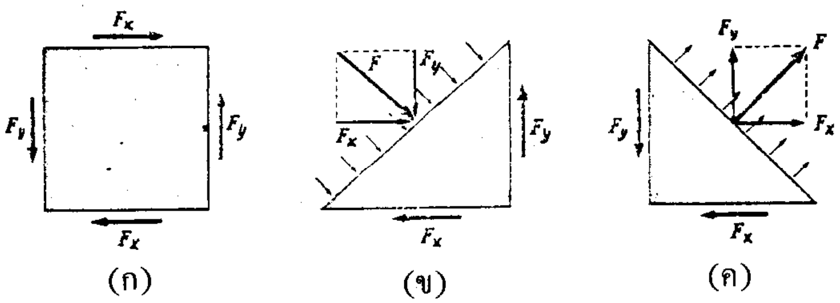
$$\text{ความเค้นตั้งฉาก} = \frac{F_n}{A} \qquad \text{........7.2}$$

ความเค้นตั้งฉากมีสองชนิด คือ ความเค้นดึง (รูปที่ 7.1 (ข)) และความเค้นอัด (compressive stress) รูปที่ 7.1 (ค) กรณีนี้แท่งวัตถุมีแรงอัดเข้าหากันจากปลายทั้งสอง แต่ละส่วนอัดเข้าหากันจึงเรียกเป็นความเค้นอัด

ต่อไปพิจารณาภาคตัดขวางในแนวทิศใด ๆ ที่ไม่ตั้งฉากกับวัตถุหรือในกรณีที่แรงกระทำในแนวสัมผัสกับพื้นที่ อัตราส่วนระหว่างแรงตามแนวสัมผัสกับพื้นที่ F_t ต่อพื้นที่ A (A คือพื้นที่ผิวที่สัมผัสกับแรงกระทำ) เรียกว่า ความเค้นแนวสัมผัส (tangential stress) หรือความเค้นเฉือน (shearing stress) ดังรูปที่ 7.1 (ก) เขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$\text{ความเค้นเฉือน} = \frac{F_t}{A} \qquad \text{........7.3}$$

ถ้าเราเลือกรอยตัดใด ๆ ที่ไม่ตั้งฉากดังกล่าวมาแล้ว ความเค้นก็จะมีทั้งความเค้นเฉือนและความเค้นอัด ดูรูปที่ 7.2



รูปที่ 7.2 (ก) วัตถุกำลังถูกแรงเฉือน (shear) (ข) ความเค้นตามเส้นทแยงมุมเป็นความเค้นอัด (ค) ตามอีกเส้นหนึ่งเป็นความเค้นดึง

พิจารณารูปที่ 7.2 แท่งสี่เหลี่ยมซึ่งมีภาคตัดเป็นจัตุรัสในรูปที่ 7.2 (ก) ถูกกระทำด้วยแรงคู่ควบ 2 ชุด ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม เกิดจากแรงคู่หนึ่งคือ F_x และ F_y กระทำตลอดผิวแท่งสี่เหลี่ยมนี้อยู่ในภาวะสมดุล ดังนั้น ทุก ๆ ส่วนของวัตถุแท่งนี้จึงอยู่ในภาวะสมดุลด้วย ดังนั้นแรงที่กระจายตลอดเส้นทแยงมุมในรูปที่ 7.2 (ข) ย่อมมีแรงลัพท์ F ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น F_x และ F_y ความเค้นที่รอยตัดนี้จึงเป็นแบบความเค้นอัด แม้ความเค้นด้านขวาและด้านล่างจะเป็นความเค้นเฉือนก็ตาม ในทำนองเดียวกันรูปที่ 7.2 (ค) เราเห็นได้ว่า เส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งเป็นแบบความเค้นดึง

ความเค้นไม่เป็นปริมาณเวคเตอร์ เพราะไม่สามารถกำหนดทิศเป็นอย่างอื่นนอกจากที่ได้นิยามไว้ แรงที่กระทำต่อวัตถุด้านใดด้านหนึ่งย่อมมีทิศจำกัดแน่นอน ความเค้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของปริมาณทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า เทนเซอร์ (Tensor)

ในกรณีที่วัตถุเป็นของไหล แรงที่ของไหลกระทำกับวัตถุในแนวตั้งฉากต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ เรียกว่า ความดัน แทนด้วย P เมื่อของไหลอยู่ภายใต้แรงกดดัน โดยที่ของไหลหมายถึงสารที่ไหลถ่ายเทได้ ดังนั้นจึงหมายรวมทั้งของเหลวและแก๊ส ถ้ามีความเค้นเฉือน ณ จุดใด ๆ ในของไหล ของไหลจะหมุนวนนานเท่านานที่แรงเฉือนยังกระทำอยู่ ดังนั้นของไหลที่อยู่นิ่งหมายถึงความเค้นเฉือนเป็นศูนย์ทุกหนทุกแห่งในของไหล ดังรูปที่ 7.3 แสดงถึงของไหลในกระบอกสูบพร้อมลูกสูบที่ออกแรงกดลงล่าง วัตถุที่เป็นของไหลแสดงด้วยสามเหลี่ยมรูปลิ่ม ถ้าไม่คิดน้ำหนักของของไหลชิ้นนี้ แรงที่กระทำคือแรงที่เกิดจากของไหลส่วนอื่น ๆ พิจารณาเนื่องจากของไหลอยู่นิ่งจะไม่มีความเค้นเฉือนกระทำดังได้กล่าวมาแล้ว จึงมีแต่แรงตั้งฉากที่เท่ากันกระทำต่อลิ่มนี้ กำหนดให้ F_x, F_y และ F เป็นแรงที่กระทำต่อพื้นที่ผิวทั้งสาม เนื่องจากของไหลอยู่ในภาวะสมดุล จะได้ว่า

$$F \sin\theta = F_x \qquad \text{และ} \quad F\cos\theta = F_y \qquad \ldots\ldots.7.4$$

และพื้นที่ $$A \sin\theta = A, \qquad \text{และ} \quad A\cos\theta = Ay \qquad \ldots\ldots.7.5$$

โดยการที่สมการ 7.4 หารด้วยสมการ 7.5 จะได้ว่า

$$\frac{F}{A} = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_y}{A_y} \qquad \ldots\ldots.7.6$$

ปรากฏว่าแรงต่อหน่วยพื้นที่มีค่าเท่ากันทุกทิศทาง และเป็นแรงอัดทั้งสิ้น จึงเรียกแรงต่อหน่วยพื้นที่นี้ว่า ความดันในของไหลที่อยู่นิ่ง (hydrostatic pressure) เขียนแทนด้วย P ดังนั้น

$$P = \frac{F}{A}\ ; \qquad F = PA \qquad \ldots\ldots.7.7$$

หน่วยของความดันคือนิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) ปริมาณนี้ไม่เป็นปริมาณเวคเตอร์เช่นเดียวกับความเค้น เพราะว่าไม่สามารถกำหนดทิศทางใด ๆ ให้แก่ความดันได้ จึงสรุปได้ว่า ความดันในของไหลที่อยู่นิ่ง ณ จุดใดๆ ย่อมเท่ากันทุกทิศทาง ดังนั้น จึงอาจเรียกความดันเป็นความเค้นปริมาตร (volume stress) และนิยามได้ว่า

$$\text{ความเค้นปริมาตร} = \text{ความดัน} = P = \frac{F}{A} \qquad \text{........7.8}$$

ความเครียด

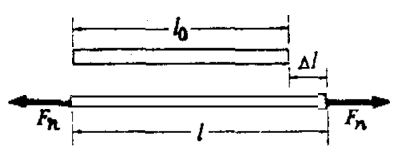
ความเครียดหมายถึง การเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ในมิติหรือรูปร่างของวัตถุ (deformation) หรือเรียกว่าการผิดรูป เมื่อถูกกระทำด้วยความเค้น ความเค้นแบบใดที่กระทำต่อวัตถุก็จะทำให้เกิดความเครียดแบบเดียวกัน เช่นความเค้นดึงทำให้ความยาวเปลี่ยนจาก L_0 เป็น L จึงนิยามความเครียดดึง (tensile strain) ว่า

$$\text{ความเครียดดึง} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \text{........7.9}$$

เมื่อ $\Delta L = L - L_0$ คืออัตราส่วนระหว่างความยาวที่เพิ่มขึ้นต่อความยาวเดิม ในทำนองเดียวกัน นิยามความเครียดอัดได้ว่า

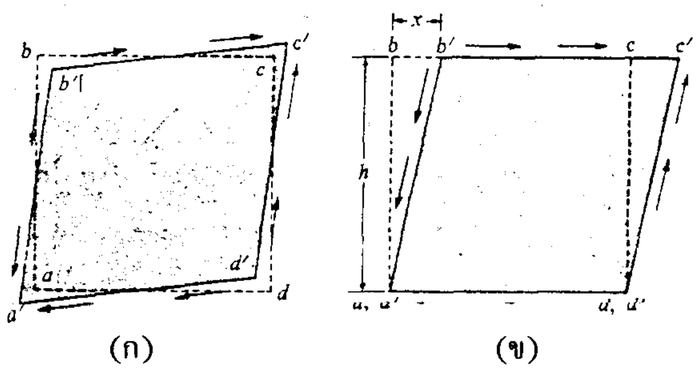
$$\text{ความเครียดอัด} = \frac{AL}{L_0} \qquad \text{......7.10}$$

เมื่อ $\Delta L = L_0 - L$ คืออัตราส่วนระหว่างความยาวที่หดลงต่อความยาวเดิม จากสมการ 7.9 และ 7.10 จะเห็นได้ชัดว่าความเครียดไม่มีหน่วย และความเครียดดึงและความเครียดอัดมีสูตรเหมือนกัน ต่างกันที่ความหมายของ ΔL คือ ในสมการ 7.9 ΔL คือความยาวที่ยืดออกจากเดิม แต่ในสมการ 7.10 ΔL คือความยาวที่หดลง



รูปที่ 7.4 แท่งวัตถุเดิมยาว L_0 เมื่อถูกแรง F_n ดึงหัวท้ายทำให้ได้ความยาวเพิ่มขึ้นเป็น L การยืดออกเป็นไปตลอดแท่ง ไม่ใช่ยืดออกที่หัวและท้ายเท่านั้น

ความเครียดเฉือนทำให้รูปร่างของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปดังรูปที่ 7.5



รูปที่ 7.5 การเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุด้วยแรงเฉือน โดยความเครียดเฉือนเท่ากับ x/h.

รูปที่ 7.5 (ก) แสดงการเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุสี่เหลี่ยมเมื่อมีแรงเฉือนมากระทำดังเช่นในรูปที่ 7.2 เส้นประ abcd เป็นรูปทรงของวัตถุเดิมเมื่อยังไม่ถูกแรงกระทำ, ส่วนเส้นทึบ a' b' c' d' เป็นรูปทรงเมื่อเกิดความเครียดแล้ว จุดศูนย์กลางของรูปที่ 7.5 (ก) เป็นจุดเดียวกันทั้งก่อนและหลังเครียด, ส่วนในรูปที่ 7.5 (ข) มีด้าน ad และ a'd' ซ้อนร่วมกัน การบิดเบือนรูปทรงของวัตถุนี้เรียกว่าเกิด*ความเครียดเฉือน* ซึ่งความเครียดเฉือนเป็นอัตราส่วนของระยะขจัด x ที่บิดเบือนไปต่อความยาวเดิมของด้านขวาง h

$$\text{ความเครียดเฉือน} = \frac{x}{h} \qquad \text{......7.11}$$

ความเครียดที่เกิดจากความดันในของไหล เรียกว่า ความเครียดปริมาตร (volume strain) ซึ่งนิยามว่าเป็นอัตราส่วนของปริมาตรที่เปลี่ยนไป ΔV ต่อปริมาตรเดิม V ดังนั้น

$$\text{ความเครียดปริมาตร} = \frac{\Delta V}{V} \qquad \text{......7.12}$$

7.2 มอดุลัสของความยืดหยุ่น (Elastic Modulus)

ความเค้นที่ต้องใช้เพื่อให้เกิดความเครียดที่กำหนดให้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติจากที่ได้ซึ่งความเค้น อัตราส่วนของความเค้นต่อความเครียดเรียกว่า มอดุลัสของความยืดหยุ่นของวัตถุดังนั้น

$$\text{มอดุลัสของความยืดหยุ่น} = \frac{\text{ความเค้น}}{\text{ความเครียด}} \qquad \text{......7.13}$$

ซึ่งมี 3 ประเภท ลักษณะของความเค้นและความเครียด ดังนี้

ประเภทแรกคือ มอดุลัสของยัง (young's modulus) แทนด้วย Y มีนิยามดังนี้

อัตราส่วนของความเค้นดึงต่อความเครียดดึงสำหรับวัตถุชนิดหนึ่งๆ ย่อมเท่ากับอัตราส่วนของความเค้นอัดต่อความเครียดอัด

$$Y = \frac{\text{ความเค้นดึง}}{\text{ความเครียดดึง}} = \frac{\text{ความเค้นอัด}}{\text{ความเครียดอัด}}$$

$$= \frac{F_n/A}{\Delta L/L_0} = \frac{L_0 F_n}{A \Delta L} \qquad \text{......7.14}$$

เนื่องจากความเครียดเป็นเลขจำนวนไม่มีมิติ หน่วยของมอดุลัสของยัง จึงเหมือนกับหน่วยของความเค้นคือ แรงต่อหน่วยพื้นที่

มอดุลัสเฉือน (Shear modulus) แทนด้วย S มีคำจำกัดความว่า

$$S = \frac{\text{ความเค้นเฉือน}}{\text{ความเครียดเฉือน}}$$

$$= \frac{F_1/A}{x/h} \quad \frac{hF_1}{AX} \qquad \text{.......7.15}$$

มอดุลัสเฉือนมีหน่วยเป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่เช่นกัน มอดุลัสมีนัยสำคัญต่อของแข็งเท่านั้น ของเหลวและก๊าซจะไหลภายใต้การกระทำของความเค้นเฉือน จึงไม่เกิดการบิดเบี้ยวได้

มอดุลัสเชิงปริมาตร หรือ บัลค์มอดุลัส (bulk modulus) แทนด้วย B มีคำจำกัดความดังนี้

$$B = \frac{\text{ความเค้นปริมาตร}}{\text{ความเครียดปริมาตร}}$$

$$= \frac{F_n/A}{\Delta V/V} \qquad \text{.......7.16}$$

ในกรณีที่วัสดุเป็นของไหล B เขียนในเชิงอนุพันธ์ได้ว่า

$$B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}} \qquad \text{.......7.17}$$

