บทที่ 6
การหมุน การเคลื่อนที่แบบเส้นโค้งและแบบวงโคจร

เค้าโครงเรื่อง

6.1 จลนศาสตร์ของการหมุน

ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

6.2 แรงสู่ศูนย์กลางและแรงผ่านศูนย์กลาง

6.2.1 แรงสู่ศูนย์กลาง

6.2.2 แรงผ่านศูนย์กลาง

6.2.3 กฎความโน้มถ่วงเอกภพของนิวตัน

มวลและน้ำหนัก

6.2.4 พลังงานศักย์โน้มถ่วง

ความเร็วหลุดพ้น

6.2.5 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม

6.2.6 การยกขอบทางโค้ง

6.3 พลศาสตร์ของการหมุน

6.3.1 พลังงานจลน์ของการหมุนและโมเมนต์ของความเฉื่อย

6.3.2 การหาโมเมนต์ของความเฉื่อย

6.3.3 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของอนุภาค

6.3.4 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของระบบอนุภาค

6.3.5 การเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป

6.3.6 การกลิ้งของวัตถุ

6.3.7 หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

6.4 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

สาระสำคัญ

1. ความเร็วเชิงมุมบัดดลของอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง คือ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

โดย ω มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที

ความเร่งเชิงมุมบัดดลของอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง คือ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

โดย α มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที^{2}

ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัว จะแสดงสมการทางจลนศาสตร์ได้ในทำนองเดียวกันกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น ดังนี้

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมกับความเร็วเชิงเส้นและความเร่งในแนวสัมผัสวง

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_T = \alpha \mathbf{r}$$

2. กฎข้อสองของนิวตันสำหรับการเคลื่อนที่เป็นวงกลม คือ

$$F_c = ma_c = m\omega^2 r$$

โดย F_c คือ แรงสู่ศูนย์กลาง และ a_c คือ ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

แรงโน้มถ่วงระหว่างมวล

$$F_g = (Gm_1m_2)/r^2$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุซึ่งถูกโลกดึงดูด (ระดับอ้างอิงที่ระยะอนันต์)

$$E_p = -(Gm_e m)/r$$

พลังงานรวมของระบบอิสระซึ่งประกอบด้วยมวล m เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ภายใต้แรงดึงดูดจากมวล M คือ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - (GMm)/r$$

ถ้าพิจารณาจากสมการพลังงานรวม จะได้ว่าความเร็วหลุดพ้นคือความเร็วต้นที่ผิวโลกเมื่อพลังงานรวมเป็นศูนย์

$$E = \frac{1}{2}mv^2_{escape} - (GM_e m)/R = 0$$

นั่นคือ $v_{escape} = [(2Gme)/R]^{1/2}$

พลังงานรวมของดาวเทียมที่ระยะสูง h จากผิวโลก คือ

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - (GM_e m)/(R+h)$$

สำหรับการโคจรของดาวเคราะห์จะเป็นไปตามกฎข้อ 3 ของเคปเลอร์

$$T^2 = (4\pi^2/GM_e)r^3$$

ตามปกติรถแล่นผ่านทางโค้งจะเสียการทรงตัวจึงต้องสร้างถนนบริเวณทางโค้งให้เอียงลาดจากขอบถนนลงไป โดยค่าความเอียงของถนนหรือการยกขอบถนน คือ

$$\tan\alpha = v^2/(Rg)$$

3. โมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบอนุภาค

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

ในระบบเอสไอ มีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร^2

ค่า I ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแกนหมุนและรูปร่างของวัตถุ และการกระจายของเนื้อวัตถุ โดยระยะ r_i คือระยะทางในแนวตั้งจากอนุภาคลำดับที่ i^{th} ถึงแกนหมุน

พลังงานจลน์ของการหมุน

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็ง

$$I = \int r^2 dm$$

เมื่อ r คือระยะทางระหว่างมวลขนาดเล็ก dm ถึงแกนหมุน

โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาคที่มีโมเมนตัมเชิงเส้น **p** = mv คือ

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

ทอร์กเนื่องจากแรง **F** กระทำต่ออนุภาคซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง **r** ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย คือ

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

ทอร์กภายนอกสุทธิที่กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุแข็งเกร็ง คือ

$$\tau = dL/dt$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนสมมาตรด้วยความเร็วเชิงมุม ω คือ

$$\mathbf{L} = \mathbf{I\omega}$$

ทอร์กภายนอกลัพธ์กระทำต่อวัตถุแข็งเกร็งทำให้หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม α คือ

$$\tau = \mathbf{I}\alpha$$

งานกระทำโดยแรงที่ทำให้เกิดการหมุนเป็นมุม $d\varnothing$ คือ

$$\mathbf{W} = \tau \mathbf{d}\varnothing$$

และกำลังบัดดล คือ $\mathbf{P} = \tau \mathbf{W}$

ถ้าไม่มีทอร์กจากภายนอก ($\tau_{ext} = 0$) โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{คงตัว}$$

พลังงานจลน์รวมของวัตถุแข็งเกร็ง ดังเช่น วัตถุทรงกระบอกขณะกลิ้งบนผิวขรุขระโดยไม่เลื่อนไถล จะเท่ากับพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลรวมกับพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนผ่านศูนย์กลางมวล

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2_{CM} + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

4. วัตถุแข็งเกร็งจะอยู่ในภาวะสมดุล ตามเงื่อนไขดังนี้

แรงภายนอกลัพธ์เป็นศูนย์

$$\Sigma F = 0$$

และ ทอร์กภายนอกลัพธ์เท่ากับศูนย์

$$\Sigma \tau = 0$$

โดยสมการทั้งสองนี้เรียกว่า "สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง"

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. เปรียบเทียบปริมาณเกี่ยวกับการหมุนกับการเลื่อนที่ รวมทั้งสมการทางจลนศาสตร์ของการเลื่อนที่กับการหมุนได้

2. อธิบายหลักการสำคัญเกี่ยวกับ แรงสู่ศูนย์กลาง แรงผ่านศูนย์กลาง แรงโน้มถ่วง ความเร็วหลุดพ้น กฎข้อ 3 ของเคปเลอร์ และการลาดเอียงของถนนโค้งได้

3. หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่ายได้ โดยทฤษฎีบทแกนขนานและแกนตั้งฉากได้

4. ชี้แจงหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม และความสัมพันธ์ระหว่างแรงผ่านศูนย์กลางกับโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งได้

5. เปรียบเทียบเงื่อนไขของสภาพสมดุลระหว่างสภาพสมดุลของอนุภาคหรือวัตถุภายใต้แรงขวบกันกับสภาพสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งโดยทั่วไปได้

6. แสดงวิธีคำนวณหาปริมาณเชิงมุมดังเช่นพลังงานจลน์ของการหมุน โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กตามตัวอย่างต่าง ๆ ในบทนี้ โดยพิจารณาจากโจทย์แบบฝึกหัดท้ายบทได้

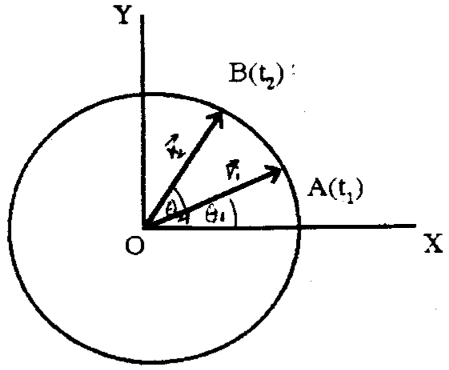
ในบทก่อนได้กล่าวถึงวัตถุหรืออนุภาคซึ่งมีการเคลื่อนที่ในแบบเส้นตรงแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงการหมุนและการเคลื่อนที่เป็นแบบวงโคจร และปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่เกี่ยวข้องรวมทั้งการนำไปประยุกต์

6.1 จลนศาสตร์ของการหมุน

พิจารณาวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) ซึ่งมีการเคลื่อนที่รอบแกนหมุน เป็นการเคลื่อนที่ที่เป็นวงกลมที่เกี่ยวกับความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

หาอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (average angular speed) อัตราเร็วเชิงมุมบัดดล (instantaneous angular speed) ก่อน แล้วจึงหาความเร็วเชิงมุม (angular velocity) และความเร่งเชิงมุม (angular acceleration)



รูปที่ 6.1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม

อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบระดับ ขณะเวลา t_1 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A มีตำแหน่งเชิงมุมเป็น θ_1 เมื่อเวลา t_2 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง B มีตำแหน่งเชิงมุมเป็น θ_2 และมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งจากจุดศูนย์กลาง O เป็น $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ ตามลำดับ ในช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ อนุภาคจะเคลื่อนที่เปลี่ยนตำแหน่งไปเทียบกับจุดศูนย์กลางเป็นมุม $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ และอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งได้ระยะทาง Δs **อัตราส่วนระหว่างมุมที่เปลี่ยนไปกับช่วงเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่** เรียกว่า **ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค**

ถ้า ω_{av} = อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค มีหน่วยเรเดียน/วินาที (rad/s)

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad ....6.1$$

ถ้า ω = อัตราเร็วเชิงมุมบัดดลของอนุภาคหรืออัตราเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งของอนุภาคมีหน่วย เรเดียน/วินาที

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad ....6.2$$

ให้ r = รัศมีของวงกลมที่อนุภาคเคลื่อนที่

Δs = ความยาวของส่วนโค้ง AB ซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ในช่วงเวลา t

v = อัตราเร็วเชิงเส้นบัดดลของอนุภาค

เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราเร็วเชิงเส้นกับอัตราเร็วเชิงมุม จากความสัมพันธ์ระหว่าง มุม รัศมี และส่วนโค้ง จะได้ว่า

มุม θ ณ จุดศูนย์กลาง คิดเป็นเรเดียน คือ $\dfrac{\text{ความยาวของส่วนโค้ง}}{\text{รัศมี}}$

นั่นคือ $\Delta\theta = \Delta s/r$ 6.3

หรือ $ds = rd\theta$ 6.4

อัตราเร็วบัดดลของอนุภาค $v = ds/dt = rd\theta/dt$ 6.5

$v = \omega r$ 6.6

สมการ (6.6) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเชิงเส้นกับอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาค

ถ้าอนุภาคมีความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนไปตามเวลา อนุภาคนั้นจะมีความเร่งเชิงมุมซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

$$\alpha_{av} = \Delta\omega/\Delta t$$
$$= [\omega_2(t_2) - \omega_1(t_1)]/(t_2 - t_1) \qquad ....6.7$$
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega/\Delta t = d\omega/dt \qquad ....6.8$$

เมื่อ α_{av} = ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค หน่วยเรเดียน/วินาที^{2}

α = ความเร่งเชิงมุมบัดดลของอนุภาค หน่วยเรเดียน/วินาที^{2}

ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบใด ω มีทิศตั้งฉากกับระนาบนั้นอยู่ตลอดเวลา การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมจึงเป็นผลจากการเปลี่ยนขนาดกับเครื่องหมายของทิศเท่านั้น เราจึงเขียนขนาดของความเร่งเชิงมุมจากสมการ (6.8) เป็น

$$\alpha = |\alpha| = d\omega/dt = d(d\theta/dt)/dt = d^2\theta/dt^2 \quad ....6.9$$

เนื่องจาก ω มีค่าเท่ากันสำหรับทุกอนุภาคของวัตถุแข็งเกร็ง จากสมการ (6.9) จะได้ว่า α ก็มีค่าเท่ากันสำหรับทุกอนุภาค ดังนั้น α จึงมีลักษณะเฉพาะของอนุภาคทั้งก้อนด้วย

จากสมการ (6.6) จะหาความเร่งตามเส้นโค้งในแนวสัมผัสวงได้ดังนี้

$$a_T = r[d\omega/dt] = r\alpha \quad ......6.10$$

สมมติอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในอวกาศที่ปราศจากแรงโน้มถ่วง เมื่อเวลา $t = 0$ และเวลา t ต่อมาอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง θ_1 และ θ_2 วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ดังรูปที่ 6.1 โดยมีขนาดความเร็วเชิงมุมเป็น ω_0 กับ ω ตามลำดับ และมีขนาดความเร่งเชิงมุมคงที่ α

จากสมการ (6.8) $\quad \alpha = d\omega/dt$

$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

$$\therefore \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad ......6.11$$

จากสมการ (6.2) $\quad \omega = d\theta/dt$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt$$

$$= \omega_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t\,dt$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$

ให้ $\theta = \theta_2 - \theta_1$ = การกระจัดเชิงมุม (angular displacement)

$$\therefore \quad \theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2 \quad ......6.12$$

จากสมการ (6.8) $\quad \alpha = d\omega/dt$

$$= (d\theta/dt).(d\omega/dt)$$

$$= \omega(d\omega/d\theta)$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega$$

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1) = (1/2)(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\alpha\theta = (1/2)(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad \text{......6.13}$$

สรุป อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ α เป็นสมการสเกลาร์ มีดังนี้

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

การหมุนที่ความเร่งเชิงมุมเท่ากับศูนย์ ($\alpha = 0$) จะได้ $\theta = \omega t$

ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ของความเร็ว ความเร่งตามเส้นโค้งในแนวสัมผัสวง กับความเร็ว ความเร่งเชิงมุมดังนี้

การกระจัดเชิงมุม $\theta = s/r$

ความเร็วเชิงมุม $\omega = v/r$

ความเร่งในแนวสัมผัสวง $a_T = r\alpha$

ความเร่งเชิงมุม $\alpha = d\omega/dt = a_T/r$

ตัวอย่าง 6.1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 1 เมตรในอวกาศที่ปราศจากแรงโน้มถ่วงด้วยอัตราเร็วตามแนวเส้นสัมผัส 1 เมตร/วินาที จงหา ก. อัตราเร็วเชิงมุม ข. ขนาดของความเร่งเชิงมุม ค. ขนาดของความเร่งสู่ศูนย์กลาง (ดูตอนที่ 6.2)

วิธีทำ แทนค่า รัศมีของวงกลม r = 1 เมตร

อัตราเร็วตามแนวเส้นสัมผัส v = 1 เมตร/วินาที

จะได้

ก. อัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาค $\omega = v/r = 1/1 = 1$ เรเดียน/วินาที

ข. ขนาดของความเร่งเชิงมุม $\alpha = d\omega/dt = 0$

ค. ขนาดของความเร่งสู่ศูนย์กลาง $a_c = v^2/r = 1$ เมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่าง 6.2 หินลับมีดแบบกลมมีรัศมี 0.50 เมตร มีความเร่งเชิงมุม α = 3.0 เรเดียน/วินาที^{2} เริ่มหมุนเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที จงหา ก. อัตราเร็วเชิงมุม ข. อัตราเร็วเชิงเส้น (หรืออัตราเร็วในแนวเส้นสัมผัส) ของอนุภาคที่ขอบนอก ค. ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสที่ขอบนอก และ ง. ความเร่งในแนวสู่ศูนย์กลางที่ขอบนอก

วิธีทำ แทนค่า r = 0.5 m α = 3.0 rad/s^2 t = 2s

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$= 0 + (3)(2)$$

จะได้

ก. อัตราเร็วเชิงมุมของหินลับมีด $= 6$ rad/s

$$v = \omega r$$

$$= (6)(0.5)$$

ข. อัตราเร็วเชิงเส้น $= 3$ m/s **ตอบ**

$$a_T = \alpha r$$

$$= (3)(0.5)$$

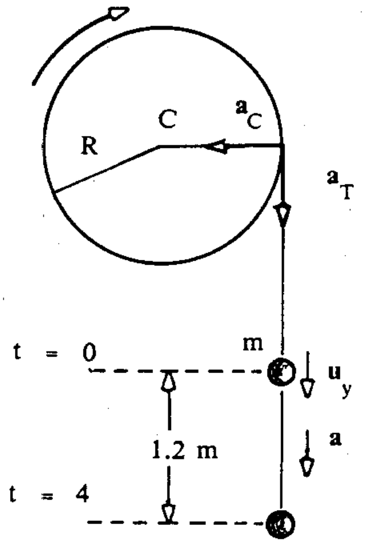
ค. ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส $= 1.5$ m/s^2 **ตอบ**

$$a_C = a_R = \omega^2 r = v^2 / r$$

$$= (6)^2(0.5)$$

ง. ความเร่งในแนวสู่ศูนย์กลาง $a_R = 18$ m/s^2 $(=a_C)$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 6.3 แผ่นโลหะกลมรัศมี 0.1 เมตร หมุนได้คล่องรอบแกน และมีเชือกเบาพันรอบขอบโลหะ โดยปลายเชือกข้างหนึ่งผูกมวล m กิโลกรัม ดังรูป ขณะหนึ่งวัตถุเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว 0.1 เมตร/วินาที อีก 4 วินาทีต่อมาปรากฏว่าวัตถุ m เคลื่อนที่ได้ 1.2 เมตร จงหาขนาดความเร่งสู่ศูนย์กลาง และขนาดความเร่งตามแนวสัมผัสของจุดบนขอบโลหะขณะใด ๆ



วิธีทำ พิจารณารูปข้างบนนี้

มวล m ผูกเชือกเบาคล้องผ่านแผ่นโลหะรัศมี R เคลื่อนที่ลง 1.2 m ในเวลา 4 s

ให้ $t = 0$

$v_y = 0.1$ m/s

เมื่อ $t = 4$ s

$y = 1.2$ m

ให้ a = ขนาดความเร่งของมวล m

จาก $y = v_y t + (1/2)at^2$

$1.2 = (0.1)(4) + (1/2)a(4)^2$

$\therefore a = 0.1$ m/s²

ขนาดของความเร่งของมวล m คือ 0.1 m/s^2

$a = 0.1\ m/s^2$ มีค่าคงที่และเท่ากับขนาดความเร่งตามสันขอบล้อ

โลหะ = a_r นั่นคือ $a_r = 0.1\ m/s^2$

จาก $a_0 = v^2/R$

สมการการเคลื่อนที่ของมวล m คือ

$$y = v_y t + (1/2)a_y t^2$$

$$= (0.1)t + (1/2)(0.1)t^2$$

$$y = 0.1t + 0.05t^2$$

$$v_y = dy/dt$$

$$= 0.1 + 0.1t$$

$$= \quad 0.1(1+t)$$

$$a_C = v_y^2/R$$

$$= [0.1(1+t)]^2/0.1$$

$$= 0.1(1+t)^2 \quad m/s^2$$

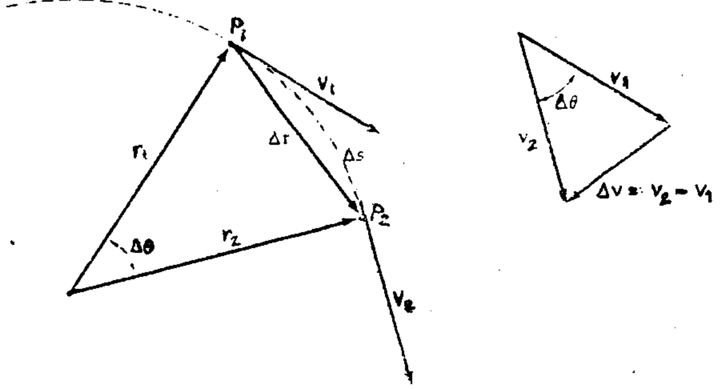
ขนาดความเร่งสู่ศูนย์กลาง = $0.1(1+t)^2$ m/s^2

ขนาดความเร่งตามแนวสัมผัส $a_T = dv_y/dt = 0.1\ m/s^2$

6.2 แรงสู่ศูนย์กลางและแรงผ่านศูนย์กลาง

6.2.1 แรงสู่ศูนย์กลาง (centripetal force) เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนนิ่ง อนุภาคทุกอนุภาคที่ประกอบกันเป็นวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางซึ่งอยู่กึ่งกลางแกน

จาก Δ คล้าย จะได้ $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \simeq \frac{\Delta r}{r} \simeq \frac{\Delta v}{v}$



รูปที่ 6.2 การคำนวณความเร่งของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเป็นวงกลม

พิจารณาเมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A กับ B จะมีความเร็ว $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ ตามลำดับ ถ้าอนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B ในช่วงหนึ่งหน่วยเวลา ความเร็วที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลานี้คือ $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ ก็จะแทนความเร่งเชิงเส้นเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลาที่พิจารณา จากรูปที่ 6.2 จะเห็นได้ว่า ความเร่งเชิงเส้นเฉลี่ยนี้มีทิศเข้าทางด้านโค้งเว้าของวงกลม หรือเข้าสู่ทางด้านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั่นเอง ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาในการย้ายตำแหน่งของอนุภาคจาก A ไปยัง B สั้นมาก ๆ คือ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ความเร่งบัดดลของอนุภาค ณ จุด A มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางตามรัศมีของวงกลม เรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) แทนด้วย a_c

ดังนั้น ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ ทุกขณะจะมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลมตามแนวรัศมีเสมอ แสดงว่าความเร่งนี้เป็นผลจากการเปลี่ยนทิศของความเร็วเท่านั้น

จากรูปที่ 6.2 จะได้สามเหลี่ยม 2 รูปที่คล้ายกัน จะได้ว่า

ผลต่างของความเร็ว $\Delta v = v_2 - v_1$ มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม

ผลต่างของเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ มีค่าน้อย Δv จะมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม $\Delta r \approx \Delta s$

$$AB/OA = (v_2 - v_1)/v_2 = \Delta v/v_2$$

$$\Delta v = (AB/OA).v_2$$

$$\Delta v = (AB/OA).(v_2/\Delta t)$$

$$AB = \Delta r \approx \Delta s = r\theta$$

$$\Delta v/\Delta t = (r\theta/r).(v_2/\Delta t)$$

$$= (\theta/\Delta t).v_2$$

$$a_c = \omega v \qquad ......6.14$$

เมื่อ v_2 คือ อัตราเร็วของอนุภาค , $OA = r$, $\theta/\Delta t = \omega$

$$\because \quad v = \omega r$$

$$\therefore \quad a_c = (v/r).v = v^2/r \qquad ......6.15$$

หรือ $$a_c = \omega(\omega r) = \omega^2 r \qquad ......6.16$$

ดังนั้น $$a_c = v^2/r = \omega^2 r = \omega v$$

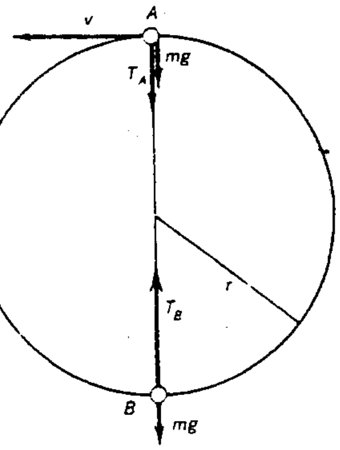
แรงที่เกิดจากความเร่งนี้ จึงเป็น **แรงสู่ศูนย์กลาง** ที่ทำให้วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีทิศชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่

$$F_c = ma_c = m(v^2/r) = m\omega^2 r \qquad ......6.17$$

แรงที่ทำให้อนุภาคหรือวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม อาจเป็นแรงตึงในเส้นเชือก แรงเสียดทาน แรงโน้มถ่วง หรือผลรวมของแรงหลายชนิด

ตัวอย่าง 6.4 ลูกบอลมวล m ผูกด้วยเชือก แกว่งให้หมุนเป็นวงกลมในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่ v รัศมีของวงกลมเท่ากับ r จงหาแรงตึงในเส้นเชือก

ก. ที่จุด A ข. ที่จุด B



วิธีทำ

ก. ที่จุด A

$$\text{แรงลัพธ์} = T_A + mg$$

ทั้ง T_A และ mg มีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลาง

$$\therefore \quad T_A + mg = m(v^2/r)$$

$$T_A = m(v^2/r - g)$$

ข. ที่จุด B

$$\text{แรงลัพธ์} = T_B - mg$$

T_B มีทิศเข้าหา, mg มีทิศออกจากจุดศูนย์กลาง

$$\therefore \quad T_B - mg = m(v^2/r)$$

$$T_B = m(v^2/r + g)$$

ตัวอย่าง 6.5 แผ่นเสียงขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 12 นิ้ว หมุนด้วยอัตราเร็ว 33.3 รอบต่อนาที เหรียญบาทมวล 3 กรัม วางอยู่ที่ขอบของแผ่นเสียง จงหา

ก. แรงเสียดทานระหว่างแผ่นเสียงกับเหรียญบาท ถ้าเหรียญบาทไม่ลื่นไถล

ข. แรงเสียดทานเพิ่มขึ้นอีกกี่เท่า ถ้าหมุนแผ่นเสียงด้วยอัตรา 45 รอบต่อนาที

วิธีทำ แทนค่าดังต่อไปนี้

อัตราเร็วเชิงมุม	ω	=	$33.3 \times 2\pi/60$	rad/s
		=	3.49	rad/s
รัศมีแผ่นเสียง	r	=	12/2 = 6	in.
		=	$6 \times (2.54/100)$	m
		=	0.1524	m

เหรียญบาทมีมวล m = 3 g = 0.003 kg

แรงเสียดทาน = ma_R = $m(v^2/r)$ = $m\omega^2 r$

= $(0.003)(3.49)^2(0.1524)$

= 5.56×10^{-3} N

ก. แรงเสียดทานระหว่างแผ่นเสียงกับเหรียญบาท = 5.56×10^{-3} N

ความเร็วเชิงมุม ω = $45 \times (2\pi/60)$ rad/s

= 4.71 rad/s

แรงเสียดทาน = $m(v^2/r) = m\omega^2 r$

= $(0.003)(4.71)^2(0.1524)$

= 10.14×10^{-3} N

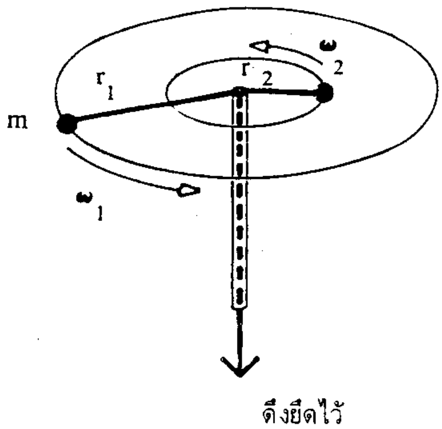
ข. แรงเสียดทานจะเพิ่มขึ้น = 1.82 เท่าของแรงในข้อ ก.

