บทที่ 5
ระบบอนุภาคและโมเมนตัมเชิงเส้น

เค้าโครงเรื่อง

สาระสำคัญ

1. มวลของระบบอิสระใด ๆ คงตัวเสมอ ตามกฎการคงตัวของมวล และแรงลัพธ์ที่กระทำต่อระบบคือผลรวมของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบ

$$\mathbf{F}_{\text{ลัพธ์}} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายใน}} + \Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายนอก}}$$

ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลใน 3 มิติของระบบอนุภาคแสดงด้วยเวกเตอร์

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุที่มีขนาดแน่นอนประกอบด้วยมวลต่อเนื่องกันโดยตลอดคือ

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm$$

ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค คือ

$$v_{CM} = \frac{1}{M}\Sigma m_i v_i$$

มวลลดทอนคือมวลของอนุภาคทั้งสองของระบบสองอนุภาคซึ่งน้อยกว่ามวลของแต่ละอนุภาค

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

2. โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว **v** คือ

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

และโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค คือ

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$$

การดลของแรง **F** กระทำต่ออนุภาคเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt$$

โดยทั่วไปแรงกระทำต่อวัตถุในเวลาอันสั้นอาจถือว่าวัตถุได้รับแรงกระทำแรงใดแรงหนึ่งซึ่งมากกว่าแรงอื่น ๆ และจะหาขนาดโดยประมาณของการดลของแรงนั้นได้จากความสัมพันธ์ของ I ข้างต้น

หลักการคงตัวของโมเมนตัมสำหรับอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคในระบบอิสระ คือ โมเมน

ตัมก่อนและหลังอันตรกิริยามีค่าคงตัว

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

การชนกันระหว่างวัตถุอาจจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภท

การชนแบบไม่ยืดหยุ่น ($0 < e < 1$) โดยโมเมนตัมคงตัวแต่พลังงานไม่คงตัว

การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ ($e = 0$) โดยภายหลังการชนกันวัตถุจะติดกันไป จึงมีความเร็วสุดท้ายเท่ากัน

การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ($e = 1$) โดยทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์คงตัว

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. อธิบายความหมายของโมเมนตัม การดล การชนแบบยืดหยุ่นและไม่ยืดหยุ่น และหลักการคงตัวของโมเมนตัมได้
2. เปรียบเทียบผลการชนกันที่สามารถพบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น การชนกันระหว่างลูกบิลเลียด รถยนต์ และการกระทบของลูกบอลกับพื้นได้
3. คำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคและวัตถุที่มีรูปทรงอย่างง่ายได้

แม้ว่าในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในบทก่อน ๆ พิจารณาวัตถุเสมือนหนึ่งเป็นแต่เพียงอนุภาคเล็ก ๆ ซึ่งไม่มีขนาด ทั้งที่วัตถุโดยทั่วไปมีขนาดและรูปทรงที่แน่นอนโดยเฉพาะในแต่ละวัตถุ แต่ในการเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งไม่เป็นเชิงเส้น อาจหมุนหรือมีการสั่นสะเทือนในขณะที่เคลื่อนที่ โดยที่มีจุดหนึ่งในวัตถุเคลื่อนที่เช่นเดียวกับอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำเดียวกัน จุดดังกล่าวในวัตถุเรียกว่า "จุดศูนย์กลางมวล (center of mass)" ในบทนี้จึงจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยคำนึงถึงวัตถุโดยทั่ว ๆ ไปว่าประกอบด้วยระบบอนุภาค ซึ่งมีจุดศูนย์กลางมวลแทนวัตถุทั้งระบบ เนื่องจากจุดศูนย์กลางมวลของระบบจะเคลื่อนที่เสมือนหนึ่งมวลทั้งหมดของระบบรวมกันอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล และแรงกระทำต่อระบบจะกระทำที่จุดศูนย์กลางมวล

นอกจากจุดศูนย์กลางมวลจะมีความสำคัญต่อการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในเชิงหมุนยังมีประโยชน์ในการช่วยให้การวิเคราะห์กรณีการชนกันระหว่างวัตถุง่ายขึ้นด้วย และเนื่องจากการชนกันจะทำให้ปริมาณที่สำคัญปริมาณหนึ่งของแต่ละวัตถุเปลี่ยนแปลงไป คือผลคูณระหว่างมวลกับอัตราเร็ว ซึ่งเรียกว่า "โมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum)" ของวัตถุ ในบทนี้จะกล่าวถึงระบบอนุภาคและโมเมนตัมเชิงเส้น ส่วนการหมุนจะศึกษาในบทต่อไป โดยในที่นี้จะเกี่ยวข้องกับกฎการคงตัวของมวลและกฎการคงตัวของโมเมนตัม นอกเหนือจากกฎการคงตัวของพลังงานที่ได้ศึกษาแล้วในบทก่อน

5.1 ระบบอนุภาค

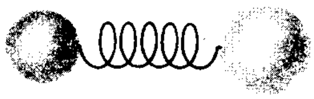
การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีขนาดอาจจะต้องพิจารณาแต่ละส่วนของวัตถุโดยถือว่าเป็นระบบอนุภาคเช่นเดียวกับระบบซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากโดยเฉพาะระบบอิสระที่มีมวลคงตัวเนื่องจากระบบอิสระมักจะหมายถึงระบบปิดที่ไม่มีการรั่วไหลใด ๆ เข้าหรือออกจากระบบทั้งไม่เกี่ยวข้องหรือทำปฏิกิริยาใด ๆ กับระบบอื่น ๆ แต่ภายในระบบอาจมีการเปลี่ยนแปลงโดยกระบวนการต่าง ๆ เช่น การเปลี่ยนสถานะจากของแข็งเป็นของเหลวหรือสถานะอื่น ๆ การทำปฏิกิริยาเคมีจนเกิดสารประกอบที่ต่างไปจากเดิม และการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคจากการไหลของแก๊สหรือของเหลวหรือจากการชนกัน แต่ไม่ว่าภายในระบบจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรสิ่งหนึ่งที่จะไม่เปลี่ยนคือ มวลทั้งหมดของระบบ

ระบบดังกล่าวข้างต้นอาจเป็นระบบซึ่งมีขอบเขตที่แน่นอน โดยมีภาชนะรองรับอยู่ทั้งภาชนะบรรจุและสิ่งที่อยู่ภายในจะมีมวลรวมกันทั้งหมดไม่เปลี่ยนแปลงด้วย จึงกล่าวว่า "มวลของระบบอิสระใด ๆ คงตัวเสมอ" ซึ่งเป็นกฎการคงตัวของมวล สำหรับระบบอิสระโดยทั่วไปที่ไม่เกี่ยวข้องกับสิ่งแวดล้อมหรือระบบอื่นใด ดังนั้น ในการศึกษาระบบใด ๆ พบว่ามวลของระบบ

เปลี่ยนแปลง ย่อมแสดงว่าระบบนั้นไม่เป็นระบบอิสระ

กฎการคงตัวของมวลนับว่าเป็นกฎการคงตัวของปริมาณในทางฟิสิกส์ปริมาณหนึ่ง ซึ่งเป็นกฎพื้นฐานในทางฟิสิกส์กฎหนึ่งในบรรดากฎการคงตัวทั้งหลาย ดังที่ได้ศึกษาแล้วในบทก่อน คือกฎการคงตัวของพลังงาน และจะได้ศึกษากฎการคงตัวอื่น ๆ อีกในบทเรียนทางฟิสิกส์ต่อไป รวมทั้งกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้นในบทนี้ และกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมในบทต่อไป โดยที่กฎการคงตัวหนึ่ง ๆ เป็นกฎสำหรับระบบซึ่งเป็นอิสระจากสิ่งแวดล้อมในแง่หนึ่ง ซึ่งมีคุณลักษณะบางประการทางฟิสิกส์ที่ไม่เปลี่ยนแปลง คุณลักษณะนี้จะมีค่าคงตัวในเวลาต่อ ๆ มาเช่นเดียวกับเมื่อเริ่มต้น

อีกประการหนึ่ง การศึกษาการเปลี่ยนแปลงใด ๆ เกี่ยวกับระบบอนุภาคเนื่องจากมีแรงกระทำ จะต้องพิจารณาด้วยว่าเป็น**แรงภายในหรือแรงภายนอก** โดยแรงภายในหมายถึง แรงซึ่งกระทำระหว่างส่วนต่าง ๆ ภายในระบบ และแรงภายนอกหมายถึง แรงกระทำจากระบบอื่นหรือส่วนอื่น ๆ ภายนอกระบบต่อส่วนใดส่วนหนึ่งหรือหลาย ๆ ส่วนของระบบ หรือต่อระบบทั้งหมด ดังเช่นระบบซึ่งประกอบด้วยมวล 1 และมวล 2 ในรูปที่ 5.1 โดยมวลทั้งสองเชื่อมต่อเข้าด้วยกันด้วยสปริงเบา (ไม่คิดมวลของสปริง) ซึ่งจะทำให้มวลทั้งสองเคลื่อนที่เข้าหากันภายหลังจากที่สปริงถูกยืดออก และจะทำให้มวลทั้งสองเคลื่อนที่ห่างออกจากกันภายหลังจากที่สปริงถูกอัด นั่นคือสปริงจะออกแรงกระทำต่อมวลทั้งสองเสมือนแรงดึงดูดในกรณีแรก และเสมือนแรงผลักในกรณีหลัง ถ้าพิจารณาว่ามวลทั้งสองรวมทั้งสปริงเป็นระบบอิสระ ดังนั้น แรงกระทำโดยสปริงต่อมวลทั้งสองนี้คือแรงภายใน นอกจากนี้ มวลทั้งสองยังมีแรงดึงดูดระหว่างมวลตามกฎความโน้มถ่วงซึ่งขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างมวล ซึ่งถือว่าเป็นแรงภายในด้วย ส่วนแรงกระทำระหว่างมวลกับโลกเนื่องจากความโน้มถ่วงจัดเป็นแรงภายนอก



รูปที่ 5.1 ระบบอนุภาคประกอบด้วยมวล 1 และมวล 2 เชื่อมต่อเข้าด้วยกันโดยสปริงเบา

ฉะนั้น แรงลัพธ์ที่กระทำต่อระบบคือผลรวมของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบ ดังนี้

$$\mathbf{F}_{\text{ลัพธ์}} = \mathbf{F}_{\text{ภายใน}} + \mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} \qquad \text{........5.1}$$

สำหรับระบบอนุภาคซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก = N อนุภาค

ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{F}_{ij}$ คือ แรงกระทำต่ออนุภาค i โดยอนุภาค j
และ $\mathbf{F}_{ji}$ คือ แรงกระทำต่ออนุภาค j โดยอนุภาค i
ตามกฎข้อ 3 ของนิวตันจะได้ว่า $\mathbf{F}_{ij}$ เท่ากับ $\mathbf{F}_{ji}$ แต่ทิศทางตรงกันข้าม จึงหักล้างกันหมดไประหว่างอนุภาคแต่ละคู่ และสมการ 5.1 จะเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายใน}} + \Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} \qquad \text{........5.2}$$

แต่ $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายใน}} = 0$ ดังนั้น

$$\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} \qquad \text{........5.3}$$

5.2 จุดศูนย์กลางมวล

สำหรับระบบอนุภาคซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากตั้งแต่สองอนุภาคขึ้นไปดังกล่าวแล้วในตอนก่อน โดยมีแรงลัพธ์จากแรงกระทำภายนอกต่อระบบคือ **F** และมวลรวมทั้งหมดของระบบคือ m การเคลื่อนที่ของระบบจึงอาจพิจารณาได้ว่าเสมือนหนึ่งเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่งซึ่งมีมวล m ด้วยแรงกระทำต่ออนุภาค ณ จุด ๆ หนึ่งเรียกว่า "จุดศูนย์กลางมวล" โดยที่จุดศูนย์กลางมวล คือตำแหน่งโดยเฉลี่ยของมวลต่าง ๆ ของระบบ ดังตัวอย่างระบบอนุภาคในรูปที่ 5.2 ซึ่งประกอบด้วยมวล m_1 และ m_2 อยู่บนแกน x ในตำแหน่ง x_1 และ x_2 ตามลำดับ ดังนั้น ถ้าพิจารณามวลทั้งสองเป็นระบบเดียวกัน จะได้

$$Mx_{CM} = m_1x_1 + m_2x_2 \qquad \text{........5.4}$$

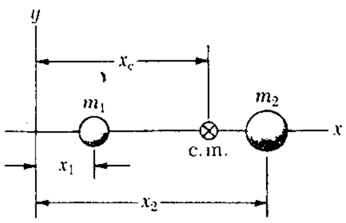
นั่นคือ

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \qquad \text{........5.5}$$

โดยที่ x_{CM} คือ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลทั้งหมดของระบบ

และ

$$M = m_1 + m_2 \qquad \text{........5.6}$$



รูปที่ 5.2 จุดศูนย์กลางมวลของระบบสองอนุภาคคือจุดระหว่างมวลทั้งสอง โดยอยู่ตรงตำแหน่งค่อนไปทางมวลใหญ่