เครื่องหมายลบที่ปรากฏอยู่ในนิยามของ B เนื่องจากว่าความดันที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ปริมาตรลดลง $dp = p - p_0$ ถ้าเป็นการเปรียบเทียบเมื่อวัตถุอยู่ในอากาศกับอยู่ในของเหลว P_0 ก็คือความดันบรรยากาศซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.01×10^5 นิวตัน/เมตร^2 ตาราง 7.1 แสดงมอดุลัสทั้ง 3 แบบของวัสดุบางชนิด มีหน่วยเป็นนิวตันต่อตารางเมตร

ตาราง 7.1 มอดุลัสของความยืดหยุ่น

วัสดุ	มอดุลัสของยัง, Y 10^{10} N . m^{-2}	มอดุลัสเฉือน, S 10^{10} N . m^{-2}	มอดุลัสเชิงปริมาตร, B 10^{10} N . m^{-2}
กระจก	5.5	2.3	3.7
ตะกั่ว	1.6	0.56	0.77
ทองแดง	11	4.2	14
ทองเหลือง	9.1	3.6	6.1
ทังสเตน	36	15	20
นิกเกิล	21	7.7	2 6
เหล็ก	9.1	7.0	10
เหล็กกล้า	20	6.4	16
อะลูมินัม	7.0	2.4	7.0

ตาราง 7.2 สภาพอัดได้ของของเหลว

ของเหลว	สภาพอัดได้	
	10^{-10} (N . m^{-2})$^{-1}$	10^{-6} atm^{-2}
กลีเซอรีน	2.1	22
คาร์บอนไดซัลไฟด์	6.4	66
น้ำ	4.9	50
ปรอท	0.37	3.8
เอทิลแอลกอฮอล์	11.0	115

ส่วนกลับของบัลค์มอดุลัสเรียกว่า สภาพอัดได้ (compressibility) แทนด้วย k นั่นคือ

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{dV/V}{dP} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \qquad \text{......7.18}$$

สภาพอัดได้ของของไหลบางชนิด แสดงไว้ในตาราง 7.2

ดังนั้น สภาพอัดได้ของวัตถุแปรตามสัดส่วนที่ลดลงของปริมาตร, - dV/V ต่อหนึ่งหน่วยที่เพิ่มขึ้น dp ของความดัน

หน่วยของบัลค์มอดุลัสเหมือนกับหน่วยของความดัน แต่หน่วยของสภาพอัดได้เป็นส่วนกลับของหน่วยความดันดังนั้นสภาพอัดได้ของน้ำซึ่งเท่ากับ 50×10^{-6} atm^{-1} จึงหมายความว่าน้ำมีปริมาตรลดลง 50 ใน 1 ล้านของปริมาตรเดิม เมื่อความดันเพิ่มขึ้น 1 บรรยากาศ (1 atm = 1.013×10^5 N/m^2)

ตัวอย่าง 7.1 คานอะลูมิเนียมยาว 1 เมตร ถูกดึงด้วยแรง 8,000 นิวตันที่ปลายทั้งสองข้าง คานนี้จะยาวขึ้น 2.86×10^{-2} เมตร พื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ 4 ตารางเซนติเมตร

จงหา (ก) ความเค้นดึง (ข) ความเครียดดึง (ค) มอดุลัสของญัง

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.2 จะได้ :

$$\text{ความเค้นดึง} = F_n/A$$

$$= \frac{\text{aooo N}}{4 \times 10^{-4}\ m^2} = 2 \times 10^7\ N/m^2$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 7.9 จะได้ :

$$\text{ความเค้นดึง} = \Delta L/L_0$$

$$= \frac{2.86 \times 10^{-2}}{1} = 2.86 \times 10^{-2}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.14 จะได้ :

$$\text{มอดุลัสญัง} = \text{ความเค้นดึง/ความเครียดดึง}$$

$$= 2 \times 10^7/2.86 \times 10^{-2} = 7 \times 10^8\ N/m^2$$

ตัวอย่าง 7.2 แท่งน้ำหนัก 12,000 นิวตัน ถูกแขวนด้วยสายเคเบิลเหล็กยาว 10.0 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลาง 16 มิลลิเมตร ทำให้สายเคเบิลยาวขึ้นอีก 3 มิลลิเมตร จงหา

(ก) ความเค้นดึง (ข) ความเครียดดึง (ค) มอดุลัสของญัง

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.2 จะได้

$$\text{ความเค้นดึง} = \frac{F_n}{A} = \frac{F_n}{\pi r^{-2}}$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 7.9 จะได้

$$= \frac{12.000\ \text{N}}{\pi(0.008\ \ \text{m})^2} = 6 \times 10^7\ \ \text{N/m}^2$$

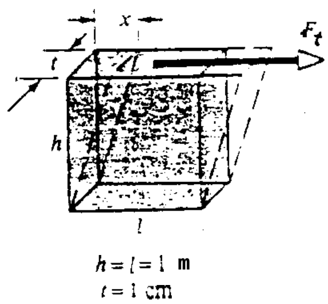
$$\text{ความเครียดดึง} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.003\ \text{m}}{10.0\ \ \text{m}} = 3 \times 10^{-4}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.14 จะได้

$$\text{มอดุลัสของญัง} = \frac{6 \times 10^7\ \text{N/m}^2}{3 \times 10\text{-}4} = 2 \times 10^{11}\ \ \text{N/m}^2$$

ตัวอย่าง 7.3 แท่งเหล็กกล้ารูปจัตุรัส ด้านยาว 1 เมตร หนา t เท่ากับ 1 เซนติเมตร ฐานถูกตรึงกับพื้นดังรูปที่ 7.6 แรง F_t กระทำกับขอบด้านบนเกิดการกระจัด x = 0.005 เซนติเมตร จงหา

(ก) ความเครียดเฉือน (ข) แรง F_t (ค) ความเค้นเฉือน



รูปที่ 7.6 จากโจทย์ตัวอย่าง 7.3

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.11 จะได้

ความเครียดเฉือน $= \frac{x}{h}$

$= \frac{5 \times 10^{-5}\ m}{1\ m} = 5 \times 10^{-5}$

(ข) พิจารณาสมการ 7.15 คือ $S = \frac{hF_t}{Ax}$ ดังนั้น $F_t = \frac{SAx}{h}$

เมื่อแทนค่าจะได้ $F_t = \frac{(8.4 \times 10^{10}\ N/m^2)\ (10^{-2}\ m^2)(5 \times 10^{-5}\ m)}{1\ m}$

โดยที่ s (จากตาราง) $= 8.4 \times 10^{10} N/m^2$

$= 4.2 \times 10^4\ N$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.3 จะได้

ความเค้นเฉือน $= \frac{F_t}{A}$

$= \frac{4.2 \times 10^4\ N}{10^{-2}\ m^2}$

$= 4.2 \times 10^6\ N/m^2$

ตัวอย่าง 7.4 แท่งเหล็กรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 8 cm x 15 cm ยาว 3.5 m เมื่อถูกอัดด้วยแรง 15,500 นิวตัน จะมีความยาวลดลงเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.14 คือ $y = \frac{F_n / A}{A L/L_0}$ ดังนั้น $A\ L = \frac{L_0F_n}{Ay}$

เมื่อแทนค่าจะได้ $AL = \frac{(15{,}500\ N)\ (3.50\ m)}{(120 \times 10^{-4}\ m^2)\ (9.1 \times 10^{10}\ N/m^2)}$

$= 5.0 \times 10^{-5}\ m$

$= 0.05\ mm$

ตัวอย่าง 7.5 ตะกั่วทรงกลมรัศมี 1 เมตร ถูกหย่อนลงในทะเลลึก ความดัน 70 x 10^6 นิวตัน/เมตร$^{-2}$ ดังรูปที่ 7.7 จงหาปริมาตรที่ลดลงในหน่วยของลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.17 คือ

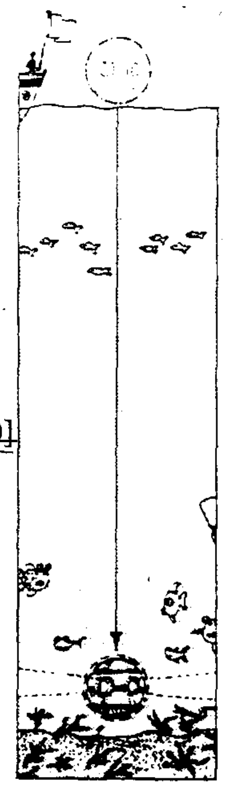
$$B = -\frac{dP}{dV/V} \quad \text{ดังนั้น} \quad dV = -\frac{VdP}{B}$$

เมื่อแทนค่าจะได้ $$dV = \frac{[\frac{4}{3}\pi(1.0\ m)^3\ (70.0 \times 10^6\ N/m^2)]}{(0.77 \times 10^{10}\ N/m^2)}$$

$$= -0.038\ m^3$$

$$= -0.038 \times 10^6\ cm^3$$

ปริมาตรลดลง 38,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร



รูปที่ 7.7 ตัวอย่าง 7.5

ตัวอย่าง 7.6 เครื่องอัดไฮดรอลิกแบบหนึ่ง มีน้ำมันบรรจุอยู่ 135 ลิตร จงหาว่าปริมาตรของน้ำมันจะลดลงเท่าไร ถ้าเพิ่มความดันอัดน้ำมันนี้อีก 136 บรรยากาศ กำหนดให้สภาพอัดได้ของน้ำมันเท่ากับ 20 x 10^{-6} ต่อบรรยากาศ

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.16

$$B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

ดังนั้น $$dV = -\frac{V}{B}dP$$

$$= -kVdP$$

แทนค่าจะได้ $$dV = -\frac{(20 \times 10^6)\ (135 \times 10^{-3}\ m^3)\ (135 \times 1.05 \times 10^5\ N/m^2)}{1.05 \times 10^5\ N/m^2}$$

$$= 0.367 \times 10^{-3}\ m^3$$

$$= -0.367\ liters$$

เพราะฉะนั้น ปริมาตรลดลง 0.367 ลิตร

กิจกรรม 7.1

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 7.1 กับ 7.2 ถ้าเปลี่ยนจากคานอะลูมิเนียมเป็นคานเหล็กและเปลี่ยนจากเคเบิลเหล็กเป็นเคเบิลอะลูมิเนียม

7.3 ค่าคงตัวของแรง (Force constant)

มอดุลัสของความยืดหยุ่นทุกชนิดเป็นปริมาณสำหรับแสดงถึงสมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุนั้น ๆ แต่ไม่ได้แสดงว่าแท่งวัตถุ สายลวด หรือสปริงที่ใช้นั้นจะยืดหดหรือบิดเบี้ยวไปเท่าไร ถ้าหากถ่วงด้วยลูกตุ้มน้ำหนัก เมื่อพิจารณาสมการมอดุลัสของญัง 7.14 เพื่อหาค่า F_n ปรากฏว่า

$$F_n = \frac{YA}{L_0}\Delta L$$

กำหนดให้ $\frac{YA}{L_0} = k$ และ $\Delta L = x$ จะได้

$$F_n = kx \qquad \text{......7.19}$$

นั่นแสดงว่าแรงที่ใช้ดึงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับส่วนที่ยืดออก ค่าคงตัว k นี้ เรียกว่า ค่าคงตัวของแรง หรือความแข็งตึง (stiffness) บางครั้งเรียกว่า ค่าคงตัวของความยืดหยุ่น (elastic constant) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของแรงต่อความยาวที่ยืดหรือหด มีหน่วยเป็นนิวตันต่อเมตร

อัตราส่วนของความยาวที่ยืดหรือหดต่อหนึ่งหน่วยของแรงเรียกว่า compliance ซึ่งเป็นส่วนกลับของค่าคงตัวของแรงนั่นเอง หน่วยที่ใช้จึงเป็น เมตรต่อนิวตัน

ตัวอย่าง 7.7 เดิมสปริงยาว 15 ซม. เมื่อเอาน้ำหนัก 16 นิวตันมาห้อยถ่วงไว้ สปริงจะยาวเป็น 20 ซม. (ก) ค่าคงตัวของแรงของสปริงเท่ากับเท่าไร ? (ข) ถ้าเพิ่มน้ำหนักอีก 12 นิวตัน สปริงจะยาวเท่าไร?

วิธีทำ (ก) พิจารณาสมการ 7.19 คือ $F_n = kx$

ดังนั้น $k = F_n/x$

แทนค่าจะได้ $k = \frac{16\ \text{N}}{5 \times 10^{-2}\text{m}} = 320\ \text{N/m}$

(ข) พิจารณาสมการ 7.19 $F_n = kx$

ดังนั้น $x = F_n/k$

แทนค่าจะได้ $x = \dfrac{28\ \text{N}}{320\ \text{N/m}}$

$= 0.0875\ \text{m} = 8.75\ \text{cm}.$

สปริงจะยาว = 15 ซม. + 8.75 ซม. = 23.75 ซม.

7.4 การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

อนุภาคเคลื่อนที่แบบกวัดแกว่งหรือเคลื่อนที่ไปแล้วกลับมาที่เดิม (oscillatory motion) หมายถึงการเคลื่อนที่ซ้ำรอยการเคลื่อนที่เดิมเป็นคาบเวลารอบตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่เป็นตำแหน่งสมดุล เรียกว่าการเคลื่อนที่แบบพีริออดิก (periodic) หรือการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ เรียกว่าคาบ (period) แทนด้วย T ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบพีริออดิกมีมากมาย ได้แก่ การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา การเคลื่อนที่ของอะตอมในของแข็ง อะตอมในโมเลกุลก็เคลื่อนที่ไปมาสัมพัทธ์กันและกัน การเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริง การโคจรของดวงจันทร์รอบโลก การสั่นของสายลวดไวโอลิน การเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นเสียง โมเลกุลของอากาศจะออสซิลเลตตามแนวการเคลื่อนที่ของคลื่น คลื่นแสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ นั้น สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะออสซิลเลตในทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ในบรรดาการเคลื่อนที่แบบกวัดแกว่งเป็นคาบด้วยกัน การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิคอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion, SHM) นับเป็นชนิดสำคัญที่สุด เพราะว่าเราสามารถใช้คณิตศาสตร์อธิบายการเคลื่อนที่ของมันได้ง่าย และค่อนข้างถูกต้องที่สุด สำหรับในหนึ่งมิติระยะกระจัด x ของอนุภาคสัมพันธ์กับจุดกำเนิดของระบบโคออดิเนตที่เป็นฟังก์ชันของเวลา สามารถเขียนได้ ดังนี้คือ

$$X = A \sin(\omega t + \varnothing) \qquad \text{......7.20}$$

เมื่อ A, ω และ $\varnothing$ เป็นค่าคงตัว ระยะกระจัดที่มีค่ามากที่สุด A เรียกว่า แอมปลิจูด (amplitude) ปริมาณ $\omega t + \varnothing$ เรียกว่า มุมเฟส (phase angle และ $\varnothing$ คือค่าคงตัวเฟส (phase constant) หรือเฟสเริ่มต้น (initial phase) มีความหมายคือเป็นตัวบอกตำแหน่งของอนุภาคขณะเริ่มต้นกวัดแกว่ง แม้ว่าเราจะนิยามการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายในพจน์ของฟังก์ชันไซน์ (sine function) เราอาจจะนิยามให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) ก็ได้ ความแตกต่าง