6.2.2 แรงผ่านศูนย์กลาง (central force) ที่กระทำกับมวล m คือแรงที่มีทิศทางผ่านจุดศูนย์กลาง ซึ่งอาจจะชี้เข้าหาหรือชี้ออกจากจุดศูนย์กลาง และมีขนาดของแรงขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างมวล m กับจุดศูนย์กลาง แรงผ่านศูนย์กลางซึ่งเป็นแรงดึงดูดจะมีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางและที่เป็นแรงผลักจะชี้ออกจากจุดศูนย์กลาง

เมื่อเทหวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลาง โมเมนตัมเชิงมุมสัมพัทธ์กับศูนย์กลางของแรงจะมีค่าคงตัว และเมื่อโมเมนตัมเชิงมุมคงตัวย่อมมีแรงผ่านศูนย์กลาง

เมื่อ **r** ขนานกับ **F** นั่นคือ ขณะที่แรง **F** กระทำ จะมีทิศผ่านจุด O (จุดตรึง) ถ้าให้จุดศูนย์กลางแรงเป็นจุดตรึง แรงนี้จะมีทิศผ่านจุดตรึงเสมอไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม แรงนี้คือ แรงผ่านศูนย์กลาง ในธรรมชาติจะมีการเคลื่อนที่ในลักษณะที่แรงกระทำเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ เนื่องจากแรงที่ดวงอาทิตย์ดึงดูดโลกมีทิศผ่านศูนย์กลางของดวงอาทิตย์เสมอ โมเมนตัมเชิงมุมของโลกสัมพัทธ์กับดวงอาทิตย์จึงคงตัวเสมอ

ตัวอย่าง 6.6 วัตถุมวล m ผูกติดกับปลายเชือก ซึ่งสอดผ่านรูเล็ก ๆ ปลายเชือกอีกข้างหนึ่งดึงยึดไว้ด้วยแรงขนาดหนึ่ง แล้วเหวี่ยงให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม รัศมี r_1 ถ้าดึงเชือกให้รัศมีของวงกลมเปลี่ยนอย่างฉับพลัน จาก r_1 เป็น r_2 ดังรูป วัตถุจะเคลื่อนที่ช้าหรือเร็วกว่าเดิม ถ้า $r_1 = 0.2$ เมตร วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุม 3 เรเดียน-วินาที$^{-1}$ ถ้า $r_2 = 0.1$ เมตร วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมเท่าใด



แสดงการเหวี่ยงวัตถุเป็นวงกลม

วิธีทำ เนื่องจากแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นแรงผ่านศูนย์กลาง

ให้ v_1 และ v_2 เป็นอัตราเร็วของวัตถุในแนวเส้นรอบวงในครั้งแรกและครั้งหลังตามลำดับ

โมเมนตัมเชิงมุมในครั้งแรก $= mv_1r_1$

โมเมนตัมเชิงมุมในครั้งหลัง $= mv_2r_2$

$$\therefore \quad mv_1r_1 = mv_2r_2$$

$$v_2 = (mv_1r_1)/(mr_2)$$

$$= v_1 \cdot (r_1/r_2)$$

เนื่องจาก $r_2 < r_1$

$v_2 > v_1$ เสมอ

นั่นคือ เมื่อรัศมีของวงกลมลดลง วัตถุจะเคลื่อนที่เร็วขึ้น

$$\because \quad \omega = v/r$$

$$\therefore \quad mr_1^2\,\omega_1 = mr_2^2\,\omega_2$$

$$\omega_2 = (mr_1^2\,\omega_1)/(mr_2^2)$$

$$= \omega_1(r_1/r_2)^2$$

$$= 3(0.2/0.1)^2$$

$= 12$ เรเดียน/วินาที

6.2.3 กฎความโน้มถ่วงเอกภพของนิวตัน (Newton's law of universal gravitation) เป็นกฎที่ว่าด้วยแรงดึงดูดระหว่างมวล นิวตันเป็นผู้คิดค้นกฎนี้ขึ้น ซึ่งมีใจความว่า **อนุภาคของสสารทุกอนุภาคในเอกภพย่อมดึงดูดอนุภาคอื่น ๆ ด้วยแรงซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของมวลของอนุภาคเหล่านั้น และเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะทางระหว่างมวล** เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\mathbf{F_g} = (Gm_1m_2)/r^2 \qquad \text{......6.18}$$

เมื่อ $\mathbf{F_g}$ เป็นแรงโน้มถ่วงของแต่ละอนุภาค

m_1, m_2 เป็นมวลของอนุภาค

r เป็นระยะทางระหว่างมวลทั้งสอง

G เป็นค่าคงตัวโน้มถ่วง (graitational constant) ค่า G ขึ้นอยู่กับระบบหน่วยที่ใช้

แรงโน้มถ่วงกระทำต่ออนุภาคในแบบกิริยา-ปฏิกิริยา แม้ว่ามวลของอนุภาคจะต่างกัน แต่ก็มีแรงขนาดเท่ากันกระทำต่อกันและกัน และแนวกระทำอยู่ในแนวเส้นตรงที่ต่อโยงอนุภาคทั้งสอง

จากการทดลองของคาเวนดิช (Sir Henry Cavendish) ในปี ค.ศ. 1798 ได้ค่า G ดังนี้

$$G = 6.670 \times 10^{-11} \quad \text{N-m}^2/\text{kg}^2$$
$$= 6.670 \times 10^{-8} \quad \text{dynes-cm}^2/\text{g}^2$$

ตัวอย่าง 6.7 มวลของทรงกลมอันเล็กซึ่งชั่งจากเครื่องชั่งของคาเวนดิช เท่ากับ 1 กรัม และมวลของทรงกลมอันใหญ่เท่ากับ 500 กรัม ระยะทางระหว่างทรงกลมทั้งสองเท่ากับ 5 เซนติเมตร จงหาแรงโน้มถ่วงบนทรงกลมทั้งสอง

วิธีทำ จาก $\mathbf{F_g} = (Gm_1\, m_2)/r^2$

แทนค่า $m_1 = 1$ g , $m_2 = 500$ g. $r = 5$ cm $G = 6.67 \times 10^{-8}$ dynes-cm²/g²

จะได้ $\mathbf{F_g} = [6.67 \times 10^{-8})(1)(500)]/5^2$

$= 1.13 \times 10^{-6}$ dynes

$= 1.13 \times 10^{-11}$ N

มวลและน้ำหนัก

น้ำหนักของวัตถุ คือ แรงลัพธ์ของแรงโน้มถ่วงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุบริเวณผิวโลกและใกล้ ๆ ผิวโลก แรงโน้มถ่วงของโลกมีค่ามากกว่าแรงโน้มถ่วงของวัตถุอื่นในเอกภพค่อนข้าง

มากทีเดียว ซึ่งในทางปฏิบัติจึงตัดแรงเหล่านั้นทิ้งได้ ดังนั้นน้ำหนักจึงเกิดจากแรงดึงดูดของโลกเท่านั้น ในทำนองเดียวกันบริเวณผิวดวงจันทร์หรือดาวเคราะห์ดวงอื่น ๆ น้ำหนักของวัตถุคิดแต่แรงดึงดูดของดวงจันทร์หรือดาวเคราะห์เท่านั้น ฉะนั้นถ้าโลกเป็นทรงกลมเอกพันธ์ที่มีมวล m_e รัศมี R น้ำหนัก W ของมวลเล็ก ๆ m ณ ผิวโลก จะเป็น

$$W = F_g = (Gm_em)/R^2 \qquad \text{......6.19}$$

ในที่นี้ถือว่าโลกเป็นระบบอ้างอิงเฉื่อยเพื่อที่จะตัดผลที่เกิดจากการหมุนรอบตัวเองของโลกออกไป ซึ่งมีค่าไม่มากนัก เราจึงคิดแต่น้ำหนักที่เกิดจากความโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว เมื่อให้วัตถุตกอย่างเสรี แรงที่เป็นตัวการที่ทำให้เกิดความเร่ง คือ น้ำหนัก W และ ความเร่งที่เกิดจากแรงนี้คือ g ดังนั้น ความสัมพันธ์ทั่วไปของ **F = ma** จึงกลายเป็น

$$W = mg \qquad \text{......6.20}$$

จากสมการ (6.19) และ (6.20) จะได้ว่า

$$W = mg = (Gmm_e)/R^2$$

$$\therefore \quad g = (Gm_e)/R^2 \qquad \text{......6.21}$$

สมการ (6.21) แสดงให้เห็นว่า ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงมีค่าเท่ากันหมด ไม่ว่าวัตถุจะมีมวลเท่าใด (ไม่ขึ้นกับมวล m) และ g มีค่าค่อนข้างคงตัว เนื่องจาก G และ m_e มีค่าคงตัว ส่วน R แปรค่าบ้างเล็กน้อยตามจุดต่าง ๆ บนผิวโลก

น้ำหนักของวัตถุเป็นแรง ต้องมีหน่วยเป็นแรงตามระบบที่ใช้ หน่วยของน้ำหนักในระบบเอสไอ คือ **นิวตัน** และในระบบซีจีเอส คือ **ไดน์** ค่า g ในระบบทั้งสองมีค่า 9.8 เมตร-วินาที$^{-2}$ และ 980 เซนติเมตร-วินาที$^{-2}$ ตามลำดับ ค่า g อาจหาได้จากการทดลอง ดังนั้นมวลของโลกอาจคำนวณได้จากสมการ (6.21) คือ

$$m_e = g(R^2/G) \qquad \text{......6.22}$$

เมื่อ R คือ รัศมีของโลก = 6370 กิโลเมตร = 6.37×10^6 เมตร

g = 9.8 เมตร-วินาที$^{-2}$ และ G = 6.67×10^{-11} นิวตัน-เมตร^2/กิโลกรัม^2

ดังนั้น $m_e = [(9.8)(6.37\times10^6)^2]/(6.67 \times 10^{-11})$

$= 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม

สำหรับค่า g ของดาวดวงอื่น ๆ สามารถคำนวณได้โดยใช้มวลและรัศมีของดาวเหล่านั้น ตาราง 6.1 จะแสดงค่า g ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ

ตาราง 6.1 ข้อมูลเกี่ยวกับระบบสุริยะ

Body	Mass,kg	Average radius,* Km	g at surface, m/s^2	Sidereal period, days	Radius of or bit,** km	Vescape km/s
Moon	7.35×10^{22}	1,738	1.62	27.3	3.8×10^{5}	2.3
Sun	1.97×10^{30}	695,000	274			-
Mercury	3.28×10^{23}	2,570	3.9	88	5.8×10^{7}	4.3
Venus	4.82×10^{24}	6,310	8.9	245	1.08×10^{8}	10.3
Earth	5.98×10^{24}	6,370	9.80	365.26	1.50×10^{8}	11.3
Mars	6.37×10^{23}	3,430	3.8	687	2.28×10^{8}	5.0
Jupiter	1.88×10^{27}	71,800	26	4,333	7.78×10^{8}	60
Saturn	5.62×10^{26}	60,300	11	1.08×10^{4}	1.43×10^{9}	36
Uranus	8.62×10^{25}	26,700	10	3.07×10^{4}	2.87×10^{9}	22
Neptune	1.0×10^{26}	24,900	14	6.02×10^{4}	4.5×10^{9}	24
Pluto				9.09×10^{4}	5.9×10^{9}	-

* Bodies are not exactly spheres.

** Orbits are actually elliptical; the values quoted are mean distances

6.2.4 พลังงานศักย์โน้มถ่วง ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงที่บริเวณใกล้ผิวโลกกำหนดให้มีค่าคงตัว และถือเอาผิวโลกเป็นระดับอ้างอิง (พลังงานศักย์ที่ผิวโลกเป็นศูนย์) อย่างเช่นในกรณีที่วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่ใกล้ผิวโลก ได้แก่ การตกของวัตถุที่ระยะความสูงจากผิวโลกไม่มากนัก เมื่อเปรียบเทียบกับรัศมีของโลก แต่ในกรณีของการเคลื่อนที่ของวัตถุไกลจากผิวโลก ได้แก่ ดวงจันทร์หรือดาวเทียม ระยะอ้างอิงที่มีพลังงานศักย์เป็นศูนย์ มักนิยามที่จุดห่างจากโลกเป็นอนันต์ การหาพลังงานศักย์ใด ๆ หาได้จากสมการ (4.56) โดยใช้ $\mathbf{F}_g$ จากสมการ (6.18) ซึ่งกำหนดให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโลก จะได้ว่า

$$W_{grav} = \int_{r_i}^{r_f} \mathbf{F}_g dr = -[E_{p,f} - E_{p,i}]$$

$$-[E_{p,f} - E_{p,i}] = Gm_e m \int_{r_i}^{r_f} dr/r^2$$

$$E_{p,f} - E_{p,i} = (Gm_e m)/r_f - (Gm_e m)/r_i$$

เมื่อ $r_f \rightarrow \infty$, $E_{p,f} \rightarrow 0$ นั่นคือ

$$E_{p,i} = (Gm_e m)/r_i$$

ฉะนั้นสูตรทั่วไปของพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุซึ่งถูกโลกดึงดูด (ระดับอ้างอิงที่มีระยะทางอนันต์) จะได้ว่า

$$E_p = -(Gm_e m)/r \qquad ......6.23$$

พลังงานรวมของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v คือ

$$E = (1/2)mv^2 - (Gm_e m)/r \qquad ......6.24$$

ตัวอย่าง 6.8 ให้ใช้หลักการคงตัวของพลังงานเพื่อหาความเร็วต้นของวัตถุที่ถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง (ไม่คิดความต้านทานของอากาศ) ที่สามารถ

ก. ขึ้นไปสูงเหนือผิวโลกเท่ากับรัศมีของโลก

ข. หนีหลุดพ้นออกไปจากโลก

วิธีทำ

ก. $v_i = ?$, $r_i = R$, $v_f = 0$, $r_f = 2R$

หลักการคงตัวของพลังงาน $E_i = E_f$

$$(1/2)mv_i^2 - (Gm_e m)/r_i = (1/2)mv_f^2 - (Gm_e m)/r_f$$

$$\therefore \quad v_i = [v_f^2 + 2Gm_e(1/r_i - 1/r_f)]^{1/2}$$

$$= [v_f^2 + 2Gm_e(1/R - 1/2R)]^{1/2}$$

$$= [0 + 2Gm_e(1/R - 1/2R)]^{1/2}$$

ดังนั้น ความเร็วต้นของวัตถุ $v_i = (Gm_e/r)^{1/2}$

ข. $v_i = ?$, $r_i = R$, $v_f = 0$, $r_f = \infty$

$$v_i = [v_f^2 + 2Gm_e\{1/R - 1(2R)\}]^{1/2}$$

$$= [0 + 2Gm_e(1/R - 1/\infty)]^{1/2}$$

ดังนั้น ความเร็วต้นของวัตถุ $v_i = (2Gm_e/R)^{1/2}$

อัตราเร็วต้นในข้อ ข. จากตัวอย่างที่ 6.8 ซึ่งทำให้วัตถุหลุดออกไปจากโลกนั้นเรียกว่า **อัตราเร็วหลุดพ้น** (escape speed) แทนด้วย v_{escape} หรือในรูปของเวกเตอร์ เรียกว่า **ความเร็วหลุดพ้น** (escape velocity)

ถ้าพิจารณาสมการพลังงานรวม จะเห็นว่าความเร็วหลุดพ้น ก็คือความเร็วต้นที่ผิวโลกที่พลังงานรวมมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ

$$
\begin{aligned}
E &= (1/2)mv^2_{escape} - (Gm_e m)/R \\
&= (1/2)m[v^2_{escape} - (Gm_e)/R] \\
&= 0 \\
\therefore \quad v_{escape} &= [(2Gm_e)/R)]^{1/2} = 1.13 \times 10^4 \text{ m/s} \qquad \text{......6.25}
\end{aligned}
$$

เมื่อแทนค่า G, m_e และ R ลงในสมการ (6.25) จะได้ v_{escape} = 11.3 กิโลเมตร-วินาที$^{-1}$ หรือเท่ากับ 40,700 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สำหรับความเร็วหลุดพ้นของดาวเคราะห์ดวงอื่นๆ ก็คำนวณได้จากสมการ (6.25) โดยใช้ข้อมูลจากตารางที่ 6.1

เมื่อพิจารณาสมการ (6.25) แล้ว จะเห็นว่าความเร็วหลุดพ้นของวัตถุหรืออนุภาคไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุหรืออนุภาคนั้นๆ อย่างไรก็ดี แรงผลักดันที่ต้องการเพื่อเร่งวัตถุจนมีความเร็วเท่ากับความเร็วหลุดพ้น จะต้องขึ้นกับมวลของวัตถุด้วย ซึ่งเป็นเหตุผลที่อธิบายให้ทราบว่าเหตุใดจรวดหนัก ๆ และดาวเทียมดวงใหญ่ ๆ จึงต้องการเครื่องขับดันที่มีกำลังสูงมาก ๆ ค่าความเร็วหลุดพ้นนี้จึงเป็นค่าประมาณของความเร็วของพวกสะเก็ดดาวที่ตกกระทบผิวโลก

เมื่อยิงวัตถุออกไปจากผิวโลกด้วยความเร็วหลุดพ้น v_{escape} ตามสมการ (6.25) จะได้ค่าเป็นศูนย์เมื่อระยะทางเป็นอนันต์ ถ้าความเร็วได้มากกว่าความเร็วหลุดพ้น (พลังงานรวม E > 0) วัตถุจะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วค่าหนึ่งที่ระยะทางอนันต์ ถ้าความเร็วที่ผิวโลกน้อยกว่าความเร็วหลุดพ้น (พลังงานรวม E < 0) วัตถุจะตกกลับมายังพื้นโลกอีก นอกจากว่าวัตถุนั้นจะถูกส่งเข้าสู่วงโคจรโดยจรวดท่อนถัดไป และทิศทางความเร็วเปลี่ยนแปลง

ค่าความเร็วหลุดพ้นของดาวพุธ (Mercury) น้อยกว่าของโลกมาก อาจสันนิษฐานได้ว่า ดาวพุธไม่มีบรรยากาศเหลือห่อหุ้มอยู่เลย เช่นเดียวกับดวงจันทร์ ส่วนดาวศุกร์ (Venus) มีความเร็วหลุดพ้นเกือบเท่า ๆ กับของโลก ของดาวอังคาร (Mars) เป็น 1/6 เท่าของโลก ดังนั้นบรรยากาศจึงยังคงมีเหลืออยู่บ้างแต่เป็นเพียงส่วนน้อย ความจริงความกดดันบรรยากาศบนดาวอังคารน้อยกว่าบนโลกมาก ส่วนดาวเคราะห์ดวงอื่น ๆ ความเร็วหลุดพ้นมากกว่าของโลกจึงยังเหลือบรรยากาศดั้งเดิมอยู่ แต่อย่างไรก็ตาม ส่วนประกอบของบรรยากาศบนดาวเคราะห์ก็แตกต่างจากโลกด้วย

จากความรู้เรื่องความเร็วหลุดพ้น ซึ่งจะมีประโยชน์ในการพิจารณาก๊าซที่หลุดพ้นจากบรรยากาศของโลก ถ้าเราคิดว่าก๊าซที่ประกอบเป็นบรรยากาศนั้นอยู่ในสภาพสมดุลความร้อน อัตราเร็วรากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย (root mean square speed) คือ v_{rms} ของโมเลกุลของก๊าซหาได้จากสมการ

$$v_{rms} = \sqrt{(3kT)/m} \qquad \text{......6.26}$$

เมื่อ k = ค่าคงตัวของโบลท์ซมาน (Boltzmann's constant)

T = อุณหภูมิสัมบูรณ์

m = มวลของโมเลกุลของก๊าซ

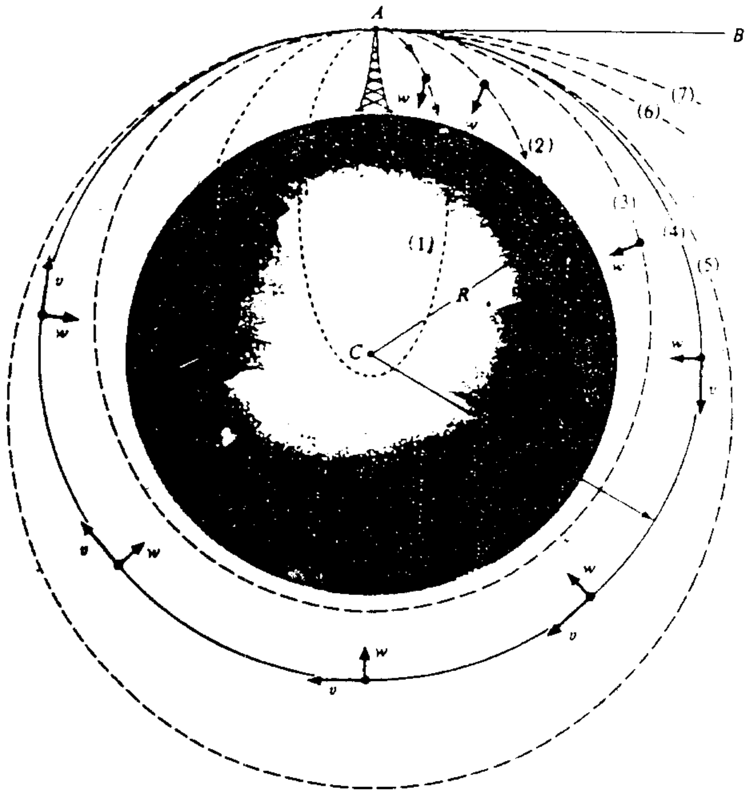
v_{rms} ของก๊าซที่พบในบรรยากาศและที่อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก มีค่าดังแสดงในตาราง 6.2

ตาราง 6.2 ค่า v_{rms} ของก๊าซที่อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก

ก๊าซ	v_{rms}, เมตร/วินาที
ไฮโดรเจน	1,908
ฮีเลียม	1,350
คาร์บอนไดออกไซด์	407
ออกซิเจน	477
ไนโตรเจน	510

เมื่อเปรียบเทียบ v_{rms} ของก๊าซจากตารางที่ 6.2 จะเห็นว่ามีค่าน้อยกว่า v_{escape} จากสมการ (6.25) มาก ทำให้โลกของเรามีบรรยากาศห่อหุ้มอยู่ เพราะโมเลกุลของก๊าซที่มีความเร็วน้อยกว่า v_{escape} ไม่สามารถเอาชนะแรงดึงดูดของโลกและหนีออกไปพ้นโลกได้ เนื่องจาก v_{rms} เป็นค่าเฉลี่ยของความเร็ว หมายความว่ายังมีก๊าซจำนวนหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงกว่า v_{rms} และอาจมากกว่า v_{escape} ซึ่งโมเลกุลนี้อาจจะหนีไปจากโลก โดยเฉพาะถ้าโมเลกุลเหล่านี้อยู่ในชั้นบรรยากาศส่วนบน ในตารางที่ 6.2 จะเห็นว่ามีผลต่อก๊าซเบามากกว่าก๊าซหนัก และเป็นเหตุผลที่ว่าทำไมในบรรยากาศของเราจึงมีก๊าซไฮโดรเจนและฮีเลียมน้อย จากการคาดคะเนโดยอาศัยแรงโน้มถ่วงว่าไฮโดรเจนหนีออกไปพ้นโลกด้วยอัตราประมาณ 1.3×10^{22} อะตอมต่อวินาที ซึ่งเทียบเป็นค่าประมาณ 600 กิโลกรัมต่อปี ตัวเลขนี้ไม่ใช่จำนวนแท้จริงที่โลกสูญเสียไฮโดรเจนจำนวนที่เสียไปทั้งหมดอาจจะแตกต่างกันไป ซึ่งแล้วแต่กระบวนการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

6.2.5 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม ในหัวข้อ 6.2.4 ซึ่งได้กล่าวว่าความเร็วต้นน้อยกว่าความเร็วหลุดพ้น (v_{escape}) หรือพลังงานรวมน้อยกว่าศูนย์ ($E < 0$) แล้ว วัตถุจะตกกลับมายังโลกนอกจากจะใช้จรวดขับดันส่งให้วัตถุเข้าวงโคจรอีกครั้งหนึ่ง



รูปที่ 6.3 เส้นทางโคจรของดาวเทียมที่มีพลังงานต่าง ๆ

สมมติว่าส่งดาวเทียมขึ้นไปยังผิวโลกในแนวดิ่ง หลังจากขึ้นไปถึงระยะสูงสุด h ซึ่งสมมติว่าเป็นความสูงของยอดหอคอย คือ จุด A ดังรูปที่ 6.3 แล้ว ยิงจรวดขับดันที่จุด A ทำให้เกิดความเร็ว v_0 ในแนวระดับ AB

พลังงานรวมของดาวเทียมที่จุด A คือ

$$E = (1/2)mv_0^2 - (Gm_em)/(R + h) \qquad ......6.27$$

ตามรูปจะเห็นว่าดาวเทียมเคลื่อนที่ตามวิถีโค้ง ถ้าความเร็วต้นไม่มากนัก วิถีเคลื่อนที่จะคล้ายกับหมายเลข (1) ซึ่งเป็นวงรี (ellipse) มีศูนย์กลางของโลกเป็นโฟกัสจุดหนึ่ง W คือน้ำหนักของวัตถุมีทิศพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก และขนาดเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสอง

ของระยะทางจากศูนย์กลางของโลก [ถ้าเป็นวิถีเคลื่อนที่สั้นๆ อาจไม่ต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางของ W วิถีโค้งนั้นก็จะเป็นพาราโบลา (parabola)] วิถีเคลื่อนที่ตามหมายเลข (2), (3), (4) และ (5) ยังเป็นกรณีที่ความเร็ว v_0 ไม่มากนัก คือ พลังงานรวมในสมการ (6.27) ยังมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ($E < 0$) วิถีเคลื่อนที่ยังเป็นรูปวงรี โดยที่วิถีเคลื่อนที่หมายเลข (3) เริ่มโคจรรอบโลกพอดี วิถีเคลื่อนที่หมายเลข (4) เป็นกรณีพิเศษซึ่งจะเป็นวงกลม และวิถีเคลื่อนที่หมายเลข (5) กลับมาเป็นวงรีอีก

เมื่อความเร็วต้นของดาวเทียมมีค่ามากขึ้น จนทำให้พลังงานรวม E มีค่าเป็นศูนย์ ($E = 0$) จะได้วิถีเคลื่อนที่โคจรเป็นหมายเลข (6) ซึ่งเป็นพาราโบลา และเมื่อพลังงานรวม E มีค่ามากกว่าศูนย์ ($E > 0$) จะได้วิถีโคจรหมายเลข (7) เป็นไฮเปอร์โบลา (hyperbola) วงโคจรหมายเลข (6) และ (7) เป็นวงโคจรไม่ปิด (คือดาวเทียมจะไม่กลับมาที่จุดเริ่มต้นอีกแล้ว)

ดาวเทียมทั้งหลายซึ่งเป็นประดิษฐกรรมของมนุษย์มีวิถีโคจรคล้ายหมายเลข (3) หรือหมายเลข (4) แต่บางดวงก็มีวิถีโคจรใกล้เป็นวงกลมมาก ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเฉพาะวิถีโคจรที่เป็นวงกลมเท่านั้น โดยคำนวณหาความเร็วเพื่อให้วิถีโคจรรอบโลกมีเฉพาะแรงโน้มถ่วงระหว่างโลกกับดาวเทียม จากสมการของแรงที่กระทำกับดาวเทียมที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก r เคลื่อนที่เป็นวงกลม

$$\text{แรงลัพธ์} = ma_R$$

$$\text{แรงลัพธ์} = -(Gm_em)/r^2$$

$$ma_R = -m(v^2/r)$$

$$m(v^2/r) = (Gm_em)/r^2$$

$$v^2 = (Gm_e)/r$$

$$v = \sqrt{(Gm_e)/r} \qquad \text{......628}$$

ถ้า r ยิ่งยาว ความเร็วโคจรจะน้อยลง

ให้ T = คาบของการโคจร (period)

$$v = (2\pi r)/T$$

$$T = (2\pi r)/v \qquad \text{......6.29}$$

$$T^2 = (4\pi^2r^2)/v^2$$

$$= (4\pi^2r^2)/(Gm_e/r)$$

$$= (4\pi^2r^3)\ /\ (Gm_e)$$

$$T^2 = Kr^3 \qquad \text{......6.30}$$

ให้ $K = (4\pi^2)/(Gm_e)$ = ค่าคงตัว

สมการ (6.30) เป็นไปตามกฎข้อ 3 ของเคปเลอร์ (Kepler) ซึ่งกล่าวไว้ว่า **กำลังสองของคาบการโคจรจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสามของรัศมีโคจร**

ดาวเทียมคล้ายโปรเจกไทล์ที่ต่างก็เป็นวัตถุตกอย่างเสรี คงมีแต่เพียงน้ำหนัก W ของตัวเองเท่านั้นที่เป็นแรงกระทำ ดังนั้นแรงสู่ศูนย์กาง v^2/r จึงเท่ากับความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรี g ณ วงโคจรนั้น นั่นคือ

$$W = mg = (Gm_e m)/r^2$$

$$\therefore \quad g = (Gm_e)/r^2$$

$$rg = (Gm_e)/r$$

$$\because \quad v^2 = (Gm_e)/r$$

$$\therefore \quad v^2 = rg$$

$$v = \sqrt{rg} \qquad \text{......6.31}$$

ความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรีเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะทางจากศูนย์กลางของโลก ถ้า g_R เป็นความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรี ณ ผิวโลก คือ ตรงที่ $r = R$ เราจะได้

$$g/g_R = R^2/r^2$$

$$rg = g_R(R^2/r)$$

$$\therefore \quad v^2 = g_R(R^2/r)$$

$$v = R\sqrt{g_R/r} \qquad \text{......6.32}$$

จากสมการ (6.29) คาบเวลา T

$$T = (2\pi r)/v = (2\pi r)/[R\sqrt{g_R/r}]$$

$$= [(2\pi)/R\sqrt{g_R}].r^{3/2} \qquad \text{......6.33}$$

ถ้า r มากขึ้น คาบเวลา T ก็มากตามด้วย

ตัวอย่าง 6.9 ดาวเทียมที่โคจรเป็นวงกลมในระนาบที่ผ่านเส้นศูนย์สูตรของโลก และมีศูนย์กลางวงโคจรร่วมกับศูนย์กลางของโลก จงหารัศมี r ของวงโคจรที่ทำให้ดาวเทียมลอยนิ่งเมื่อเทียบกับคนที่อยู่นิ่งบนโลก กำหนดให้ $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม

วิธีทำ ดาวเทียมชนิดนี้เรียกว่า Geostationary Satellite ซึ่งโคจรรอบโลกในเวลา 24 ชั่วโมง เท่ากับเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเอง 1 รอบ

$\therefore$ T = 24 ชั่วโมง = 24 x 60 x 60 = 86,400 วินาที

$m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม , $G = 6.67 \times 10^{-11}$ นิวตัน-เมตร²/กิโลกรัม²

จาก $T^2 = Kr^3$

$= [4\pi^2)/Gm_e)]r^3$

$r^3 = (Gm_eT^2)/(4\pi^2)$

$r = [(Gm_eT^2)/(4\pi^2)^{1/3}$

$= [(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(86{,}400)^2/(4\pi^2)]^{1/3}$

$\therefore$ รัศมีของวงโคจรของดาวเทียม $r = 4.2 \times 10^7$ เมตร

เนื่องจากรัศมีของโลก = 6.4×10^6 เมตร ดังนั้นดาวเทียมจะต้องโคจรสูงจากผิวโลก = $(4.2 \times 10^7)-(6.4 \times 10^6)$ เมตร จะได้ 3.56×10^7 เมตร = 35,600 กิโลเมตร ซึ่งประมาณ 1/10 เท่าของระยะทางระหว่างโลกกับดวงจันทร์ และประมาณ 6 เท่าของรัศมีของโลก ดาวเทียมที่โคจรสูง 35,600 กิโลเมตร จะเดินทางรอบโลกในเวลา 24 ชั่วโมง ซึ่งเท่ากับเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเอง ดังนั้น ถ้าดาวเทียมเคลื่อนที่อยู่ในวงโคจรนี้ คนบนโลกจะเห็นดาวเทียมดวงนี้ลอยนิ่งอยู่บนฟากฟ้า ในทางปฏิบัติถ้าไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ ที่จะทำให้ความสูงเปลี่ยนไป ดาวเทียมดวงนี้ก็ควรจะอยู่นิ่ง ๆ เช่นนั้นไปเรื่อย ๆ

ตัวอย่าง 6.10 จงหาเวลาคาบของดาวเทียมที่โคจรเป็นวงกลมรัศมี 8,000 กิโลเมตร ($m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม)

วิธีทำ แทนค่า $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $r = 8{,}000$ km $= 8 \times 10^6$ m ในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$T = (2\pi r)/v$

$v = \sqrt{Gm_e/r}$

จะได้

ความเร็วของการโคจร $v = \sqrt{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})/(8 \times 10^6)}$

$= 7.07 \times 10^3$ m/s

คาบของการโคจร $T = (2\pi \times 8 \times 10^6)/(7.07 \times 10^3)$ s

$= (2\pi \times 8 \times 10^6)/(7.07 \times 10^3 \times 60 \times 60)$ hr

$= 1.97$ hr

ตัวอย่าง 6.11 ดาวเทียมโคจรเป็นวงกลมที่ระยะสูง 300 กิโลเมตรจากผิวโลก รัศมีของโลกเท่ากับ 6,400 กิโลเมตร และ $g = 9.80$ เมตร/วินาที^{2} จงหา

ก. ความเร็วของดาวเทียม ข. คาบเวลา T ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง a_c

วิธีทำ แทนค่า $R = 6.4 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s^2

$r = (6{,}400 + 300) \times 10^3 = 6.70 \times 10^6$ m ในความ

สัมพันธ์ต่อไปนี้ จะได้

ก. $v = R\sqrt{g/r}$

$= (6.40 \times 10^6)\sqrt{9.8/(6.70 \times 10^6)}$

$= 7{,}740$ m/s

ดังนั้น ความเร็วของดาวเทียม $v = 27{,}900$ Km/hr

ข. $T = (2\pi r)/v$

$= [2\pi \times (6.70 \times 10^6)]/7{,}740$

$= 5.46 \times 10^3$ s

ดังนั้น คาบเวลา $T = 1.51$ hr

ค. $a_c = v^2/r$

$= (7{,}740)^2/(6.70 \times 10^6)$

ดังนั้น ความเร่งสู่ศูนย์กลาง $a_c = 8.94$ m/s²

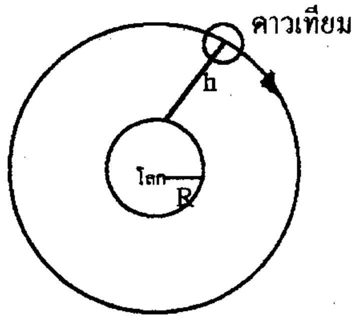
ตัวอย่าง 6.12 ดาวเทียมดวงหนึ่งมวล 150 กิโลกรัม โคจรเป็นวงกลมรอบโลก อยู่ห่างจากโลก 1,000 กิโลเมตร จงหา

ก. แรงความโน้มถ่วงที่กระทำบนดาวเทียม

ข. ความเร็วของดาวเทียมที่โคจร

ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

ง. เวลาที่ดาวเทียมโคจรครบรอบ



กำหนดให้ รัศมีของโลก R = 6,370 กิโลเมตร

ระยะทางจากดาวเทียมเหนือโลก h = 1,000 กิโลเมตร

g = 9.8 เมตร/วินาที²

วิธีทำ แทนค่าลงในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$g_h = g[R^2/(R + h)^2]$

$= [(9.8)(6{,}370)^2]/(6{,}370 + 1{,}000)^2$

$= 7.3$ เมตร/วินาที²

$F_g = mg_h$

จะได้ $= (150)(7.3)$

ก. แรงความโน้มถ่วง	F_g	=	1.1×10^3 นิวตัน	
	mg_h	=	$m(v^2/r)$	$= (mv^2)/(R + h)$
$\therefore$	v	=	$\sqrt{gh(R + h)}$	
		=	$\sqrt{(7.3)(7.37 \times 10^6)}$	
ข. ความเร็วของดาวเทียม	v	=	7.3×10^3	เมตร/วินาที
	F_c	=	ma_c	
$\therefore$	a_c	=	F_c/m	
		=	$(1.1 \times 10^3)/150$	
ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง	a_c	=	7.3	เมตร/วินาที^{2}
	T	=	$[2\pi(R + h)]/v$	
		=	$[2\pi(7.37 \times 10^6)]/(7.3 \times 10^3)$	
		=	6.3×10^3	วินาที
ง. เวลาที่ดาวเทียมโคจรครบรอบ	T	=	1.75	ชั่วโมง

ดาวเทียมที่มนุษย์สร้างขึ้นแล้วส่งขึ้นไปโคจรรอบโลกนั้น มีประโยชน์อย่างมากมาย ดาวเทียมจะมีประโยชน์อย่างไรย่อมขึ้นอยู่กับการสร้างและวัตถุประสงค์ในการสร้างดาวเทียมนั้น ๆ ซึ่งจะกล่าวโดยสังเขปดังนี้

นับตั้งแต่สหภาพโซเวียตประสบความสำเร็จในการส่งดาวเทียม ชื่อ **สปุตนิก** ขึ้นไปโคจรรอบโลกได้สำเร็จเมื่อวันที่ 4 ตุลาคม 2500 และต่อมาสหรัฐอเมริกาก็ประสบความสำเร็จในการส่งดาวเทียม ชื่อ **เอกซ์พลอเรอ** ขึ้นไปโคจรรอบโลกได้สำเร็จในปีต่อมา จนถึงปัจจุบันนี้มีดาวเทียมโคจรรอบโลกหลายพันดวง ซึ่งดาวเทียมแต่ละดวงที่ส่งขึ้นไปนั้นด้วยวัตถุประสงค์ที่แตกต่างกัน อาจมีส่วนประกอบ โครงสร้าง ขนาด วงโคจรและระดับโคจรแตกต่างกัน จะกล่าวโดยย่อดังนี้

1. **ดาวเทียมอุตุนิยมวิทยา** เราสามารถใช้ดาวเทียมตรวจสภาพดินฟ้าอากาศที่เกิดขึ้นบนโลกได้ เพราะดาวเทียมโคจรอยู่ระดับสูงย่อมสามารถถ่ายภาพเมฆบนท้องฟ้าส่งมายังสถานีรับบนโลก จากสภาพต่าง ๆ ของเมฆก็นำมาวินิจฉัยทางอุตุนิยมวิทยา ดาวเทียมชนิดนี้สามารถบอกการเกิดพายุ ณ ตำบลต่าง ๆ บนโลกได้อย่างดี เมื่อเราทราบว่าจะเกิดพายุเมื่อใด ฝนตกหนักที่ใดก็ทำให้สามารถป้องกันสิ่งต่าง ๆ ให้พ้นภัยพิบัติได้ก่อน และยังหวังด้วยว่าวันหนึ่งจะสามารถทำลายพายุขณะที่เริ่มก่อตัวโดยใช้ดาวเทียมชนิดนี้เป็นเครื่องมือได้อีกด้วย ตัวอย่างของดาวเทียมชนิดนี้ได้แก่ **ดาวเทียมไทรอส** (TIROS) **ดาวเทียมนิมบัส** (NIMBUS) กรมอุตุนิยม

วิทยามีสถานีภาคพื้นดิน รับสัญญาณดาวเทียมเอง ปัจจุบันรับข้อมูลจากดาวเทียม 3 ดวง คือ โนอา 2 ดวง (NOAA = The National Oceanic and Atomsphere Administration) มี NOAA-6 และ NOAA-7 และอีกดวงหนึ่งเป็นดาวเทียมของญี่ปุ่น ชื่อ **จีเอ็มเอส** (GMS=Geostationary Meterological Satellite)

2. **ดาวเทียมโทรคมนาคม** ในปัจจุบันเราสามารถทราบข่าวและเหตุการณ์ต่าง ๆ ของโลกได้อย่างรวดเร็วมาก โดยการใช้การสื่อสารด้วยดาวเทียมโดยการส่งสัญญาณไปสู่ดาวเทียมที่โคจรอยู่ แล้วให้ดาวเทียมเป็นสถานีส่งอีกต่อหนึ่ง จะเห็นได้ว่าขณะที่เราอยู่ในประเทศไทย เราสามารถชมการถ่ายทอดสดจากโทรทัศน์ในรายการการชกมวยชิงชนะเลิศคู่สำคัญ ๆ จากสหรัฐอเมริกา หรือฟุตบอลโลกจากยุโรป กีฬาโอลิมปิก การประกวดนางงามจักรวาลได้ในเวลาเดียวกันกับประเทศนั้น ๆ ได้ ทั้ง ๆ ที่ประเทศไทยอยู่ห่างจากประเทศดังกล่าวหลายพันกิโลเมตร ประเทศไทยริเริ่มการใช้การสื่อสารผ่านดาวเทียมและเข้าร่วมเป็น**สมาชิกสหพันธ์ดาวเทียมโทรคมนาคมระหว่างชาติ** (International Telecommunication Satellite Consortium) หรือเรียกกันว่า **INTELSAT** ในปี พ.ศ. 2509 จึงนับเป็นการตัดสินใจขั้นสำคัญในการพยายามปรับปรุงวิธีการสื่อสารกับต่างประเทศให้ทันสมัย ทันโลก ทันเหตุการณ์ ซึ่งบังเกิดผลมากมายกับระบบการสื่อสารของไทยจนถึงปัจจุบันนี้ นอกจากนั้นยังเช่าสัญญาณดาวเทียม**ปาลาปา** (PALAPA) ของประเทศอินโดนีเซีย มาใช้ในการติดต่อถ่ายทอดรายการโทรทัศน์ เพื่อให้มีรัศมีการส่งครอบคลุมไปทั่วประเทศไทย

3. **ดาวเทียมสำรวจทรัพยากรธรรมชาติ** โดยใช้ดาวเทียมถ่ายภาพจากส่วนต่าง ๆ ของโลกแล้วนำมาวิเคราะห์ผลจากภาพถ่ายและสัญญาณอื่น ๆ ของบริเวณที่เราต้องการสำรวจแหล่งแร่แล้วนำมาเปรียบเทียบและวิเคราะห์ว่า บริเวณที่ดินนั้นมีแร่อะไรบ้าง ประเทศไทยเริ่มโครงการสำรวจทรัพยากรธรรมชาติด้วยดาวเทียม เมื่อวันที่ 14 กันยายน พ.ศ. 2514 ได้เข้าร่วมในโครงการดาวเทียมสำรวจทรัพยากรพิภพของสหรัฐอเมริกา โดยมีสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติเป็นผู้ประสานงานกับ NASA และเป็นศูนย์ประสานการให้บริการข้อมูลจากดาวเทียมระหว่างองค์การนาสากับผู้ใช้ภายในประเทศ ดาวเทียมที่ให้บริการนี้คือ **แลนด์แซท** (LANDSAT) หน่วยงานที่ได้รับบริการ ได้แก่ กรมพัฒนาที่ดิน กรมป่าไม้ กรมชลประทาน กรมวิชาการเกษตร กรมทรัพยากรธรณี สำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร สำนักงานพลังงานแห่งชาติ กรมอุทกศาสตร์ ฯลฯ

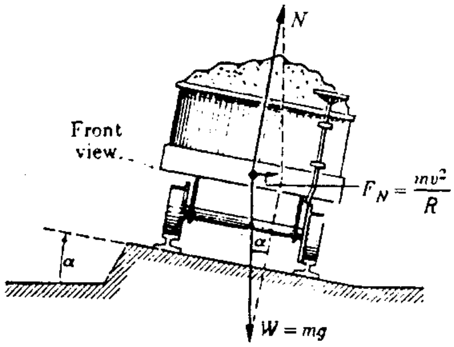
4. **ดาวเทียมยุทธศาสตร์** ชาติมหาอำนาจในปัจจุบันนี้ ได้แก่ สหรัฐอเมริกา รัสเซีย ต่างก็ใช้ดาวเทียมถ่ายภาพการเคลื่อนไหวทางยุทธศาสตร์ต่าง ๆ เช่น กำลังทหาร ฐานจรวด ท่าเรือ ฯลฯ เพื่อหาทางทำลายหรือป้องกันประเทศชาติได้ดีขึ้น ตัวอย่างของดาวเทียมชนิดนี้ได้แก่

ดาวเทียมคอสมอสของรัสเซีย ดาวเทียมสแน็ป (SNAP) ของสหรัฐอเมริกา

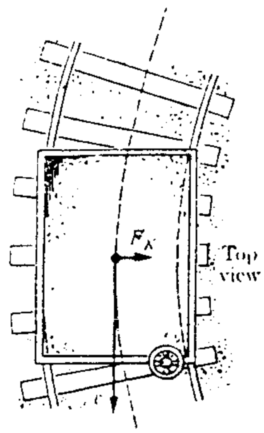
5. ดาวเทียมเพื่อการศึกษา เรามีความรู้เกี่ยวกับดาราศาสตร์ บรรยากาศ และอวกาศรอบ ๆโลกมากกว่าเมื่อก่อนที่จะมีการส่งดาวเทียมขึ้นไปที่สูง ๆเราสามารถทำการตรวจวัดรังสีต่าง ๆ ที่มาจากเอกภพได้ และเนื่องจากดาวเทียมไม่ถูกบังด้วยบรรยากาศ ดาวเทียมจึงสามารถถ่ายภาพดวงดาวต่าง ๆ ได้ชัดเจนกว่าบนโลก นอกจากนี้ ดาวเทียมยังเป็นแหล่งทดลองพิสูจน์ทฤษฎีเก่า ๆ อีกมากมาย ทั้งในวิทยาศาสตร์กายภาพและวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ตัวอย่างของดาวเทียมเพื่อการศึกษา ได้แก่ ดาวเทียมคอส-บี ดาวเทียมฮิโอ ดาวเทียมเอกซ์พลอเรอ เป็นต้น