ตัวอย่าง 5.1 ถ้ามวล $m_2 = 2m_1$ ในรูปที่ 5.2 โดยที่ $x_1 = 0$ และ $x_2 = d$ จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.2 และแทนค่าลงในสมการ 5.5 และ 5.6 จะได้

$$x_{CM} = \frac{m_1\,(0) + 2m_1\,(d)}{m_1 + 2m_1}$$

$$= \frac{2m_1\,d}{3m_1} = \frac{2}{3}d$$

จะเห็นได้ว่าตามตัวอย่าง 5.1 จุดศูนย์กลางมวลอยู่ใกล้กับมวลใหญ่มากกว่ามวลเล็ก และถ้าหากมวลทั้งสองเท่ากัน จะได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลอยู่กึ่งกลางระหว่างมวลทั้งสอง

ในกรณีที่ระบบประกอบด้วยอนุภาคเป็นจำนวนมากใน 3 มิติ จะพิจารณาจุดศูนย์กลางมวลของ n อนุภาค ในแกน x ได้ว่า

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2\,x_2 + \ldots\ldots + m_n\,x_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n} = \frac{\Sigma\, m_i\, x_i}{\Sigma m_i} \qquad \ldots\ldots5.7$$

โดยที่ x_i คือ ตำแหน่งบนแกน x ของอนุภาคลำดับที่ i

และ Σm_i คือ มวลรวมทั้งหมดของระบบ = M

ดังนั้น $$Mx_{CM} = \Sigma\, m_i\, x_i \qquad \ldots\ldots5.8$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลในแกน y และแกน z คือ

$$y_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i\, y_i}{M} \quad \text{และ} \quad z_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i\, z_i}{M} \qquad \ldots\ldots5.9$$

และเนื่องจากตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลใน 3 มิติ อาจแสดงด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{r}_{CM}$

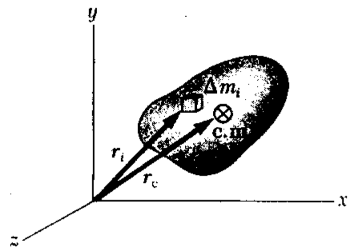
โดยที่ $$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j} + z_{CM}\,\hat{k} \qquad \ldots\ldots5.10$$

ดังนั้น $$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i\, x_i\,\hat{i} + \Sigma\, m_i\, y_i\,\hat{j} + \Sigma\, m_i\, z_i\,\hat{k}}{M} \qquad \ldots\ldots5.11$$

นั่นคือ $$\mathbf{r}_{CM} \equiv \frac{\Sigma\, m_i\,\mathbf{r}_i}{M} \qquad \ldots\ldots5.12$$

โดยที่ $$\mathbf{r}_i \equiv x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k} \qquad \ldots\ldots5.13$$

ตามความสัมพันธ์ข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลขึ้นอยู่กับแต่เพียงมวลของอนุภาคและตำแหน่งของอนุภาคหนึ่ง ๆ ซึ่งสัมพัทธ์กับอนุภาคอื่น ๆ เท่านั้น



รูปที่ 5.3 วัตถุที่มีขนาดแน่นอนประกอบด้วยมวลเล็ก ๆ Δm_i เป็นจำนวนมาก ซึ่งมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ $\mathbf{r}_c$

ถ้าพิจารณาวัตถุโดยทั่วไปว่าประกอบด้วยมวลเล็กๆ Δm_i ดังรูปที่ 5.3 ในทำนองเดียวกันกับที่ได้พิจารณาแล้วข้างต้นนี้ โดยมวลหนึ่ง ๆ มีพิกัดใน 3 มิติคือ x_i, y_i และ z_i ดังนั้น จะมีจุดศูนย์กลางมวลในแกน x, y และ z ตามสมการ 5.8 และ 5.9 คือ

$$x_{CM} = \frac{\Sigma x_i \Delta m_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\Sigma y_i \Delta m_i}{M}, \quad z_{CM} = \frac{\Sigma z_i \Delta m_i}{M}$$

เมื่อจำนวนมวลเล็ก ๆ มีจำนวนมากถึงอนันต์ จึงอาจพิจารณาได้ว่าแต่ละมวลเล็กมาก และจะเขียนความสัมพันธ์ข้างต้นเสียใหม่ได้ดังนี้

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\Sigma x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad \text{......5.14}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \text{และ} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad \text{......5.15}$$

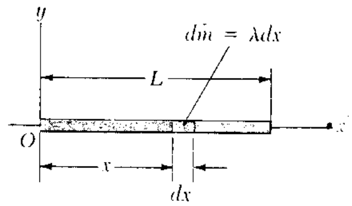
และจะได้จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุที่มีขนาดแน่นอน ตามความสัมพันธ์ในทำนองเดียวกันกับสมการ 5.12 ดังนี้

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm \qquad \text{......5.16}$$

ตามความสัมพันธ์นี้จึงใช้เครื่องหมาย $\int$ แทน Σ ในสมการ 5.12 สำหรับวัตถุซึ่งประกอบด้วยมวลต่อเนื่องกันโดยตลอดทั้งวัตถุ

ตัวอย่าง 5.2 (ก) จงแสดงว่าจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุซึ่งมีมวลกระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอตลอดทั้งแผ่น มีตำแหน่งอยู่ระหว่างกึ่งกลางแผ่น กำหนดความหนาแน่นของมวลต่อความยาว $\lambda = M/L$ (ข) ถ้า $\lambda = \alpha x$ โดยที่ α เป็นค่าคงตัว จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุ

วิธีทำ (ก) พิจารณารูปที่ 5.4 จะเห็นว่าแผ่นวัตถุมีแต่ความยาว L ไม่มีความกว้าง ดังนั้น $y_{CM} = z_{CM} = 0$ และความหนาแน่นของมวลต่อความยาว $\lambda = M/L$ จะได้ว่า มวลของส่วนเล็ก ๆ dx คือ $dm = \lambda\, dx$ และแทนค่าลงในสมการ 5.14



รูปที่ 5.4 ตัวอย่าง 5.2

ฉะนั้น

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx$$

$$= \frac{\lambda}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$= \left(\frac{M}{L}\right)\frac{L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$

(ข) แทนค่า $\lambda = \alpha x$ ลงในความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,(\alpha x)\,dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx$$

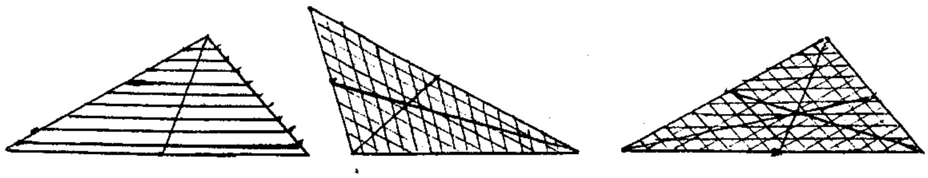
$$= \frac{\alpha}{M}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

และแทนค่า $M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx = \int_0^L \alpha x\, dx = \frac{\alpha L^2}{2}$

ดังนั้น $x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\,\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.5 และพิจารณาว่าแผ่นวัตถุประกอบด้วยชิ้นส่วนซึ่งมีขอบขนานกับด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม โดยแต่ละชิ้นส่วนมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ตรงกึ่งกลางของชิ้นส่วนหนึ่งๆ เมื่อแบ่งแผ่นวัตถุออกเป็นส่วน ๆ ให้มีขอบขนานกับแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม และลากเส้นผ่านจุดกึ่งกลางของชิ้นส่วนทั้งหมด ดังรูปที่ 5.5 ดังนั้น จุดตัดร่วมของเส้นทั้งสามคือจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

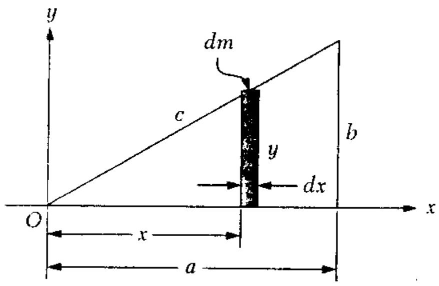


รูปที่ 5.5 การหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง 5.4 แผ่นวัตถุรูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยด้าน a , b และ c ดังรูปที่ 5.6 จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล กำหนดให้วัตถุมีมวลต่อตารางพื้นที่เท่ากันโดยตลอดทั้งแผ่น

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.6 และหาค่า dm แทนค่าลงในสมการ 5.14 และ 5.15 โดยแบ่งแผ่นวัตถุออกเป็นชิ้นส่วนดังตัวอย่าง 5.3 ดังนั้น มวลของแต่ละชิ้นส่วน คือ dm ซึ่งมีความกว้าง dx และความยาว y จะหาได้จาก

$$dm = \frac{\text{มวลทั้งหมดของแผ่นวัตถุ}}{\text{พื้นที่ทั้งหมดของแผ่นวัตถุ}} \times \text{พื้นที่ของชิ้นส่วน}$$



รูปที่ 5.6 ตัวอย่าง 5.4

หรือ $$dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}(y\,dx) = \frac{2M}{ab}y\,dx$$

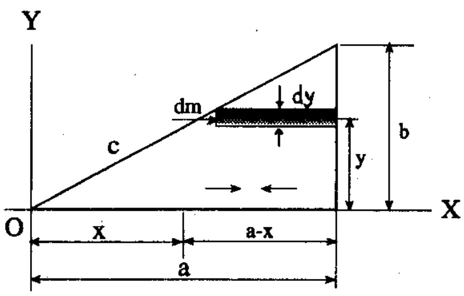
จะให้ $$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\left(\frac{2M}{ab}\right)y\,dx$$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a xy\,dx = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx$$

โดยที่ $y/x = b/a$ จากสามเหลี่ยมคล้าย 2 รูป ในรูปที่ 5.6

ฉะนั้น $$x_{CM} = \frac{2}{ab}\left(\frac{b}{a}\right)\int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

ในทำนองเดียวกันจะหา y_{CM} ได้จากการแบ่งชิ้นส่วนของแผ่นวัตถุให้มีความกว้าง dy และความยาว a-x ดังรูปที่ 5.7 จะได้ มวลของแต่ละชิ้น dm คือ



รูปที่ 5.7 ตัวอย่าง 5.4

$$dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}(a-x)\,dy = \frac{2M}{ab}(a-x)\,dy$$

ดังนั้น
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^b y\left(\frac{2M}{ab}\right)(a-x)\,dy$$

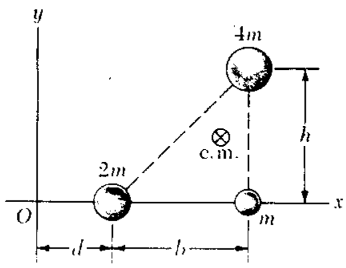
$$= \frac{2}{ab}\left[\int_0^b aydy - \int_0^b xydy\right] = \frac{2}{ab}\left[a\frac{y^2}{2} - \int_0^b \frac{a}{b}y^2dy\right]$$

$$= \frac{2}{ab}\left[\frac{a}{2}b^2 - \frac{a}{b}\frac{b^3}{3}\right] = b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ตำแหน่ง $x_{CM} = \frac{2}{3}a$ และ $y_{CM} = \frac{1}{3}b$

ตัวอย่าง 5.5 ระบบหนึ่งประกอบด้วย 3 อนุภาค อยู่ในตำแหน่งดังรูปที่ 5.8 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.8 และแทนค่าลงในสมการ 5.8 และ 5.9 จะได้



รูปที่ 5.8 ตัวอย่างที่ 5.5

$$x_{CM} = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} = \frac{2ma + m(a+b) + 4m(a+b)}{2m + m + 4m} = a + \frac{5}{7}b$$

$$y_{CM} = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} = \frac{2m(0) + m(0) + 4mh}{2m + m + 4m} = \frac{4}{7}h$$

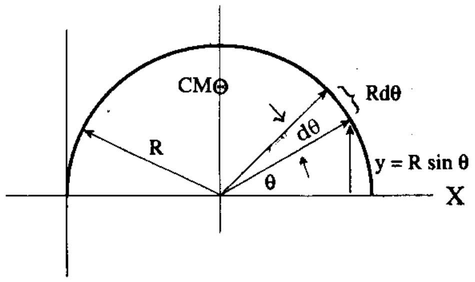
เมื่อแทนค่าลงในสมการ 5.10 โดยที่ $z_{CM} = 0$ จะได้

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\mathbf{i} + y_{CM}\mathbf{j} = \left(a + \frac{5}{7}b\right)\mathbf{i} + \frac{4}{7}h\,\mathbf{j}$$

ตัวอย่าง 5.6 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของวงแหวนรูปครึ่งวงกลมรัศมี R ซึ่งมีมวล M และมวลต่อความยาว $\lambda = M/\pi R$

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.9 และแทนค่า $dm = \lambda\, dl = \lambda\, R d\theta$ ลงในสมการ 5.15 โดยที่ $Z_{CM} = 0$ จะได้

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} (R \sin\theta)\,\lambda\, R d\theta$$