อยู่ที่ ความต่างเฟส (phase fifference) คือ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน ดังนี้

$$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \qquad ......7.21$$

$$-\cos\theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad ......7.22$$

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แปรค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 ระยะกระจัดของอนุภาคจึงแปรค่าอยู่ระหว่าง -A และ +A นอกจากนี้ฟังก์ชันไซน์ยังซ้ำตัวเองทุกครั้งเมื่อ $\pi\omega t$ เพิ่มขึ้น 2π ทำให้ระยะกระจัดของอนุภาคซ้ำตัวเองภายหลังอันตรภาคเวลา $\frac{2\pi}{\omega}$ ซึ่งเรียกว่าคาบ เขียนได้เป็น $T = \frac{2\pi}{\omega}$ จำนวนการออสซิลเลตต่อหนึ่งหน่วยเวลา เรียกว่า ความถี่ (frequency) ซึ่งเป็นส่วนกลับของคาบนั่นเอง แทนด้วย

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad ......7.23$$

หรือ

$$\omega = 2\pi = f \qquad ......7.24$$

ค่าคงตัว ω ก็คือความถี่เชิงมุม (angular frequency) f มีหน่วยเป็น รอบ/วินาที หรือนิยามเรียกเป็น เฮิรตซ์ (Hertz, H_z) ω มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที (rad/s) ความเร็วของอนุภาคคือ

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varnothing) \qquad ......7.24$$

และความเร่งของอนุภาค คือ

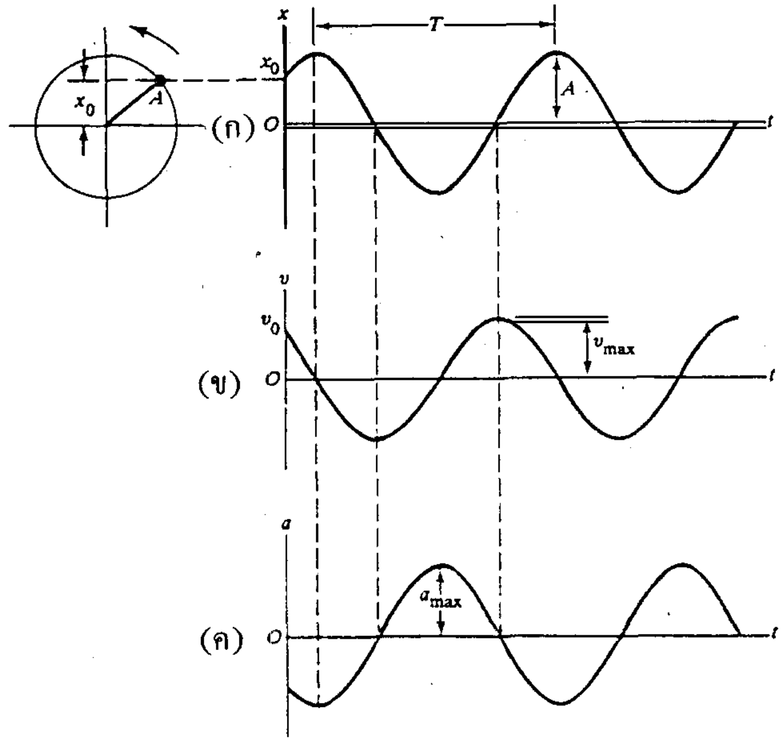
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varnothing) \qquad ......7.25$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ความเร่งเป็นสัดส่วนโดยตรง และมีทิศทางตรงกันข้ามกับระยะกระจัด

จากสมการ (7.24) และ (7.25) จะเห็นได้ว่าค่าสูงสุดของความเร็วและของความเร่งเขียนได้เป็น

$$v_{max} = A\omega, \qquad a_{max} = A\omega^2 \qquad ......7.26$$

สำหรับความสัมพันธ์ของระยะกระจัด x ความเร็ว v และความเร่ง a เทียบกับเวลา ของอนุภาคเคลื่อนที่เป็นฮาร์มอนิกอย่างง่าย ได้แสดงในรูป 7.8



รูปที่ 7.8 แสดงความสัมพันธ์ของระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่ง เปรียบเทียบกับเวลา ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย (SHM)

ในรูป 7.8 (ก) ระยะกระจัดกับเวลา (ข) ความเร็วกับเวลา และ (ค) ความเร่งกับเวลา โดยกำหนดให้ x_0 เป็นระยะกระจัดเริ่มต้น v_0 เป็นความเร็วเริ่มต้น (t = 0) ดังนั้น $x_0 = A \sin \phi$ และ $v_0 = A\omega \cos \phi$ ถ้าหาร x_0 ด้วย v_0 เราจะได้

$$\tan \phi = \frac{x_0 \omega}{v_0} \qquad \ldots 7.27$$

นอกจากนั้น $x_0^2 = A^2 \sin^2 \phi$ และ $\frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \cos^2 \phi$ นั่นคือ

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \sin^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi$$

หรือ

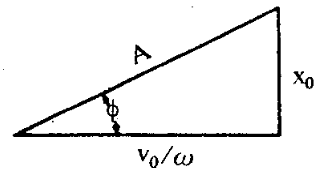
$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad \ldots 7.28$$

จากสมการ (7.27) และ (7.28) สามารถเขียน $\sin \phi$ และ $\cos \phi$ ได้เป็น

$$\sin \emptyset = \frac{x_0}{\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{x_0}{A} \qquad \ldots\ldots 7.29$$

และ
$$\cos \emptyset = \frac{v_0}{\left[x_0^2\,\omega^2 + v_0^2\right]^{1/2}} = \frac{v_0}{\omega A} \qquad \ldots\ldots 7.30$$

ดังแสดงในรูป 7.9



รูปที่ 7.9 แสดงค่าคงตัวเฟสØ

สมการ (7.27) ถึง (7.30) ใช้สำหรับหาค่า Ø และ A ในพจน์ของตัวทราบค่า คือ x_0, v_0 และ ω

ตัวอย่าง 7.8 อนุภาคออสซิลเลตแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามแกน x ระยะกระจัดแปรตามเวลาตามสมการ

$$x = 4.0 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

เมื่อ x มีหน่วยเป็นเมตร, t มีหน่วยเป็นวินาที, มุม มีหน่วยเป็นเรเดียน

ก. จงหาแอมปลิจูด, ความถี่, คาบของการเคลื่อนที่

ข. จงหาความเร็วและความเร่ง ณ เวลา t ใด ๆ

ค. จงหาตำแหน่ง, ความเร็ว, ความเร่ง ในเวลา t = 1 วินาที

ง. จงหาค่าอัตราเร็วสูงสุดและอัตราเร่งสูงสุดของอนุภาค

จ. จงหาระยะกระจัดระหว่างเวลา t = 0 และ t = 1 วินาที

ฉ. มุมเฟสเท่ากับเท่าไร ณ เวลา t = 2 วินาที

วิธีทำ โดยการเทียบ $x = A \sin(\omega t + \emptyset)$

กับ $x = 4.0 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ ได้

$A = 4.0$ m, $\omega = \pi$ rad/s, $\emptyset = \frac{\pi}{4}$ rad f-l. จาก $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $T = \frac{1}{f}$

แทนค่า : $f = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ Hz

$T = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ s

$A = 4.0$ m

ข. จาก $v = \frac{dx}{dt}$ และ $a = \frac{dv}{dt} = -\omega a^2 x$

แทนค่า : $v = (4.0\ \pi) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$a = -\ 4.0\ \pi^2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

ค. แทนค่า : t = 1 ลงในสมการเช่นเดียวกับข้อ ข.

$x = 4.0 \sin(\pi + \frac{\pi}{4})$

$= 4 \sin \frac{5\pi}{4} = 4 \sin 225^\circ$

$= 4 \sin(180^\circ + 45^\circ) = 4 (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4(.707) = -2.8$ m

$v = 4\ \pi \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -8.9$ m/s

$a = -\omega^2 x = -\pi^2 (-2.8)$ m/s^2

$= 28$ m/s^2

ง. จาก $v_{max} = A\omega$, $a_{max} = A\omega^2$

แทนค่า : $v_{max} = (4.0\ m)(\pi) = 12.57$ m/s

$a_{max} = (4.0\ m)\ \pi^2 = 39.48$ m/s^2

จ. $Ax = x_1 - x_0 = -2.8 - 4.0 \sin \frac{\pi}{4}$

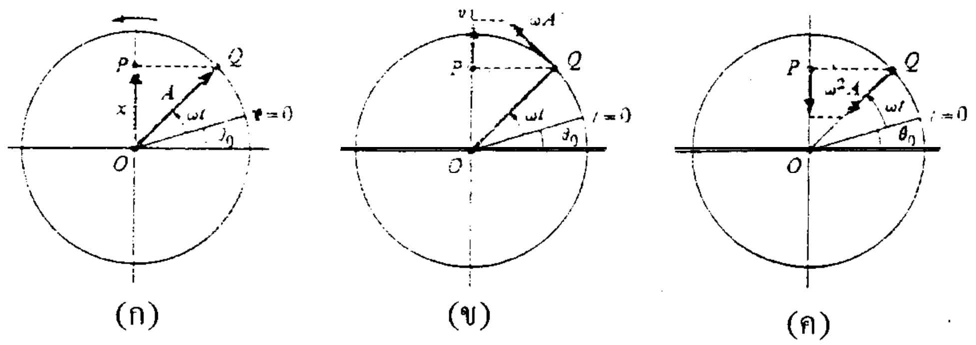
$= -5.6$ m

ฉ. มุมเฟส $= \pi t + \frac{\pi}{4} = \pi(2) + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ rad

กิจกรรม 7.2

ให้นักศึกษาแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่งเทียบกับเวลา สำหรับการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามตัวอย่าง 7.8

ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่วงกลมอย่างเอกรูป



รูป 7.10 ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่วงกลมเอกรูป

พิจารณาอนุภาค Q (รูป 7.10) เคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี A ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ เงาตรงของ Q บนเส้นผ่านศูนย์กลางคือ P จากรูปจะพบว่า ขณะที่ Q เคลื่อนที่รอบวงกลม P จะเคลื่อนที่กลับมาซ้ำรอยเดิมผ่านจุดศูนย์กลาง O ถ้า $\theta = \omega t + \theta_0$ เป็นมุมที่มีรัศมี OQ ทำกับแกน +X เราได้ว่า

$$OP = OQ \sin \theta. \text{ หรือ } x = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งแสดงว่า P เคลื่อนที่แบบ SHM ดังนั้นเรากล่าวได้ว่า เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมเอกรูป เงาตรงของมันบนเส้นศูนย์กลางจะเคลื่อนที่เป็น SHM

ความเร็วของ Q ที่ตั้งฉากกับ OQ คือความเร็วที่สัมผัสกับวงกลม มีขนาด = ωA องค์ประกอบของความเร็วตามแกน Y คือ

$$v = \omega A \cos\theta, \quad \text{หรือ} \quad v = \omega A \cos(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งเป็นความเร็วของ P นั่นเอง ความเร่งของ Q เป็นความเร่งสู่ศูนย์กลาง จึงมีทิศตรงกันข้ามกับระยะขจัด x และมีขนาด = $\omega^2 A$ ดังนั้นองค์ประกอบของความเร่งตามแกน Y คือ

$$a = -\omega^2 A \sin\theta, \text{ หรือ } \quad a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งเป็นความเร่งของ P เช่นกัน เพราะฉะนั้น ความเร็วและความเร่งของเงาตรง P เท่ากับองค์ประกอบตามเส้นผ่านศูนย์กลางของความเร็วและความเร่งของ Q

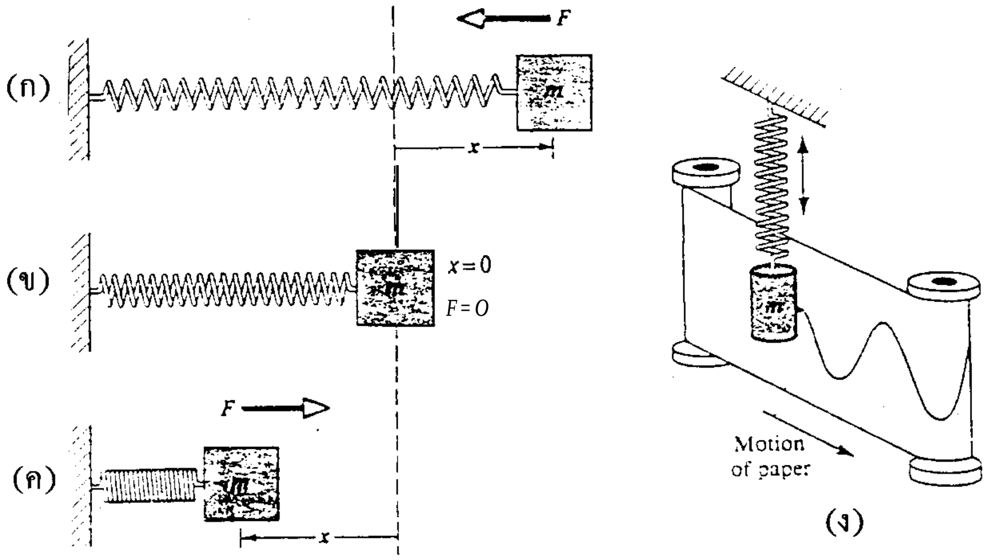
7.5 การเคลื่อนที่ของมวลยึดติดกับสปริง

จากสมการของการเคลื่อนที่ F = ma และใช้สมการ 7.25 $a = -\omega^2 x$ ซึ่งเป็นค่าของความเร่ง เราสามารถหาแรงซึ่งกระทำต่อมวล m เพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย แรง F ในที่นี้คือ

$$F = -m\omega^2 x = -kx \qquad \text{.......7.3 1}$$

และเราให้ $$K = m\omega^2 \text{ หรือ } W = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{.......7.3 2}$$

เราเรียก k ว่า ค่าคงตัวของสปริง ดังนั้นเราพบว่าแรงเป็นสัดส่วนโดยตรงและมีทิศทางตรงกันข้ามกับระยะกระจัด ดังรูป 7.11



รูปที่ 7.11 (ก), (ข), (ค) แรงคืนตัวกับระยะกระจัด จะมีทิศตรงกันข้าม สำหรับ
(ง) การเคลื่อนมวลติดกับสปริงเป็นการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

หมายความว่า เมื่อระยะกระจัดมีทิศไปทางขวาหรือมีทิศขึ้น แรงจะมีทิศไปทางซ้ายหรือมีทิศลง และเมื่อระยะกระจัดมีทิศไปทางซ้ายหรือลง แรงก็จะมีทิศไปทางขวาหรือมีทิศขึ้น ฉะนั้นแรงย่อมมีทิศพุ่งไปทางจุดกำเนิด หรือจุดสมดุลเสมอ