นอกจากดาวเทียมที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ ยังมีดาวเทียมที่จะทำประโยชน์อื่น ๆ ได้อีกมาก

6.2.6 การยกขอบทางโค้ง (Banking of curve) การประยุกต์เรื่องแรงสู่ศูนย์กลางอีกอย่างหนึ่ง คือ การสร้างถนนเอียงลาด หรือรางรถไฟตรงทางโค้ง ถนนและรางรถไฟจะต้องสร้างให้เอียงลาดเข้าสู่ศูนย์กลางของความโค้งตรงบริเวณทางโค้งเพื่อให้เกิดแรงสู่ศูนย์กลางซึ่งยวดยานพาหนะต้องใช้แล่นเลี้ยวตามทางโค้งนั้น ถ้าไม่สร้างให้เอียงลาดดังกล่าว แรงสู่ศูนย์กลางจะต้องได้มาจากแรงที่ล้อรถหรือรางรถไฟ เป็นผลให้เกิดความเสียดทานสูงและสึกหรอมาก รูปที่ 6.4 แสดงการเอียงและรางรถไฟ (รูป ก) แรงที่กระทำต่อรถ คือ น้ำหนัก W = mg และแรง



(ก)



(ข)

รูปที่ 6.4 การยกขอบถนนและรางรถไฟ

ตั้งฉาก N อันเนื่องมาจากการเอียง สำหรับรางรถไฟ (รูป ข) แรงลัพธ์ F_N จะต้องมากพอที่จะทำให้เกิดแรงสู่ศูนย์กลาง $F_N = (mv^2/R)$ เมื่อ R เป็นรัศมีความโค้ง จะได้

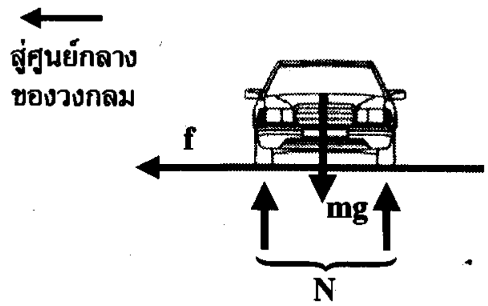
$$\tan\alpha = F_N/W = v^2/(Rg) \qquad ......6.34$$

จะเห็นว่าผลลัพธ์นี้ไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุ เมื่อสร้างถนนหรือทางรถไฟให้เอียงเป็นมุม α ตามที่คำนวณไว้ และใช้ความเร็วไม่เกินที่กำหนด ยวดยานพาหนะที่แล่นผ่านทางโค้งก็ไม่มีแรงข้างๆ มากระทำต่อยวดยานพาหนะ สำหรับอัตราที่มากกว่าหรือน้อยกว่าที่กำหนดไว้ไม่มากนักก็จะไม่ทำให้เกิดปัญหาอะไร เพราะว่าความเสียดทานของล้อรถกับถนนจะช่วยต้านแรงข้างๆ ให้ในกรณีจำเป็นเช่นนี้ อย่างไรก็ดี **ถ้าใช้อัตราเร็วสูงกว่าที่กำหนดไว้มากๆ ยวดยานพาหนะจะมีแนวโน้มที่จะพุ่งตรงไปตกถนนได้**

ตามปกติเมื่อถนนลื่นเนื่องจากมีน้ำเจิ่งหรือมีหิมะ ความเสียดทานระหว่างล้อกับถนนจะน้อย ทำให้รถแล่นผ่านทางโค้งเสียการทรงตัว ซึ่งไม่เหมือนกับรถจักรยานยนต์หรือเครื่องบิน วิศวกรจึงต้องสร้างถนนบริเวณทางโค้งให้เอียง ค่าความเอียงของถนนขึ้นอยู่กับความเร็วของรถกับความโค้งของถนน โดยปกติ ตามทางโค้งจะมีป้ายบอกความเร็วที่จะผ่านทางโค้งได้โดยปลอดภัย

ตัวอย่าง 6.13 จงหาอัตราเร็วสูงสุดซึ่งรถยนต์มวล m สามารถวิ่งผ่านทางโค้งราบ รัศมีทางโค้งเป็น 40 เมตร และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างล้อกับถนนเท่ากับ 0.7

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



แรงสู่ศูนย์กลางจากแรงเสียดทาน

รถยนต์มีมวล = m , รัศมี r = 40 เมตร , μ = 0.7

แรงเสียดทาน = μmg

การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง

แรงลัพธ์ = แรงเสียดทาน (มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง)

$mv^2/r = \mu mg$

ดังนั้น $v = \sqrt{\mu g r}$

$= \sqrt{(0.7)(9.80(40)}$

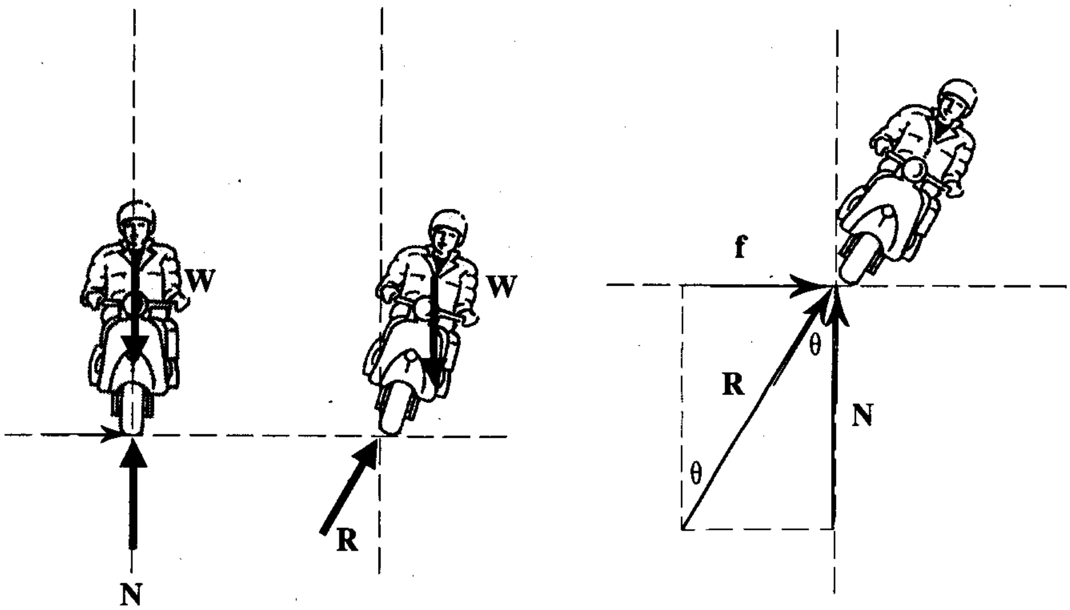
$= 16.6$ เมตร/วินาที

ตัวอย่าง 6.14 รถจักรยานยนต์และผู้ขี่มีมวลรวมกัน 100 กิโลกรัม กำหนดให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 0.6

ก. จงหาแรงเสียดทานที่ทำให้รถจักรยานยนต์แล่นด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาทีผ่านทางโค้งซึ่งมีรัศมีทางโค้งเท่ากับ 80 เมตร โดยไม่ลื่นไถล

ข. ผู้ขับขี่จะต้องเอนตัวเป็นมุมเท่าใด

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



$v = 20\ m/s$, $r = 80\ m$, $m = 100\ kg$, $\mu = 0.6$

แรงสู่ศูนย์กลาง f	=	$(mv^2)/r$		
	=	$[(100)(20)^2]/(80)$		
	=	500		N
น้ำหนักของผู้ขี่จักรยานยนต์	=	mg	= (100)(9.8)	
	=	980		N
	=	F_n		
แรงเสียดทานสูงสุด	=	$\mu_s F_n$		
	=	(0.6)(980)		
	=	588		N

ก. จะเห็นว่า แรงเสียดทานสูงสุดมีค่ามากกว่าแรงสู่ศูนย์กลาง ดังนั้นแรงเสียดทานจะทำกับรถเพียง 500 N

ข. จากรูป จะได้ว่า

$$\tan\theta = f/F_n = 500/980$$
$$= 0.510 = 27^\circ$$

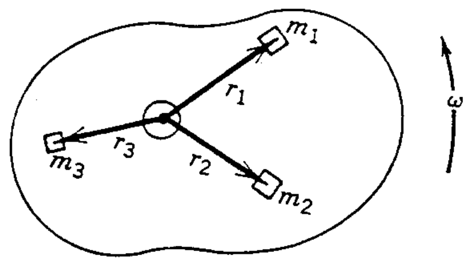
ข. ผู้ที่จะต้องเอนตัวทำมุม 27°

กิจกรรม 6.1

ให้นักศึกษาสังเกตดูแข่งจักรยานในสนามกีฬาหัวหมากว่าลาดเอียงหรือไม่ ในลักษณะอย่างไรและสอดคล้องกับสมการ $\tan\theta = v^2/rg$ หรือไม่

6.3 พลศาสตร์ของการหมุน

6.3.1 พลังงานจลน์ของการหมุนและโมเมนต์ของความเฉื่อย



รูปที่ 6.5 วัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนซึ่งอยู่นิ่ง ด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังรูปที่ 6.5 อนุภาคมีมวล m_1 เคลื่อนที่ห่างจากจุดหมุน r_1 มีความเร็วเชิงเส้น $v_1 = \omega r_1$ พลังงานจลน์ของอนุภาคมวล m_1 จะได้

$$(1/2)m_1 v_1^2 = (1/2)m\omega^2 r_1^2$$

เมื่ออนุภาค m_2, m_3 ที่รวมกันอยู่ ต่างก็หมุนไปด้วยและมีพลังงานจลน์ของตัวเองแล้ว **ผลบวกของพลังงานจลน์ของอนุภาคแต่ละชิ้นจะเป็นพลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อนนั่นเอง** อนุภาคแต่ละชิ้นอาจมีมวลและระยะห่างจากจุดหมุนต่างกัน แต่ความเร็วเชิงมุมจะเท่ากันเสมอ ให้ E_k เป็นพลังงานจลน์รวมของอนุภาคทั้งหมด

$$E_k = (1/2)\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^3 + \dots)$$
$$= (1/2)\omega^2 \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \qquad \text{......6.35}$$

ปริมาณ $\sum_i m_i r_i^2$ **เรียกว่า โมเมนต์ของความเฉื่อย** (moment of inertia) ซึ่งเป็นผลรวมของผลคูณระหว่างมวลของอนุภาคกับกำลังสองของระยะทางที่มวลนั้นห่างจากแกนหมุนซึ่ง**จะแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า I** ในระบบเอสไอ **มีหน่วยเป็นกิโลกรัม-เมตร²** ค่า I ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแกนหมุนและรูปร่างของวัตถุ และการกระจายของเนื้อวัตถุด้วย ระยะ r_i คือระยะทางในแนวตั้งฉากจากอนุภาค i^{th} ถึงแกนหมุน

นั่นคือ

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad ......6.36$$

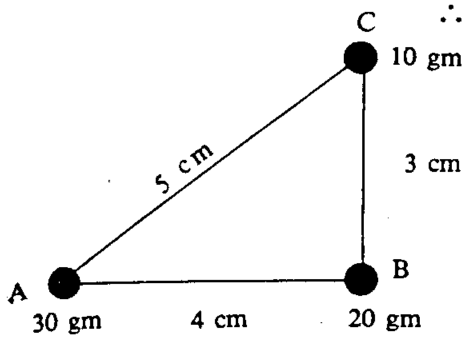
ฉะนั้น พลังงานจลน์ของการหมุน เขียนได้ว่า

$$E_k = (1/2)I\omega^2 \qquad ......6.37$$

สมการ (6.37) สามารถเปรียบเทียบกับพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น $E_k = (1/2)mv^2$ จะเห็นได้ว่า สำหรับการเคลื่อนที่แบบการหมุนนั้น เทียบโมเมนต์ของความเฉื่อย I กับมวล m ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น และความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับความเร็วเชิงเส้น v พลังงานจลน์ของการหมุนจะมีหน่วยเป็นจูลเช่นเดียวกับพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น

ตัวอย่าง 6.15 วัตถุเล็ก ๆ 3 อัน ซึ่งอนุโลมเป็นอนุภาค ถูกเชื่อมโยงด้วยคานเบาดังรูป จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อย (ก) รอบแกนที่ผ่านจุด A ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ ABC และ (ข) รอบแกนที่ซ้อนกับคาน BC

วิธีทำ ก. อนุภาคที่จุด A อยู่บนแกนพอดี ระยะทางระหว่างอนุภาคกับแกนจึงเท่ากับศูนย์ จึงไม่มีโมเมนต์ของความเฉื่อยในกรณีนี้



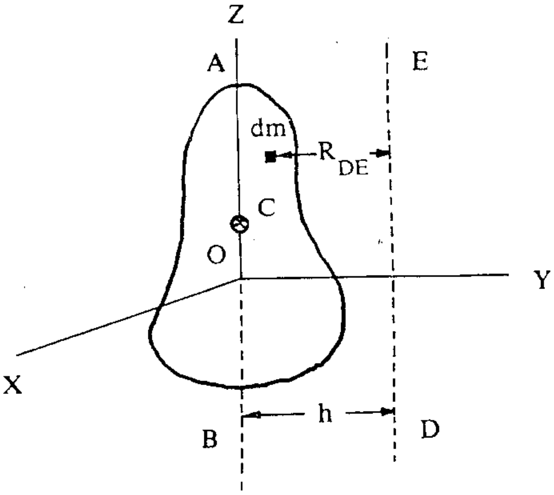
$$\therefore\ I = \sum_i m_i r_i^2$$
$$= (0.01\ kg)(0.05m)^2 + (0.02\ kg)(0.04m)^2 + (0.03\ kg)(0)^2$$
$$= 5.7 \times 10^{-5}\ kg.m^2$$

ข. อนุภาคที่ B และ C อยู่บนแกน ดังนั้นโมเมนต์ของความเฉื่อย คือ

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$
$$= (0.03\ kg)(0.04m)^2 + (0.02kg)(0)^2 + (0.01\ kg)(0)^2$$
$$= 4.8 \times 10^{-5}\ kg.m^2$$

6.3.2 การหาโมเมนต์ของความเฉื่อย

ทฤษฎีแกนขนาน (The Parallel Axis Theorem) เป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุนสองแกนซึ่งขนานกัน โดยที่แกนหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุ



รูปที่ 6.6 แสดงแกนหมุน AB และ DE ซึ่งขนานกันและห่างกัน h

วัตถุซึ่งมีมวล M และ C เป็นศูนย์กลางมวล AB เป็นแกนหมุนผ่านจุด C DE เป็นแกนหมุนซึ่งขนานกับ AB และห่างเป็นระยะทางเท่ากับ h

ให้ I_{CM} เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน AB เพื่อให้ง่ายเราให้แกน AB ทับแกน Z แกน DE อยู่บนระนาบ YZ ดังรูปที่ 6.6 เราได้

$$I_Z = \int (x^2 + y^2)dm$$

ถ้าให้ I_{DE} เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน DE ดังนั้น

$$I_{DE} = \int R^2_{DE}dm \qquad \text{......6.38}$$

โดยที่ R_{DE} = ระยะตั้งฉากจาก dm ถึงแกน DE เราทราบว่า

$$R^2_{DE} = x^2 + (h - y)^2$$

$$= x^2 + h^2 - 2hy + y^2$$

แทนค่า R^2_{DE} ลงในสมการ (6.38) จะได้

$$I_{DE} = \int (x^2 + y^2)dm - 2h\int ydm + h^2\int dm$$

แต่ $\int ydm$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่งศูนย์กลางมวล (R_{CM}) ตามแนวแกน Y ซึ่งในกรณีนี้คือ **OC** จะได้ $\int ydm = 0$

ดังนั้น $I_{DE} = \int (x^2 + y^2)dm + h^2 \int dm$

$$I_{DE} = I_{CM} + Mh^2$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad ......6.39$$

นั่นคือ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนใด ๆ จะเท่ากับโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกนนั้นผ่านศูนย์กลางมวล บวกกับผลคูณของมวลทั้งหมดของวัตถุกับกำลังสองของระยะทางระหว่างแกนทั้งสองนั้น ซึ่งสมการ (6.39) เรียกว่า **ทฤษฎีแกนขนาน**

พลังงานจลน์ของการหมุนในเรื่องนี้ คือ

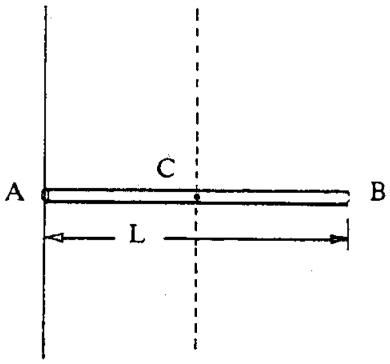
$$E_k = (1/2)I\omega^2$$

$$= (1/2)(I_{CM} + Mh^2)\omega^2$$

$$= (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)Mh^2\omega^2 \qquad ......6.40$$

ตัวอย่าง 6.16 ไม้คานขนาดสม่ำเสมอยาว L มีมวล M และมีโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับไม้คาน เท่ากับ $(ML^2)/12$ ให้หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของคานนี้รอบแกนผ่านปลายข้างหนึ่ง และตั้งได้ฉากกับไม้คาน

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



ไม้คานมีขนาดสม่ำเสมอ จุดศูนย์กลางแกนหมุนผ่าน C มวลจึงอยู่ที่จุดกึ่งกลางไม้คาน คือที่จุด C

$\therefore \quad I_{CM} = (1/2)ML^2$

จากสมการ $I = I_{CM} + Mh^2$

$$= (1/12)ML^2 + M(L/2)^2$$

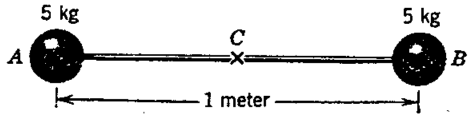
$$= (1/12)ML^2 + (1/4)ML^2$$

$$I = (1/3)ML^2$$

ตัวอย่าง 6.17 ทรงกลม 5 กิโลกรัม 2 ลูก เชื่อมกันด้วยคานยาว 1 เมตร ถ้าพิจารณาว่าทรงกลมเหมือนเป็นอนุภาคเล็ก ๆ และคานเบามาก จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของทรงกลมชุดนี้

ก. รอบแกนที่ตั้งฉากกับคานและผ่านจุด C

ข. รอบแกนที่ผ่านจุด A หรือ B และตั้งฉากกับคาน



วิธีทำ

ก. แกนหมุนตั้งฉากกับคานและผ่านจุด C จะได้

$$
\begin{aligned}
I_C &= \sum_i m_i r_i^2 \\
&= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(0.5)^2 + (5.0)(0.5)^2 \\
&= 2.5 \quad \text{kg.m}^2
\end{aligned}
$$

ข. แกนหมุนตั้งฉากกับคานและผ่าน A หรือ B

$$
\begin{aligned}
I_A &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(0)^2 + (5.0)(1.0)^2 \\
&= 5 \quad \text{kg.m}^2 \\
I_B &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(1.0)^2 + (5.0)(0)^2 \\
&= 5 \quad \text{kg.m}^2
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า **ถ้าหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านปลายข้างหนึ่งของลูกทรงกลมแล้วโมเมนต์ของความเฉื่อยจะมีค่าเป็น2เท่าของเมื่อหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมนั้น**

จากตัวอย่าง 6.17 เราคิดว่าทรงกลมเป็นจุดที่ไม่มีขนาด แล้วหาผลแบบธรรมดาโดยเอามาบวกกัน เมื่อใดที่วัตถุมีขนาดใหญ่ มวลกระจายอยู่ทุกส่วน ผลบวกของ $I = \sum_i m_i r_i^2$ จะต้องเปลี่ยนไป หาได้โดยการอินทิเกรตโดยถือว่าวัตถุนั้นแบ่งเป็นชิ้นเล็กๆ จำนวนมากมายนับไม่ถ้วน โดยแต่ละชิ้นมีมวล dm โดยมี dV เป็นปริมาตรเล็ก ๆ อยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งซึ่งมีระยะตั้งฉากจากแกนหมุนเป็น r และที่ตำแหน่งนั้นมีความหนาแน่น ρ ดังนั้น $dm = \rho dV$ ให้ r เป็นระยะห่างของมวลย่อยจากแกนหมุน โมเมนต์ของความเฉื่อยหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i r_i^2 \\
&= \int r^2 dm \qquad \text{......6.41}
\end{aligned}
$$

สำหรับวัตถุที่ไม่มีรูปทรงทางเรขาคณิต การอินทิเกรตหาค่า I ทำได้ยาก แต่ถ้ามีรูปทรงเรขาคณิตแบบง่าย ๆ การอินทิเกรตทำได้ง่าย โดยเลือกแกนสมมาตร (axis of symmetry) ของวัตถุเป็นแกนหมุน

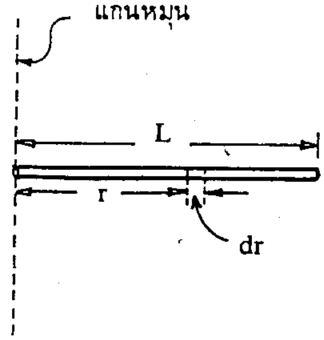
สำหรับวัตถุที่มีรูปทรงทางเรขาคณิตและมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ หรือทราบค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่งต่าง ๆ จะหาโมเมนต์ของความเฉื่อยได้จากสมการ

$$
I = \int r^2 \rho dV \qquad \text{......6.42}
$$

ตัวอย่าง 6.18 แท่งวัตถุเล็ก ๆ มีมวล M และยาว L มีพื้นที่หน้าตัดและความหนาแน่นสม่ำเสมอ จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อย ถ้าหมุน

ก. รอบแกนซึ่งผ่านปลายข้างหนึ่ง และตั้งฉากกับวัตถุนั้น

ข. รอบแกนซึ่งผ่านจุดกึ่งกลาง และตั้งฉากกับวัตถุนั้น



แท่งวัตถุหมุนรอบแกนผ่านปลายวัตถุและตั้งฉากกับวัตถุ

วิธีทำ

ก. เนื่องจากแท่งวัตถุมีขนาดเล็กและยาว เมื่อคิดแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งวัตถุ อาจถือได้ว่าขนาดหน้าตัดของแท่งวัตถุไม่มีผลต่อโมเมนต์ของความเฉื่อย จึงสามารถคำนวณหา dm ได้โดยใช้มวลต่อความยาว คือ λ (แทนที่จะเป็นความหนาแน่น ρ)

$$\therefore \quad dm = \lambda dr$$

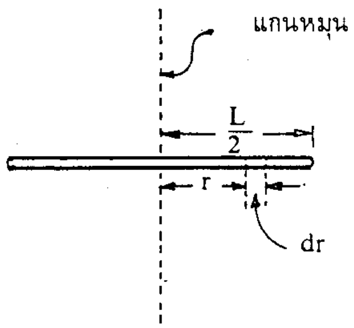
$$\because \quad I = \int r^2 dm = \int_0^L r^2 \lambda dr$$

เนื่องจากพื้นที่หน้าตัดและความหนาแน่นสม่ำเสมอ λ จึงคงตัวไม่ขึ้นกับ r

$$\therefore \quad I = \lambda \int_0^L r^2 dr = \lambda [r^3/3]_0^L = \lambda L.(L^2/3)$$

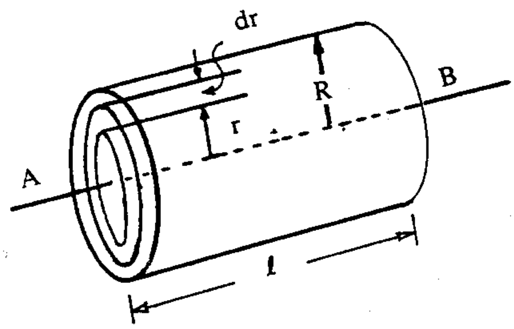
$$I = (1/3)ML^2$$

ข. ถ้าหมุนแท่งวัตถุรอบแกน ซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางแท่ง จะได้ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยดังนี้



$$I = 2\int_0^{L/2} r^2\lambda dr$$
$$= 2\lambda[r^3/3]_0^{L/2}$$
$$= 2\lambda.[L^3/(3 \times 8)]$$
$$= \lambda L.(L^2/12)$$
$$I = (1/12)ML^2$$