รูปที่ 5.9 ตัวอย่าง 5.6

ดังนั้น

$$y_{CM} = \frac{R^2\lambda}{M}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{R^2\lambda}{M}[\cos 0 - \cos\pi]$$

$$= \frac{R^2\lambda}{M}[1-(-1)] = \frac{2R^2\lambda}{M} = \frac{2R^2}{M}\left(\frac{M}{\pi R}\right) = \frac{2R}{\pi}$$

กิจกรรม 5.1

ให้นักศึกษาหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุในตัวอย่าง 5.2 ด้วยวิธีการตามตัวอย่าง 5.3

5.3 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

เมื่อวัตถุที่มีขนาดหรือกลุ่มอนุภาคเคลื่อนที่ ในตอนนี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลเสมือนเป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุหรือกลุ่มอนุภาคทั้งหมด ถ้ามวลของวัตถุคงตัวจะหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ได้แก่ ความเร็ว ความเร่ง และโมเมนตัมซึ่งเป็นผลคูณระหว่างมวลกับความเร็ว ได้ดังนี้

ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\Sigma\, m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\Sigma\, m_i\, \mathbf{v}_i}{M} \qquad ......5.17$$

อัตราเร่งของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\Sigma\, m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\Sigma\, m_i\, \mathbf{a}_i}{M} \qquad ......5.18$$

โมเมนตัมของระบบอนุภาค คือ

$$M\mathbf{v}_{CM} = \Sigma\, m_i\, \mathbf{v}_i = \Sigma\, \mathbf{p}_i = \mathbf{p} \qquad ......5.19$$

โดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อ 2 จะได้

$$M\mathbf{a}_{CM} = \Sigma\, m_i\, \mathbf{a}_c = \Sigma\, \mathbf{F}_i \qquad ......5.20$$

โดยที่ $\mathbf{F}_i$ คือ แรงกระทำต่ออนุภาค i และดังที่ได้พิจารณาแล้วในตอน 5.1 ถึงแรงกระทำทั้งหมดต่ออนุภาคในระบบว่าประกอบด้วย แรงภายในและแรงภายนอก แต่แรงภายในจะหักล้างกันหมดไป จึงเหลือแต่เพียงแรงกระทำภายนอกดังสมการ 5.3 จึงจะเขียนสมการ 5.20 เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\Sigma\, \mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} = M\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad ......5.21$$

ตามสมการ 5.21 จะเห็นว่าแรงลัพธ์จากภายนอกที่กระทำต่อระบบอนุภาคเท่ากับมวลของระบบคูณกับความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อสองเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่ง ๆ จึงกล่าวได้ว่า "จุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่เสมือนหนึ่งอนุภาคซึ่งมีมวล m เคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำจากภายนอกต่อทั้งระบบ"

ในกรณีที่ไม่มีแรงกระทำจากภายนอก จะเขียนสมการ 5.21 ได้ดังนี้

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\mathbf{a}_{CM} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \Sigma\, F_{\text{ภายนอก}} = 0$$

ดังนั้น $$\mathbf{p} = M\,\mathbf{v}_{CM} = \text{ค่าคงตัว} \qquad ......5.22$$

นั่นคือ โมเมนตัมเชิงเส้นทั้งหมดของระบบอนุภาคจะไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าหากไม่มีแรงกระทำใด ๆ จากภายนอกต่อระบบ โดยเฉพาะระบบอนุภาคอิสระจะมีค่าโมเมนตัมทั้งหมดและอัตราเร็วของจุดศูนย์กลางมวลคงที่ตลอดเวลา

ตัวอย่าง 5.7 ระบบอนุภาคดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.10 ประกอบด้วย 3 อนุภาค ซึ่งได้รับแรงกระทำจากภายนอกตามขนาดและทิศทางดังรูป จงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางของระบบ

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.10 และแทนค่าลงในสมการ 5.8 และ 5.9 โดยที่ $z_{CM} = 0$

จะได้ $$x_{CM} = \frac{(8 \times 4) + (4 \times (-2)) + (4 \times 1)}{8 + 4 + 4} = 1.8 \text{ เมตร}$$

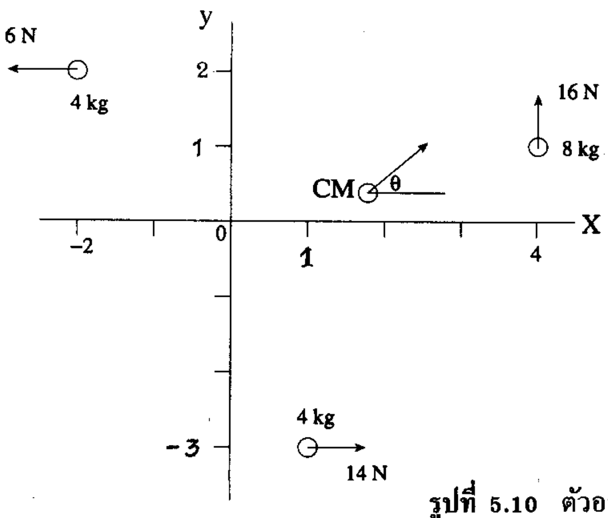
$$y_{CM} = \frac{(8 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times (-31)}{8 + 4 + 4} = 0.25 \text{ เมตร}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ตำแหน่ง (1.8, 0.25) และจะหาอัตราเร่งของจุดศูนย์กลางมวลได้จากสมการ 5.21 ดังนี้

$$a_{CM} = \frac{\Sigma F}{M} \quad \text{โดยที่ } F_x = 14 - 6 = 8 \text{ N และ } F_y = 16 \text{ N}$$

ดังนั้น $$F = \sqrt{8^2 + 16^2} = 18 \text{ N}$$

นั่นคือ $$a_{CM} = \frac{18}{16} = 1.1 \text{ m.s}^{-2}$$



รูปที่ 5.10 ตัวอย่าง 5.7

และจะหาทิศทางของความเร่งได้จาก $\tan\theta = \frac{16}{8} = 2.0$ หรือ $\theta = 63^\circ$

โดยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลทำมุม 63° กับแนวแกน x ด้วยอัตราเร่ง 1.1 เมตร . วินาที$^{-2}$

ตัวอย่าง 5.8 เมื่อยิงจรวดขึ้นไปในแนวดิ่งสูง 1000 เมตร และมีความเร็ว 300 เมตร.วินาที$^{-1}$ ปรากฏว่าจรวดกระจายออกเป็น 3 ท่อนเท่า ๆ กัน โดยจรวดท่อนที่หนึ่ง พุ่งต่อไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 450 เมตร.วินาที$^{-1}$ ในทันทีทันใดที่แยกตัวออกมา จรวดท่อนที่สองพุ่งไปทางตะวันออกด้วยความเร็ว 240 เมตร.วินาที$^{-1}$ ในเวลาเดียวกันนั้น จงหา (ก) ความเร็วของจรวดท่อนที่สามในทันทีทันใดที่แยกตัวออกมา (ข) ตำแหน่งยังจุดศูนย์กลางมวลสัมพัทธ์กับพื้นดินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีภายหลังจากที่จรวดระเบิดออกเป็นท่อน ๆ โดยสมมติว่าในขณะนั้นเครื่องยนต์หยุดทำงานแล้ว

วิธีทำ (ก) พิจารณาโมเมนตัมทั้งหมดก่อนและหลังการระเบิดออกเป็นท่อน ๆ จะต้องเท่ากัน เนื่องจากแรงระเบิดเกิดขึ้นภายในระบบ และแทนค่าลงในสมการ 5.22 ดังนี้

โมเมนตัมก่อนระเบิด $\mathbf{P}_i = M\mathbf{v}_i = 300\ M\hat{\mathbf{j}}$

โมเมนตัมหลังระเบิด $\mathbf{P}_f = 240\left(\frac{M}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} + 450\left(\frac{M}{3}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{M}{3}\mathbf{v}$

โดยที่ v แทนความเร็วของท่อนที่สาม และ $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ จะได้

$$M\frac{\mathbf{v}}{3} + 80\ M\hat{\mathbf{i}} + 150\ M\hat{\mathbf{j}} = 300\ M\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v} = -240\,\hat{\mathbf{i}} + 450\,\hat{\mathbf{j}}\quad \text{m.s}^{-1}$$

(ข) พิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลเสมือนการเคลื่อนที่ของวัตถุตกจากที่สูงอย่างอิสระเนื่องจากการเคลื่อนที่ของแต่ละส่วนของระบบอนุภาคไม่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล ดังที่ได้พิจารณาแล้วในตอนท้ายของตัวอย่างข้างต้น

โดยการกำหนดให้เวลาเริ่มต้นที่จรวดระเบิด $t = 0$ ในระดับความสูง $y = 1{,}000$ เมตร และความเร็วเริ่มต้น $v_0 = 300$ เมตร.วินาที$^{-1}$ สำหรับจุดศูนย์กลางมวล และแทนค่าลงในสมการจลน์ศาสตร์ $y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ จะได้ y_{CM} เมื่อ $t = 3$ วินาที คือ

$$y_{CM} = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 1000 + 300\,(3) - \frac{1}{2}(9.8)\,(3)^2 = 1.86\ \text{km}$$

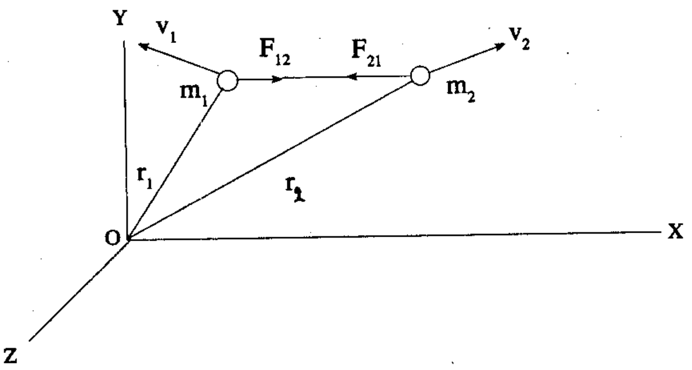
5.4 มวลลดทอน

ในกรณีที่ระบบอนุภาคอิสระประกอบด้วย 2 อนุภาค ซึ่งมีมวล m_1 และ m_2 อาจจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาค m_1 สัมพัทธ์กับ m_2 เสมือน m_2 หยุดนิ่งอยู่กับที่บนกรอบเฉื่อยและพิจารณามวลลดทอน μ แทนมวล m_1 (และ m_2) ได้ดังต่อไปนี้ เนื่องจากเป็นระบบอิสระจึงไม่มีแรงกระทำจากภายนอก แต่จะมีแรงกระทำซึ่งกันและกันระหว่างมวลทั้งสอง เรียกว่า แรงภายใน ซึ่งรวมกันเป็นศูนย์ดังกล่าวแล้วในตอนที่ 5.1 นั่นคือ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ โดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง จะได้ว่า แรงที่มวล m_2 กระทำต่อมวล m_1 ให้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v_1 ดังในรูปที่ 5.11 คือ

$$\mathbf{F}_{12} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}$$

หรือ

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1}$$



รูปที่ 5.11 มวล m_1 และ m_2 มีแรงกระทำซึ่งกันและกัน $F_{12} = -F_{21}$ ภายในระบบอิสระ โดยไม่มีแรงกระทำจากภายนอก

และ แรงที่มวล m_1 กระทำต่อมวล m_2 ให้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v_2 คือ

$$\mathbf{F}_{21} = m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

หรือ
$$\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

จะได้ว่า
$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

หรือ
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$ โดยที่ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

ถ้าให้ $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ เป็นความเร็วสัมพัทธ์ของ m_1 เทียบกับ m_2

และ
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \text{......5.23}$$

โดยที่ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ เรียกว่า มวลลดทอน (reduced mass) เนื่องจาก μ จะน้อยกว่า m_1 หรือ m_2 เสมอ และเป็นมวลของอนุภาคทั้งสองไม่ใช่มวลของอนุภาคใดอนุภาคหนึ่ง ซึ่งอาจเขียนความสัมพันธ์ของ μ ได้ว่า

$$\mu = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{......5.24}$$

ดังนั้น
$$\mathbf{F}_{12} = \mu \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} \qquad \text{......5.25}$$

นั่นคือ เราสามารถหาการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของมวล m_1 เทียบกับ m_2 โดยอาศัยมวล

ลดทอน μ แทนมวลของอนุภาคทั้งสอง จึงเสมือนเป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดียวเท่านั้น ซึ่งจะลดปัญหาในการพิจารณาลงได้มาก ดังเช่นการศึกษาการโคจรของดวงจันทร์รอบโลก โดยการกำหนดให้จุดกำเนิดอยู่ที่ใจกลางโลกและมวลลดทอนแทนมวลของดวงจันทร์และโลก นอกจากจะลดปัญหาในการพิจารณาการเคลื่อนที่ของแต่ละมวลแล้ว ยังจะช่วยให้การคำนวณหาผลลัพธ์ถูกต้องยิ่งขึ้นด้วย

ตัวอย่าง 5.9 ชายคนหนึ่งสังเกตเห็นวัตถุมวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ ตามลำดับ (ก) เขาจะเห็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด และ (ข) ความเร็วสัมพัทธ์ของมวล m_1 และ m_2 เทียบกับจุดศูนย์กลางมวลเป็นเท่าใด