จากรูปที่ 7.11 หากมวล m วางอยู่บนพื้นราบไม่มีแรงเสียดทาน เมื่อปล่อยมวล m มวล m จะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ในรูป 7.11 (ง) นั้น มวล m แขวนอยู่กับสปริงในแนวดิ่ง ที่มวล m มีปากกาติดอยู่ แสดงให้เห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริงเป็นกราฟแบบไซน์

จากสมการ (7.24) และ (7.32) เราได้ว่า

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ หรือ } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \ldots\ldots 7.33$$

ค่ามวลในสมการ (7.33) ไม่ได้คิดมวลของสปริงแต่ประการใด ทั้ง ๆ ที่ความจริงแล้วสปริงก็ยืดหยุ่นไปมาด้วย ถ้าจะคิดมวลของสปริงก็จะต้องพิจารณาว่า มวลทั้งหมดของสปริงไม่ได้ยืดหยุ่นไปมาด้วยแอมปลิจูดเดียวกัน สปริงส่วนล่างสุดจะยืดหยุ่นด้วยแอมปลิจูดเดียวกับมวลของวัตถุที่แขวนที่ปลายสปริง ขณะที่ส่วนบนสุดไม่ได้ยืดหยุ่นเลย เพื่อที่จะให้การคำนวณถูกต้องยิ่งขึ้น ค่าความถี่เชิงมุม (การพิสูจน์ดูในวิชากลศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป) ต้องเขียนเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \qquad \text{......7.34}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_s/3}{k}} \qquad \text{......7.35}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \qquad \text{......7.36}$$

เมื่อ m_s คือ มวลทั้งหมดของสปริง จากสมการ 7.25 เขียนใหม่ได้ว่า

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad \text{......7.37}$$

สมการ 7.37 เขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ว่า

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{......7.38}$$

รากของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 สมการ 7.38 คือ

$$x = B \sin \omega t + C \cos \omega t \qquad \text{......7.39}$$

ถ้ากระจายสมการ 7.20 จะได้

$$x = A \sin (cot + 0)$$

$$= [A \cos \emptyset] \sin \omega t + [A \sin \emptyset] \cos \omega t \qquad \text{......7.40}$$

เปรียบเทียบสมการ 7.39 กับ 7.40 และใช้ความสัมพันธ์สมการ 7.29 และ 7.30 จะได้

$$B = A \cos \emptyset = A\frac{v_0}{\omega A} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$C = A \sin 0 = A\frac{x_0}{A} = x_0$$

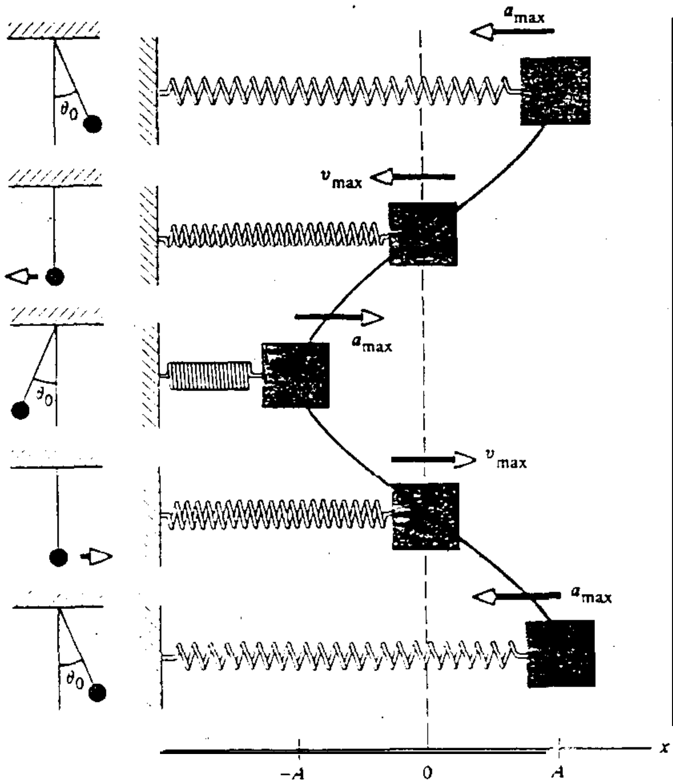
สมการ (7.20), (7.39) และ (7.40) อาจเขียนได้เป็น

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \qquad \text{......7.41}$$

พลังงานของสปริง ในบทที่ 5 เราได้กล่าวถึงพลังงานของสปริงบ้างแล้ว ซึ่งพอสรุปได้ว่า พลังงานของสปริงจะประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ คือ

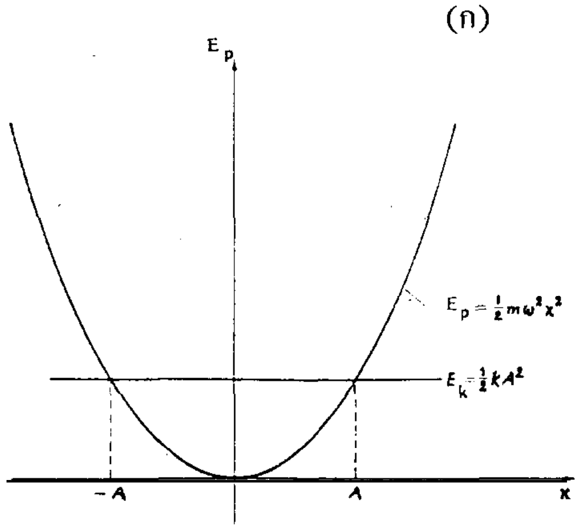
$$E = E_{p,s} + E_{k,s}$$

พลังงานของอนุภาคมวล m จะเปลี่ยนรูประหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ดังรูป 7.12 (ก)



t	x	v	a	E_k	E_p
0	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	$A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

(ก)



(ข)

รูปที่ 7.12 (ก) เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของมวลติดกับสปริงกับการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มอย่างง่าย
(ข) พลังงานศักย์ของมวลติดกับสปริง

รูปที่ 7.12 (ข) แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์เป็นรูปพาราโบลาหงาย อย่างไรก็ดี พลังงานจะมีค่าคงตัว ดังสมการต่อไปนี้

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \; ; \quad k = \omega^2 m$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 [A \sin(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}m[A\omega \cos(\omega t + \phi)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + 0) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{ค่าคงตัว} \qquad \ldots 7.42$$

ตัวอย่าง 7.9 มวล 1 กิโลกรัม แขวนไว้ที่ปลายสปริงซึ่งมีมวล 0.09 กิโลกรัม และมีค่าคงตัวของสปริง k = 66 นิวตัน/เมตร จงหาความถี่เชิงมุมและแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่ ถ้าปรากฏว่า ขณะที่วัตถุยืดสปริงลงใต้ตำแหน่งสมดุล 0.03 เมตร และความเร็วมีทิศลงข้างล่าง 0.4 เมตร/วินาที

วิธีทำ แทนค่า $m = 1 \text{ kg}, \quad m_s = 0.09 \text{ kg}, \quad k = 66 \text{ N/m}$

$x_0 = 0.03 \text{ m}, \quad v_0 = 0.4 \text{ m/s}$

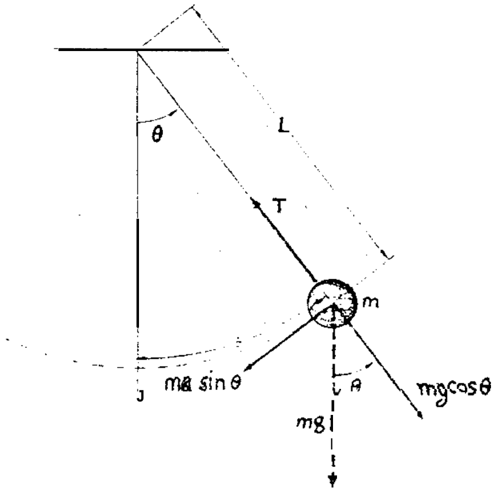
ในสมการ $\omega = \left[\dfrac{k}{m + \frac{m_s}{3}}\right]^{1/2}, \quad A = \left[x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$

จะได้ $\omega = \left[\dfrac{66 \text{ N/m}}{1 \text{ kg} + \frac{0.09}{3} \text{ kg}}\right]^{1/2} = 8.0 \text{ rad/s}$

$$A = \left[(0.03)^2 + \left(\frac{0.4}{8.0}\right)^2\right]^{1/2} = 0.058 \text{ m}$$

7.6 ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple Pendulum)

ลูกตุ้มอย่างง่ายเป็นตัวอย่างที่สำคัญอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบพีริออดิก หรือแบบเป็นคาบ ประกอบด้วยมวล m แขวนกับเชือกเบาความยาว L ดังรูป 7.13 s คือความยาวของส่วนโค้ง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ L และ θ คือ



รูปที่ 7.13 แสดงระบบลูกตุ้มอย่างง่าย

$$s = L\theta \qquad \text{.....7.43}$$

ความเร่งตามแนวเส้นสัมผัส $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ คือ g sin θ เขียนเป็นสมการตามกฎข้อ 2 ของนิวตันได้ ดังนี้

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta \qquad \text{......7.44}$$

เครื่องหมายลบ เพราะว่าแรงมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเพิ่มของมุม θ

สมการ 7.44 เขียนใหม่ได้เป็น

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + mg\sin\theta = 0 \qquad \text{......7.45}$$

สมการที่ 7.45 ไม่ใช่สมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ถ้า θ เล็กมาก (s มีค่าน้อยกว่า L มาก ๆ) สามารถประมาณค่าได้ว่า

$$\sin\theta \cong \theta \text{ เรเดียน} \qquad \text{......7.46}$$

แทนค่าสมการ 7.43 และ 7.46 ใน 7.45 และ s = L θ ได้

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\,\theta = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \text{.....7.47}$$

สมการ 7.47 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ 7.37 เมื่อเปรียบเทียบ θ กับ x จึงเป็นการเคลื่อนที่เชิงมุม แทนที่จะเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้น ดังนั้น

$$\theta = \theta_0 \sin\ (\omega t + 0) \qquad \ldots\ldots 7.48$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \ldots\ldots 7.49$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \ldots\ldots 7.50$$

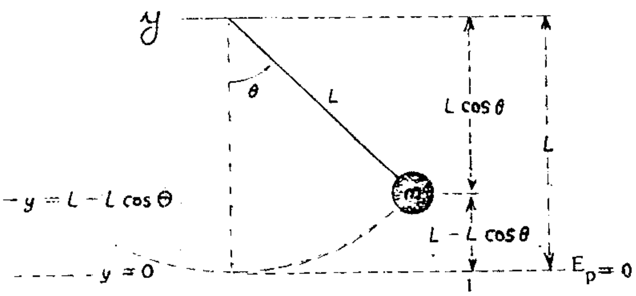
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \ldots\ldots 7.51$$

และ θ_0 คือแอมปลิจูด จะเห็นว่า ω, T, f ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้มเลย ถ้าเป็นการแกว่งที่มีแอมปลิจูดกว้าง คือ θ_0 กว้าง จะไม่เป็นการแกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกต่อไป (ดูสมการ 7.49) แต่อย่างไรก็ตาม ถ้า θ_0 ไม่โตเกินไปนัก คาบของการแกว่งจะได้

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right)} \qquad \ldots\ldots 7.52$$

เมื่อ θ_0 วัดเป็นเรเดียน สูตรนี้เป็นการประมาณค่าที่ใช้ได้ดีพอสมควรสำหรับทางปฏิบัตินั้นส่วนมากความจริงพจน์แก้ไข $\frac{1}{16}\theta_0^2$ มีค่าน้อยกว่า 1 เปอร์เซ็นต์สำหรับแอมปลิจูดที่น้อยกว่า 23 องศา

พลังงานศักย์ของลูกตุ้มอย่างง่ายคือ พลังงานศักย์แห่งความโน้มถ่วง mgy เมื่อ y คือความสูงวัดจากระดับอ้างอิง ดังรูป 7.14



รูปที่ 7.14 ความสูงของมวลเหนือตำแหน่งสมดุล $y = L - L\cos\theta$ พลังงานศักย์เท่ากับ E_p = mgy = mgL $(1 - \cos\theta)$

$$y = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$

$$E_p = mgL(1-\cos\theta)$$

ดังนั้น พลังงานรวม

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mg(1-\cos\theta) \qquad \ldots\ldots 7.53$$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมเล็ก เราใช้ค่าประมาณ

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots$$

$$\cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

ดังนั้น $1 - \cos\theta \cong \frac{1}{2}\theta^2$

และค่าประมาณของพลังงานศักย์ คือ

$$E_p \cong \frac{1}{2}mgL\,\theta^2 \qquad \ldots\ldots 7.54$$

ใช้สมการ 7.43 ในสมการ 7.54 ได้

$$E_p = \frac{1}{2}mgL\left(\frac{s}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{L}s^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \qquad \ldots\ldots 7.55$$

พลังงานรวมกลายเป็น

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \qquad \ldots\ldots 7.56$$

ตัวอย่าง 7.10

ก. จงหาความยาวของลูกตุ้มอย่างง่าย กำหนดให้คาบเท่ากับ 1 วินาที

ข. ถ้าลูกตุ้มอย่างง่ายในข้อ ก. นำไปแขวนที่ผิวของดวงจันทร์ กำหนดให้ความเร่งแห่งความโน้มถ่วงของดวงจันทร์เท่ากับ 1.67 เมตร/วินาที^{2} จงหาคาบของการแกว่ง

วิธีทำ ก. จาก $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

หรือ $L = \frac{T^2}{4\pi^2}g$

แทนค่าจะได้ $L = \frac{(1\ s)^2\ (9.8\ m/s^2)}{4\pi^2}$

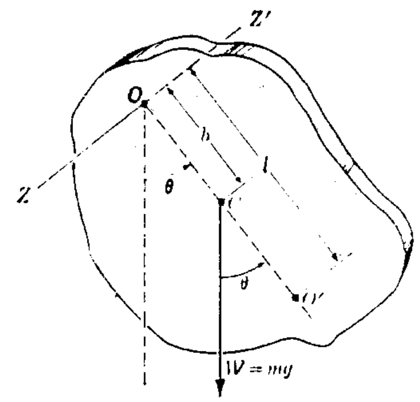
$= 0.248\ m$

ข. จาก $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

แทนค่าจะได้ $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.248\ m}{1.67\ m/s^2}} = 2.42\ s$