ตัวอย่าง 6.19 จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสมมาตร AB ของล้อตัน ล้อมีรัศมี R มวล m ความยาว l และมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ ρ



ล้อตันหมุนรอบแกน AB

วิธีทำ เนื่องจากวัตถุมีสมมาตรรอบแกนหมุน ดังนั้นจึงสามารถหา dV ซึ่งเป็นปริมาตรวงแหวนรัศมี r มีความหนา dr และยาว l นั่นคือ

ปริมาตรวงแหวน $dv = (2\pi rl)dr$

มวลของล้อ $M = \pi R^2 l\rho$

จาก $I = \int r^2\rho dV$

$$= \int_0^R r^2\rho(2\pi rl)dr$$
$$= 2\pi l\rho \int_0^R r^3 dr$$
$$= \pi l\rho(R^4/2)$$
$$= (1/2)(\pi R^2 l\rho)R^2$$
$$= (1/2)MR^2$$

ล้อตันในตัวอย่างนี้ก็คือ ทรงกระบอกตันที่ l มีค่าน้อย

ตาราง 6.3 สูตรการหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่าง ๆ ที่มีความหนาคงที่และหมุนรอบแกนที่กำหนดในรูป

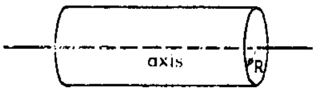
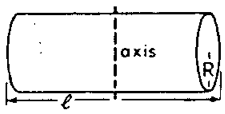
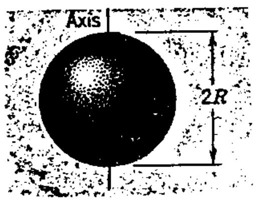
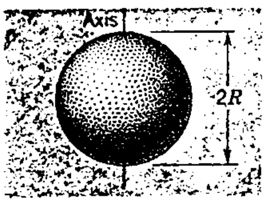
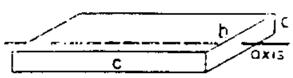
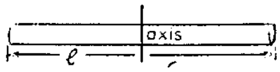
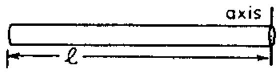
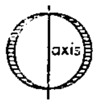
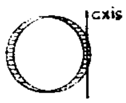
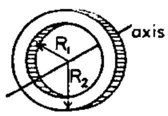
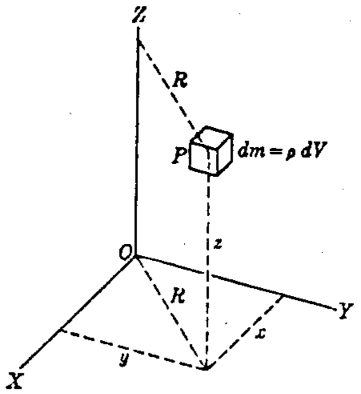
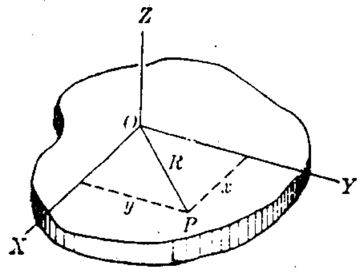
Diagram of System	Solid and Axis	I
	Cylinder about the axis of figure	$(1/2)MR^2$
	Cylinder about a central diameter	$(1/4)MR^2 + (1/12)ML^2$
	Solid Sphere about any diameter	$(2/5)MR^2$
	Thin Spherical Shell about any dismeter	$(2/3)MR^2$
	Block about a central axis	$M[a^2 + b^2)/12]$

Diagram of System	Solid and Axis	I
	Thin bar, about axis at center ⊥ to length	$(1/12)ML^2$
	Thin bar, about axis at one end	$(1/3)ML^2$
	Hoop about a diameter	$(1/2)MR^2$
	Hoop about a tangent line	$(3/2)MR^2$
	Ring about axis through its center ⊥ to the plane of the ring	$(M/2)(R_1^2 + R_2^2)$

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก เป็นทฤษฎีหนึ่งที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความเฉื่อย



รูปที่ 6.7



รูปที่ 6.8 วัตถุเป็นแผ่นหมุนรอบแกน Z

ใช้สำหรับวัตถุแบนราบ ดังรูปที่ 6.8 ให้แกน X และ Y อยู่บนระนาบของวัตถุ จะได้

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad \text{......6.43}$$

โดยที่ I_X, I_Y และ I_Z เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุเป็นแผ่น รอบแกนที่ตั้งฉากกัน มวลเล็ก ๆ dm ณ ตำแหน่ง P (ดังรูปที่ 6.7) บนวัตถุซึ่งมีความหนาแน่น ρ

$$I = \int r^2 dm$$
$$= \int \rho r^2\, dV$$

จากรูป จะได้ $\qquad r^2 = x^2 + y^2$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน Z คือ

$$I_Z = \int \rho(x^2 + y^2)dV$$
$$= \int \rho x^2 dV + \int \rho y^2 dV$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน X และแกน Y จะได้

$$I_X = \int \rho y^2 dV$$
$$I_Y = \int \rho x^2 dV$$
$$\therefore \quad I_Z = I_Y + I_X$$

โดยที่ x และ y คือระยะจาก dm (คือจุด P) คือแกน Y และแกน X ตามลำดับ และเนื่องจากวัตถุแบนมาก จึงได้ $I_Z = I_X + I_Y$

สมการ (6.43) จึงเรียกว่า **ทฤษฎีแกนตั้งฉาก** เป็นทฤษฎีที่ใช้ได้กับวัตถุแบบราบที่บางมากๆ เท่านั้น ประโยชน์ของสมการนี้ คือ ถ้าทราบค่า I รอบแกน 2 แกนซึ่งตั้งฉากกันและอยู่บนระนาบของวัตถุ เช่น I_X กับ I_Y ก็สามารถหา I รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวัตถุที่จุดตัดของ 2 แกนแรก เช่น I_Z ได้

กิจกรรม 6.2

ให้นักศึกษาพิจารณาตัวอย่างที่แสดงการหาโมเมนต์ความเฉื่อยในบทนี้ว่ากรณีใดใช้ทฤษฎีแกนขนานและกรณีใดใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉาก และหากจะเปลี่ยนแปลงทฤษฎีจะได้หรือไม่โดยการสลับกัน

ตัวอย่าง 6.20 ลวดวงกลมมวล M มีรัศมี R และโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลาง และตั้งฉากกับระนาบของวงลวดเท่ากับ MR^2 ให้หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวงลวดนี้รอบแกนที่ทับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงลวด

วิธีทำ ลักษณะรูปจะเหมือนกับรูปที่ 6.8 ให้ระนาบของลวดวงกลมอยู่ในระนาบ XY และจุดศูนย์กลางทับจุด O จะได้

$$I_Z = MR^2$$

และ $$I_X = I_Y$$

จาก $$I_Z = I_X + I_Y$$

$$MR^2 = 2I_X$$

$$\therefore \quad I_X = (1/2)MR^2 = I_Y$$

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่าวัตถุที่มีรูปร่างต่างกัน ย่อมมีโมเมนต์ของความเฉื่อยต่างๆ กัน เพื่อความสะดวกเราอาจคิดเสมือนว่ามวลของวัตถุนั้นทั้งก้อนรวมกันอยู่ ณ ตำแหน่งหนึ่งโดยมีระยะห่างระยะหนึ่งจากจุดนั้นไปยังแกนหมุน ซึ่งเรียกว่า **รัศมีไจเรชัน** (radius of gyration), k จะใช้ระยะนี้แทนโดยที่โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุนั้น คือ

$$I = Mk^2 \qquad \text{......6.44}$$

$$k = \sqrt{I/M} \qquad \text{......6.45}$$

เช่น วัตถุทรงกระบอก จะได้ $Mk^2 = (1/2)MR^2$

หรือ $k = R/\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 6.21 จงหารัศมีไจเรชันของแท่งกลม มวล M ยาว L คำนวณรอบแกนที่ตั้งฉากกับแท่งกลมและผ่านจุดศูนย์กลางของแท่งกลมนี้

วิธีทำ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของแท่งกลม คือ

$$I_{CM} = (1/12)ML^2 = Mk^2$$

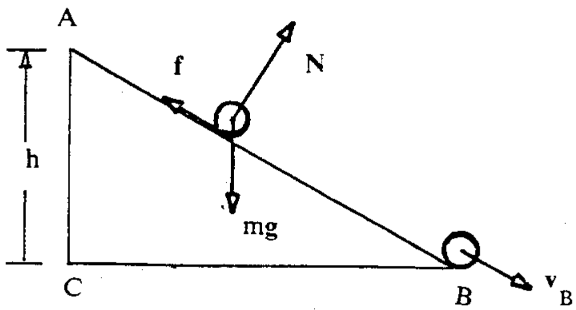
$$\therefore \quad k = \sqrt{L^2/12}$$

$$= L/[2\sqrt{3}]$$

$$= 0.289\ L$$

ตัวอย่าง 6.22 วัตถุกลมมีมวล M และรัศมีไจเรชัน k กลิ้งลงตามพื้นเอียง XY เริ่มต้นจากจุดหยุดนิ่งที่จุด X เมื่อถึงจุด Y วัตถุจะมีอัตราเร็วเชิงเส้นเป็นเท่าใด

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



XZ เป็นความสูงของพื้นเอียง = h

R เป็นรัศมีของวัตถุกลม

v_y เป็นอัตราเร็วเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลของวัตถุที่จุด Y

ขณะใด ๆ จะมีแรงกระทำ ดังรูป ดังนี้

mg = น้ำหนักของวัตถุกลม

N = แรงตั้งฉากที่พื้นเอียงกระทำต่อวัตถุกลม

f = แรงเสียดทานสถิตกระทำที่จุดสัมผัส

จะเห็นว่างานของ N และ f เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงใช้หลักการคงตัวของพลังงานกล

$$mgh = (1/2)mv_y^2 + (1/2)I\omega^2$$

$$= (1/2)mv_y^2 + (1/2)I(v_y/R)^2$$

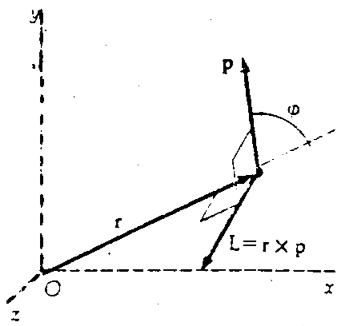
และ $I = mk^2$

$$\therefore \quad v_y = \sqrt{(2gh)/[1 + (k/R)^2]}$$

6.3.3 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของอนุภาค

โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้น **v** (มีโมเมนตัมเชิงเส้น **p** = m**v**) โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาครอบจุด O คือผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งกับโมเมนตัมเชิงเส้น ดังรูปที่ 6.9 เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad \text{......6.46}$$



รูปที่ 6.9 อนุภาคมีโมเมนตัม **p** และเวกเตอร์บอกตำแหน่ง **r** มีโมเมนตัมเชิงมุม **L** = **r** x **p** ซึ่งตั้งได้ฉากกับทั้ง **r** และ **p**

โมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบด้วย **r** และ **v** ขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่โมเมนตัมเชิงมุมจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ (**r** และ **v** อยู่ในระนาบ) และจุด O อยู่ในระนาบด้วย ดังนั้นทิศทางของโมเมนตัมเชิงมุมย่อมตั้งฉากกับระนาบนั้นเช่นกัน

ในกรณีที่อนุภาคมวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลม ซึ่งอยู่ในระนาบ XY ด้วยความเร็วเชิงมุม ω โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาคมวล m เทียบกับจุดศูนย์กลางของวงกลม คือ

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$
$$= \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$
$$= rmv \sin 90^\circ \hat{k}$$
$$= mvr\hat{k}$$
$$\mathbf{L} = m\omega r^2\hat{k} \qquad \text{......6.47}$$

จากสมการจะเห็นว่า โมเมนตัมเชิงมุมมีทิศทางเดียวกับทิศทางของความเร็วเชิงมุม เพราะว่าปริมาณ mr^2 คือ โมเมนตัมของความเฉื่อย I รอบแกน Z ของอนุภาคมวล m (อนุภาคเดียว) ดังนั้นจะได้

$$L = mr^2\omega$$

$$\therefore \quad L = I\omega \qquad \text{......6.48}$$

ตัวอย่าง 6.23 ชายคนหนึ่งผูกมวล 200 กรัมด้วยเชือกยาว 1 เมตร แล้วเหวี่ยงไปรอบ ๆ เหนือศีรษะด้วยความเร็ว 2 รอบต่อวินาที จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของมวลก้อนนี้

วิธีทำ แทนค่า

$m = 200\ g = 0.2\ kg$, $r = 1\ m$

$\omega = 2 \times 2\pi = 12.56\ rad/s$ ในสูตรต่อไปนี้

$$\therefore \quad L = mr^2\omega$$

$$= (0.2)(1)^2(12.56)$$

จะได้ค่าโมเมนตัมเชิงมุม $= 2.512$ j.s

ทอร์ก (Torque)

สำหรับอนุภาคเดี่ยว โมเมนตัมเชิงมุม มีนิยามว่า

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

เมื่อ **r** และ **p** เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งและโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/dt$$

$$= (d\mathbf{r}/dp) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt)$$

$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\ (d\mathbf{p}/dt)$$

เทอมแรกมีค่าเป็นศูนย์ และเทอมหลัง อาจเขียนในเทอมของแรง ได้ดังนี้

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

และ $\mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

ดังนั้น $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt)$

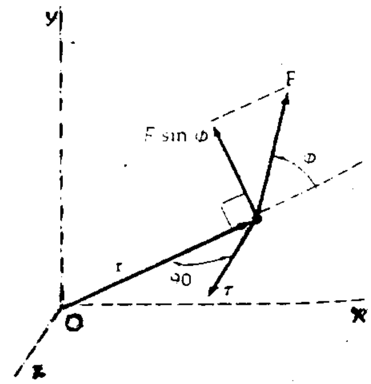
$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \text{..... 6.49}$$

ปริมาณทางขวามือของสมการ (6.49) คือ **ทอร์ก** แทนด้วยสัญลักษณ์ τ เขียนได้ว่า

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad ......6.50$$

$$\tau = dL/dt \qquad ......6.51$$

สมการ (6.51) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันในกรณีที่มีการหมุน ซึ่งกล่าวว่า **ทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค**



รูปที่ 6.10 แรง **F** กระทำกับอนุภาคซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง **r** และทอร์ก τ ตั้งได้ฉากกับ **F** และ **r**

ทอร์กเป็นปริมาณเวกเตอร์ หาค่าหรือขนาดได้จาก

$$\tau = rF \sin \phi \qquad ......6.52$$

ϕ เป็นมุมแหลมที่อยู่ระหว่าง **r** กับ **F** ทิศของ τ จะตั้งฉากกับระนาบ **F** และ **r**
หน่วยของทอร์ก คือ หน่วยของแรง x ระยะทาง คือ นิวตัน-เมตร

จากสมการ (6.50) จะเห็นว่าทอร์กไม่ใช่เพียงแต่ขึ้นกับขนาดและทิศทางของแรงที่กระทำเท่านั้น ยังขึ้นกับตำแหน่งที่แรงกระทำด้วย คือ **r** ถ้าอนุภาคอยู่ที่จุด O แรง **F** กระทำต่ออนุภาคโดยมีทิศผ่านจุดกำเนิด O จะได้ว่า **r** = 0 ดังนั้น ทอร์กรอบจุดกำเนิด O เท่ากับศูนย์ ด้วยสมการ (6.52) อาจเขียนขนาดของทอร์กได้อีกหลายแบบ ดังนี้

$$\tau = (r\sin \phi)F = Fr_{\perp}$$

หรือ $$\tau = r(F\sin \phi) = rF_{\perp}$$

$r_{\perp}$ (= rsin ϕ) คือ องค์ประกอบของ **r** ในทิศตั้งฉากกับ **F**
$F_{\perp}$ (= Fsin ϕ) คือ องค์ประกอบของ **F** ในแนวตั้งฉากกับ **r**

จากสมการ (6.48) **L** = **I**ω หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$dL/dt = I(d\omega/dt)$$

$$\tau = I\alpha \qquad ......6.53$$

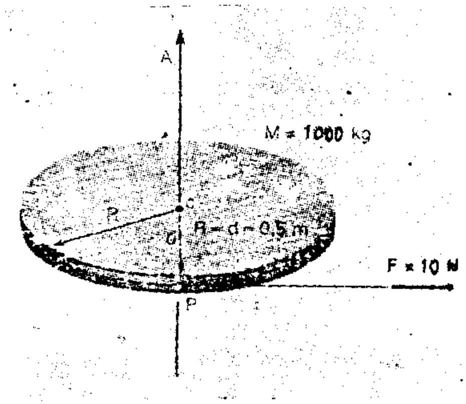
สมการ (6.53) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันในกรณีที่มีการหมุน เช่นเดียวกับสมการ (6.51)

งานที่ทำโดยแรงที่ทำให้เกิดการหมุนเป็นมุม $d\phi$ คือ $W = \tau d\phi$ และกำลังบัดดล คือ $P = \tau W$

ตัวอย่าง 6.24 แผ่นเหล็กกลมหนัก 1,000 กิโลกรัม มีรัศมี 0.5 เมตร สามารถหมุนรอบแกนกลางในแนวดิ่งได้อย่างอิสระที่ขอบของแผ่นเหล็กกลมมีเชือกรัดไว้ และถูกดึงที่จุด P ด้วยแรง 10 นิวตัน

ก. จงหาทอร์กที่เกิดขึ้น ข. จงหาความเร่งที่เกิดจากแรงดึง

ค. ถ้าเริ่มจากหยุดนิ่ง อยากทราบว่าแผ่นเหล็กกลมจะหมุนไปได้กี่รอบใน 10 วินาที



วิธีทำ

แทนค่า $M = 1{,}000$ kg , $F = 10$ N , $r = 0.5$ m ในสมการต่อไปนี้

$$\tau = r \times F$$

$$= rF \sin\theta$$

$$= (0.5)(10) \sin 90^\circ$$

∴ ก. ทอร์กที่เกิดขึ้น $= 5$ N.m

$$\because \quad \tau = I\alpha$$

$$\therefore \quad \alpha = \tau / I$$

I ของแผ่นเหล็กกลม $= (1/2)MR^2$

$$\therefore \quad \alpha = 2\tau/(MR^2)$$

$$= [2 \times (5)]/[100(0.5)^2]$$

∴ ข. ความเร่งที่เกิดจากแรงดึง $= 0.04$ rad/s²

ค. หาจำนวนรอบที่หมุนไปใน 10 วินาที โดยหามุม θ

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$
$$= (1/2)\alpha t^2$$

เมื่อ $\omega_0 = 0 = \theta_0$

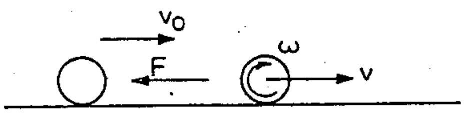
$$\therefore \quad \theta = (1/2)(0.04)(10)^2$$
$$= 2 \quad \text{rad}$$

ในเวลา 10 วินาที จะหมุนไปได้ $= \theta/(2\pi)$

$$= 2/(2\pi)$$
$$= 1/\pi \quad \text{rad}$$

ตัวอย่าง 6.25 โยนลูกโบว์ลิ่งออกไปบนพื้นราบด้วยอัตราเร็วต้น v_0 โดยยังไม่มีการกลิ้ง จงแสดงว่าลูกโบว์ลิ่งจะเริ่มกลิ้งโดยไม่มีการไถลเมื่อมีอัตราเร็วลดลงไป $(5/7)v_0$

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



ให้ F เป็นแรงที่พื้นกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง

อิมพัลส์ของแรงที่พื้นกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง คือ

$$F.t = M(v_0 - v) \qquad \text{........(1)}$$

การกลิ้งของลูกโบว์ลิ่งโดยไม่มีการไถล จะได้ว่า

$$\tau = I\alpha$$
$$F.R = [(2/5)MR^2](\omega/t)$$
$$= [(2/5)MR^2](v/Rt)$$
$$\therefore \quad F = (2/5)[(Mv)/t]$$

แทนค่า F ลงในสมการ (1) จะได้

$$(2/5)[(Mv)/t].t = M(v_0 - v)$$
$$(2/5)v = v_0 - v$$
$$v + (2/5)v = v_0$$

นั่นคือ $\quad v = (5/7)v_0$

6.3.4 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของระบบอนุภาค สำหรับกรณีของระบบอนุภาค เรามีนิยามของโมเมนตัมเชิงมุมรวมของทั้งระบบ ว่าเป็นผลบวกทางเวกเตอร์ของแต่ละอนุภาค

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i$$

$$= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad \text{......6.54}$$

เมื่อ **L** เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบ

$\mathbf{L}_i$ และ $\mathbf{r}_i$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมและตำแหน่งของอนุภาคที่ i

$\mathbf{P}_i$ เป็นโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคที่ i ในระบบ

n เป็นจำนวนอนุภาคในระบบ

$$\because \quad \tau = dL/dt$$

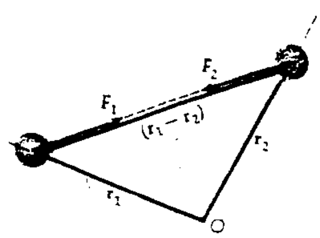
$$= \sum_{i=1}^{n} dL_i/dt$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \qquad \text{......6.55}$$

เมื่อ τ_i เป็นทอร์กที่กระทำบนอนุภาคที่ i ของระบบ

เนื่องจากทอร์ก τ_i นี้เกิดจากแรงกระทำบนอนุภาค จึงแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือทอร์กเนื่องจากแรงภายในและเนื่องจากแรงภายนอก ทอร์กที่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยน จึงเป็นทอร์กของแรงภายนอก คือ τ_{ext} เท่านั้น

จะแสดงให้เห็นว่า ถ้าแรงภายในระหว่างอนุภาค 2 อนุภาคคู่ใด ๆ กระทำในแนวเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างอนุภาคคู่นั้น ผลรวมของทอร์กภายในของระบบจะเท่ากับศูนย์



รูปที่ 6.11 แรงภายใน F_1 และ F_2 ทำให้ทอร์กสุทธิรอบจุด O เป็นศูนย์

จากรูปที่ 6.11 เราได้ $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ ตามกฎข้อ 3 ของนิวตัน ผลรวมของทอร์ก 2 ทอร์ก มีดังนี้

$$\begin{aligned}\tau_1 + \tau_2 &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \\ &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_1) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1\end{aligned}$$

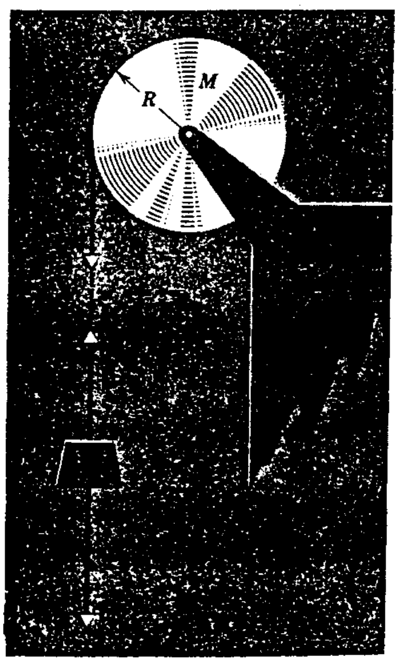
เวกเตอร์ $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ มีทิศตามแนวเส้นเชื่อมระหว่างอนุภาคทั้งสอง ดังนั้นถ้า $\mathbf{F}_1$ กระทำในแนวขนานกับเส้นเชื่อมต่อระหว่างมวล m_1 และ m_2 [$\mathbf{F}_1$ และ $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกันหรือขนานสวนกัน] แล้ว จะได้