วิธีทำ (ก) พิจารณาตำแหน่งของมวลทั้งสองในทำนองเดียวกับรูปที่ 5.11 โดยกำหนดให้ผู้สังเกตอยู่ที่จุดกำเนิดของกรอบอ้างอิงเฉื่อยในระบบพิกัดฉาก xyz และแทนค่าลงในสมการ 5.12 และ 5.17 จะได้

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

และ

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

ดังนั้น ชายนั้นจะเห็นจุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$

(ข) พิจารณาความเร็วสัมพัทธ์ของ m_1 และ m_2 เทียบกับจุดศูนย์กลางมวลให้เป็น $\mathbf{v}'_1$ และ $\mathbf{v}'_2$ ดังนี้

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}_{12}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{21}$$

เนื่องจาก $\mathbf{v}_{12} = -\mathbf{v}_{21}$ ดังนั้น ถ้าผู้สังเกตอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลจะเห็นมวลทั้งสองเคลื่อนที่ไปในทิศทางตรงข้ามกัน โดยที่โมเมนตัมเชิงเส้นของ m_1 และ m_2 มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทาง

ตรงกันข้าม จากการเทียบอัตราส่วน v'_1/v'_2 โดยอาศัยความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้ $v'_1/v'_2 = -m_2/m_1$ หรือ $m_1v'_1 = -m_2v'_2$ นั่นเอง

5.5 โมเมนตัมเชิงเส้นและการดล

ตามที่ได้กล่าวถึงโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคในตอนที่ 5.3 แล้วว่าเป็นผลคูณระหว่างมวลกับความเร็ว ดังในสมการ 5.19

$$\mathbf{p} \equiv M\mathbf{v}_{CM} \qquad \text{......5.26}$$

และ จะหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนตัมกับแรงกระทำต่อระบบ ดังในสมการ 5.21

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dx} \qquad \text{......5.27}$$

ซึ่งหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคต่อหนึ่งหน่วยเวลาเท่ากับแรงกระทำสุทธิต่อระบบ และจะเขียนสมการ 5.27 เสียใหม่ได้ว่า

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt \qquad \text{......5.28}$$

ดังนั้น ถ้าอนุภาคเริ่มต้นเคลื่อนที่เมื่อเวลา t_i โดยที่โมเมนตัมขณะนั้นคือ $\mathbf{p}_i$ จะทำให้โมเมนตัมเป็น $\mathbf{p}_f$ เมื่อเวลา t_f ซึ่งจะหาโมเมนตัมที่เปลี่ยนไปได้จากการอินทิเกรต ดังนี้

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f}\mathbf{F}\,dt \qquad \text{......5.29}$$

เนื่องจากแรง **F** กระทำต่อวัตถุในช่วงเวลา $\Delta t = t_f - t_i$ จึงเรียกปริมาณทางขวาของสมการ 5.29 ว่า การดล (impulse) ตามคำจำกัดความดังนี้

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f}\mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{p} \qquad \text{......5.30}$$

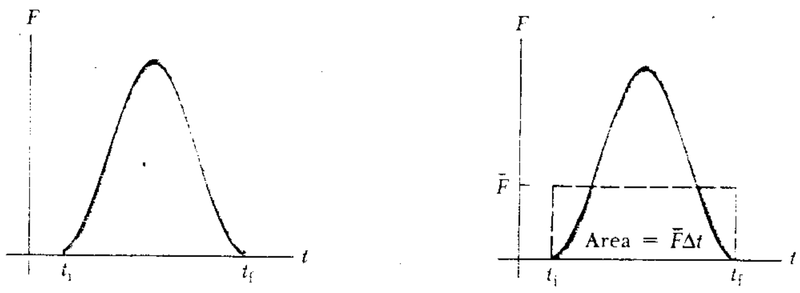
จึงหมายความว่า การดล ของแรง **F** เท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค และเป็น **ทฤษฎีการดล-โมเมนตัม** ซึ่งเทียบเท่ากับกฎข้อที่สองของนิวตัน

โดยคำจำกัดความของการดลตามสมการ 5.30 แสดงว่าการดลเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งในกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง **F** กับ t ดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.12 (ก) และเท่ากับพื้นที่ซึ่งได้จากการหาค่าแรงเฉลี่ยในช่วงเวลาเดียวกันในรูปที่ 5.12 (ข) เนื่องจากแรงเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา จึงหาแรงเฉลี่ยตามเวลาได้จากความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\mathbf{F}_{\text{เฉลี่ย}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f}\mathbf{F}\,dt \qquad \text{......5.31}$$

และจะเขียนสมการ 5.30 เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\mathbf{I} \quad = \quad \Delta \mathbf{p} \quad = \quad \mathbf{F}\Delta t \qquad \text{......5.32}$$



(ก) (ข)

รูปที่ 5.12 (ก) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรง **F** กับเวลา t โดยที่แรง **F** กระทำต่อวัตถุเปลี่ยนแปลงไปในระหว่าง t_i ถึง t_f จึงจะหาการดลของแรง **F** ได้จากพื้นที่ใต้เส้นโค้ง และ
(ข) พื้นที่ใต้เส้นโค้งใน (ก) จะเท่ากับพื้นที่ซึ่งได้จากการหาค่าแรงเฉลี่ยในช่วงเวลาเดียวกัน

ดังนั้น จะเห็นว่าจะหาขนาดของการดลได้จากพื้นที่ใต้เส้น **F** ซึ่งเป็นค่าคงตัวในช่วงเวลา Δt เช่นเดียวกับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง **F** ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

นอกจากนี้ ในกรณีที่แรงกระทำต่อวัตถุเป็นแรงคงตัว จะได้ว่า $\mathbf{F}_{\text{เฉลี่ย}} = \mathbf{F}$ และจะหาการดลของแรง **F** จากสมการ 5.32 ได้ว่า

$$\mathbf{I} \quad = \quad \Delta \mathbf{p} \quad = \quad \mathbf{F}dt$$

โดยทั่วไปถ้าพิจารณาแรงกระทำต่อวัตถุในเวลาสั้นๆ อาจถือว่าวัตถุได้รับแรงกระทำแรงใดแรงหนึ่งซึ่งมากกว่าแรงอื่นๆ และจะหาขนาดโดยประมาณของการดลของแรงนั้นได้จากความสัมพันธ์ข้างต้น โดยวิธีประมาณการนี้จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาการชนกันระหว่างวัตถุในเวลาสั้นๆ และจะเรียกแรงกระทำต่อวัตถุในเวลาสั้นๆ นี้ว่า “แรงดล (impulsive force)” ดังเช่น การตีปิงปองในขณะที่ไม้กระทบลูกปิงปองในเวลา 0.01 วินาที และแรงเฉลี่ยที่ไม้กระทำต่อลูกปิงปองในเวลาสั้น ๆ นี้มีขนาดหลายพันนิวตัน ซึ่งมากกว่าแรงอื่น ๆ ที่กระทำต่อลูกปิงปองในขณะนั้น เช่น แรงโน้มถ่วงของโลก จึงอาศัยวิธีประมาณการนี้ได้อย่างถูกต้องใกล้เคียงมากที่สุด อย่างไรก็ตาม ในกรณีการชนกันระหว่างวัตถุ เนื่องจาก $\mathbf{p}_i$ และ $\mathbf{p}_f$ คือโมเมนตัมในทันทีทันใดก่อนและหลังชน ดังนั้น วัตถุจึงเคลื่อนที่น้อยมากในระหว่างการชนกันนั้น

ตัวอย่าง 5.10 ในการเล่นเบสบอลโดยฝ่ายผู้ขว้างลูกบอลซึ่งมีมวล 0.145 กิโลกรัมขว้างลูกออกไปด้วยอัตราเร็ว 30 เมตร.วินาที$^{-1}$ เมื่อกระทบกับไม้ตี (โดยฝ่ายผู้รับลูก) เป็นเวลา 0.01 วินาที แล้วกระดอนกลับด้วยอัตราเร็ว 40 เมตร.วินาที$^{-1}$ จงหา (ก) การดล และ (ข) แรงเฉลี่ย

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 5.30 จะได้ การดล คือ

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$$
$$= (0.145 \text{ kg}) [(40 - (-30) \text{ m.s}^{-1}]$$
$$= 10.1 \quad \text{N.s}$$

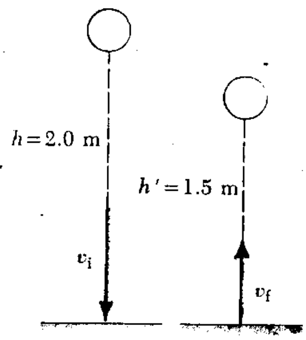
(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.32 จะได้ แรงเฉลี่ย

$$F_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{10.1 \text{ N.s}}{0.01 \text{ s}} = 1.01 \text{ N}$$

ตัวอย่าง 5.11 ลูกบอลมวล 100 กรัม ตกจากที่สูงจากพื้นดิน 2 เมตร และกระดอนกลับในแนวดิ่งสูง 1.5 เมตร ภายหลังจากกระทบพื้น จงหา (ก) โมเมนตัมในทันทีทันใดก่อนและหลังกระทบพื้น และ (ข) แรงเฉลี่ยที่พื้นกระทำต่อลูกบอล โดยสมมติเวลาที่กระทบพื้นเท่ากับ 0.01 วินาที

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.13 และแทนค่าลงในสมการพลังงานตามกฎการคงตัวของพลังงานในบทที่ 4 จะได้

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh'$$



รูปที่ 5.13 ตัวอย่าง 5.11

โดยที่ $\frac{1}{2}mv_i^2 = mgh$ และ $\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh'$

ดังนั้น $p_i = mv_i = m\sqrt{2gh}$ และ $p_f = mv_f = m\sqrt{2gh'}$

จะได้ $p_i = -(0.1\ kg)\ [2\ (9.8\ m.s^{-2})\ (2\ m)]^{1/2} = -0.63\ N.s$

และ $p_f = (0.1\ kg)\ [2\ (9.8\ m.s^{-2})\ (1.5\ m)]^{1/2} = 0.54\ N.s$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.32 จะได้

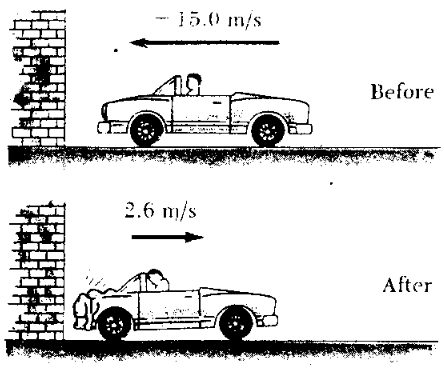
$$F_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{[0.54 - (-0.63)]\ kg.\ m.s^{-1}}{0.1\ s}$$
$$= 1.17 \times 10^2\ N$$

เนื่องจากแรงเฉลี่ยมีค่ามากกว่าแรงโน้มถ่วงกว่าร้อยเท่า โดยที่ mg = 1.0 นิวตันเท่านั้น ดังนั้น แรงดลจากการกระทบกับพื้นจึงมีอิทธิพลต่อลูกบอลมากกว่าแรงโน้มถ่วง ในกรณีนี้การชนกันเป็นแบบไม่ยืดหยุ่น จึงสูญเสียพลังงานไปเป็นพลังงานความร้อนดังจะศึกษาต่อไป

ตัวอย่าง 5.12 รถยนต์มวล 1500 กิโลกรัม พุ่งชนผนังกำแพงด้วยความเร็วก่อนและหลังชน -15 เมตร.วินาที$^{-1}$ และ 2.6 เมตร.วินาที$^{-1}$ ตามลำดับ โดยเวลาในการชนเป็น 0.15 วินาที จงหาการดลและแรงเฉลี่ย

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.14 และแทนค่าลงในสมการ 5.30 และ 5.32 จะได้

$$I = \Delta p = mv_f - mv_i = (1500\ kg.)\ [2.6 - (-15)\ m.s^{-1}]$$
$$= 2.64 \times 10^4\ kg.\ m.s^{-1}$$



รูปที่ 5.14 ตัวอย่าง 5.12

และ $$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\ kg.\ m.\ s^{-1}}{0.15\ s} = 1.76 \times 10^5\ N$$

กิจกรรม 5.2

ให้นักศึกษาหาผลลัพธ์สำหรับตัวอย่าง 5.12 โดยอาศัยมวลลดทอน

5.6 กฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น

ในการพิจารณาระบบอนุภาคอิสระดังกล่าวแล้ว ซึ่งถือว่ามวลของระบบไม่เปลี่ยนแปลง แต่ละอนุภาคจะเคลื่อนที่ภายในระบบด้วยโมเมนตัมรวม ดังนี้

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots m_n\mathbf{v}_n \qquad \ldots\ldots 5.33$$

เมื่อเทียบกับสมการ 5.19 จะได้

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM} \qquad \ldots\ldots 5.34$$

โดยที่ $M = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots + m_n$

ถ้าหากมีแรงกระทำจากภายนอก จะได้ว่า

$$\mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} = M\mathbf{a}_{CM} \qquad \ldots\ldots 5.35$$