7.7 ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

ตัวอย่างที่สำคัญอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งใด ๆ ก็คือ ลูกตุ้มฟิสิกัล ซึ่งสามารถแกว่งไปมาอย่างอิสระรอบแกนในแนวระดับภายใต้แรงโน้มถ่วง (ดูรูป 7.15) เราให้ ZZ′ เป็นแกนแนวระดับ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล C ถึงแกนหมุนซึ่งตั้งได้ฉากกับหน้ากระดาษเท่ากับ b เมื่อเส้นตรง OC ทำมุม θ กับแนวดิ่ง องค์ประกอบ Z ของทอร์กกระทำบนวัตถุรอบจุดหมุน ($I\alpha$) คือ $mgb \sin\theta$ ดังนั้น



รูปที่ 7.15 แสดงลูกตุ้มฟิสิกัล สามารถแกว่งอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงรอบแกนในแนวระดับที่จุด O โดยมี C เป็นศูนย์กลางมวล

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb \sin\theta$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\sin\theta = 0 \qquad \text{......7.57}$$

α คือ ความเร่งเชิงมุมเท่ากับ $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ส่วน I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบจุดหมุน สมการ 7.57 คล้ายกับสมการ 7.45 ซึ่งไม่ใช่สมการฮาร์มอนิกอย่างง่าย แต่ในกรณี θ มีค่าน้อย ๆ และเราใช้การประมาณค่า $\sin\theta = \theta$ สมการ 7.57 จะกลายเป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \qquad \text{......7.58}$$

ดังนั้น สมการ 7.58 จึงเป็นสมการฮาร์มอนิกอย่างง่าย เปรียบเทียบสมการ 7.58 กับสมการ 7.47 หรือสมการ 7.25 จะได้ว่า $\omega^2 = \frac{mgb}{I}$ หรือ

หรือ
$$\omega = \left[\frac{mgb}{I}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.59}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{I}{mgb}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.60}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{mgb}{I}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.61}$$

ตัวอย่าง 7.11 แท่งโลหะเอกรูปอันหนึ่งยาว 1 เมตร จัดให้แกนหมุนอยู่ที่ปลายข้างใดข้างหนึ่ง การแกว่งของแท่งโลหะนี้เป็นแบบลูกตุ้มฟิสิกัล จงหาคาบของการแกว่ง ถ้าแอมปลิจูดของการแกว่งมีค่าน้อย ๆ

วิธีทำ แทนค่า $L = 1$ เมตร $\qquad b \quad \frac{L}{2}$

I (ของแท่งโลหะรอบปลายข้างใดข้างหนึ่ง) $= \frac{1}{3}mL^2$

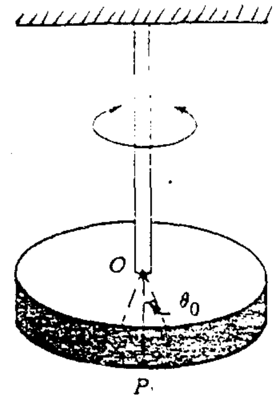
ในสมการ $\quad T = 2\pi\left[\frac{I}{mgb}\right]^{1/2}$

จะได้ $\quad T = 2\pi\left[\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mgL/2}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{2L}{3g}\right]^{1/2}$

$$T = 2\pi\left[\frac{2\,(1\text{ m})}{3\,(9.8\text{ m/s}^2)}\right]^{1/2} = 1.64 \text{ วินาที}$$

7.8 ลูกตุ้มชนิดบิด (Torsional Pendulum)

ลูกตุ้มชนิดบิดประกอบด้วยวัตถุแผ่นกลมแบนมวลสม่ำเสมอ แขวนด้วยลวดโลหะยาวที่จุดกึ่งกลางของแผ่นในแนวดิ่ง ดังรูป 7.16



รูปที่ 7.16 ลูกตุ้มชนิดบิดจะออสซิลเลตผ่านจุด OP ด้วยแอมปลิจูด θ_0

เมื่อแผ่นโลหะหมุนไปเป็นมุม θ เล็กน้อยจากตำแหน่งสมดุล ลวดจะบิดตัวทำให้เกิดทอร์กต่อแผ่นโลหะกลมเพื่อต้านกับระยะกระจัด θ ซึ่งเป็นทอร์กที่เรียกว่า ทอร์กคืนตัว (restoring torque) ทอร์กนี้จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ θ นั่นคือ

$$\Gamma = -\kappa\theta \qquad ......7.62$$

ในที่นี้ κ (อ่านว่า คัปปา, kappa) คือสัมประสิทธิ์การบิดตัวของลวด จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน $T = I\alpha$ จะได้

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa\theta}{I} = 0 \qquad ......7.63$$

I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของแผ่นโลหะกลมรอบแกนดิ่ง สมการ 7.63 เป็นสมการของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ 7.38 เราจะได้ $\omega^2 = \frac{\kappa}{I}$ หรือ

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad ......7.64$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad ......7.65$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad ......7.66$$

รากของสมการ 7.63 คือ

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + 0) \qquad \ldots\ldots 7.67$$

และ

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \omega \cos(\omega t + \varnothing) \qquad \ldots\ldots 7.68$$

พลังงานศักย์ของลูกตุ้มชนิดบิด เขียนได้เป็น (จาก $\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \quad \therefore K = I\omega^2$)

$$E_p = \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{1}{2}I\omega^2\theta^2 \qquad \ldots\ldots 7.69$$

และพลังงานจลน์ E_k คือ

$$E_k = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \ldots\ldots 7.70$$

ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานใด ๆ พลังงานรวมจะคงที่ แทนค่า θ และ $\frac{d\theta}{dt}$ ในสมการ 7.69 และ 7.70 ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}
E &= E_p + E_k \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 I \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2 \left|\theta_0 \sin(\omega t + \varnothing)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\theta_0 \omega \cos(\omega t + \varnothing)\right|^2 I \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta_0^2 \left[\sin^2(\omega t + 0) + \cos^2(\omega t + \varnothing)\right] \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta_0^2 = \frac{1}{2}K\theta_0^2 \qquad \ldots\ldots 7.71
\end{aligned}$$

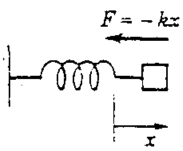
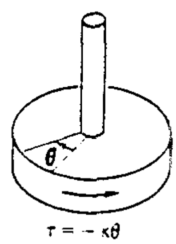
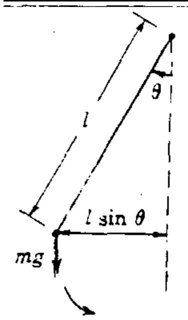
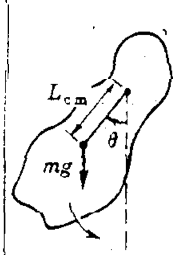
กิจกรรม 7.3

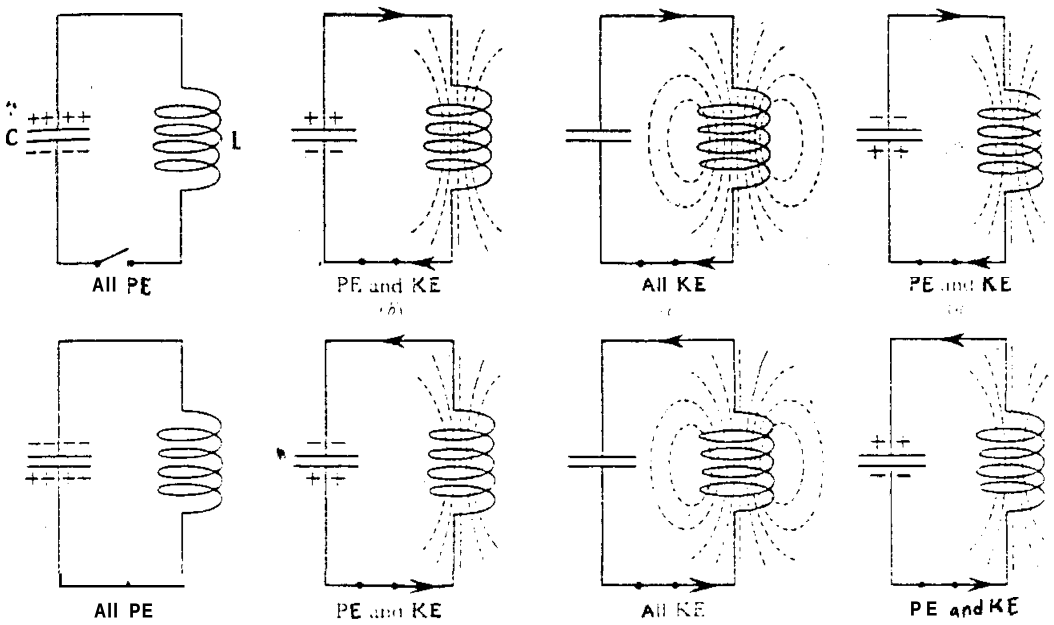
ให้นักศึกษาเปรียบเทียบสูตรสำหรับหาค่าต่าง ๆ สำหรับลูกตุ้มอย่างง่าย ลูกตุ้มชนิดบิด และลูกตุ้มฟิสิกัลว่าคล้ายกันหรือแตกต่างกันอย่างไร

7.9 วงจรออสซิลเลเตอร์ (LC)

ระบบที่มีการออสซิลเลตแบบการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกชนิดหนึ่งก็คือ วงจรออสซิลเลเตอร์ (oscillator) ซึ่งเป็นวงจรไฟฟ้า LC ประกอบด้วยตัวเก็บประจุ C และขดลวด L ดังรูปที่ 7.17

ตาราง 7.3 แสดงออสซิลเลเตอร์ซึ่งมีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

OSCILLATOR	FIGURE	NEWTON'S LAW	ACCELERATION-DISPLACEMENT RELATION	PERIOD
Spring	 $F = -kx$, x	$\Sigma F = ma$ $-kx = ma$	$a_x = -\left(\frac{k}{m}\right)x$	[17–12] $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Torsion pendulum	 θ, $\tau = -\kappa\theta$	$\Sigma\tau = I\alpha$ $-\kappa\theta = I\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta$	[17–16] $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
Simple pendulum	 l, θ, $l \sin\theta$, mg, $\tau = -mgl\sin\theta$	$\Sigma\tau = I\alpha$ $-mgl\sin\theta = ml^2\alpha$ For small θ, $\sin\theta \simeq \theta$, and $-mgl\theta \simeq ml^2\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{g}{l}\right)\theta$	[17–17] $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Compound pendulum	 L_{cm}, θ, mg, $\tau \doteq -mgL_{cm}\sin\theta$	$\Sigma\tau = I\alpha$ $-mgL_{cm}\sin\theta = I\alpha$ For small θ, $\sin\theta \simeq \theta$, and $-mgL_{cm}\theta \simeq I\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{mgL_{cm}}{I}\right)\theta$	[17–18] $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL_{cm}}}$



รูปที่ 7.17 วงจรออสซิลเลเตอร์ แสดงการเปลี่ยนแปลงรูปของพลังงานในวงจร LC

ซึ่งสมการการออสซิลเลตของกระแสเขียนได้เป็น (เนื้อหาโดยละเอียดจะกล่าวในกระบวนวิชาฟิสิกส์พื้นฐาน 2 PH 112)

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \qquad \text{......7.72}$$

ซึ่งสมการ 7.72 เป็นสมการของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีความถี่เชิงมุม

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{.....7.73}$$

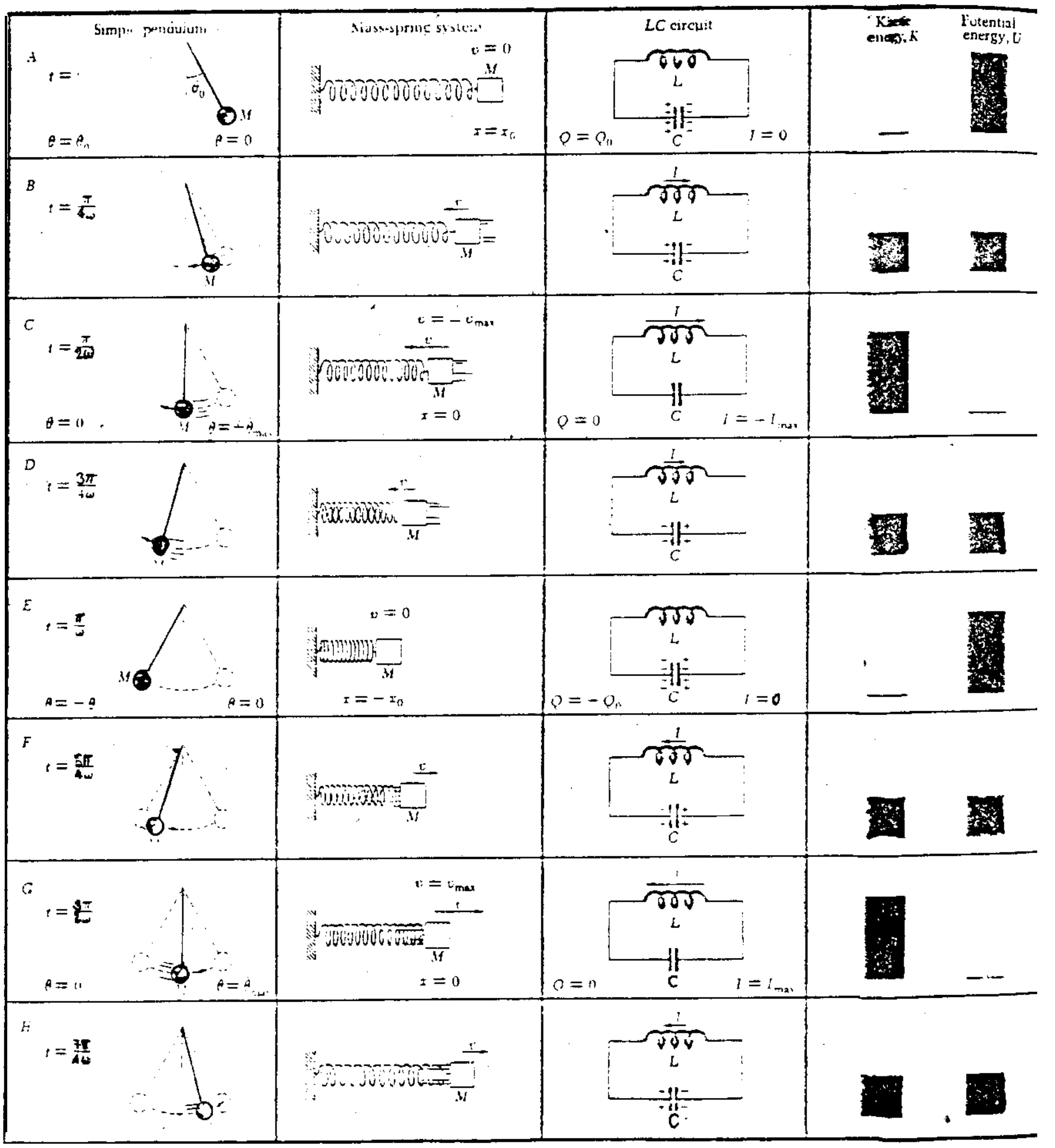
สำหรับพลังงานไฟฟ้า $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$; Q คือ ประจุบนตัวเก็บประจุ