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = 0$$

นั่นคือ แรงภายในและทอร์กภายในของระบบอนุภาค จะหักล้างกันเป็นคู่ และทอร์กที่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยนในสมการ (6.55) จึงเป็นทอร์กภายนอกเท่านั้น เขียนได้ว่า

$$dL/dt = \tau_{ext} \qquad \text{......6.56}$$

ถ้าไม่มีทอร์กจากภายนอก ($\tau_{ext} = 0$) โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่ จึงกล่าวได้ว่า โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง ถ้าระบบนั้นเป็นอิสระ ($\mathbf{F}_{ext} = 0$) หรือทอร์กจากภายนอกเป็นศูนย์ ($\tau_{ext} = 0$) แต่ $\mathbf{F}_{ext}$ อาจไม่เท่ากับศูนย์



ตัวอย่าง 6.26 จานกลมสม่ำเสมอรัศมี R มวล M หมุนรอบแกนหมุนซึ่งไม่มีความเสียดทาน มีเชือกพันรอบขอบจาน แล้วเอามวล m แขวนกับเชือก จงหาความเร่งเชิงมุมของงาน และความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน

วิธีทำ พิจารณารูปนี้

ให้ T = แรงดึงในเส้นเชือก วัตถุมวล m เคลื่อนลงด้วยความเร่ง แรงดึงลง mg มีค่ามากกว่า T และความเร่งของมวล m คือ ความเร่งของจุดริมขอบจาน จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$mg - T = ma \qquad \text{......(1)}$$

ทอร์กกระทำต่อจานคือ TR และโมเมนต์ของความเฉื่อยของจาน คือ $(1/2)MR^2$

$$\because \quad \tau = I\alpha$$

$$TR = [(1/2)MR^2]\alpha$$

$$2T = (MR)\alpha = M(\alpha R)$$

ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน หาจาก

$$a = \alpha R$$

$$\therefore \quad 2T = Ma$$

$$a = (2T)/M$$

แทนค่า a ลงในสมการ (1) จะได้

$$T = mg - ma$$

$$= mg - m[(2T)/M]$$

$$T + (2mT)/M = mg$$

$$T[(M + 2m)/M] = mg$$

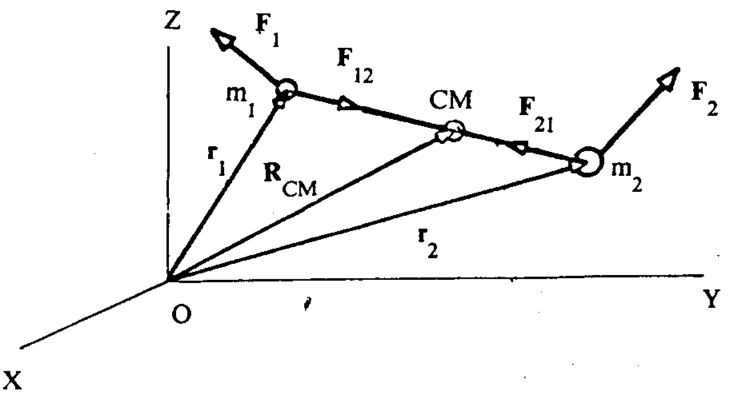
$$T = [(mM)/(2m + M)].g$$

∴ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน $a = [(2m)/(2m + M)].g$

∴ ความเร่งเชิงมุมของจาน $\alpha = a/R$

$$= [(2m)/(2m + M)].(g/R)$$

ตัวอย่าง 6.27 จงหาทอร์กเนื่องจากแรงภายในและแรงภายนอกของระบบที่มี 2 อนุภาค



ระบบ 2 อนุภาค

วิธีทำ

$$\because \quad d(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)/dt = \tau_1 + \tau_2$$

ตามรูป $\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ เป็นแรงภายนอกกระทำต่อ m_1 และ m_2 ตามลำดับ ส่วน $\mathbf{F}_{12}$ และ $\mathbf{F}_{21}$ เป็นแรงภายในกระทำต่อ m_1 และ m_2 ตามลำดับเช่นกัน

แรงรวมที่ m_1 คือ $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$ และ

แรงรวมที่ m_2 คือ $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$

ให้ τ_1 และ τ_2 เป็นทอร์กรวมกระทำบน m_1 และ m_2

$$\therefore \quad \tau_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$$

$$\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$$

แต่ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

จากสมการข้างบน จะเห็นว่าข้างขวาของสมการได้แบ่งทอร์กออกเป็น 2 ส่วน คือ $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$ ซึ่งเป็นผลรวมของทอร์กเนื่องมาจากแรงภายนอก และ $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21})$ เป็นผลรวมของทอร์กเนื่องจากแรงภายใน

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \\ &= \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\mathbf{r}_{12}$ กับ $\mathbf{F}_{12}$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน หมายความว่า ผลรวมของทอร์กเนื่องจากแรงภายในของระบบจะเป็นศูนย์เสมอ ไม่ว่าสองอนุภาคจะอยู่อย่างไรในระบบ

ดังนั้นทอร์กรวมทั้งหมดของระบบ คือ $\tau_1 + \tau_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ ซึ่งเป็นทอร์กของแรงภายนอกเท่านั้น

ให้ $\tau_1 + \tau_2 = \tau_{ext}$

นั่นคือ $d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)/dt = \tau_{ext}$

เพราะฉะนั้น อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของระบบจึงเท่ากับทอร์กรวมจากภายนอก

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีค่ามากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดอ้างอิง เราสามารถหาโมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิงใดๆ ได้ โดยการรวมโมเมนตัมเชิงมุมของทุกอนุภาคในระบบเทียบกับจุดอ้างอิงนั้นดังกล่าวมาแล้ว แต่ในกรณีที่อนุภาคในระบบจัดเรียงเป็นระเบียบ มีรูปทางเรขาคณิต เช่น ทรงกระบอก ทรงกลม และสี่เหลี่ยม มีวิธีที่สะดวกกว่า คือ ใช้สมการ

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}_{orb} \qquad \text{......6.57}$$

โดยที่ $\mathbf{L}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิง

$\mathbf{L}_{CM}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

$\mathbf{L}_{orb}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิงเดียวกับ $\mathbf{L}$ ซึ่งคำนวณได้โดย

ถือเสมือนว่ามวลทั้งหมดของระบบรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

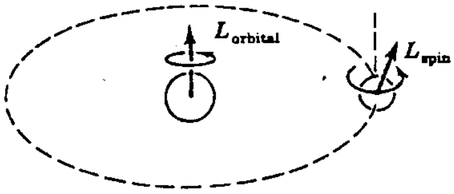
$$\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} \quad ......6.58$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM} \quad ......6.59$$

ความหมายของสมการ (6.59) คือ โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดใดๆ คือ ผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ กับโมเมนตัมเชิงมุมที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลรอบจุดนั้น

ผลที่ได้จากสมการ (6.59) ก็คือ ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุมีเฉพาะการหมุนรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุใด ๆ ก็คือ $\mathbf{L}_{CM}$ เพราะในกรณีนี้ $\mathbf{v}_{CM} = 0$ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบจุดศูนย์กลางมวล จึงเรียกว่า **สปิน** (spin) ของวัตถุนั้น ตัวอย่างในเรื่องนี้ได้แก่ การเคลื่อนที่ของไจโรสโคป โมเมนตัมเชิงมุมประกอบด้วย 2 ส่วนคือ $\mathbf{L}_{CM}$ เนื่องจากการหมุนของวงล้อ และ $\mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM}$ เนื่องจากการหมุนควง (precession) ของไจโรสโคป สมการ (6.59) จึงใช้สำหรับหาโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอมด้วย

ตัวอย่าง 6.28 จงหาโมเมนตัมเชิงมุมรวมของโลกเทียบกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ แกนหมุนรอบตัวเองของโลกชี้ไปยังดาวเหนือ ทำมุม 23.5° กับระนาบที่ตั้งได้ฉากกับวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ตามรูป



โมเมนตัมเชิงมุมของโลก

วิธีทำ แทนค่า $m_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg , $R_e = 6.4 \times 10^6$ m ในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ระยะทางระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ $r_{e\text{-}g} = 1.5 \times 10^{11}$ m

$$\omega_{spin} = 2\pi \text{ rad/day} = 2\pi/(24 \times 60 \times 60) \text{ rad/s}$$

พิจารณาว่าโลกเป็นทรงกลมตัน ดังนั้น $I_{CM} = (2/5)m_eR_e^2 = I_{spin}$

และโลกโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงกลม $M = m_e$, $r_{CM} = r_{e\text{-}s}$ และ $v_{CM} = r_{e\text{-}s}\omega_{orb}$

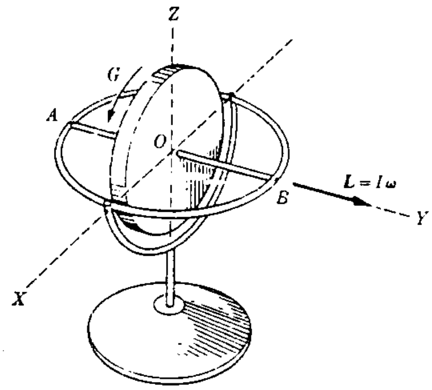
$|\mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM}| = m_e r_{e\text{-}s}^2\, \omega_{orb}$

จากสมการ $\quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times M\mathbf{v}_{CM}$

$$
\begin{aligned}
L_{spin} &= L_{CM} = I_{spin}\omega_{spin} \\
&= [(2/5)m_eR_e^2]\omega_{spin} \\
&= (2/5)(6 \times 10^{24})(6.4 \times 10^{6})^2 \times [(2\pi)/(24 \times 60 \times 60)] \\
&= 6.9 \times 10^{33} \quad \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \\
L_{orb} &= I_{orb}\omega_{orb} \\
&= |\mathbf{r}_{CM} \times m_e\mathbf{v}_{CM}| \\
&= m_e r^2_{e-s}\omega_{orb} \\
&= (6 \times 10^{24})(1.5 \times 10^{11})^2 \times [(2\pi)/(365 \times 24 \times 60 \times 60)] \\
&= 2.7 \times 10^{40} \quad \mathrm{kg.m^2.s^{-1}} \\
L_{total} &= L_{spin} + L_{orb}
\end{aligned}
$$

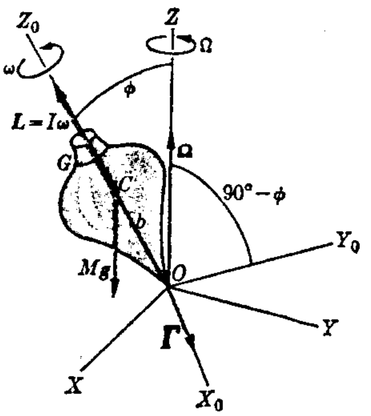
จะเห็นว่า L_{spin} มีค่าน้อยกว่า L_{orb} มากจึงตัดทิ้งไป ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของโลกรอบดวงอาทิตย์ มีค่าประมาณ 2.7×10^{40} $\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$ ตั้งได้ฉากกับระนาบของวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์

6.3.5 การเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป ไจโรสโคป (gyroscope) ประกอบด้วยล้อหมุนซึ่งติดตั้งไว้บนแกนในลักษณะที่แกนจะหมุนเปลี่ยนทิศทางได้อย่างอิสระ วงล้อ G หมุนรอบแกน AB โดยที่แกน AB นี้สามารถหมุนได้รอบทั้งแกน X และแกน Z ไจโรสโคป ติดตั้งไว้ในตำแหน่งที่ไม่มีทอร์กกระทำ ดังนั้นไจโรสโคปจึงมีคุณสมบัติที่พยายามรักษาทิศทางของแกนไว้ในแนวเดิมอยู่เสมอ ไม่ว่าจะเคลื่อนย้ายไจโรสโคปไปตามที่ต่าง ๆ ดังรูปที่ 6.12

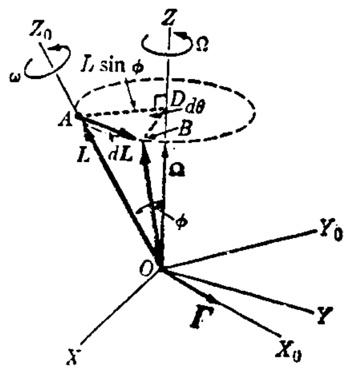


รูปที่ 6.12 ไจโรสโคป AB เป็นแกนหมุน

ในกรณีที่มีทอร์กมากระทำต่อไจโรสโคป จะมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม คือ **$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt$** ซึ่งจะมีผลทำให้โมเมนตัมลัพธ์เปลี่ยนทิศไปจากเดิม (แต่ขนาดยังคงเดิม) หมายความว่า แกนของไจโรสโคปจะมีการเคลื่อนที่ไปรอบแกนคงที่อันหนึ่ง การเคลื่อนที่ของแกนหมุนในลักษณะเช่นนี้ เรียกว่า **พรีเซสชัน** (precession) ตัวอย่างง่าย ๆ ของพรีเซสชัน คือ การเคลื่อนที่ของลูกข่าง ดังรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 ไจโรสโคปที่ถูกทอร์กภายนอกกระทำ



รูปที่ 6.14 การหมุนควงของแกนไจโรสโคป

ลูกข่างมีความเร็วเชิงมุม ω และโมเมนตัมเชิงมุม **L** รอบแกนหมุน ซึ่งทำมุม ϕ กับแนวดิ่ง มีแรง 2 แรง กระทำต่อลูกข่าง ดังนี้ น้ำหนักของลูกข่างมีทิศพุ่งลงจากศูนย์กลางของมวล และแรงปฏิกิริยาที่มีต่อลูกข่างมีทิศผ่านจุด O พุ่งขึ้นในแนวดิ่ง ทอร์กรอบจุด O ที่เกิดจากแรงปฏิกิริยามีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากแขนของโมเมนต์ของมันเป็นศูนย์ ดังนั้น น้ำหนัก Mg เท่านั้นที่ทำให้เกิดทอร์กรอบจุด O

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{OC} \times \mathbf{F} = \mathbf{b} \times M\mathbf{g}$$

b เป็นตัวบอกระยะห่างของจุดศูนย์กลางมวลจากปลายเข็มของลูกข่าง O และ $\boldsymbol{\tau}$ มีทิศตั้งฉากกับระนาบของ **b** และ Mg และเช่นเดียวกับ **L** และ **b** ทอร์กนี้หมุนรอบแกนดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω_p ขณะที่ลูกข่างหมุนควงไปรอบ ๆ

เมื่อมีทอร์กกระทำต่อวัตถุ โมเมนตัมเชิงของวัตถุจะเปลี่ยนไปตามสูตร คือ

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

ในช่วงเวลา Δt มีการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\Delta t$$

$\Delta\mathbf{L}$ จะตั้งฉากกับ **L** เหมือนกับ $\boldsymbol{\tau}$ ดังรูปที่ 6.14 หลังจากผ่านไป Δt ลูกข่างจะมีโมเมนตัมเชิง

มุมลัพธ์เท่ากับผลรวมของเวกเตอร์ ($L + \Delta L$) เนื่องจาก ΔL ตั้งฉากกับ L และมีขนาดเล็กมาก จึงอาจถือได้ว่าขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์มีขนาดเท่าเดิม แต่ทิศเปลี่ยนไป ดังนั้นลูกข่างจะเคลื่อนที่ไปในแบบพรีเซสชันรอบแกนดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω_p

$$\omega_p = \Delta\theta/\Delta t$$

โดยที่ $\Delta\theta \sim \Delta L/(L \sin \phi) = (\tau\Delta t)/(L \sin \phi)$

$$\therefore \quad \omega_p = \tau/(L \sin \phi)$$

$$= (Mgb \sin \phi)/(L \sin \phi)$$

$$\omega_p = (Mgb)/L \qquad ......6.60$$

ข้อสังเกต : ความเร็วเชิงมุมของพรีเซสชันของลูกข่างจะไม่ขึ้นกับมุม ϕ แต่แปรผกผันกับโมเมนตัมเชิงมุม ถ้าโมเมนตัมเชิงมุมมีค่ามาก ความเร็วเชิงมุมของพรีเซสชัน จะมีค่าน้อย คือ ถ้าลูกข่างหมุนเร็ว มันจะควงได้ช้านั่นเอง

การเคลื่อนที่แบบพรีเซสชัน อาจเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega_p \times L}$$

นั่นคือ $\tau = Mgb \sin \phi$

ตัวอย่าง 6.29 ลูกข่างลูกหนึ่งมีมวล 100 กรัม รัศมีของการส่ายเท่ากับ 2 เซนติเมตร (R_0) และจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุดห่างจากปลายแหลมเท่ากับ 3 เซนติเมตร จงหาอัตราการส่ายเมื่อให้ลูกข่างหมุน 50 รอบต่อวินาที ให้ $I = MR_0^2$

วิธีทำ จาก

$$\omega_p = (Mgb)/L$$

$$= (Mgb)/(I\omega)$$

$$= (Mgb)/(MR_0^2\omega)$$

จะได้

$$\omega_p = (gb)/(R_0^2\omega)$$

เมื่อ

$M = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$

$b = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$

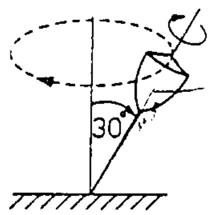
$R_0 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$

$\omega = 2 \text{ rf} = 6.28 \times 50 \text{ rad/s}$

$$\therefore \quad \omega_p = [(9.8)(0.03)]/[(0.02)^2(6.28 \times 50)]$$

$$= 2.34 \text{ rad/s}$$

ตัวอย่าง 6.30 ลูกข่างหมุนด้วยอัตราเร็ว 30 รอบต่อวินาที แกนหมุนทำมุม 30° กับแนวดิ่ง ลูกข่างมีมวล 0.5 กิโลกรัม มีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย 5 x 10^{-4} กิโลกรัม.ตารางเมตร มีจุดศูนย์กลางมวลห่างจากจุดหมุนของลูกข่าง 4 เซนติเมตร ถ้าลูกข่างหมุนในทิศตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านบน จงคำนวณอัตราเร็วของพรีเซสชัน และจะมีทิศอย่างไร



วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} \omega_p &= \tau/(L \sin \phi) \\ &= (Mgb \sin \phi)/(L \sin \phi) \\ &= (Mgb)/L \\ &= (0.5)(9.8)(4 \times 10^{-2})/(5 \times 10^{-4})(6.28 \times 30) \\ &= 2 \quad \text{rad/s} \end{aligned}$$

จะได้ อัตราเร็วเชิงมุมของพรีเซสชัน = 2 rab/s มีทิศทางของพรีเซสชันในทิศตามเข็มนาฬิกา

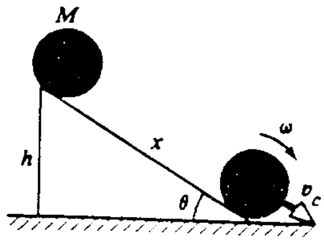
6.3.6 การกลิ้งของวัตถุ (การหมุนและการเลื่อนที่) การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งแกร็งสามารถแยกได้เป็น 2 อย่าง คือ การเลื่อนที่ (translation) และการหมุน (rotation) วัตถุที่กลิ้งจะมีทั้งการหมุนรอบตัวเองและเคลื่อนที่ด้วย เราจะพิจารณาเฉพาะการกลิ้งของวัตถุที่มีรูปเรขาคณิตง่าย ๆ และมีลักษณะสมมาตร เช่น การกลิ้งของทรงกระบอกกลม ทรงกรม วงแหวน พลังงานจลน์ของวัตถุที่กำลังกลิ้งสามารถแยกออกเป็นพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล (ซึ่งเป็นแกนสมมาตร) กับพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$E_k = (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)Mv^2_{CM} \qquad \text{......6.61}$$

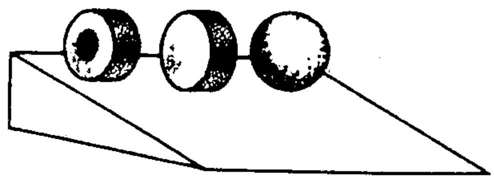
ถ้าวัตถุกลมมีรัศมี R กลิ้งไปตามพื้นโดยไม่มีการไถล (sliding) จะได้ $\omega = v_{CM}/R$

$$\begin{aligned} \therefore \quad E_k &= (1/2)I_{CM}(v^2_{CM}/R^2)+(1/2)Mv^2_{CM} \\ &= (1/2)(I_{CM}/R^2 + M)v^2_{CM} \end{aligned}$$

นอกจากนี้ควรจะสังเกตว่า วัตถุสามารถจะกลิ้งอย่างเดียวโดยไม่มีการเลื่อนไถลบนผิวพื้นใด ๆ โดยมีความเร่งได้ ต่อเมื่อผิวพื้นนั้นจะต้องมีความเสียดทานพอที่จะทำให้วัตถุหมุนได้



(ก)



(ข)

รูปที่ 6.15 ก. วัตถุกลมกลิ้งลงตามระนาบเอียง พลังงานมีค่าคงตัว ถ้าไม่มีการลื่นไถล
ข. วัตถุกลมกลิ้งตามระนาบเอียง ได้แก่ วงแหวน ทรงกระบอก และทรงกลม

ตามรูปที่ 6.15 (ก) วัตถุกลมปล่อยให้กลิ้งลงมาตามระนาบเอียงจากระดับความสูง h โดยไม่มีการลื่นไถล โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงาน

$$E_{k,\ bottom} = E_{p,\ top}$$

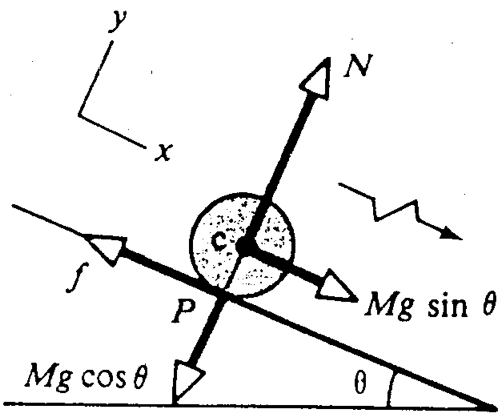
$$(1/2)(I_{CM}/R^2 + M)v^2_{CM} = Mgh$$

$$\therefore \quad v_{CM} = [(2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2} \qquad \text{......6.62}$$

ส่วนรูปที่ 6.15 (ข) เป็นวัตถุกลม ซึ่งหมายถึง ทรงกลม ทรงกระบอกกลม และวงแหวน

ตัวอย่าง 6.31 ทรงกลมตันกลิ้งลงตามพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ กับพื้นราบ โดยไม่ลื่นไถล (ตามรูป) ให้หาความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลที่ปลายล่างของระนาบเอียง โดย ก. วิธีของพลังงาน ข. วิธีทางพลศาสตร์

วิธีทำ



ก. โดยวิธีของพลังงาน

จากรูป I_{CM} (ทรงกลม) $= (2/5)MR^2$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ h จะได้

$$h = x \sin\theta$$

$$v^2_{CM} = 2a_{CM}x$$

$$\therefore \quad a_{CM} = v^2_{CM}/2x$$

$$\because \quad v_{CM} = [(2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2}$$

แทนค่า h จะได้ $v_{CM} = [(2gx\sin\theta)/\{1 + (2/5)(MR^2/MR^2)\}]^{1/2}$

$$= [(10/7)gx\sin\theta]^{1/2}$$

$$a_{CM} = [(10/7)gx\sin\theta]/(2x)$$

$$= (5/7)g\sin\theta$$

ข. โดยวิธีทางพลศาสตร์

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_{CM} \qquad \text{........(1)}$$

$$\Sigma F_y = N - Mg\cos\theta = 0 \qquad \text{........(2)}$$

สมการของทอร์ก $\tau = fR = I_{CM}\alpha$

$$\alpha = a_{CM}/R$$

$$fR = I_{CM}\alpha$$

$$f = (I_{CM}/R).(a_{CM}/R)$$

$$= [\{(2/5)MR^2\}/R^2].a_{CM}$$

$$f = (2/5)Ma_{CM}$$

แทนค่า f ใน (1) จะได้

$$Mg\sin\theta - (2/5)Ma_{CM} = Ma_{CM}$$

$$Mg\sin\theta = (7/5)Ma_{CM}$$

$$\therefore \quad a_{CM} = (5/7)g\sin\theta$$

ตัวอย่าง 6.32 ทรงกระบอกตันและวงแหวน มีมวลและรัศมีเท่ากัน คือ M และ R ตามลำดับ กลิ้งลงตามระนาบเอียงไม่มีการลื่นไถล จงหาความเร็วเชิงเส้นและความเร่งเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสองนี้ที่ปลายล่างของระนาบเอียง