แต่จากสมการ 5.34 จะหาการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมต่อเวลาโดยวิธีดิฟเฟอเรนชิเอทคือ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = M\mathbf{a}_{CM} \qquad \ldots\ldots 5.36$$

ดังนั้น
$$\mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad \ldots\ldots 5.37$$

สำหรับระบบสองอนุภาค จะได้ว่า

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad \text{และ} \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \qquad \ldots\ldots 5.38$$

และเนื่องจาก $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ดังนั้น

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

หรือ
$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

นั่นคือ
$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{ค่าคงตัว} \qquad \ldots\ldots 5.39$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ โดยแต่ละมิติต่างมีค่าคงตัวดังนี้

$$\mathbf{P}_{ix} = \mathbf{P}_{fx} \;,\quad \mathbf{P}_{iy} = \mathbf{P}_{fy} \;,\quad \mathbf{P}_{iz} = \mathbf{P}_{fz}$$

จึงกล่าวได้ว่าโมเมนตัมเชิงเส้นเป็นไปตามกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น

"ระบบอิสระที่ประกอบด้วย 2 อนุภาคมวล m_1 และ m_2 จะมีโมเมนตัมทั้งหมดของระบบคงตัวเสมอ โดยไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของแรงกระทำระหว่างอนุภาคเฉพาะอย่างยิ่งอนุภาคที่ไม่มีประจุมีการชนกัน โมเมนตัมทั้งหมดจะมีค่าคงตัวถ้าหากเป็นระบบอิสระ"

ถ้า v_{1i} และ v_{2i} คือความเร็วเริ่มต้นของอนุภาค 1 และ 2 และ v_{1f} และ v_{2f} คือความเร็วในตอนท้ายของอนุภาคทั้งสองตามลำดับ จะเขียนสมการ 5.39 เสียใหม่ได้ว่า

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad ......5.40$$

หรือ
$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \qquad ......5.41$$

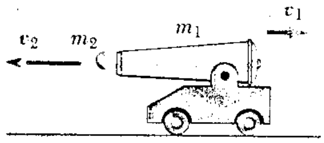
นั่นคือ "โมเมนตัมทั้งหมดของระบบอิสระในเวลาใด ๆ จะเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดนั้นเมื่อเริ่มต้น" ซึ่งเป็นไปตามกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น ดังกล่าวข้างต้น

ทั้งนี้ โดยไม่คำนึงถึงลักษณะของแรงภายในระหว่างอนุภาคสำหรับระบบสองอนุภาคดังกล่าวแล้วข้างต้น และกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้นนี้ยังครอบคลุมถึงระบบหลายอนุภาคดังได้กล่าวแล้วในตอนที่ 5.3

อนึ่ง กฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้นนี้นับว่าเป็นกฎที่สำคัญกฎหนึ่งในทางกลศาสตร์ ในขณะที่กฎการคงตัวของพลังงานจะใช้ได้ถูกต้องเฉพาะเมื่อระบบอิสระได้รับแรงอนุรักษ์เท่านั้น ดังศึกษาแล้วในบทก่อน แต่กฎการคงตัวของโมเมนตัมสำหรับระบบอิสระสองอนุภาคจะไม่ขึ้นกับชนิดของแรงภายในระหว่างอนุภาค

ตัวอย่าง 5.12 รถถังคันหนึ่งมวล 3,000 กิโลกรัม บรรจุลูกปืนใหญ่มวล 30 กิโลกรัมเตรียมพร้อมที่ยิงในแนวระนาบ ถ้าทั้งปืนและรถถังหงายไปข้างหลังด้วยความเร็ว 1.8 เมตร.วินาที$^{-1}$ ภายหลังจากยิงลูกปืนออกไป จงหาอัตราเร็วของลูกปืนในทันทีทันใดที่พุ่งออกจากกระบอกปืน

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.15 และแทนค่าลงในสมการ 5.40 โดยไม่คิดแรงเสียดทานระหว่างรถถังกับพื้น เนื่องจากโจทย์ไม่ได้กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสไว้ และไม่มีแรงกระทำภายนอกอื่น ๆ แม้ว่าจะมีแรงโน้มถ่วงและแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก แต่ทั้งสองแรงนี้กระทำในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ จึงนับว่าระบบนี้เป็นระบบอิสระ โดยโมเมนตัมมีค่าคงตัวในแกน x จะได้



รูปที่ 5.15 ตัวอย่าง 5.12

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

หรือ $m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = 0$ โดยที่ $v_{1i} = 0$ และ $v_{2i} = 0$

จะได้ $v_{2f} = -(m_1/m_2)\, v_{1f}$

$$= -(3000\ \text{kg}/30\ \text{kg})\ (1.8\ \text{m.s}^{-1})$$

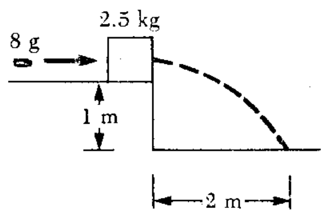
นั่นคือ $v_2 = v_{2f} = -180\ \text{m.s}^{-1}$

เครื่องหมาย - แสดงว่าลูกปืนพุ่งไปทางซ้ายซึ่งตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ของกระบอกปืน

ตัวอย่าง 5.13 เมื่อยิงลูกปืนมวล 6 กรัม เข้าไปในแท่งไม้มวล 2 กิโลกรัม ซึ่งอยู่นิ่งที่ขอบโต๊ะสูง 1 เมตร ทำให้แผ่นไม้พร้อมลูกปืนที่ฝังอยู่ตกห่างจากขอบโต๊ะ 2 เมตร วัดตามแนวระดับ ดังรูปที่ 5.16 จงหาความเร็วต้นของลูกปืน

วิธีทำ พิจารณารูปที่ 5.16 และแทนค่าลงในสมการ 5.41 จะได้

$$p_i = p_f \quad \text{หรือ} \quad mv_i = (m + M)\, v_f$$



รูปที่ 5.16 ตัวอย่าง 5.13

และ $$v_f = \left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{\sqrt{2H/g}} = x\sqrt{g/2H}$$

โดยที่ t คือเวลาการตกของมวลทั้งสองสู่พื้น ตามหลักโปรเจกไทล์

ดังนั้น
$$v_i = \frac{(m + M)}{m} \times \sqrt{g/2H}$$
$$= \frac{(0.006\ kg + 2\ kg)\ (2m)}{0.006\ kg}\sqrt{\frac{9.8\ m/s^2}{2\ (1m)}}$$
$$= 1.48 \times 10^3\ m.s^{-1}$$

5.7 การชนกันในแนวตรง

โดยอาศัยกฎการคงตัวของโมเมนตัมที่ได้ศึกษาแล้วในตอนก่อน จะพิจารณากรณีการชนกันระหว่างอนุภาคต่อไป โดยเฉพาะการปะทะกันเนื่องจากอนุภาคหนึ่งพุ่งชนอีกอนุภาคหนึ่งในเวลาอันสั้น จึงเกิดแรงดลกระทำซึ่งกันและกัน โดยที่แรงดลมีค่ามากกว่าแรงกระทำจากภายนอกมาก ดังที่ได้พิจารณาแล้วในตัวอย่าง 5.11 และจะเห็นได้จากการชนกันระหว่างวัตถุอื่น ๆ อีกมาก ในกรณีนี้โมเมนตัมทั้งหมดของระบบก่อนชนจะเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดของระบบหลังชน ตามกฎการคงตัวของโมเมนตัม

แม้ว่าโมเมนตัมรวมของระบบสองอนุภาคจะไม่เปลี่ยนแปลงในการชนกัน แต่โดยทั่วไปพลังงานจลน์ทั้งหมดจะไม่คงตัว เนื่องจากพลังงานจลน์เปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนและพลังงานศักย์บางส่วน เมื่อวัตถุมีรูปทรงเปลี่ยนแปลงไปภายหลังการชน จึงเรียกการชนกันนี้ว่า “การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision)” ดังเช่น ลูกบอลยางพุ่งชนผนังกำแพงทำให้รูปทรงเปลี่ยนไปในขณะที่ชนจึงมีพลังงานจลน์บางส่วนสูญเสียไป แต่เมื่อวัตถุชนกันแล้วเคลื่อนที่ไปด้วยกัน ดังในตัวอย่าง 5.13 จะเรียกว่า “การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (perfect inelastic collision)

ในกรณีที่โมเมนตัมและพลังงานจลน์ต่างมีค่าคงตัวจากการชนกันระหว่างสองอนุภาค จะเรียกว่า “การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ (perfect elastic collision)” แต่ตามความเป็นจริงไม่พบว่ามีการชนกันแบบนี้ แม้ว่าการชนกันระหว่างลูกบิลเลียดจะนับว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ แต่ในขณะชนกันจะทำให้ลูกบิลเลียดเปลี่ยนรูปทรงไปบ้างเสมอ จึงมักจะมีการสูญเสียพลังงานจลน์บางส่วน อย่างไรก็ตาม การชนกันระหว่างลูกบิลเลียดอาจถือว่าเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ได้อย่างใกล้เคียงมากที่สุด นอกจากนี้ ยังมีการชนกันระหว่างโมเลกุลของอากาศกับผนังของภาชนะต่าง ๆ ที่อุณหภูมิปกติ ซึ่งจัดว่าเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์มากที่สุด แต่การชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์อย่างแท้จริงจะพบได้ระหว่างอะตอมหรืออนุภาคขนาดย่อมกว่าอะตอม

การชนกันจึงจัดจำแนกออกได้เป็น 3 แบบ ดังกล่าวข้างต้นได้แก่

1. การชนแบบไม่ยืดหยุ่น หมายถึงกรณีที่โมเมนตัมคงตัว แต่พลังงานจลน์ไม่คงตัว

2. การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ หมายถึงการชนแบบไม่ยืดหยุ่น ซึ่งวัตถุทั้งสองจะติดกันไปภายหลังการชนกัน จึงมีความเร็วสุดท้ายเท่ากัน

3. การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ หมายถึงกรณีที่ทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์คงตัว

โดยปกติการชนกันส่วนใหญ่จะไม่เป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์หรือแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์แบบใดแบบหนึ่งอย่างแท้จริง แต่จะก้ำกึ่งกันระหว่างทั้งสองแบบนี้ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากโมเมนตัมคงตัวทั้งสองกรณี โดยพลังงานจลน์คงตัวเฉพาะแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ จึงจะพิจารณาโดยอาศัยกฎการคงตัวของโมเมนตัม เพื่อหาค่าความเร็วสุดท้ายของวัตถุ ดังต่อไปนี้

การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

ถ้าให้อนุภาคมวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเริ่มต้น v_{1i} และ v_{2i} ตามแนวเส้นตรง ดังแสดงไว้ในรูปที่ 5.17 เมื่ออนุภาคทั้งสองชนกันแล้วติดไปด้วยกันจะมีความเร็วหลังชน v_f เดียวกัน ในกรณีนี้เฉพาะโมเมนตัมเชิงเส้นเท่านั้นที่คงตัว ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่าโมเมนตัมทั้งหมดก่อนชนเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดของระบบหลังชน นั่นคือ

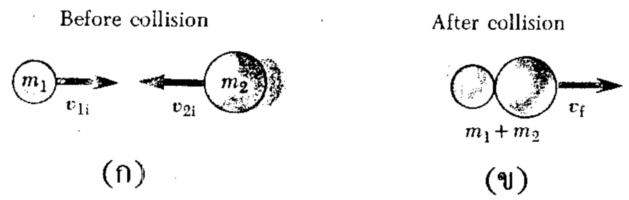
$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad \text{......5.42}$$

และจะได้ว่า $$v_{1f} - v_{2f} = 0 = -(v_{1i} - v_{2i}) \qquad \text{......5.43}$$

แต่พลังงานจลน์ก่อนชนไม่เท่ากับหลังชน นั่นคือ

$$K_f - K_i = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 - \tfrac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 \neq 0 \qquad \text{......5.44}$$



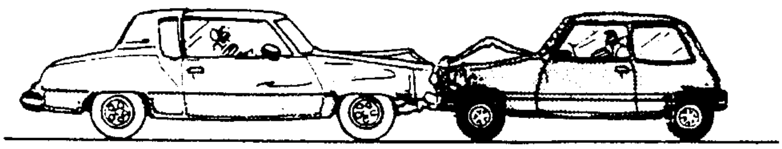
รูปที่ 5.17 การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ระหว่างสองอนุภาคพุ่งชนกันในแนวตรง (ก) ก่อนชน และ (ข) หลังชน

ตัวอย่าง 5.14 (ก) จงหาความเร็วหลังชนของรถยนต์ 2 คันมวล 1800 กิโลกรัม และ 900 กิโลกรัม โดยก่อนชนคันแรกจอดนิ่งอยู่กับที่แต่คันหลังแล่นมาด้วยความเร็ว 20 เมตร/วินาที และภายหลังชนกันแรงเคลื่อนที่ติดไปด้วยกัน (ข) จงหาพลังงานจลน์ที่สูญเสียไปจากการชน