พลังงานแม่เหล็ก $= \frac{1}{2}LI^2$

ดังนั้น พลังงานรวม E $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$ 7.74

E มีค่าคงตัว แม้ว่าพลังงานไฟฟ้าหรือพลังงานแม่เหล็กจะเปลี่ยนแปลงค่า เพราะว่าการเปลี่ยนแปลงพลังงานระหว่างพลังงานแม่เหล็กกับพลังงานไฟฟ้า เช่นเดียวกับการเปลี่ยนแปลงพลังงานระหว่างพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ที่กล่าวถึงในบทนี้ ซึ่งแสดงไว้ในตาราง 7.4

ตาราง 7.4



7.10 การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด

การรวม (superposition) หรือเรียกอีกอย่างว่า การแทรกสอด (interference) ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มี 2 แบบ คือ

1. การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่มีการเคลื่อนที่ไปทางเดียวกัน มีความถี่เท่ากัน

การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มีความถี่เท่ากัน เขียนได้ดังนี้

$$x_1 = A, \sin\ (\omega t + 0,) \qquad \text{......7.75}$$

$$x_2 = A, \sin\ (\omega t + 0,) \qquad \text{......7.76}$$

กระจายสมการ 7.75 และ 7.76 ได้

$$x_1 = A, \cos 0, \sin \omega t + A, \sin 0, \cos \omega t \qquad \text{......7.77}$$

$$x_2 = A, \cos 0, \sin \omega t + A, \sin 0, \cos \omega t \qquad \text{......7.78}$$

รวมกันได้

$$x = x_1 + x_2 = [A, \cos 0, + A, \cos \phi_2] \sin \omega t + [A, \sin 0, + A, \sin \phi_2] \cos \omega t$$

$$= B \sin \omega t + C \cos \omega t \qquad \text{......7.79}$$

เมื่อ $B = A, \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$ 7.80

$C = A, \sin 0, + A, \sin \phi_2$ 7.81

ถ้าเราเขียน

$$x = A \sin\ (\omega t + 0)$$

$$= A \cos 0 \sin \omega t + A \sin 0 \cos \omega t \qquad \text{......7.82}$$

เปรียบเทียบสมการ 7.79 กับสมการ 7.82 โดยใช้คำจำกัดความของ B และ C จากสมการ 7.80 และ 7.81 จะได้

$$A \cos 0 = A, \cos 0, + A, \cos 0, \qquad \text{......7.83}$$

$$A \sin 0 = A, \sin 0, + A, \sin 0, \qquad \text{......7.84}$$

สมการ 7.84 หารด้วยสมการ 7.83 จะได้

$$\tan 0 = \frac{A, \sin 0, + A, \sin 0,}{A, \cos 0, + A_2 \cos 0,} \qquad \text{......7.85}$$

จาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

ผลบวกของกำลังที่สองของสมการ 7.83 และ 7.84 จะได้

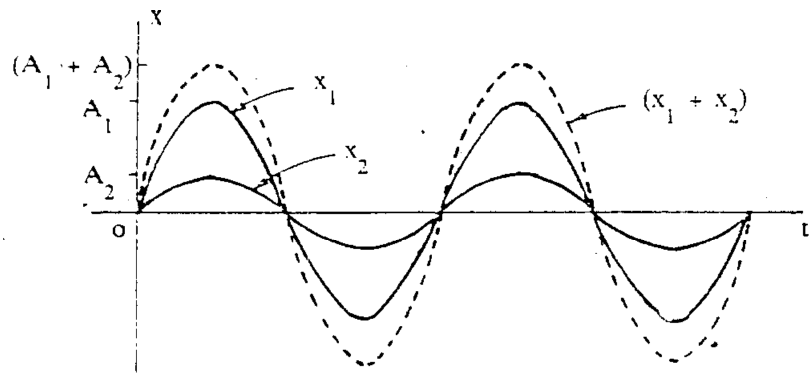
$$A^2 = A^*, + A^2_2 \text{ t } 2A_1A_2 [\cos 0, \cos 0, + \sin 0, \sin \emptyset_2]$$

$$= A^2_1 + A^2_2 + 2A_1A_2 \cos (0, - 0,)$$

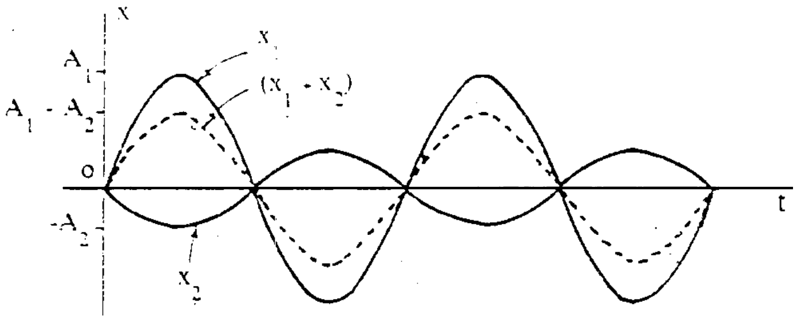
หรือ $A = [A^*, + 2A_1A_2 \cos | 0, - 0, I + A^2_2]^{\frac{1}{2}}$ 7.86

กรณีที่น่าสนใจกรณีแรก คือ $| \emptyset_2 - \emptyset_1 | = 0$ หรือ $\emptyset_1 = \emptyset_2$ เพื่อความสะดวก ให้ $\emptyset_1 = \emptyset_2 = 0$ ดังนั้น

$$x = A, \sin \omega t + A, \sin \omega t = (A, + A,) \sin \omega t$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 7.18 การแทรกสอดของคลื่น 2 คลื่น

(ก) เมื่อมุมเฟสเท่ากัน (ข) เมื่อมุมเฟสแตกต่างกัน 180°

นั่นแสดงว่าการเคลื่อนที่รวมเป็นฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีความถี่ ω คงเดิม และมีแอมปลิจูดเปลี่ยนไปเป็น $A_1 + A_2$ ดังรูป 7.18 (ก)

กรณีที่สอง $|\phi_2 - \phi_1| = \pi$ นั่นคือ x_1 กับ x_2 มีเฟสตรงกันข้าม (out of phase) เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\phi_1 = 0$ และ $\phi_2 = \pi$ ดังนั้น

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \pi) \\ &= A_1 \sin \omega t - A_2 \sin \omega t \\ &= (A_1 - A_2) \sin \omega t \end{aligned}$$

แสดงว่า การเคลื่อนที่รวมยังคงเป็นฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่มีความถี่เท่าเดิม แต่แอมปลิจูดเท่ากับผลต่างของ A_1 และ A_2 ดังรูป 7.18 (ข)

ตัวอย่าง 7.12 อนุภาคตัวหนึ่งมีการเคลื่อนที่ของฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดพร้อม ๆ กัน ด้วยความถี่และทิศทางเดียวกัน ถ้าสมการของการเคลื่อนที่ทั้งสองเป็น $x_1 = 10 \sin 2t$ และ $x_2 = 6 \sin[2t + (5\pi/12)]$ ตามลำดับ จงหาสมการของการเคลื่อนที่รวมของอนุภาค

วิธีทำ เนื่องจากว่าผลต่างของมุมเฟสเท่ากับ $5\pi/12$ เรเดียน และแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่เป็น $A_1 = 10$ และ $A_2 = 6$ ดังนั้น จากสมการ 7.85 จะมีแอมปลิจูดรวมเป็น

$$\begin{aligned} A &= [10^2 + 6^2 + 2(10)(6)\cos(5\pi/12)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 12.92 \end{aligned}$$

และสมการของการเคลื่อนที่รวมเป็น

$$x = 12.92 \sin(2t + \phi)$$

โดย ϕ เป็นผลต่างของมุมเฟส ระหว่าง x และ x_1 ที่เวลา $t = 0$ จะได้

$$x = 12.92 \sin 0$$

และ

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + x_2) \\ &= 0 + 6 \sin(5\pi/12) = 5.796 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\sin 0 = \frac{5.796}{12.92} = 0.4486$$

$$\phi = 26.5^\circ = 0.15\pi \text{ เรเดียน}$$

ดังนั้น

$$x = 12.92 \sin(2t + 1.15\pi)$$

กิจกรรม 7.4

ให้นักศึกษาแสดงกราฟของการรวมคลื่นสำหรับตัวอย่าง 7.12

2. การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดมีแนวตั้งฉากกันและความถี่เดียวกัน ให้ระยะกระจัด x และ y เป็นของทั้งสองฮาร์มอนิก โดยที่

$$x = .A \sin(\omega t + 0,) \qquad \text{......7.87}$$

$$y = B \sin(\omega t + 0,) \qquad \text{......7.88}$$

กำหนดให้ผลต่างของเฟสเริ่มต้น $\delta = \emptyset_1 - \emptyset_2$ จะพิจารณากรณีง่าย ๆ ที่ δ มีค่าต่าง ๆ เพียงบางกรณี ดังนี้

ก. $\delta = 0, 2\pi$ (= 360°) ซึ่ง x และ y จะมีเฟสตรงกัน ให้ $\emptyset_1 = \emptyset_2 = 0$ จากสมการ 7.87 และ 7.88 เราได้

$$y = \frac{B}{A}x \qquad \text{......7.89}$$

สมการ 7.89 เป็นสมการเส้นตรง มีความชันเท่ากับ $\frac{B}{A}$ มีแอมปลิจูดเท่ากับ $[A^2 + B^2]^{1/2}$ และการที่รวมเฟสมีทิศการเคลื่อนที่ที่ทำให้ x และ y มีเครื่องหมายเหมือนกันตลอดเวลา คือ บวกทั้งคู่ หรือลบทั้งคู่ ดูรูป 7.19

ข. $\delta = \pi = 180^\circ$ ให้ $\emptyset_1 = 0, \emptyset_2 = \pi$

จะได้

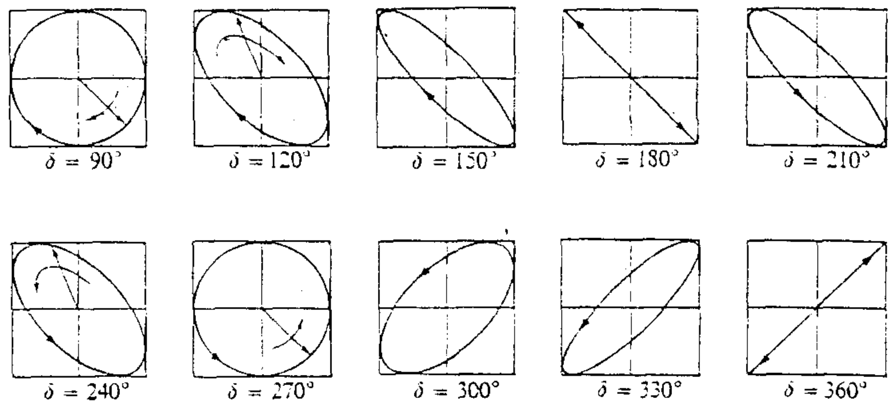
$$x = A \sin \omega t$$

$$y = B \sin(\omega t + \pi) = -B \cos \omega t$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y คือ

$$y = -\frac{B}{A}x \qquad \text{......7.90}$$

ซึ่งสมการ 7.90 เป็นสมการเส้นตรงเหมือนกับสมการ 7.89 แต่ความชันมีค่าเป็นลบ หมายความว่า x และ y มีเครื่องหมายตรงข้าม ดังรูป 7.19



รูปที่ 7.19 แสดงการรวมเฟสของสองคลื่นฮาร์มอนิกอย่างง่ายสำหรับ δ มีค่าต่าง ๆ บางค่า เรียกว่า รูปลิซซาจู

ค. $\delta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ และ $\delta = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ ให้ $\phi_1 = 0$

ถ้า $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$x = A \sin \omega t \text{ และ } y = B \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B \cos \omega t \qquad \ldots\ldots 7.91$$

ถ้า $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$ จะได้

$$x = A \sin \omega t \text{ และ } y = B \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -B \cos \omega t \qquad \ldots\ldots 7.92$$

ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ดังนี้

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad \ldots\ldots 7.93$$

ทั้ง. $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ และ $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$

สมการ 7.93 แสดงว่าคลื่นรวมเคลื่อนที่เป็นวงรี (ellipse) กรณีพิเศษคือ A = B จะได้การเคลื่อนที่เป็นวงกลม ในกรณีที่ $\phi_2 = 90^\circ$ นั้น (ดูสมการ 7.90 ประกอบรูป) พิจารณาที่

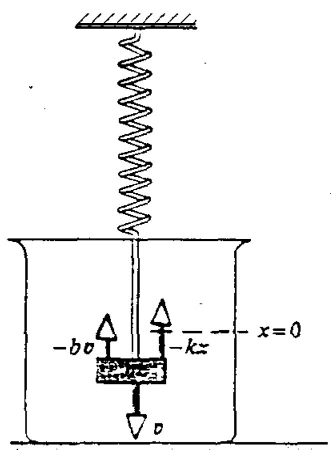
จุดเริ่มต้น $t = 0$ (จุดบนสุด) $x = 0$, y มีค่ามากที่สุด คือเท่ากับ A เมื่อ t เพิ่ม x จะเพิ่มขึ้น แต่ y จะลดลงจากค่าสูงสุด ในกรณีนี้เส้นทางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามเข็มนาฬิกา กรณีที่ $\phi_2 = 270^\circ$ นั้น (ดูสมการ 7.92 ประกอบรูป) พิจารณาจุดเริ่มต้น $t = 0$ (จุดล่างสุด) $x = 0$, y มีค่าน้อยที่สุด คือ (-A) เมื่อ t เพิ่ม x จะเพิ่มขึ้น และ y จะมีค่ามากขึ้น เส้นทางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อรวมการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่ตั้งฉากกัน แต่ความถี่ไม่เท่ากัน ผลรวมจะได้เส้นทางการเคลื่อนที่ที่มีรูปร่างต่าง ๆ กัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความถี่ ($\omega_1 : \omega_2$) และผลต่างของมุมเฟสเริ่มต้น (δ) เส้นทางเหล่านี้เป็นไปตาม รูปลิซซาจู (Lissajous figures) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Jules Antoine Lissajous (1822-1880) ผู้ได้ศึกษาเรื่องนี้ไว้อย่างละเอียด

สำหรับการรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดมีทิศเดียวกันแต่ความถี่ต่างกัน จะพูดถึงในบทที่ 10 เมื่อกล่าวถึงปรากฏการณ์ที่เรียกว่า บีตส์ (beats)