วิธีทำ ให้ C แทนทรงกระบอกตัน และ r แทนวงแหวน

$I_{CM,C} = I_C = (1/2)MR^2$

$I_{CM,r} = I_r = MR^2$

$v_{CM,C} = v_C \quad , \quad v_{CM,r} = v_r$

$a_{CM,C} = a_C \quad , \quad a_{CM,r} = a_r$

x = ระยะทางเคลื่อนที่ตามระนาบ

θ = มุมที่ระนาบทำกับพื้นราบ

$h = x\sin\theta$

จากสมการ $v_{CM} = [2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2}$

และ $a_{CM} = v^2_{CM}/2x$

แทนค่า : ทรงกระบอก จะได้

$$v_c = [(2gx\sin\theta)/\{(1 + (1/2)(MR^2/MR^2)\}]^{1/2}$$

$$= [(4/3)gx\sin\theta\}^{1/2}$$

$$a_c = [(4/3)gx\sin\theta]/(2x)$$

$$= (2/3)g\sin\theta$$

วงแหวน จะได้

$$v_r = [2gx\sin\theta)(1 + MR^2/MR^2)]^{1/2}$$

$$= (gx\sin\theta)^{1/2}$$

$$a_c = (gx\sin\theta)/(2x)$$

$$= (1/2)g\sin\theta$$

จากตัวอย่างที่ 6.31 และ 6.32 จะเห็นว่า ค่าของความเร็วและความเร่งของศูนย์กลางมวล ไม่ได้ขึ้นกับรัศมีและมวล หมายความว่าถ้าวัตถุมีรูปทรงเหมือนกัน ไม่ว่ารัศมีหรือมวลจะเท่ากันหรือไม่ก็ตาม ถ้าปล่อยให้กลิ้งลงมาตามระนาบเอียงจากระดับที่เท่ากัน ต่างก็จะกลิ้งลงถึงปลายของระนาบพร้อมกัน

ในการเปรียบเทียบวัตถุรูปทรงเรขาคณิต 3 อย่าง คือ ทรงกระบอกกลม ทรงกลม และวงแหวน ดังรูปที่ 6.14 (ข) จะพบว่า ทรงกลมเคลื่อนที่ได้เร็วที่สุด (I_{CM} มีค่าน้อยที่สุด) และวงแหวนกลิ้งได้ช้าที่สุด (I_{CM} มีค่ามากที่สุด)

6.3.7 หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม จากนิยามของทอร์ก

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = d\mathbf{L}/dt$$

ซึ่ง τ คือ ทอร์กภายนอกที่กระทำกับอนุภาคของระบบ

ถ้า $\tau = 0$ เราได้ $dL/dt = 0$ ด้วย ดังนั้น **L** มีค่าคงตัว **เราได้หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม** ซึ่งกล่าวว่า **เมื่อทอร์กภายนอกกระทำกับระบบอนุภาคเป็นศูนย์ เวกเตอร์รวมของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบต้องมีค่าคงตัว**

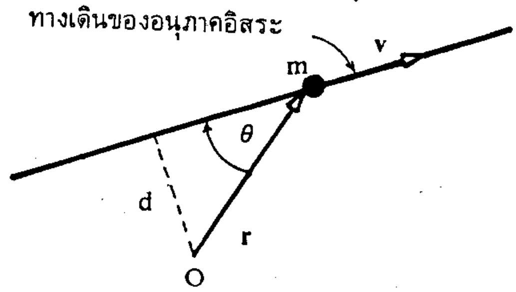
$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_f \\ L_i\omega_i &= L_f\omega_f \end{aligned}\right\} \quad ......6.63$$

เมื่อ L_i คือ โมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น และ L_f คือ โมเมนตัมเชิงมุมสุดท้าย

$$dL/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

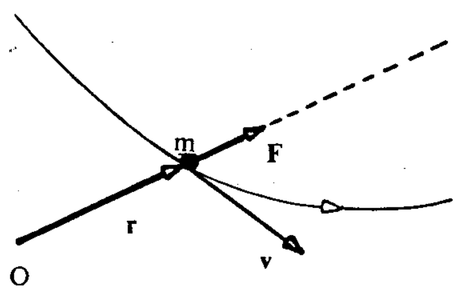
L จะมีค่าคงตัวเมื่อทางขวามือของสมการเป็นศูนย์ จะเป็นไปได้ใน 2 กรณีคือ เมื่อ $\mathbf{F} = 0$ และเมื่อ **r** ขนานกับ **F**

ในกรณีแรก เมื่อ $\mathbf{F} = 0$ คือไม่มีแรงกระทำหรือแรงลัพธ์ที่กระทำกับอนุภาคมวล m เป็นศูนย์ อนุภาคนี้จะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ **v** ตามกฎข้อ 1 ของนิวตัน ตามรูปที่ 6.16 และ $L = mvd$ เป็นปริมาณคงที่



รูปที่ 6.16 โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่เคลื่อนที่โดยอิสระ

ในกรณีที่สอง เมื่อ **r** ขนานกับ **F** นั่นคือ ขณะที่แรง **F** กระทำ จะมีทิศผ่านจุดตรึง ตัวอย่างอันหนึ่งคือ แรงผ่านศูนย์กลาง ถ้าให้จุดศูนย์กลางแรงเป็นจุดตรึง แรงนี้จะมีทิศผ่านจุดตรึงเสมอ ไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม ดังรูปที่ 6.17



รูปที่ 6.17 การเคลื่อนที่ของอนุภาคเนื่องจากแรงผ่านศูนย์กลาง

หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมมีความสำคัญมาก เพราะในธรรมชาติเราจะพบการเคลื่อนที่ในลักษณะที่แรงกระทำเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์เนื่องจากแรงที่ดวงอาทิตย์ดึงดูดโลกมีทิศสู่ศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ในกรณีนี้ถ้าให้ดวงอาทิตย์เป็นจุดอ้างอิงโมเมนตัมเชิงมุมของโลกที่โคจรรอบดวงอาทิตย์จะคงที่ หรืออะตอมของไฮโดรเจนซึ่งมีอิเล็กตรอนวิ่งรอบนิวเคลียส โดยมีแรงที่โปรตอนในนิวเคลียสดึงดูดอิเล็กตรอน และแรงนี้มีทิศผ่านนิวเคลียส ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนซึ่งวิ่งรอบนิวเคลียสก็จะคงที่เสมอ

นักกายกรรม นักกระโดดน้ำ นักเต้นระบำ และนักสเกตน้ำแข็งได้นำหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมมาใช้ เราจะเห็นว่าตัวเขาหมุนเร็วขึ้นเมื่อเขางอแขนขาเข้าหาตัว และตัวเขาหมุนช้าลงเวลายืดแขนออก ที่เป็นเช่นนี้เพราะ I ขึ้นกับกำลังสองของระยะห่างจากส่วนต่าง ๆ ของร่างกายไปยังแกนหมุน การยืดหรืองอแขนขาจะทำให้ค่า I เปลี่ยนไปมากหรือน้อยได้

กิจกรรม 6.9

ให้นักศึกษาสังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง I กับ ω ในการเปลี่ยนแปลงท่าทางการเต้นระบำของผู้เล่นสเกตน้ำแข็งบนลานสเกตในย่านมหาวิทยาลัยรามคำแหง

ตัวอย่าง 6.33 เด็ก 2 คน ซึ่งมีมวล 25 กิโลกรัม นั่งอยู่คนละข้างของปลายคานหมุน ซึ่งมีความยาว 2.6 เมตร และมีมวล 10 กิโลกรัม ถ้าคานนี้หมุนด้วยความเร็ว 5 รอบต่อนาทีรอบแกนดิ่ง ซึ่งผ่านกึ่งกลางของคาน

ก. ถ้าเด็กทั้งสองคนเคลื่อนที่ขยับใกล้ศูนย์กลางเข้ามา 60 เซนติเมตร อัตราเร็วเชิงมุมของคานหมุนตอนนั้นจะเป็นเท่าใด

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบหมุนนี้ จะเปลี่ยนไปเท่าใด

วิธีทำ

ก. โมเมนต์ของความเฉื่อยของระนาบ $I = I_{\text{เด็ก}} + I_{\text{คาน}}$

$$I_1 = 2(25\,kg)(2.6/2m)^2 + (1/12)(10\,kg)(2.6m)^2$$

$$= 84.5 + 5.6 \quad kg.m^2$$

$$= 90.1 \quad kg.m^2$$

$$I_2 = 2(25\,kg)(1.6 - 0.6m)^2 + 5.6\ kg.m^2$$

$$= 24.5 + 5.6 \quad kg.m^2$$

$$= 30.1 \quad kg.m^2$$

จากหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$(90.1\ kg.m^2)[2\pi \times 5)/60\ rad/s) = (30.1\ kg.m^2)(\omega_2)$$

$$\therefore \quad \omega_2 = (90.1 \times 2\pi \times 5)/(30.1 \times 60)$$

$$= \pi/2 \quad rad/s$$

$$\because \quad 2\pi\ rad = 1 \text{ รอบ}$$

$$\pi/2\ rad = \pi/2 \cdot 1/(2\pi)$$

$$= 1/4 \text{ รอบ/วินาที}$$

$$= (1/4) \times 60$$

$$= 15 \text{ รอบ/นาที}$$

นั่นคือ อัตราเร็วเชิงมุมของคานหมุน $= 15$ รอบ/นาที

ข. พลังงานจลน์ของการหมุน คือ $E_k = (1/2)I_1\omega_1^2$

$$E_k = (1/2)I_2\omega_2^2$$

$$E_{k_1} = (1/2)(90.1\ kg.m^2)[2\pi \times 15)/60\ rad/s]^2$$

$$= 1.25\pi^2 \quad J$$

$$E_{k_2} = (1/2)(30.1\ kg.m^2)(\pi/2\ rad/s)^2$$

$$= 3.77\ \pi \quad J$$

$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_f}$$

$$= (3.77 - 1.25)\pi^2$$

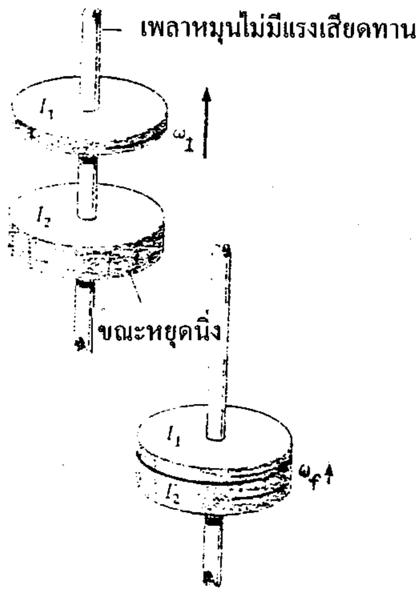
$$= 2.52\pi^2 \quad J$$

$\therefore$ พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบที่เปลี่ยนไป = 24.8 J

ตัวอย่าง 6.34 จานกลมมีโมเมนต์ของความเฉื่อย I_1 กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_i รอบเพลาที่ไม่มีความเสียดทาน แล้วปล่อยให้ตกลงไปซ้อนกับจานกลมอีกอันหนึ่งที่มีโมเมนต์ของความเฉื่อย I_2 ซึ่งเดิมอยู่นิ่ง ต่อจากนั้นจานกลมทั้งสองหมุนไปด้วยกัน ดังรูป จงหา

ก. โมเมนตัมเชิงมุมภายหลังปล่อยให้จานซ้อนกันเทียบกับโมเมนตัมเชิงมุมก่อนปล่อย

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนภายหลังปล่อยให้จานซ้อนกันเทียบกับพลังงานจลน์ของการหมุนก่อนปล่อย



วิธีทำ

ก. จากสมการ

$$L_i = L_f$$
$$L = I\omega$$
$$E_k = (1/2)I\omega^2$$
$$I_1\omega_i = I_1\omega_f + I_2\omega_f$$
$$= (I_1 + I_2)\omega_f$$
$$\omega_r = [I_1/(I_1 + I_2)]\omega_i$$

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนก่อนปล่อยให้จานทั้งสองซ้อนกัน คือ

$$E_{k,i} = (1/2)I_1\omega_i^2$$

พลังงานจลน์หลังปล่อยให้จานทั้งสองซ้อนกัน คือ

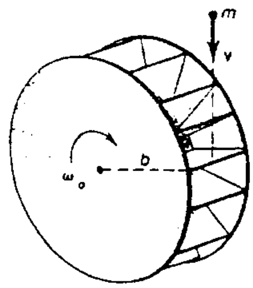
$$E_{k,f} = (1/2)(I_1 + I_2)\omega_f^2$$

จะเห็นว่า $E_{k,i} \neq E_{k,f}$

จาก $\omega_f^2 = [I_1^2/(I_1 + I_2)^2].\omega_i^2$

$$\therefore \quad (E_{k,i} - E_{k,f})\, E_{k,i} = [(1/2)I_1.\omega_i^2 - (1/2)(I_1 + I_2)\omega_f^2]/[(1/2)I_1\omega_i^2]$$
$$= \frac{[(1/2)i_1.\omega_i^2 - (1/2)(I_1 + I_2)\{I_1^2/(I_1 + I_2)^2\}.\omega_i^2]}{(1/2)I_1\omega_i^2}$$
$$= I_1/(I_1 + I_2)$$

ตัวอย่าง 6.35 หยดน้ำมวล m อัตราเร็ว v ตกลงสู่ใบของกังหันน้ำ ซึ่งมีโมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากับ I หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_0 จงหาความเร็วเชิงมุมหลังจากหยดน้ำกระทบใบกังหัน สมมติว่าติดกับใบกังหันหลังจากกระทบ ดังรูป



วิธีทำ

จากสมการ $L_i = L_f$

$$v' = \omega b$$

$$L_i = I\omega_0 \text{ (กังหัน)} + mvb \text{ (หยดน้ำ)}$$

$$L_f = I\omega \text{ (กังหัน)} + mvb \text{ (หยดน้ำ)}$$

$$\therefore \quad I\omega_0 + mvb = I\omega + mv'b$$

$$= I\omega + m\omega b^2 = (I + mb^2)\omega$$

$$\omega = (I\omega_0 + mvb)/(I + mb^2)$$

ถ้าอัตราเร็วเชิงเส้นที่ขอบของกังหัน $\omega_0 b$ มีค่าเท่ากับอัตราเร็วเชิงเส้น v อัตราเร็วของกังหัน จะมีค่าคงเดิม

$$\omega = [I\omega_0 + mb(\omega_0 b)]/(I + mb^2)$$

$$= \frac{(I\omega_0 + m\omega_0 b^2)}{I + mb^2}$$

$$= \frac{[(I + mb^2)\omega_0]}{I + mb^2}$$

$$= \omega_0$$

6.4 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

เมื่อแรงหลายแรงกระทำต่อวัตถุแข็งเกร็ง เราต้องพิจารณาการสมดุลทั้งในแง่การเคลื่อนที่เชิงเส้นและการเคลื่อนที่เชิงมุม วัตถุนั้นจะอยู่ในสมดุลได้ อาจนิยามว่า 1. ความเร่ง (a_{CM}) ของการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นต้องเป็นศูนย์ 2. ความเร่งเชิงมุม (α) รอบ

แกนหนึ่งแกนใดของวัตถุนั้นต้องเป็นศูนย์ ในกรณีเช่นนี้ วัตถุอาจไม่อยู่นิ่งก็ได้ แต่วัตถุนั้นอาจมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (v_{CM}) และวัตถุนั้นอาจหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ (ω)

สำหรับกรณีที่วัตถุหยุดนิ่ง $v_{CM} = 0$ และไม่มีการหมุน $\omega = 0$ เรียกว่า วัตถุอยู่ใน**สมดุลสถิต** (static equilibrium)

ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็ง มีเงื่อนไขของการสมดุลอยู่ 2 ประการ คือ

1. ผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุต้องเท่ากับศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= 0 \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.64$$

สำหรับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งของวัตถุซึ่งมีมวล m จะเป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ เมื่อ **F** เป็นผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุนั้น และ **a** คือความเร่งของการเคลื่อนที่ในสภาพที่เรียกว่าสมดุลนั้น $\mathbf{a} = 0$ ดังนั้นเงื่อนไขประการแรกของสมดุลก็คือผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุที่อยู่ในสมดุล จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ (6.64)

2. ผลรวมของเวกเตอร์ของทอร์กทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุเทียบกับแกนใด ๆ ต้องเท่ากับศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \tau &= 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.65$$

สำหรับการหมุนของวัตถุที่มีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย I จะเป็นไปตามสมการของการหมุน $\tau = I\alpha$ เมื่อ τ เป็นผลรวมของเวกเตอร์ของทอร์กทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุและ α คือความเร่งเชิงมุม =0

เงื่อนไขทั้ง 2 ประการของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง เขียนในรูปของสมการ จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma \tau_x &= 0 \qquad \Sigma \tau_y = 0 \qquad \Sigma \tau_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.66$$

สมการ (6.66) เรียกว่า **สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง**

ในกรณีของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งเนื่องจากแรงทั้งหลายที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกันหรือในแบบ 2 มิติ สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง อาจจะเขียนได้เพียงว่า

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \quad \text{และ} \quad \Sigma \tau_z = 0 \qquad \ldots\ldots 6.67$$

หรือเขียนเป็นเงื่อนไขรวมเป็น 3 เงื่อนไข ดังนี้

1. ผลรวมของแรงขึ้นทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของแรงลงทั้งหลาย เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\Sigma F_{up} = \Sigma F_{down} \qquad ......6.68$$

2. ผลรวมของแรงทางขวาทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของแรงทางซ้ายทั้งหลาย เขียนได้เป็น

$$\Sigma F_{right} = \Sigma F_{left} \qquad ......6.69$$

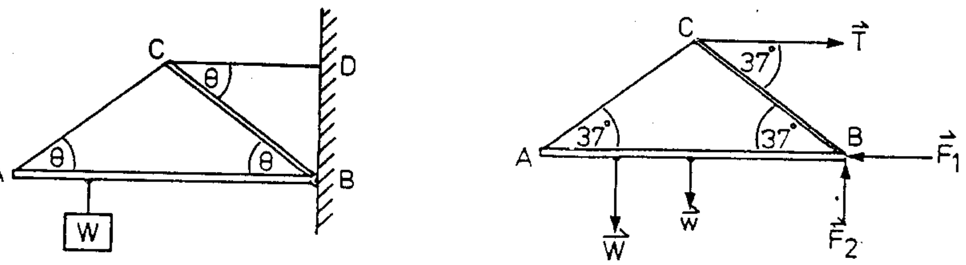
3. ผลรวมของทอร์กตามเข็มนาฬิกาทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของทอร์กทวนเข็มนาฬิกาทั้งหลาย

$$\Sigma \tau_{CW} = \Sigma \tau_{CCW} \qquad ......6.70$$

(CW = clockwise = ตามเข็มนาฬิกา, CCW = counter clockwise = ทวนเข็มนาฬิกา)

ตัวอย่าง 6.36 โครงสร้างรับน้ำหนักซึ่งประกอบด้วยคาน AB ขนาดสม่ำเสมอ ยาว 4 เมตร มีมวล 15 กิโลกรัม มีเชือก AC, CD และไม้ค้ำยัน BC ซึ่งมีน้ำหนักเบาประกอบกันเป็นโครงสร้างโดยตรึงไว้กับกำแพงด้วยบานพับที่ปลายคาน B และโยงไว้ด้วยเส้นเชือก CD ในลักษณะทำมุม θ เท่ากับ 37° ดังรูป ถ้ามีหีบน้ำหนักซึ่งมีมวล 90 กิโลกรัม แขวนไว้ ห่างจากปลายคาน A เป็นระยะ 1 เมตร จงหา

ก. ความตึงในเส้นเชือก CD ข. แรงที่บานพับกระทำต่อปลายคาน B (ใช้ g = 10 เมตร/วินาที²)



วิธีทำ

ก. โครงสร้างรับน้ำหนักนี้ซึ่งเป็นวัตถุแข็งเกร็งอยู่ในสมดุล โดยมีแรงต่าง ๆ กระทำต่อโครงสร้าง ดังนี้

น้ำหนักคาน w หีบน้ำหนัก W แรงดึงในเส้นเชือก CD คือ T

แรง F_1 และ F_2 เป็นองค์ประกอบของแรงในแนวระดับและแนวดิ่งของแรงที่บานพับกระทำต่อปลายคาน B

จากสมการของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

$$\Sigma\tau_B = 0$$

$$T(DB)-W(3m)-w(2m) = 0$$

แทนค่า DB = 2 tan 37° = 1.5 m จะได้

$$(1.5\ m)T = W(3\ m) + w(2\ m)$$

$$= (90 \times 10\ N)(3\ m) + (15 \times 10\ N)(2\ m)$$

$$= 2700 + 300$$

∴ แรงดึงในเส้นเชือก CD $T = (3000\ N.m)1.5\ m$

$$= 2000\ N$$

ข. เนื่องจาก $\Sigma F_x = 0$

$$T - F_1 = 0$$

$$\therefore \quad F_1 = T = 2000 \quad N$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_2 - W - w = 0$$

$$F_2 = W + w$$

$$= 900 + 1\ 50$$

$$= 1050 \quad N$$

ขนาดของแรงลัพธ์ที่บานพับกระทำต่อปลายคาน คือ F

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$= \sqrt{(2000)^2 + (1050)^2}$$

$$= 2259 \quad N$$

กระทำในทิศทางที่ $\tan\theta = F_2/F_1$

$$= 1050/2000$$

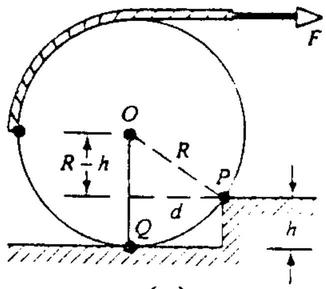
$$= 0.5$$

หรือทำมุมประมาณ 27° กับแนวแกน AB

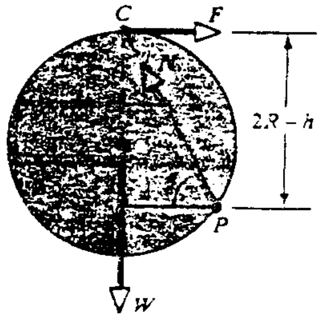
ตัวอย่าง 6.37 ทรงกระบอกกลมท่อนหนึ่งหนัก W = 500 นิวตัน รัศมี R = 80 เซนติเมตร ถูกดึงขึ้นบันไดซึ่งสูง h = 30 เซนติเมตร โดยมีเชือกพันรอบทรงกระบอกแล้วดึงในแนวระดับ ตามรูป (a) สมมติว่าทรงกระบอกไม่ลื่นไถลในการเคลื่อนที่ขึ้นบันได จงหา

ก. แรงน้อยที่สุดที่จะดึงทรงกระบอกขึ้นบันไดได้

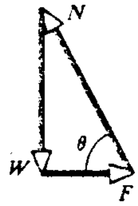
ข. แรงปฏิกิริยา **N** (ทั้งขนาดและทิศทาง) ที่ขอบบันไดทำกับทรงกระบอก



(ก)



(ข)



(ค)

วิธีทำ เมื่อทรงกระบอกพร้อมที่จะเคลื่อนที่ขึ้น แรงปฏิกิริยาที่ Q จะเป็นศูนย์ จึงเหลือเพียง 3 แรงที่กระทำกับทรงกระบอก คือ **F**, **W** และ **N** ตามรูป (ข) เขียนเป็นแผนภาพของแรงได้ตามรูป (ค)