วิธีทำ (ก) พิจารณาการชนนี้เป็นแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์และแทนค่าลงในสมการ 5.43 จะได้

$$v_f = \frac{(900 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) + (1800 \text{ kg})(0 \text{ m/s})}{1800 + 900 \text{ kg}}$$

$$= 6.67 \quad \text{m.s}^{-1}$$



รูปที่ 5.18 ตัวอย่าง 5.14

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.44 จะได้

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(900 \text{ kg} + 1800 \text{ kg})(6.67 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2}(900 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2 + 0$$

$$= 0.6 \times 10^5 - 1.8 \times 10^5 = -1.2 \times 10^5 \text{ J}$$

เครื่องหมาย - แสดงว่า $K_f < K_i$ นั่นคือ มีการสูญเสียพลังงานจลน์ในการชนนี้

ตัวอย่าง 5.15 ถ้าอนุภาคชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ดังรูปที่ 5.17 จงหา (ก) ความเร็วของอนุภาคทั้งสองหลังชน และ (ข) พลังงานจลน์ที่สูญเสียไปจากการชน กำหนดให้ $m_1 = 0.5$ kg, $m_2 = 0.25$ kg, $v_{1i} = 4$ m/s และ $v_{2i} = -3$ m/s

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 5.43 จะได้

$$v_f = \frac{(0.5 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + (0.25 \text{ kg})(-3 \text{ m/s})}{(0.5 + 0.25) \text{ kg}}$$

$$= 1.7 \text{ m/s}$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.44 จะได้

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(0.5 \text{ kg} + 0.25 \text{ kg})(1.7 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2}(0.5 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2}(0.25 \text{ kg})(-3 \text{ m/s})^2$$

$$= -4.1 \text{ J}$$

ในกรณีนี้มีการสูญเสียพลังงานจลน์เช่นเดียวกัน เนื่องจาก $K_f < K_i$ จึงได้ผลลัพธ์เป็นลบ

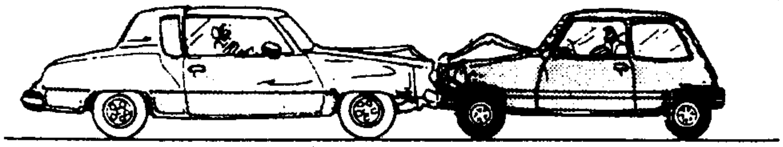
ตัวอย่าง 5.16 จงหาว่ารถยนต์มวล 1,800 กิโลกรัมแล่นด้วยความเร็วเท่าใดขณะพุ่งชนกับรถยนต์มวล 1,500 กิโลกรัม ซึ่งแล่นสวนทางมาด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตร/ชั่วโมงในแนวเดียวกันจนทำให้รถยนต์ทั้งสองหยุดอยู่ในที่เกิดเหตุด้วยกันทั้งคู่

วิธีทำ แทนค่าลงในสมการ 5.42 โดยกำหนดให้รถยนต์ที่สวนทางมามีเครื่องหมายเป็นลบ จะได้

$$v_{1i} = \frac{1}{M_1}[m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i}]$$

$$= \frac{1}{(1800 \text{ kg})}[0 + 0 - (1500 \text{ kg})(-\frac{80 \times 1000}{60 \times 60} \text{ m/s})]$$

$$= +18.5 \text{ m/s}$$



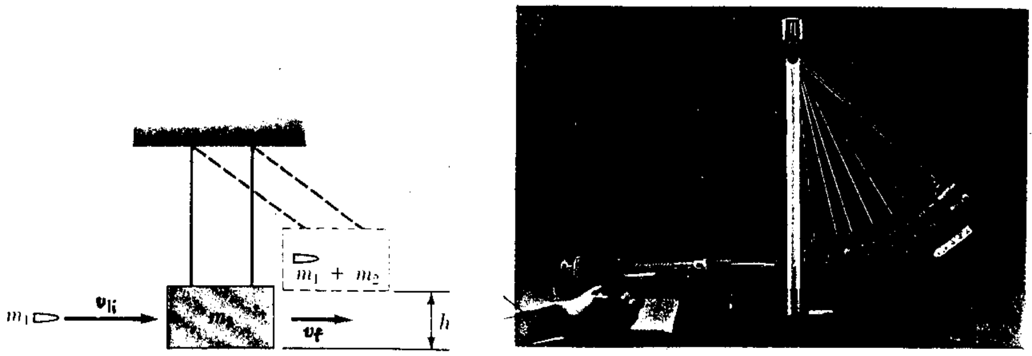
รูปที่ 5.19 ตัวอย่าง 5.16

เครื่องหมาย + แสดงว่ารถยนต์คันนี้แล่นในทิศทางตรงข้ามกับอีกคันหนึ่งที่แล่นสวนทางมา ซึ่งกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็น -

ตัวอย่าง 5.17 บอลลิสติกเพนดูลัม (รูปที่ 5.20) คือระบบสำหรับวัดความเร็วของโปรเจกไทล์ที่พุ่งไปอย่างรวดเร็ว ดังเช่นลูกปืน ด้วยการยิงลูกปืนให้เข้าไปในท่อนไม้ขนาดใหญ่แขวนด้วยลวดเบา ทำให้ลูกปืนฝังอยู่ในท่อนไม้และแกว่งไปด้วยกันทั้งระบบขึ้นไปสูงเป็นระยะ h จงหา (ก) ความเร็ว ทันทีทันใดหลังชน (ข) ความเร็วของลูกปืนทันทีทันใดก่อนชน และ (ค) ร้อยละของการสูญเสียพลังงานกำหนด มวลลูกปืน m_1 = 60 กรัม มวลของท่อนไม้ m_2 = 240 กรัม และ h = 4.9 เซนติเมตร

วิธีทำ (ก) พิจารณารูปที่ 5.20 และกฎการคงตัวของพลังงาน รวมทั้งกฎการคงตัวของโมเมนตัมแทนค่าลงในสมการ 4.29 และ 4.33 จะได้

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$



(ก) (ข)

รูปที่ 5.20 ระบบบอลลิสติกเพนดูลัม

ดังนั้น
$$v_f = \sqrt{2gh}$$
$$= \sqrt{2\ (9.8\ \text{m/s}^2)\ (0.049\ \text{m})} = 0.98\ \text{m/s}$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.42 จะได้

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f$$
$$= \frac{(0.06 + 0.24\ \text{kg})}{0.06\ \text{kg}} (0.98\ \text{m/s}) = 4.9\ \text{m/s}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 5.44 จะได้

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)\, v_f^2 - \frac{1}{2} m_1\, v_{1i}^2$$

$$\frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 - m_2)\, v_f^2 - \frac{1}{2} m_1\, v_{1i}^2}{\frac{1}{2} m_1\, v_{1i}^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(0.06 + 0.24\ \text{kg})\ (0.98\ \text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(0.06\ \text{kg})\ (4.9\ \text{m/s})^2}{\frac{1}{2}(0.06\ \text{kg})\ (4.9\ \text{m/s})^2}$$

$$= \frac{0.144 - 0.72}{0.72} = -0.8$$

คิดเป็นร้อยละ $\frac{K_f - K_i}{K_i} \times 100 = (-0.8)\ (100) = -80$

เครื่องหมาย - แสดงว่าพลังงานจลน์ลดลง

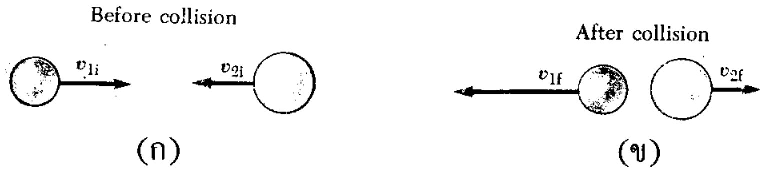
การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

เมื่อสองอนุภาคพุ่งชนกันโดยตรงแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ดังรูปที่ 5.21 ทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์ของระบบจะคงตัว นั่นคือ โมเมนตัมทั้งหมดก่อนชนเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดหลังชน และพลังงานจลน์ทั้งหมดก่อนชนเท่ากับพลังงานจลน์ทั้งหมดหลังชน ดังนี้

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad ......5.45$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad ......5.46$$

โดยที่ v เป็น + ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางขวา
และ v เป็น - ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางซ้าย



รูปที่ 5.21 การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ระหว่างสองอนุภาคพุ่งชนกันโดยตรง (ก) ก่อนชน และ (ข) หลังชน

โดยการจัดพจน์ของ m_1 และ m_2 ให้แยกกันอยู่คนละข้างของสมการ จะเขียนสมการ 5.45 และ 5.46 เสียใหม่

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \qquad ......5.47$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \qquad ......5.48$$

และแยกแฟกเตอร์ทั้งสองข้างของสมการ 5.48

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) (v_{2f} + v_{2i}) \qquad ......5.49$$

เมื่อนำสมการ 5.47 ไปหารสมการ 5.49 จะได้

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

หรือ

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad ......5.50$$

ตามความสัมพันธ์ในสมการ 5.50 แสดงว่าความเร็วสัมพัทธ์ของทั้งสองอนุภาคก่อนชน $(v_{1i} - v_{2i})$ เท่ากับความเร็วสัมพัทธ์ของทั้งสองอนุภาคหลังชน $(v_{1f} - v_{2f})$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

ในการหาความสัมพันธ์สำหรับความเร็วสุดท้าย จะแทนค่า $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}$ จากสมการ 5.50 ลงในสมการ 5.47 จะได้

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{1i} + v_{1f} - 2v_{2i})$$

หรือ $$(m_1 - m_2)\, v_{1i} - (m_1 + m_2)\, v_{1f} = -2m_2\, v_{2i}$$

นั่นคือ $$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad \text{......5.51}$$

และแทนค่า $v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i}$ จากสมการ 5.50 ลงในสมการ 5.47

จะได้ $$m_1 (2v_{1i} - v_{2i} - v_{2f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

หรือ $$2m_1\, v_{1i} - (m_1 + m_2)\, v_{2i} = (m_1 + m_2)\, v_{2f}$$

นั่นคือ $$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad \text{......5.52}$$

จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์สำหรับความเร็วสุดท้ายของแต่ละอนุภาค ตามสมการ 5.51 และ 5.52 จะตรงกันโดยเพียงแต่สลับเลขกำกับอนุภาค 1 และ 2 เท่านั้น อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาในกรณีเฉพาะต่าง ๆ กัน จะได้ความสัมพันธ์แตกต่างกันดังนี้

กรณีที่ 1 มวลของอนุภาคทั้งสองเท่ากัน $(m_1 = m_2)$ จะได้

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = v_{1i} \qquad \text{......5.53}$$

แสดงว่าแต่ละอนุภาคจะแลกเปลี่ยนหรือถ่ายโอนความเร็วให้กับอีกอนุภาคหนึ่งในการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ดังเช่นการชนกันระหว่างลูกบิลเลียด ซึ่งมีมวลเท่ากัน

กรณีที่ 2 ถ้าหากมวลของอนุภาคทั้งสองไม่เท่ากัน $(m_1 \neq m_2)$ และ m_2 อยู่นิ่งกับที่ก่อนชน $(v_{2i} = 0)$ จะได้

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad \text{......5.54}$$

กรณีที่ 3 สำหรับกรณีที่ m_1 มากกว่า m_2 เป็นอย่างมาก $(m_1 >> m_2)$ และ $v_{2i} = 0$ ดังนั้น สมการ 5.54 จะเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} \qquad ......5.55$$

แสดงว่า ถ้าอนุภาคขนาดใหญ่หรืออนุภาคมวลมากพุ่งชนกับอนุภาคมวลน้อยกว่ากันมากซึ่งอยู่นิ่งกับที่ จะไม่ทำให้ความเร็วของอนุภาคมวลมากเปลี่ยนแปลงแต่ประการใด ภายหลังการชนโดยอนุภาคมวลมากยังคงเคลื่อนที่ต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิม ส่วนอนุภาคมวลน้อยจะกระดอนไปด้วยความเร็วประมาณสองเท่าของความเร็วก่อนชนของอนุภาคมวลมาก ตัวอย่างการชนในกรณีนี้อาจจะพบได้เมื่ออะตอมของธาตุหนัก ดังเช่น ยูเรเนียม พุ่งชนแบบปะทะกันโดยตรงกับอะตอมของธาตุเบา ดังเช่น ไฮโดรเจน

กรณีที่ 4 ในทางตรงกันข้ามถ้าหาก m_2 มากกว่า m_1 เป็นอย่างมาก ($m_2 >> m_1$) และ m_2 อยู่นิ่งกับที่ก่อนชน หรือ $v_{2i} = 0$ เมื่อพิจารณาจากสมการ 5.54 จะได้

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} << v_{1i} \qquad ......5.56$$

แสดงว่า การชนกันระหว่างอนุภาคที่มีมวลต่างกันมาก โดยมวลน้อยกว่าพุ่งปะทะโดยตรงกับมวลมากซึ่งอยู่นิ่งจะทำให้มวลน้อยกว่ากระดอนกลับด้วยอัตราเร็วเดิม ในขณะที่มวลมากกว่ายังคงอยู่นิ่งกับที่อย่างไม่เปลี่ยนแปลง ตัวอย่างการชนกันในกรณีนี้อาจพบได้จากการชนกันระหว่างลูกแก้วหรือลูกหินกับลูกโบว์ลิ่ง ซึ่งอยู่นิ่งกับที่