7.11 การออสซิลเลตแบบหน่วง (Damped Oscillation)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของระบบต่าง ๆ ที่แล้วมา เราได้ละเว้นไม่ได้นำแรงต้านทาน เช่น แรงเสียดทานของอนุภาคมาคิดด้วย จึงได้แอมปลิจูดของการออสซิตเลตมีค่าคงตัว และการออสซิลเลตดำเนินไปได้อย่างไม่หยุดยั้งตามการเคลื่อนที่อย่างอิสระของอนุภาค แต่โดยความเป็นจริงของธรรมชาติแล้ว อนุภาคเมื่อมีการเคลื่อนที่ย่อมต้องมีแรงต้านทานหรือแรงเสียดทานเกิดขึ้นเสมอ ทำให้แอมปลิจูดของการเคลื่อนที่จะค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 7.20



รูปที่ 7.20 ตัวอย่างหนึ่งของการออสซิลเลตแบบหน่วงคือ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในของเหลว

แรงต้านทานหรือแรงหน่วงชนิดหนึ่งที่คุ้นเคยกันดี ซึ่งเป็นสัดส่วนตรงกับความเร็ว แต่กระทำในทิศทางที่ตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ อย่างในรูป 7.20 นั้น แรงหน่วง = $-bv$ เมื่อ b คือค่าคงตัว และแรงคืนตัวคือ $-kx$ ดังนั้นกฎข้อ 2 ของนิวตัน เขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$ma = m\frac{d^2x}{dt} = -kx - bv, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{bdx}{mdt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \ldots\ldots 7.94$$

ซึ่งรากของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการ 7.94 คือ

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + 0) \qquad \ldots\ldots 7.95$$

$$\omega = \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \ldots\ldots 7.96$$

ในกรณีนี้เราให้ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ และเรียก ω_0 ว่า **ความถี่ธรรมชาติ** (natural frequency) ซึ่งหมายถึงความถี่ถ้าไม่นำแรงหน่วงมาคิด คือกรณีที่ $b = 0$ และถ้าให้ $\gamma = \frac{b}{2m}$, เรียก γ ว่า **ค่าพารามิเตอร์ของความหน่วง** (damping parameter) สมการ 7.96 อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2} \qquad \ldots\ldots 7.97$$

ดังนั้น ความถี่ ω จะมีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ ω_0

การที่จะตรวจสอบว่า สมการ 7.95 เป็นรากของสมการ 7.94 จริงนั้น ก็ทำได้โดยการแทนค่า $x(t)$ จากสมการ 7.95 ในสมการ 7.94 จากสมการ 7.97 ถ้า γ มีค่าไม่มากนัก ($\gamma < \omega_0$) จะเห็นว่าการหน่วงมีผลทำให้ความถี่ของการออสซิลเลตลดลง แต่คาบของการแกว่ง ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) ยาวขึ้น นั่นคือแรงเสียดทานจะทำให้การเคลื่อนที่ช้าลง แอมปลิจูด $Ae^{-\gamma t}$ จะมีค่าลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่าง 7.13 แอมปลิจูดของออสซิลเลเตอร์แบบหน่วงอันหนึ่งลดลง 50 เปอร์เซ็นต์ ในแต่ละรอบ

ก. จงพิสูจน์ว่า $\frac{bT}{2m} = \ln 2$ หรือ $\frac{b}{2m} = (\ln 2)\frac{\omega}{2\pi}$

ข. จงพิสูจน์ว่า อัตราส่วนการลดของความถี่เท่ากับ 0.006

วิธีทำ

ก. พิสูจน์ : แอมปลิจูด ณ เวลา t $= Ae^{-\gamma t}$ ....(1)

แอมปลิจูด ณ เวลา (t + T) $= Ae^{-\gamma(t+T)}$ ....(2)

สมการ (2) หารด้วยสมการ (1) เท่ากับ 50 เปอร์เซ็นต์

นั่นคือ $e^{-\gamma T} = \frac{1}{2}$

$e^{\gamma T} = 2$

$\ln(e^{\gamma T}) = \ln 2, \quad \gamma T = \ln 2$

จาก $\gamma = \frac{b}{2m}$

จะได้ $\frac{b}{2m}T = \ln 2$

จาก $T = \frac{2\pi}{\omega}$

ดังนั้น $\frac{b}{2m} = (\ln 2)\frac{\omega}{2\pi}$

ข. จากสมการ 7.97 $\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2}$

$$\omega = \left[\omega_0 \quad 1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

ใช้การกระจายทฤษฎีบททวินาม จะได้

$$\omega \cong \omega_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]$$

จากข้อ fl. $\frac{\gamma}{\omega_0} \cong \frac{1}{2\pi}\ln 2$

ดังนั้น $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\ln 2\right)^2$

$= 0.000$

7.12 การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ

ถ้ามีแรงภายนอกที่เป็นการเคลื่อนที่แบบคาบมากระทำต่อวัตถุ และทำให้วัตถุนั้นออสซิลเลต เราเรียกการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบนี้ว่า **การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ** (forced oscillation) เช่น แรงภายนอก คือ

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t \qquad ......7.98$$

เมื่อ ω คือ ความถี่เชิงมุมของแรง ซึ่งตามปกติแล้วก็ไม่มีอะไรที่เกี่ยวข้องกับความถี่เชิงมุมธรรมชาติของระบบ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ มวล m ที่ติดอยู่กับสปริงซึ่งมีค่า $k = m\omega^2_0$ อยู่ภายใต้แรง F_{ext} ซึ่งเราจะพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

1. การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำแต่ไม่มีแรงหน่วง

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m เขียนได้เป็น

$$ma = -kx + F_{ext}$$

หรือ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

หรือ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \qquad ......7.99$$

รากของสมการ 7.99 คือ

$$x = A \sin \omega t \qquad ......7.100$$

ดังนั้น $$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t \qquad ......7.101$$

แทนสมการ 7.100 และ 7.101 ในสมการ 7.99 ได้

$$-A\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 A \sin \omega t = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

หรือ $$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad ......7.102$$

จากสมการ 7.102 จะเห็นว่า A เป็นบวก ถ้า $\omega < \omega_0$ และ A จะเป็นลบ ถ้า $\omega > \omega_0$ ดังนั้น ถ้าจะให้ A เป็นเฉพาะค่าบวก โดยเขียน A ดังนี้คือ

$$A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \qquad \ldots\ldots 7.103$$

ดังนั้น ระยะกระจัด x (สมการ 7.99 ต้องเขียนเป็น)

$$x = A \sin(\omega t - 0) \qquad \ldots\ldots 7.104$$

เมื่อค่าคงตัวเฟส $0 = 0$ เมื่อ $w < \omega_0$ และ $0 = \pm\pi$ เมื่อ $w > \omega_0$

จากสมการ 7.103, 7.104 จะเห็นว่า มวลจะออสซิลเลต in phase กับแรงขับ F_{ext} ถ้า ω น้อยกว่า ω_0 และจะออสซิลเลตมีเฟสแตกต่าง 180 องศา ได้ ω มากกว่า ω_0

แอมปลิจูดของการออสซิลเลตจะมีค่ามาก ถ้าความถี่ของแรงภายนอก ω มีค่าใกล้กับความถี่ธรรมชาติ ω_0 และในกรณีที่ ω มีค่าเข้าใกล้ ω_0 แอมปลิจูดจะเข้าสู่ค่าอนันต์ แต่ในธรรมชาติจริง ๆ นั้นมักจะมีแรงหน่วงเกิดกับระบบเสมอ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

2. การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำและมีแรงหน่วง

การเคลื่อนที่ของมวล m อยู่ภายใต้แรงหน่วง -bv ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ตามกฎข้อ 2 ของนิวตัน เขียนได้เป็น

$$ma = -kx - bv + F_{ext}$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{bv}{m} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad \ldots\ldots 7.105$$

ใช้ความสัมพันธ์ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ และ $v = \frac{dx}{dt}$ สมการ 7.105 เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \qquad \ldots\ldots 7.106$$

รากของสมการ 7.106 (จะไม่พิสูจน์ในตำรานี้) ที่เป็นไปได้รากหนึ่งซึ่งเป็นรากของสถานะอยู่ตัว (steady state) จะเป็น

$$x = A \sin (\omega t - a) \qquad \ldots\ldots 7.107$$

โดยที่แอมปลิจูด A มีค่าเป็น

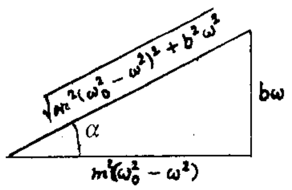
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad \ldots\ldots 7.108$$

และค่าคงตัวเฟส α คือ

$$\tan \alpha = \frac{b\omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

หรือถ้าเขียนในพจน์ของฟังก์ชันไซน์ (ดูรูป 7.21) จะได้

$$\sin \alpha = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0} \qquad \ldots\ldots 7.109$$



รูปที่ 7.21 มุมเฟส α จากสมการ 7.109

ความเร็วของมวล m ในสถานะอยู่ตัว หาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ 7.107 ผลที่ได้คือ

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos (\omega t - \alpha) \qquad \ldots\ldots 7.110$$

กำลังที่ให้เข้าไปกับระบบ คือ

$$P = Fv = (F, \sin \omega t)\, A\omega \cos (\omega t - a)$$

$$= A\omega F_0 \sin\omega t \cos (\omega t - a) \qquad \ldots\ldots 7.111$$

โดยใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\cos (\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

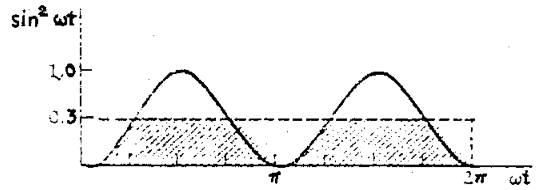
สมการ 7.111 เขียนใหม่ได้เป็น

$$P = \omega AF_0 \sin\alpha \sin^2\omega t + \omega AF_0 \cos\alpha \sin\omega t \cos\omega t$$

ถ้าจะหากำลังเฉลี่ยในแต่ละรอบของการออสซิลเลตนั้น จะเห็นว่าค่าเฉลี่ยของ $\sin\omega t \cos\omega t$ เท่ากับศูนย์ เพราะมีค่าเป็นบวกและลบเท่า ๆ กัน และค่าเฉลี่ยของ $\sin^2\omega t$ ในหนึ่งรอบเท่ากับ $\frac{1}{2}$ (ดูรูป 7.22)

ดังนั้น กำลังเฉลี่ย คือ

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\omega AF_0 \sin\alpha \qquad \ldots\ldots 7.112$$



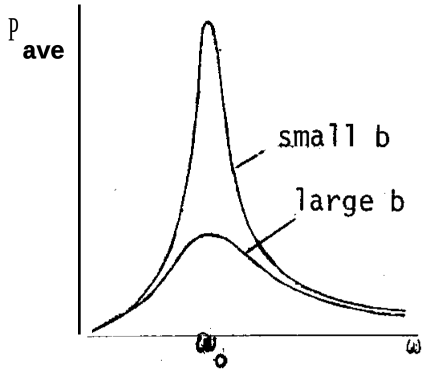
รูปที่ 7.22 กราฟของ $\sin^2\omega t$ ในหนึ่งรอบ ค่าเฉลี่ยคือ $\frac{1}{2}$

แทนสมการ 7.108, 7.109 ในสมการ 7.112 เราจะได้

$$P_{ave} = \frac{1}{2} b\omega^2 A^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \qquad \ldots\ldots 7.113$$

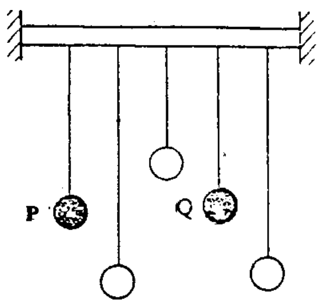
จะเห็นว่า P_{ave} จะมีค่าสูงสุด เมื่อ $\omega = \omega_0$ เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า **เกิดการสั่นพ้อง** (resonance) และบางครั้งเรียก $\omega = \omega_0$ ความถี่การสั่นพ้อง (resonance frequency) กราฟของสมการ 7.113 ดูได้จากรูป 7.23



รูปที่ 7.23 กราฟของกำลังเฉลี่ยสำหรับค่า b ต่างๆ กัน

สำหรับการศึกษาเรื่องการออสซิลเลตแบบหน่วง การออสซิลเลตเมื่อมีแรงกระทำ จะหาอ่านได้ในตำรากลศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป หรือตำราวิชาคลื่น

การแสดงการสั่นพ้องนั้น สามารถแสดงได้ดังรูป 7.24



รูปที่ 7.24 การสาธิตการเกิดการสั่นพ้องด้วยลูกตุ้มอย่างง่าย

ระบบประกอบด้วยลูกตุ้มชุดหนึ่งซึ่งมีความยาวต่าง ๆ กัน แขวนจากคานเดียวกัน เราทำให้ลูกตุ้ม P ออสซิลเลต ลูกตุ้มอื่น ๆ ก็จะเริ่มออสซิลเลตด้วย แต่จะพบว่า ลูกตุ้ม Q ซึ่งมีความยาวเท่ากับลูกตุ้ม P (มีความถี่ธรรมชาติเท่ากัน) จะออสซิลเลตด้วยแอมปลิจูดกว้างที่สุด

กิจกรรม 7.5

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบผลของการออสซิลเลตแบบหน่วงกับการออสซิลเลตด้วยแรงกระทำจากภายนอกว่าให้ผลต่างกันอย่างไร

สรุป

ตามปกติสถานะของสสารแบ่งออกได้เป็น 3 สถานะ คือ ของแข็ง ของเหลว และก๊าซ

สมบัติความยืดหยุ่นของของแข็ง สามารถอธิบายได้โดยความเค้นและความเครียด ความเค้นเป็นปริมาณที่เป็นสัดส่วนตรงกับแรงที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปทรง และความเครียดเป็นปริมาณที่วัดการเสียรูปทรง

มอดุลัสของความยืดหยุ่น มีนิยามดังนี้

$$\text{มอดุลัสของความยืดหยุ่น} \equiv \frac{\text{ความเค้น}}{\text{ความเครียด}}$$

จำแนกออกเป็น 3 ชนิด คือ มอดุลัสของญัง มอดุลัสเฉือน และมอดุลัสเชิงปริมาตร หรือบัลค์มอดุลัส

การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายเป็นการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบ ซึ่งสมการการเคลื่อนที่เขียนได้ว่า

$$x = A \sin(\omega t + \varnothing)$$

เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบเรียกว่า คาบ (T) นิยามว่า

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ส่วนกลับของคาบคือ ความถี่ของการเคลื่อนที่ ซึ่งหมายถึงจำนวนการออสซิลเลตต่อวินาที

ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย คือ

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + 0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + 0)$$