เลือกจุด P เป็นจุดหมุน จากรูป (ก)

ระยะทางในแนวตั้งฉากจากจุดหมุนถึงแนวที่แรงกระทำ หาได้ดังนี้

$$r_w = d$$

$$= \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$$

$$= \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$r_f = 2R - h$$

สมมติให้ θ เป็นมุมที่ N ทำกับแนวระดับ จากรูป (ข)

สมการที่ใช้ $\Sigma\tau_{CCW} = \Sigma\tau_{CW}$

$$Wr_w = Fr_f \quad \text{........(1)}$$

$$\Sigma F_{right} = \Sigma F_{left}$$

$$F = N\cos\theta \quad \text{........(2)}$$

$$\Sigma F_{up} = \Sigma F_{down}$$

$$N\sin\theta = W \quad \text{........(3)}$$

จาก (1) $F = W(r_w/r_f)$

$$= [W\sqrt{2Rh - h^2}]/(2R - h)$$

จาก (3) และ (2)

$$\tan\theta = W/F$$

$$\theta = \tan (W/F)$$

$$N = (F^2 + W^2)^{1/2}$$

$$= W/\sin\theta$$

$$= F/\cos\theta$$

แทนค่าต่าง ๆ จะได้

$$F = \frac{(500\ N)\sqrt{2(0.8m \times 0.3\ m) - (0.3\ m)^2}}{2(0.8\ m) - (0.3\ m)}$$

ก. $F = 385\ \ N$

$$\theta = \tan (500/385)$$

$$= 52.4^{\circ}$$

ข. $N = (385^2 + 500^2)^{1/2}$

$$= 631\ \ N$$

กิจกรรม 6.4

ให้นักศึกษาพิจารณาตัวอย่าง 6.36 และ 6.37 ว่าเป็นไปตามเงื่อนไขการสมดุลของวัตถุทั้ง 3 ประการหรือไม่

สรุป

ปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการหมุน เช่น มุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม โมเมนต์ความเฉื่อย ทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมมีความสัมพันธ์กันเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น โดยแรงสู่ศูนย์กลางและแรงผ่านศูนย์กลางเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบเส้นโค้งและแบบวงโคจร ซึ่งเป็นไปตามหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

แบบฝึกหัดที่ 6

6.1 ก. ทรงกระบอกอันหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.5 เมตร หมุนในอัตรา 750 รอบต่อนาที จงหาความเร็วเชิงเส้นของจุดที่ผิวทรงกระบอก

ข. ถ้าทรงกระบอกอันหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1/6 เมตร หมุนโดยมีความเร็วเชิงเส้นที่ผิว 2 เมตรต่อวินาที ทรงกระบอกนั้นหมุนในอัตรากี่รอบต่อนาที

ตอบ ก. 19.6 เมตรต่อวินาที ข. 229 รอบต่อนาที

6.2 ล้ออันหนึ่งใช้เวลา 3 วินาที ในการหมุนไปเป็นมุมทั้งหมด 234 เรเดียน ความเร็วเชิงมุมในตอนท้ายเท่ากับ 108 เรเดียนต่อวินาที ให้หาค่าของความเร่งเชิงมุม

ตอบ 20 เรเดียนต่อวินาที^{2}

6.3 ความเร็วเชิงมุมของล้ออันหนึ่งลดลงในอัตราคงตัวจาก 1,000 รอบต่อนาที ลงมาเป็น 400 รอบต่อนาที ในเวลา 5 วินาที

ก. จงหาความเร่งเชิงมุมและจำนวนรอบที่หมุนได้ในช่วงเวลา 5 วินาทีดังกล่าวนั้น

ข. ล้อนั้นจะต้องใช้เวลาต่อไปอีกนานเท่าใด จึงจะหยุด

ตอบ ก. -12.6 เรเดียนต่อวินาที^{2} ข. 58.3 รอบ, 3.3 วินาที

6.4 รถนั่งมวล 1,000 กิโลกรัมเริ่มลื่นไถลเมื่อขับด้วยความเร็ว 108 กิโลเมตรต่อชั่วโมงบริเวณทางโค้งซึ่งมีรัศมีแห่งความโค้ง 150 เมตร จงหาแรงสู่ศูนย์กลาง ความเร่งสู่ศูนย์กลาง สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างยางกับถนน

ตอบ 6,000 นิวตัน , 6 เมตรต่อวินาที^{2} , 0.61

6.5 ทางโค้งซึ่งมีรัศมีแห่งความโค้ง 220 เมตร สร้างลาดเททำมุม 18 องศา รถยนต์จะต้องวิ่งผ่านทางโค้งนี้ด้วยอัตราเร็วเท่าใด จึงจะปลอดภัยในวันที่ถนนลื่นมากจนไม่มีความเสียดทาน

ตอบ 26.5 เมตรต่อวินาที

6.6 มวลของลูกตุ้มเท่ากับ 0.6 กิโลกรัมแขวนจากเพดานของรถตู้ ถ้ารถตู้วิ่งด้วยอัตราเร็ว 35 เมตรต่อวินาที ผ่านทางโค้งซึ่งมีรัศมี 245 เมตร จงหามุมที่สายลูกตุ้มทำกับแนวดิ่ง ถ้าลูกตุ้มอยู่นิ่งสัมพัทธ์กับรถตู้ แรงดึงในสายลูกตุ้มเป็นเท่าใด

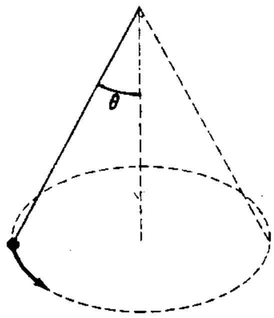
ตอบ 27 องศา , 6.6 นิวตัน

6.7 จงหาความเร่งสู่ศูนย์กลางของวัตถุที่อยู่ที่เส้นศูนย์สูตรอันเนื่องมาจากการหมุนของโลก ถ้าคิดการหมุนของโลกด้วย น้ำหนักของชายคนหนึ่งมวล 70 กิโลกรัม จะเปลี่ยนไปเท่าไร

ตอบ 0.0339 m/s^2 ; 2.37 N

6.8 จงหาอัตราเร็วของลูกตุ้มในรูป ซึ่งมีมวล 2 กิโลกรัมจะแกว่งเป็นวงกลมเมื่อสายลูกตุ้มยาว 1.5 เมตร และมุม θ เท่ากับ 30° จงหาแรงตึงในสายลูกตุ้ม

ตอบ 2.06 m/s ; 22.6 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.8

6.9 มีโครงการส่งสถานีอวกาศลอยฟ้าขึ้นโคจรรอบโลกเป็นวงกลม ด้วยความสูงเท่ากับ 1/3 ของรัศมีของโลก โดยวัดความสูงจากผิวโลก

ก. ที่ความสูงนี้ความเร่งแห่งความโน้มถ่วงมีค่าเท่าไร

ข. จงหาอัตราเร็วของสถานีอวกาศ

ค. จงหาคาบของการโคจร

ตอบ ก. 5.51 m/s^2 ; ข. 6,840 m/s ; ค. 7,800 s

6.10 จงหารัศมีวงโคจรของดาวเทียม ซึ่งโคจรรอบโลกหนึ่งรอบเป็นเวลา 1 วัน (sidereal day) ซึ่งเท่ากับ 86,164 วินาที อัตราเร็วของดาวเทียมเท่ากับเท่าไร

ตอบ 4.22×10^7 m ; 3.08 km/s

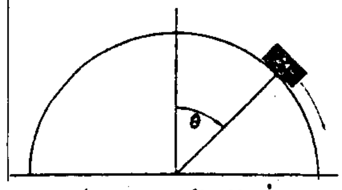
6.11 ก. จงหาความเร็วต่ำสุดของลูกปืนที่นักบินอวกาศยิงที่ผิวของดวงจันทร์ แล้วหลุดพ้นจากดวงจันทร์ได้

ข. ถ้าความเร็วของลูกปืนเท่ากับ 3/4 ของความเร็วหลุดพ้น ลูกปืนจะขึ้นได้สูงเท่าใด

ตอบ ก. 2,380 m/s ; ข. 2,230 km

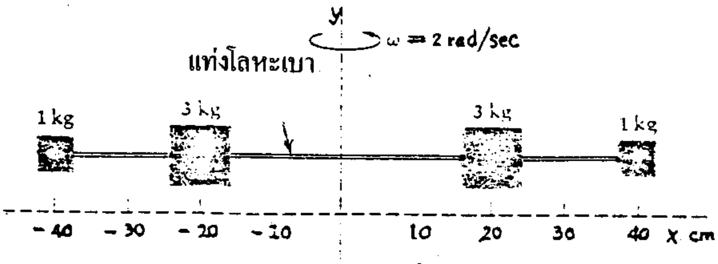
6.12 มวล 100 กรัม ในรูป ลื่นไถลตามส่วนโค้งของครึ่งทรงกลมซึ่งเรียบ มีรัศมี 0.25 เมตร โดยเริ่มเคลื่อนที่จากจุดสูงสุดด้วยความเร็วมีค่าน้อย ๆ จงหาแรงที่กระทำกับมวลในพจน์ของมุม θ และหามุมที่มวลนี้หลุดจากผิวทรงกลม

ตอบ 0.98 (3 cos θ -2) N ; 48.2°



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.12

6.13 มวล 4 มวล ในรูป ถูกต่อด้วยแท่งโลหะเบามาก จนไม่ต้องนำโมเมนต์ความเฉื่อยของมันมาคิด ระบบหมุนรอบแกน y ด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียนต่อวินาที



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.13

ก. จงหาอัตราเร็วของแต่ละมวล และใช้ค่านั้นหาพลังงานจลน์ $E_k = (1/2)\sum_i m_i v_i^2$

ข. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน y และคำนวณพลังงานจลน์จาก $E_k = (1/2)I\omega^2$

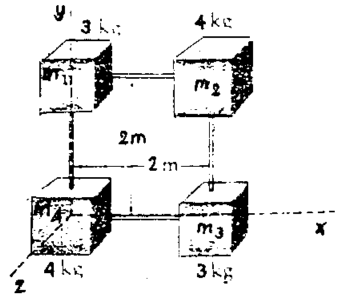
ตอบ ก. 40 cm/s สำหรับมวล 3 kg; 80 cm/s สำหรับมวล 1 kg; 1.12 J;

ข. I = 0.56 kg-m², 1.12 J

6.14 ใช้ทฤษฎีบทแกนขนานหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของมวล 4 มวล ในรูป รอบแกนที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของมวลผ่านศูนย์กลางมวล และตรวจสอบคำตอบโดยวิธีคำนวณโดยตรง

ตอบ 28 kg-m²

รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.14

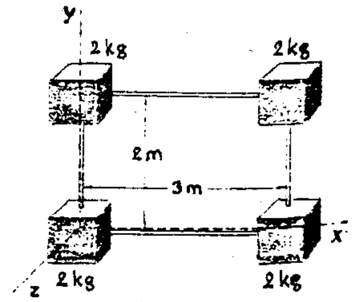


6.15 มวล 2 กิโลกรัม 4 ก้อน อยู่ที่มุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป

ก. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบรอบแกนที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของมวลผ่านมวลใดมวลหนึ่ง

ข. ถ้าระบบหมุนรอบแกนนี้มีพลังงานจลน์ 184 J จงหาจำนวนรอบของการหมุนต่อนาที

ตอบ ก. 52 kg-m^2 ข. 25.4 rev/min



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.15 และ 6.16

6.16 จากข้อ 15

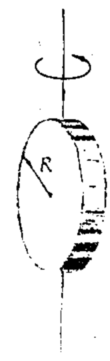
ก. ใช้ทฤษฎีบทแกนขนานหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกน Z ผ่านศูนย์กลางมวล

ข. ให้ x′ และ y′ เป็นแกนในระนาบของรูป ผ่านศูนย์กลางมวลและขนานกับด้านของสี่เหลี่ยม จงหา $I_{x'}$ และ $I_{y'}$ ใช้สมการ 6.5 ตรวจคำตอบในข้อ ก.

ตอบ ก. 26 kg-m^2 ; ข. $I_{x'}$ = 18 kg-m^2, $I_{y'}$ = 8 kg-m^2

6.17 ใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉากและตาราง หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของจานกลมรอบแกนที่กำหนดให้ ดังรูป

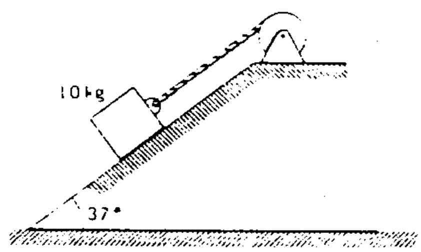
ตอบ (1/4)MR^2



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.17

6.18 โมเมนต์ของความเฉื่อยของล้อในรูป มีค่าเท่ากับ 8 กิโลกรัม-เมตร^2 รัศมี 40 เซนติเมตร จงหาอัตราเร่งเชิงมุมของล้อที่เกิดจากมวล 10 กิโลกรัม ถ้าแรงเสียดทานระหว่างระนาบเอียงกับมวลเท่ากับ 30 นิวตัน

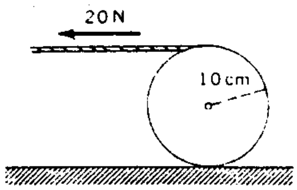
ตอบ 1.20 rad/s^2



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.18

6.19 เชือกพันรอบทรงกระบอกซึ่งมีมวล 4 กิโลกรัม และโมเมนต์ของความเฉื่อย 0.50 กิโลกรัม-เมตร² เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางทรงกระบอก ดังรูป ถ้าการกลิ้งของทรงกระบอกไม่ลื่นไถล จงหาความเร่งของศูนย์กลางมวล

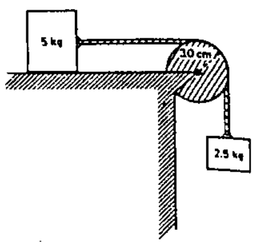
ตอบ 0.74 m/s^2



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.19

6.20 แรงเสียดทานระหว่างแท่งสี่เหลี่ยมกับโต๊ะเท่ากับ 20 นิวตัน และโมเมนต์ความเฉื่อยของรอกเท่ากับ 4 กิโลกรัม-เมตร² ดังรูป จงหาเวลาที่มวล 2.5 กิโลกรัมเคลื่อนที่ลงได้ 60 เซนติเมตร หลังปล่อย

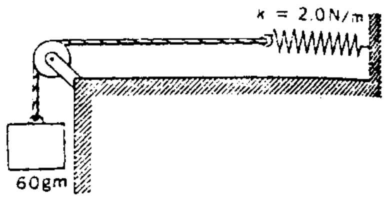
ตอบ 3.71 s



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.20

6.21 มวล 60 กรัม แขวนจากเชือกเบาคล้องผ่านรอกไปต่อกับสปริง ซึ่งมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 0.20 นิวตัน/เมตร ดังรูป โมเมนต์ของความเฉื่อยของรอกเท่ากับ 0.50 กิโลกรัม-เมตร² รัศมีของรอกเท่ากับ 30 เซนติเมตร จงหาอัตราเร็วของมวล 60 กรัม หลังจากตกลงมา 40 เซนติเมตร โดยเริ่มจากหยุดนิ่ง สปริงไม่ยืด

ตอบ 16 cm/s



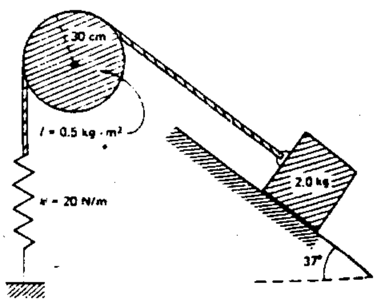
รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.21

6.22 จากรูป แรงเสียดทานเท่ากับศูนย์ มวล 2.0 กิโลกรัม ถูกปล่อยจากตำแหน่งที่สปริงไม่ยืด

ก. มวล 2 กิโลกรัมจะเคลื่อนตามระนาบเอียงไกลที่สุ
ได้ระยะทางเท่าไร

ขณะที่มวล 2 กิโลกรัม มีอัตราเร็วสูงสุดมวลเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร และอัตราเร็วสูงสุดนั้นเท่ากับเท่าใด

ตอบ ก. 1.18 m; ข. 0.588 m, 0.96 m/s



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.22

6.23 อนุภาคมวล m มีความเร็ว $-v_0 j$ มีตำแหน่ง (-d, 0) และเคลื่อนที่ต่อไปด้วยความเร่งแห่งความโน้มถ่วงของโลก ดังรูป

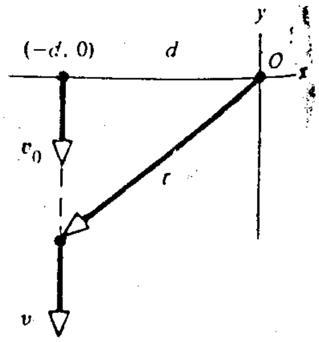
ก. จงหาโมเมนตัมเชิงมุม **L** เป็นฟังก์ชันของเวลาเทียบกับจุดกำเนิด

ข. จงหาทอร์กที่เวลาใด ๆ สัมพัทธ์กับจุดกำเนิด

ค. ใช้คำตอบข้อ ก และ ข พิสูจน์ว่า

$$\tau = dL/dt$$

ตอบ ก. $md(v_0 + gt)\hat{k}$ ข. $mgd\hat{k}$



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.23

6.24 มวล 3 กิโลกรัม ผูกติดกับเชือกเบา พันรอบรอกซึ่งเป็นทรงกระบอกตัน รัศมี 8 เซนติเมตร มวล 1 กิโลกรัม ดังรูป

ก. ทอร์กรอบจุดศูนย์กลางมวลของรอกเท่ากับเท่าไร

ข. ถ้า m = 3 กิโลกรัม มีอัตราเร็ว v และรอกมีอัตราเร็วเชิงมุม ω = vR จงหาโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบรอบจุดศูนย์กลางมวลของรอก

ค. ใช้ τ = dL/dt และคำตอบข้อ ข. คำนวณความเร่งของมวล 3 กิโลกรัม

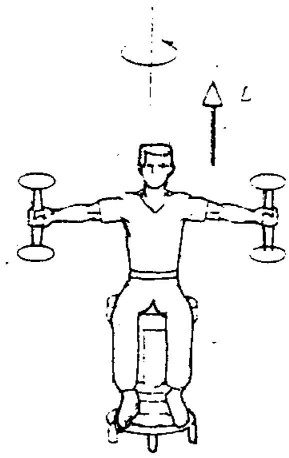
ตอบ ก. 0.336 N-m ข. L = 0.28 v ค. 8.4 m/s^2

6.25 เด็กนักเรียนคนหนึ่งถือน้ำหนักไว้ 2 มือ ดังรูป มวลแต่ละชิ้นเท่ากับ 10 กิโลกรัม ถ้าแขนของเขาเหยียดตรง มวลจะอยู่ห่างจากแกนหมุน 1 เมตร และความเร็วเชิงมุมของการหมุนเท่ากับ 3 เรเดียน/วินาที โมเมนต์ความเฉื่อยของนักเรียนรวมกับของแป้นที่นั่งเท่ากับ 8 กิโลกรัม-เมตร^2 และสมมติว่าคงที่ ถ้าเด็กนักเรียนคนนี้ดึงน้ำหนักเข้าตามแนวนอนจนเหลือระยะทาง 30 เซนติเมตรห่างจากแกนหมุน

ก. จงหาความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของระบบ

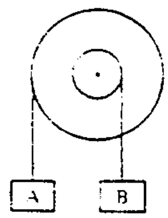
ข. จงหาการเปลี่ยนแปลงพลังงานกล

ตอบ ก. 8.57 rad/s; ข. เพิ่มขึ้น 234 J



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.25

6.26 ระบบล้อและเพลาซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อย 0.26 กิโลกรัม เมตร² ประกอบด้วยล้อหมุนขนาดรัศมี 20 เซนติเมตร และเพลาหมุนขนาดรัศมี 10 เซนติเมตร มีมวลถ่วง A 2 กิโลกรัม และมวลถ่วง B 6 กิโลกรัม ผูกเชือกพันไว้รอบล้อและเพลา ดังรูป ถ้าปล่อยให้มีการเคลื่อนที่ ระบบล้อและเพลานี้จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งเชิงมุมเท่าใด และความตึงในเส้นเชือกแต่ละเส้นจะเป็นเท่าใด (g = 10 เมตร/วินาที^{2})

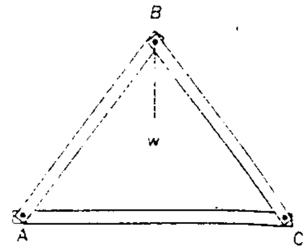


รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.26

ตอบ α = 5 เรเดียน/วินาที^{2} , T_1 = 22 นิวตัน , T_2 = 57 นิวตัน

6.27 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านยาว 1.6 เมตร ดังรูป ถ้า w = 250 นิวตัน จงหาแรงตึงใน AC และแรงกดจาก AB

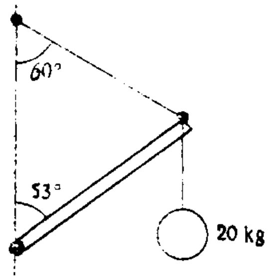
ตอบ 72 N ; 144 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.27

6.28 คานยาว 4 เมตร มวล 10 กิโลกรัม มีมวล 20 กิโลกรัม แขวนอยู่ดังรูป จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่บานพับ

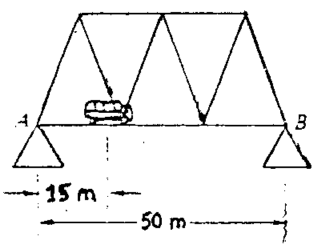
ตอบ T = 213 N, R_x = 184N, R_y = 188 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.28

6.29 สะพานยาว 50 เมตร มีมวล 8 x 10^4 กิโลกรัม รถบรรทุกมวล 3 x 10^4 กิโลกรัม อยู่ที่ตำแหน่ง 15 เมตรจากปลายหนึ่ง ดังรูป จงหาแรงที่หัวเสาสะพานทั้งสองข้าง

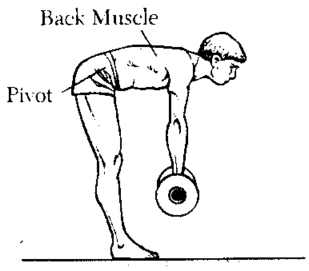
ตอบ 6.0 x 10^5 N, 4.8 x 10^5 N



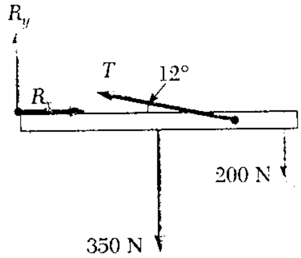
รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.29

6.30 ชายคนหนึ่งกำลังยกน้ำหนัก 200 นิวตัน หลังอยู่ในแนวนอน ดังรูป (ก) กล้ามเนื้อหลังยึดติดที่ตำแหน่ง 2/3 ของกระดูกสันหลัง มุมระหว่างกระดูกสันหลังและกล้ามเนื้อเท่ากับ 120 องศา ใช้รูป (ข) และให้ร่างกายส่วนบนมีมวล 350 นิวตัน จงหาแรงตึงในกล้ามเนื้อหลังและแรงกดในกระดูกสันหลัง

ตอบ T=2,710 N, R = 2,650 N



(ก)

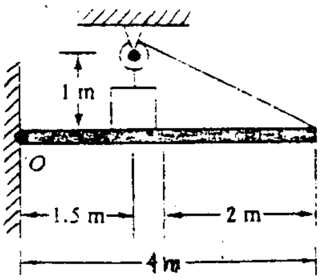


(ข)

รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.30

6.31 มวล 50 กิโลกรัม วางอยู่บนคานและผูกติดกับเชือกเบาคล้องผ่านรอกไปยังปลายคานอีกข้างหนึ่ง ดังรูป ถ้าระบบอยู่ในสมดุล และมวลของคานเท่ากับ 150 กิโลกรัม จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่ O

ตอบ T = 1.07 x 10^3 N, R_x = 991 N, R_y = 497 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.31