ตัวอย่าง 5.18 จงหาความเร็วของลูกบอลภายหลังการชน โดยลูกบอลมวล 40 กรัมพุ่งไปทางตะวันออกด้วยความเร็ว 5 เมตร/วินาที ปะทะโดยตรงแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์เข้ากับลูกบอลมวล 60 กรัม ซึ่งพุ่งไปทางตะวันตกด้วยความเร็ว 3 เมตร/วินาที

วิธีทำ แทนค่าลงในสมการ 5.51 และ 5.52 จะได้

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad ......5.57$$

$$= \frac{40\text{ g} - 60\text{ g}}{40\text{ g} + 60\text{ g}} (5\text{ m/s}) + \frac{2 \text{ x } 60\text{ g}}{40\text{ g} + 60\text{ g}} (-3\text{ m/s})$$

$$= -4.6\text{ m/s}$$

และ

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad ......5.58$$

$$= \frac{60\text{ g} - 40\text{ g}}{40\text{ g} + 60\text{ g}} (-3\text{ m/s}) + \frac{2 + 40\text{ g}}{40\text{ g} + 60\text{ g}} (5\text{ m/s})$$

$$= +3.4\text{ m/s}$$

ฉะนั้น จะเห็นว่ามวล 40 กรัมจะกระดอนกลับไปทางตะวันตก ในขณะที่มวล 60 กรัมจะกระดอนกลับไปทางตะวันออกภายหลังการชนกัน โดยที่ความเร็วสัมพัทธ์ของทั้งสองอนุภาคก่อนชนเท่ากับหลังชนแต่ทิศตรงข้าม ดังที่ได้พิจารณาแล้วตามสมการ 5.50 หรือกล่าวได้ว่า "ความเร็วของการเคลื่อนที่เข้าหากัน ($v_{1i} - v_{2i}$) เท่ากับความเร็วของการเคลื่อนที่แยกจากกัน ($v_{1f} - v_{2f}$) แต่ทิศทางตรงข้าม" ในการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์นี้

ตัวอย่าง 5.19 วัตถุมวล m_1 = 1.6 กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 4 เมตร/วินาที บนพื้นระนาบเรียบพุ่งชนสปริงซึ่งผูกติดกับวัตถุมวล m_2 = 2.1 กิโลกรัม ซึ่งเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยอัตราเร็ว 2.5 เมตร/วินาที ดังรูปที่ 5.22 (ก) โดยสปริงมีค่าคงตัวของสปริง 600 นิวตัน/เมตร จงหา (ก) ความเร็วของ m_2 ในขณะที่ m_1 เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 3 เมตร/วินาที และ (ข) ระยะที่สปริงถูกอัดในเวลาเดียวกันนั้น

วิธีทำ (ก) พิจารณาการชนเป็นแบบยืดหยุ่น เนื่องจากไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ จึงมีโมเมนตัมและพลังงานทั้งหมดต่างคงตัว และแทนค่าลงในสมการ 5.45 (และ 5.46 ใน (ข)) จะได้

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad \text{......5.45}$$

$$(1.6 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + (2.1 \text{ kg})(-2.5 \text{ m/s}) = (1.6 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) + (2.1 \text{ kg})\, v_{2f}$$

ดังนั้น $$V_{2f} = -1.74 \text{ m/s}$$

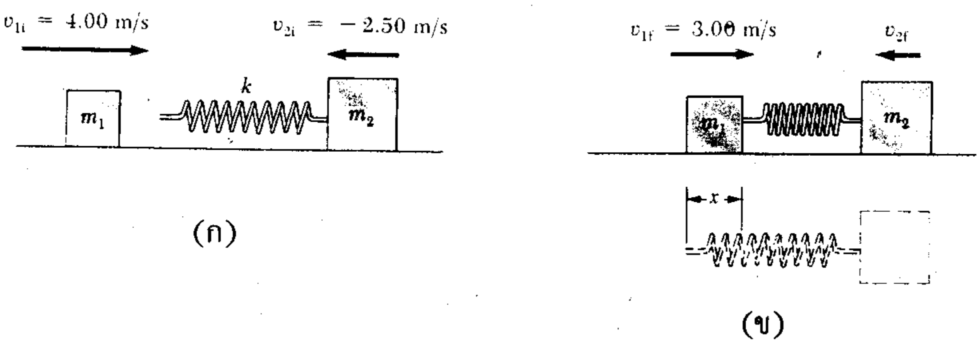
โดยที่ เครื่องหมาย - แสดงว่ามวล m_2 ยังคงเคลื่อนที่ไปทางซ้ายในขณะนั้น

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.46 โดยพิจารณาพลังงานศักย์ในสปริงด้วย จะได้

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2}[1.6 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + (2.1 \text{ kg})(-2.5 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}[(1.6 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 + (2.1 \text{ kg})(-1.74 \text{ m/s})^2] + \frac{1}{2}(600 \text{ N/m})\, x^2$$

ดังนั้น $$x = 0.173 \text{ m}$$



รูปที่ 5.22 ตัวอย่าง 5.19

ตัวอย่าง 5.20 จงหาความเร็วสุดท้ายของลูกบอลมวล 100 กรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 5 เมตร/วินาที ในทิศ x เป็น + พุ่งชนโดยตรงกับลูกบอลมวล 300 กรัม ซึ่งอยู่นิ่งกับที่ ดังรูปที่ 5.23

วิธีทำ พิจารณาการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ และแทนค่าลงในสมการ 5.51 และ 5.52 โดยที่ $v_{2i} = 0$

จะได้

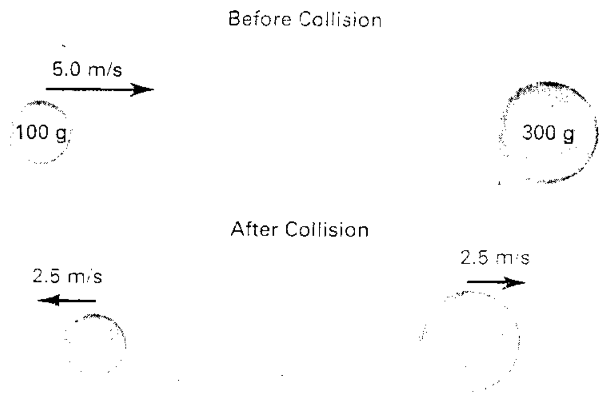
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \qquad \text{......5.51}$$

$$= -\frac{200}{400} (5 \text{ m/s}) + 0 = -2.5 \text{ m/s}$$

และ

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad \text{......5.52}$$

$$= 0 + 2\left(\frac{100}{400}\right)(5 \text{ m/s}) = 2.5 \text{ m/s}$$



รูปที่ 5.23 ตัวอย่าง 5.20

ในกรณีนี้จะเห็นว่าลูกบอลมวลมากซึ่งอยู่นิ่งกับที่ก่อนชน จะมีความเร็ว 2.5 เมตร/วินาทีไปทาง x เป็น + ภายหลังการชน ในขณะที่ลูกบอลมวลน้อยจะกระดอนกลับด้วยความเร็ว 2.5 เมตร/วินาที ดังนั้น ความเร็วสัมพัทธ์ของการเคลื่อนที่เข้าหากัน 5 เมตร/วินาที จึงเท่ากับความเร็วสัมพัทธ์ของการเคลื่อนที่แยกจากกัน -5 เมตร/วินาที โดยมีทิศทางตรงกันข้าม

การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

เนื่องจากการชนกันส่วนใหญ่จะไม่เป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์หรือแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์แบบใดแบบหนึ่งอย่างแท้จริง แต่จะก้ำกึ่งกันระหว่างทั้งสองแบบนี้ดังกล่าวแล้วข้างต้น ดังนั้นถ้าหากพิจารณาเปรียบเทียบความเร็วสัมพัทธ์ของการเคลื่อนที่เข้าหากันกับความเร็วสัมพัทธ์ของการเคลื่อนที่แยกจากกัน ในกรณีทั้งสองตามที่ได้ศึกษาแล้ว ดังสมการ 5.43 และ 5.50 จะเห็นว่ามีค่าเป็น 0 และ 1 ตามลำดับ โดยการชนกันแบบอื่นซึ่งไม่ใช่แบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์หรือแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์แบบใดแบบหนึ่งอย่างแท้จริง จะมีค่าดังกล่าวอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งไม่อาจเรียกว่าเป็นแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์หรือแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ได้แต่ประการใด จึงจะเรียกว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่นเท่านั้น และจะอาศัยค่านี้ซึ่งจะเรียกว่า "สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว (coefficient of restitution)" ตามความสัมพันธ์นี้ เพื่อพิจารณาว่าเป็นการชนแบบใดดังนี้

สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว, $$e = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}} \qquad ......5.57$$

โดยที่ $e = 0$ หมายถึง การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

$0 < e < 1$ หมายถึง การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

$e = 1$ หมายถึง การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

ตัวอย่าง 5.21 จงพิจารณาการชนกันระหว่างลูกบอลกับพื้นในตัวอย่าง 5.11 ว่าเป็นการชนกันแบบใด

วิธีทำ แทนค่าลงในสมการ 5.57 โดยที่ $\mathbf{v}_{1i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_1}$ และ $\mathbf{v}_{1f} = \frac{\mathbf{p}_f}{m_1}$

จะได้ $$\mathbf{v}_{1i} = \frac{0.63 \text{ N-s}}{0.1 \text{ kg}}(-\hat{j}) \quad \text{และ} \quad \mathbf{v}_{1f} = \frac{0.54 \text{ N-s}}{0.1 \text{ kg}}(\hat{j})$$

$$= 6.3\ (-\hat{j})\ \text{m/s} \qquad = 5.4\ (\hat{j})\ \text{m/s}$$

ดังนั้น $$e = \frac{-5.4 \text{ m/s} - 0}{-6.3 \text{ m/s} - 0}$$

$$= 0.86$$

นั่นคือ $0 < e < 1$ เป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น

5.8 การชนกันในสองมิติ

ในกรณีทั่ว ๆ ไปการชนกันระหว่างสองอนุภาคไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันดังที่ได้ศึกษาแล้วในตอนก่อน ซึ่งเป็นการปะทะกันโดยตรง แต่จะชนกันเพียงผิวเผิน ทำให้อนุภาคทั้งสองทำมุมซึ่งกันและกันภายหลังการชน จึงอาจแตกโมเมนตัมของแต่ละอนุภาคออกไปในแกนซึ่งตั้งฉากกันตามระบบพิกัดฉากเป็น p_x และ p_y โดยเฉพาะในกรณีการชนแบบไม่ยืดหยุ่น ซึ่งโมเมนตัมของระบบคงตัว องค์ประกอบของโมเมนตัมในแต่ละแกนต่างมีค่าคงตัว ดังนั้น ถ้า m_1 มีความเร็วเริ่มต้น v_{1i} ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น v_{1ix} และ v_{1iy} ส่วน m_2 มีความเร็วเริ่มต้น v_{2i} ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น v_{2ix} และ v_{2iy} จะหาความสัมพันธ์สำหรับความเร็วสุดท้ายของอนุภาคทั้งสองภายหลังการชน โดยอนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่ไปด้วยกัน ดังนี้

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = (m_1 + m_2) v_{fx} \qquad \text{......5.58}$$

และ

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = (m_1 + m_2) v_{fy}$$

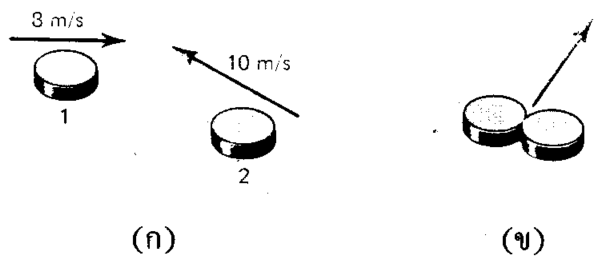
ตัวอย่าง 5.22 ในการโยนลูกสะบ้าซึ่งบังเอิญเปื้อนกาวอยู่ 2 ลูก โดยให้ลูกที่หนึ่งมีความเร็ว 8 เมตร/วินาที ไปในทิศ x เป็นบวก และลูกที่สอง มีความเร็ว 10 เมตร/วินาที ทำมุม 120° กับแกน x ปรากฏว่าทั้งสองลูกชนกัน แล้วเคลื่อนที่ติดไปด้วยกัน จงหา (ก) ความเร็วของทั้งสองลูกหลังการชน และ (ข) อัตราส่วนร้อยละของการสูญเสียพลังงานจลน์ในการชน