ดังนั้น ความเร็วสูงสุดคือ $A\omega$ และความเร่งสูงสุดคือ $A\omega^2$ ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์เมื่อออสซิลเลเตอร์อยู่ที่จุดกลับ $x = \pm A$ และอัตราเร็วจะสูงสุดที่ตำแหน่งสมดุล $x = 0$ ขนาดของความเร่งมีค่าสูงสุดที่จุดกลับและมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสมดุล

มวลที่ยึดติดกับสปริงแขวนในแนวดิ่งหรือเคลื่อนที่ในแนวนอนบนพื้นเรียบที่ไม่มีแรงเสียดทาน จะเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ซึ่งคาบของการเคลื่อนที่ คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

เมื่อ k คือ ค่าคงตัวของแรงหรือค่าคงตัวของสปริง และ m คือ มวลที่ยึดติดอยู่กับสปริง พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิก ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา คือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + 0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + 0)$$

พลังงานรวมซึ่งมีค่าคงตัว เท่ากับ

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

ลูกตุ้มอย่างง่ายความยาว L แกว่งด้วยมุมมีค่าน้อย ๆ จะมีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ซึ่งมีคาบ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

จะเห็นว่า คาบไม่ขึ้นอยู่กับมวลที่แขวน

ลูกตุ้มฟิสิกัลมีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายรอบแกนที่ไม่ผ่านศูนย์กลางมวล คาบของการเคลื่อนที่ คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad (D = L_{CM} \text{ ในตาราง } 7.3)$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนหมุน และ D คือ ระยะทางจากจุดบนแกนหมุนถึงศูนย์กลางมวลในแนวตั้งฉาก

การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มีแนวตั้งฉากกันและมีความถี่เดียวกันจะได้รูปลิซซาจู

การแกว่งที่ถูกหน่วงเกิดขึ้นเนื่องจากระบบต้องสูญเสียพลังงานไป อันเนื่องจากความเสียดทาน ความถี่เชิงมุมจะมีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แอมปลิจูดของการเคลื่อนที่จะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

การแกว่งที่ถูกแรงบังคับ ถ้าความถี่ของแรงบังคับเท่ากับความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แรงขับเคลื่อนจะถ่ายทอดพลังงานให้กับออสซิลเลเตอร์ด้วยอัตราสูงสุด

แบบฝึกหัดที่ 7

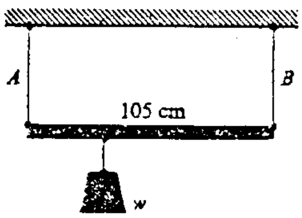
7.1 ท่อนเหล็กมีพื้นที่ภาคตัดขวาง 50 ตารางเซนติเมตร ยาว 1.80 เมตร ถ้าถูกกระทำด้วยแรงดึง 320,000 นิวตัน จะยืดออกกี่เมตร กำหนดให้มอดุลัสของญังเท่ากับ 20×10^{10} นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 5.76×10^{-4} m

7.2 ขีดจำกัดของเหล็กกล้าที่ใช้ทำสายลิฟต์ มีค่าเท่ากับ 2.8×10^8 นิวตัน/เมตร^2 จงหาความเร่งสูงสุดของลิฟต์หนัก 8,000 นิวตัน เมื่อสายลิฟต์มีพื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ 3.5×10^{-4} เมตร^2 และความเค้นต้องไม่เกิน $\frac{1}{4}$ ของขีดจำกัดของการยืดหยุ่น

ตอบ 30 m/s^2

7.3 แท่งวัตถุเบามากยาว 105 เซนติเมตร ถูกแขวนไว้ที่ปลายทั้งสองด้วยลวด A และ B ที่ยาวเท่ากัน (รูป 7.25) พื้นที่ภาคตัดขวางของ A = 1 mm^2 และของ B = 2 mm^2, มอดุลัสของญังของลวด A = 2.1×10^{11} N . m^{-2} และของ B = 1.4×10^{11} N . m^{-2} จงหาจุดแขวนของน้ำหนัก W เพื่อให้เกิด



รูปที่ 7.25

ก. ความเค้นของลวด A และ B เท่ากัน

ข. ความเครียดของลวด A และ B เท่ากัน

ตอบ ก. 70 เซนติเมตรจากปลาย A, ข. 60 เซนติเมตรจากปลาย A

7.4 แผ่นโลหะ 2 แผ่น ย้ำติดกันด้วยหมุดย้ำหัว 4 ตัว แต่ละตัวมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 มิลลิเมตร แผ่นโลหะที่ย้ำปลายแล้วนี้จะรับแรงดึงได้สูงสุดเท่าไร ทั้งนี้ความเค้นเฉือนที่หมุดจะต้องไม่เกิน 7×10^7 นิวตัน/เมตร^2 ให้ถือว่าหมุดแต่ละตัวรับน้ำหนักเท่ากัน

ตอบ 7.9×10^3 N

7.5 เดิมก๊าซมีความดัน 1 บรรยากาศ ต่อมาความดันเพิ่มเป็น 1.01 บรรยากาศโดยที่อุณหภูมิคงเดิม

ก. ปริมาตรใหม่เป็นร้อยละเท่าใดของปริมาตรเดิม

ข. บัลค์มอดุลัสของก๊าซนี้เท่ากับเท่าใด

ตอบ ก. 99% , ข. 1.01 atm

7.6 จงหาความหนาแน่นของน้ำทะเล ณ ความลึกอันหนึ่งซึ่งมีความดัน 3×10^{7} นิวตัน/เมตร^2 ที่ผิวน้ำทะเลมีความหนาแน่น 1,020 กิโลกรัม/เมตร^3 น้ำมีสภาพอัดได้ = 5×10^{-10} (นิวตัน/เมตร^2)$^{-1}$ และความดันบรรยากาศ = 10^5 นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 1,035 kg . m-3

7.7 บัลค์มอดุลัสของปรอท = 2.6×10^{10} นิวตัน/เมตร^2 จงหาจำนวนร้อยละของปริมาตรที่ลดลง เมื่อเพิ่มความดันเป็น 10 บรรยากาศ 1 บรรยากาศ = 1.013×10^5 นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 3.9×10^{-3}%

7.8 เดิมสปริงยาว 20 เซนติเมตร เมื่อเอามวล 1 กิโลกรัม ไปแขวนห้อยไว้ สปริงจะยาว 24.5 เซนติเมตร

ก. ค่าแรงคงตัวของสปริงเท่ากับเท่าใด

ข. ถ้าเติมมวลอีก 0.6 กิโลกรัม สปริงจะยาวเท่าใด

ตอบ 218 N . m^{-1}, ข. 27.2 cm

7.9 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักแขวนห้อยเข้ากับสปริง ครั้งแรกแขวน 10 นิวตัน วัดสปริงได้ยาว 15 เซน-ติเมตร ครั้งที่สองแขวน 20 นิวตัน วัดสปริงได้ยาว 20 เซนติเมตร และครั้งสุดท้ายแขวน 30 นิวตัน วัดได้ 25 เซนติเมตร ค่าแรงคงตัวและความยาวเดิมของสปริงเป็นเท่าใด

ตอบ 200 N . m^{-1}, 10 cm

7.10 อนุภาคเคลื่อนที่ตามแกน x เป็นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย เริ่มจากจุดกำเนิด t = 0 และเคลื่อนที่ไปทางขวา ถ้าแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่เท่ากับ 2 เซนติเมตร และความถี่เท่ากับ 1.5 เฮิรตซ์

ก. จงแสดงว่าระยะกระจัด คือ $x = 2 \sin 3\pi t$

ข. จงหาอัตราเร็วสูงสุด และเวลาที่อนุภาคมีความเร็วสูงสุดนี้เป็นครั้งแรก

ค. ความเร่งสูงสุดและเวลาที่อนุภาคมีความเร่งสูงสุดนี้เป็นครั้งแรก

ง. ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ระหว่าง $t = 0$ และ $t = 1$ วินาที

ตอบ ข. 6π cm/s, 0.33 s ค. $18\pi^2$ cm/s², 0.5 s

ง. 12 cm

7.11 กำหนดให้วัตถุมีมวล 250 กรัม เคลื่อนที่ไปมาด้วยแรงคงตัว $k = 40$ N/m เริ่มต้นวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมีทิศไปทางขวา 40 ซม./วินาที ณ จุดเริ่มต้นซึ่งห่างจากตำแหน่งสมดุลไปทางขวา 10 ซม. จงคำนวณหา

(ก) คาบเวลา T, ความถี่ f, และความถี่เชิงมุม ω

(ข) พลังงานทั้งหมด

(ค) แอมปลิจูด A

(ง) ความเร็วและความเร่งสูงสุด

(จ) ระยะกระจัด, ความเร็วและความเร่ง ณ เวลาผ่านไป $\frac{\pi}{8}$ วินาที

ตอบ (ก) 1.57 s, 0.638 H_8, 4 rad/s (ข) 0.04 J

(ค) 0.14 m (ง) 0.57 m/s, 2-3 m/s²

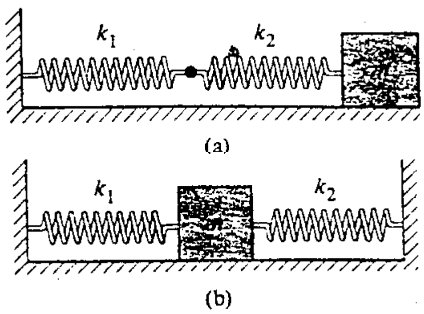
(จ) 0.1 m, -0.4 m/s, -1.6 m/s²

7.12 มวล 1 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง 2 อัน ดังรูป 7.26 ซึ่งค่าคงตัวของสปริงคือ $k_1 = 200$ นิวตัน/เมตร และ $k_2 = 250$ นิวตัน/เมตร

ก. จงหาคาบของการเคลื่อนที่ รูป 7.26 (a)

ข. จงหาคาบของการเคลื่อนที่ รูป 7.26 (b)

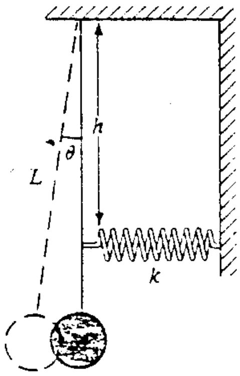
ตอบ tl. 0.6 s ข. 0.3 s



รูปที่ 7.26 แบบฝึกหัดที่ 7.12

7.13 ลูกตุ้มความยาว L และมวล M มีสปริง ซึ่งมีค่าคงตัวของแรง k ติดอยู่ห่างจากจุดแขวน h ดังรูป 7.27 จงหาความถี่ของการเคลื่อนที่ของระบบ กำหนดว่า θ มีค่าน้อย ๆ

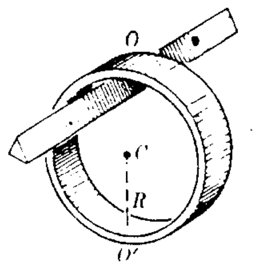
ตอบ $\omega = \left[\dfrac{MgL + kh^2}{I}\right]^{1/2}$



รูปที่ 7.27 แบบฝึกหัดที่ 7.13

7.14 วงแหวนรัศมี 50 เซนติเมตร คล้องอยู่กับแกน ดังรูป 7.28 ถ้าทำให้วงแหวนเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลเล็กน้อยแล้วปล่อย จงหาคาบของการออสซิลเลต

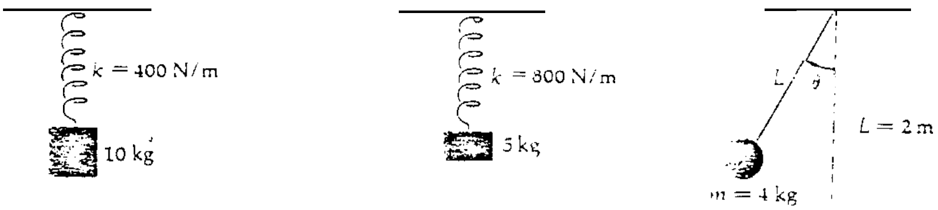
ตอบ 2 s



รูปที่ 7.28 แบบฝึกหัดที่ 7.14

7.15 จงหาความถี่แห่งการสั่นพ้อง (resonant frequency) ของระบบในรูปที่ 7.29

ตอบ ω = 6.32 rad/s, 12.65 rad/s, 2.21 rad/s



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 7.29 แบบฝึกหัดที่ 7.15

7.16 จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของการรวมกันได้ของการเคลื่อนที่ของสองฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่ขนานกัน และมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $x_1 = 2\sin(\omega t + \pi/3)$ และ $x_2 = 3\sin(\omega t + \pi/2)$

ตอบ $x = 4.835\sin(\omega t + 0.437\pi)$

7.17 จงหาสมการของทางเดินของการเคลื่อนที่รวมของอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่ตั้งได้ฉากกัน และมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$x = 4 \sin \omega t \text{ และ } y = 3 \sin(\omega t + \varnothing)$$

โดยในแต่ละกรณีให้เขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อ

fl. $0 = 0$ ข. $\varnothing = \frac{\pi}{2}$ ค. $0 = \pi$

ตอบ ก. $x = \frac{4}{3}y$, ข. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ค. $x = -\frac{4}{3}y$

7.18 มวล 2 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง $k = 400$ นิวตัน/เมตร มีแอมปลิจูดเริ่มต้น 3 เซนติเมตร

ก. จงหาคาบและพลังงานรวมเริ่มต้น

ข. ถ้าพลังงานลดลงร้อยละ 1 ในแต่ละคาบ จงหาค่าคงตัวการหน่วง b

ตอบ ก. 0.44 s, 0.18 J ข. 0.045 kg/s

7.19 มวล 2 กิโลกรัม ติดกับสปริง $k = 400$ นิวตัน/เมตร $b = 2.0$ กิโลกรัม/วินาที แรงขับเป็นฟังก์ชันไซน์ มีค่าสูงสุด 10 นิวตัน และความถี่เชิงมุม 10 เรเดียนต่อวินาที

ก. จงหาแอมปลิจูดของการออสซิลเลต

ข. ถ้าความถี่ของแรงขับแปรค่าได้ ความถี่นี้จะมีค่าเท่าใด เมื่อเกิดการสั่นพ้อง

ค. หาแอมปลิจูดของการออสซิลเลตเมื่อเกิดการสั่นพ้อง

ตอบ ก. 4.98 cm ข. 14.1 rad/s ค. 35.4 cm

7.20 มวล 0.5 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง $k = 300$ นิวตันต่อเมตร ในช่วง 10 วินาทีของการออสซิลเลต ระบบสูญเสียพลังงานให้กับความเสียดทาน 0.5 จูล ถ้ากำหนดให้แอมปลิจูดเริ่มต้นเท่ากับ 15 เซนติเมตร

ก. จงหาเวลาที่พลังงานจะลดลงเหลือ 1 จูล

ข. ความถี่ของการออสซิลเลต

ตอบ ก. 219 s ข. $\omega = 24.5$ rad/s, $f = 3.90$ Hz