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 5.58 จะได้

$$m\,(8\ m/s) + m\,(10\ m/s)\cos 120^\circ = 2\,m\,v_{fx}$$

และ

$$m\,(0\ m/s) + m\,(10\ m/s)\sin 120^\circ = 2\,m\,v_{fy}$$



รูปที่ 5.24 ตัวอย่าง 5.22

ดังนั้น

$$v_{fx} = 8\ m/s - 10\ m/s\,(0.5) = 3\ m/s$$

$$v_{fy} = (10\ m/s)\,(0.866) = 4.3\ m/s$$

ฉะนั้น $\quad \mathbf{v}_f = 3\hat{i} + 4.3\hat{j}$ m/s

โดยมีขนาด $\quad v_f = \sqrt{3^2 + (4.3)^2} = 5.3$ m/s

และมีมุม $\quad = \tan^{-1}(4.3/3) = 55^\circ$ กับแกน x

(ข) พลังงานจลน์ก่อนชน $= \frac{1}{2}m\,(64\ m^2/s^2 + 100\ m^2/s^2) = 82\,m\ \ m^2/s^2$

และ พลังงานจลน์หลังชน $= \frac{1}{2}(2m)\,(5.3^2\ m^2/s^2) = 28\,m\ \ m^2/s^2$

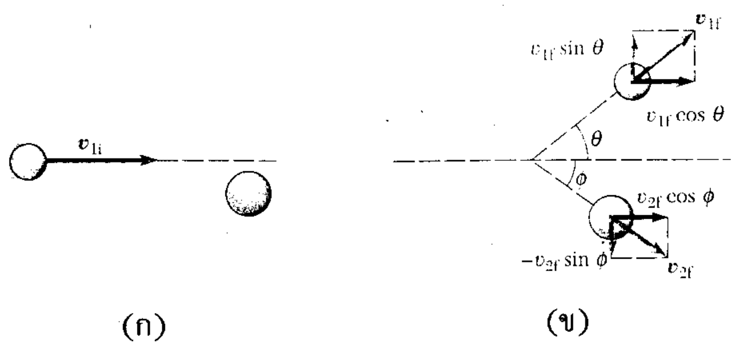
ดังนั้น $\dfrac{\text{พลังงานจลน์สูญเสีย}}{\text{พลังงานจลน์ก่อนชน}} = \dfrac{82 - 28}{82} = 0.66$

คิดเป็นร้อยละ $= 0.66 \times 100 = 66$

นอกจากนี้ การพิจารณาการชนกันในสองมิติอาจพิจารณาจากการหาองค์ประกอบตามแนวระนาบและแนวดิ่ง ดังรูปที่ 5.25 โดยอาศัยกฎการคงตัวของโมเมนตัมสำหรับการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ในขณะที่มวล m_1 พุ่งชนมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่ง จะได้

$$P_{xi} = P_{xf} \quad \text{หรือ} \quad m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi$$

และ $$P_{yi} = P_{yf} \quad \text{หรือ} \quad 0 + 0 = m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi \qquad ......5.59$$



รูปที่ 5.25 การชนกันระหว่างสองอนุภาคโดยไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (ก) ก่อนชน และ (ข) หลังชน

โดยที่เป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ จึงเป็นไปตามกฎการคงตัวของพลังงานจลน์

นั่นคือ $$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad ......5.60$$

ดังนั้น ในการหาค่าความเร็วหลังชนจะหาได้จากการแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ 5.59 และ 5.60 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.23 ในการชนกันระหว่างอนุภาคโปรตอนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ โดยอนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 3.5×10^5 เมตร/วินาที และอีกอนุภาคหนึ่งอยู่นิ่งกับที่ในตำแหน่งดังรูปที่ 5.25 ทำให้อนุภาคที่อยู่นิ่งเคลื่อนที่ทำมุม ϕ กับทิศการเคลื่อนที่เดิมของอนุภาคแรก ในขณะที่อนุภาคซึ่งเคลื่อนที่พุ่งเข้าชนเปลี่ยนทิศทางไป 37° กับทิศเดิม จงหาอัตราเร็วหลังชนของแต่ละอนุภาค และมุม ϕ

วิธีทำ แทนค่าลงในสมการ 5.59 และ 5.60 โดยที่ $m_1 = m_2$ และ $\theta = 37^\circ$

จะได้

$$v_{1f} \cos 37^\circ + v_{2f} \cos \phi = 3.5 \times 10^5$$

$$v_{1f} \sin 37^\circ - v_{2f} \sin \phi = 0$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.5 \times 10^5)^2$$

โดยการแก้สมการข้างต้นทั้งสามสมการ สำหรับค่าที่ไม่ทราบ 3 ค่า จะได้

$$v_{1f} = 2.8 \times 10^5 \text{ m/s} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = 2.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

โดยที่ $\phi = 53^\circ$

จะเห็นว่า $\theta + \phi = 90^\circ$ ทั้งนี้ สืบเนื่องมาจากการชนกันระหว่างอนุภาคมวลเท่ากันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์อย่างผิวเผิน โดยการชนกันไม่อยู่ในแนวเส้นตรงและอนุภาคหนึ่งอยู่นิ่งกับที่ อนุภาคทั้งสองจะเคลื่อนที่ทำมุมฉากซึ่งกันและกันภายหลังการชนเสมอ ดังจะเห็นจริงได้จากตัวอย่างต่อไป

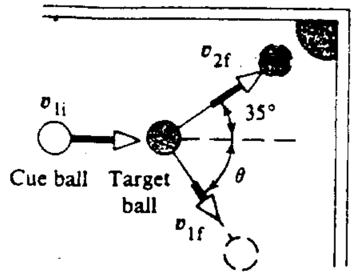
ตัวอย่าง 5.24 โดยปกติในการเล่นบิลเลียดจะต้องแทงลูกขาวพุ่งชนลูกซึ่งต้องการจะทำแต้มคะแนนลงหลุมมุม ดังรูปที่ 5.26 ถ้าลูกที่อยู่นิ่งทำมุม 35° กับหลุมมุม จงหามุมที่ลูกขาวเปลี่ยนทิศไปจากเดิม โดยไม่คำนึงถึงความเสียดทานและการหมุนของลูกบิลเลียดมาเกี่ยวข้อง

วิธีทำ พิจารณาการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ดังนั้น ทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์ต่างคงตัว จะได้

(1) $\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$ โดยที่โมเมนตัมคงตัว

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการนี้ นั่นคือ

$$\mathbf{v}_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = \mathbf{v}_{1f}^2 + \mathbf{v}_{2i}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$



รูปที่ 5.26 ตัวอย่าง 5.24

แต่เนื่องจาก $\quad v_{1f} \cdot v_{2f} = v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$ ดังนั้น

(2) $\quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2i}^2 + 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$

(3) $\quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ โดยที่พลังงานจลน์คงตัว

สมการ (2) - (3) จะได้

$$2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ) = 0$$

หรือ $\quad \cos(\theta + 35^\circ) = 0$

นั่นคือ $\quad \theta + 35^\circ = 90^\circ$ จะได้ $\theta = 55^\circ$

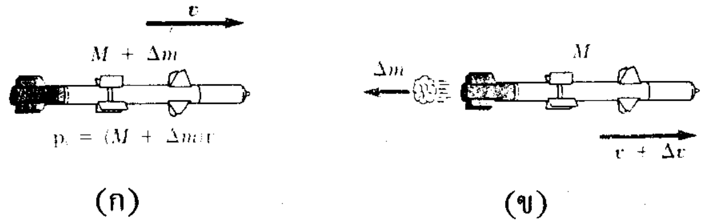
ตามตัวอย่างข้างต้นนี้ จะเห็นได้เช่นเดียวกันว่า การชนกันระหว่างอนุภาคมวลเท่ากันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ โดยที่การชนไม่อยู่ในแนวเส้นตรงและอนุภาคหนึ่งอยู่นิ่งกับที่ จะพบว่าอนุภาคทั้งสองทำมุมฉากซึ่งกันและกันภายหลังการชน ดังนั้น ในการเล่นบิลเลียดผู้เล่นจะสามารถเล็งเห็นทิศทางของการเคลื่อนที่ของลูกบิลเลียด จากการคาดคะเนตามข้อสรุปดังกล่าวได้อย่างใกล้เคียงกับความเป็นจริง

กิจกรรม 5.3

ให้นักศึกษาพิจารณาว่าสัมประสิทธิ์ของการคืนตัวในการชนกันตามตัวอย่างข้างต้นทั้งหมด และเปรียบเทียบกันว่าเป็นการชนกันแบบใด สอดคล้องกับเกณฑ์ในสมการ 5.57 หรือไม่

5.9 การขับเคลื่อนจรวด

โดยอาศัยกฎการคงตัวของโมเมนตัมสำหรับระบบหลายอนุภาค จะสามารถอธิบายการขับเคลื่อนจรวดไปในอวกาศ เนื่องจากมวลบางส่วนของจรวดถูกขับออกไปในขณะที่พ่นแก๊สออกจากห้องสันดาปภายในตัวจรวด แก๊สที่ถูกพ่นออกไปจะมีโมเมนตัมส่วนหนึ่ง ซึ่งจะทำให้โมเมนตัมของจรวดเปลี่ยนไปในทางตรงกันข้าม ด้วยเหตุนี้ จรวดจึงมีความเร่งซึ่งเป็นผลมาจาก "แรงผลักดัน" หรือ "แรงขับเคลื่อน" จากแก๊สที่พ่นออกจากส่วนล่างของจรวด แม้ว่ากระบวนการขับเคลื่อนด้วยการพ่นแก๊สออกไปนี้จะทำให้มวลของจรวดลดลงไปตามลำดับ แต่จุดศูนย์กลางมวลของทั้งระบบจะเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอโดยไม่ขึ้นอยู่กับกระบวนการดังกล่าวนอกจากนี้การขับเคลื่อนจรวดยังคล้ายกับการยิงปืนกลจากแท่นรองรับอยู่บนล้อเลื่อน เมื่อลูกปืนถูกยิงออกไปจะมีโมเมนตัม mv และในขณะเดียวกันปืนและฐานยิงจะมีโมเมนตัมในทิศทางตรงกันข้าม ด้วยแรงปฏิกิริยาจากปืนจึงทำให้ทั้งปืนและฐานยิงมีอัตราเร่ง



รูปที่ 5.27 การขับเคลื่อนจรวด

(ก) มวลเริ่มต้น $M + \Delta m$ เมื่อเวลา t มีอัตราเร็ว v

(ข) เมื่อเวลา $t + \Delta t$ มวลเหลือเพียง M จากการพ่นแก๊สเชื้อเพลิงออกไป Δm ทำให้อัตราเร็วของจรวดเพิ่มขึ้น Δv

ถ้ายิงปืนกลชุดหนึ่งออกไป n ลูกในแต่ละวินาที แรงโดยเฉลี่ยที่กระทำต่อปืนจะเท่ากับ $\mathbf{F}_{\text{เฉลี่ย}}$ = nmv ทั้งการขับเคลื่อนจรวดและการยิงปืนกลนับว่าเป็นกรณี "ผันกลับ" สำหรับการชนแบบไม่ยืดหยุ่น เนื่องจากโมเมนตัมคงตัวแต่พลังงานจลน์ของระบบกลับ "เพิ่มขึ้น" จากการลดลงของพลังงานภายใน

ถ้าพิจารณาการขับเคลื่อนจรวดในขณะใดๆ t ด้วยความเร็ว v จะมีโมเมนตัมรวมทั้งหมดของจรวดมวล M กับเชื้อเพลิงมวล Δm (ดังรูปที่ 5.27 (ก)) เท่ากับ $(M + \Delta m)$ v เมื่อเวลาผ่านไปเล็กน้อย Δt จรวดจะขับเชื้อเพลิงออกไป Δm ทำให้จรวดมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้น $v + \Delta v$ ดังรูปที่ 5.27 (ข) ถ้าหากแก๊สเชื้อเพลิงที่พ่นออกมามีความเร็ว v_e เมื่อเทียบสัมพัทธ์กับจรวด ดังนั้น ความเร็วของเชื้อเพลิงเทียบกับกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งจะเป็น $v - v_e$ โดยกฎการคงตัวของ

โมเมนตัมจะได้ว่าโมเมนตัมทั้งหมดของระบบก่อนชนเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดของระบบหลังชน ดังนี้

$$(M + \Delta m)\, v = M\,(v + \Delta v) + \Delta m\,(v - v_e)$$

หรือ

$$M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

สมการข้างต้นนี้อาจได้จากการพิจารณาระบบในกรอบอ้างอิงของจุดศูนย์กลางมวล นั่นคือ กรอบอ้างอิงซึ่งมีความเร็วเท่ากับความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล โดยในกรอบอ้างอิงนี้ปรากฏว่าโมเมนตัมทั้งหมดเป็นศูนย์ ดังนั้น ถ้าหากจรวดมีโมเมนตัม $M\Delta v$ ในขณะที่พ่นแก๊สเชื้อเพลิงออกไป จะทำให้แก๊สที่ถูกขับออกไปมีโมเมนตัม $v_e\,\Delta m$ ในทิศทางตรงกันข้าม จึงได้ว่า $M\Delta v - v_e\,\Delta m = 0$ เช่นเดียวกับสมการข้างต้น ซึ่งถ้าหากพิจารณาการเปลี่ยนแปลงตามกระบวนการนี้ในเวลาสั้นมาก ๆ $\Delta t = 0$ จะได้ว่า $\Delta v \rightarrow dv$ และ $\Delta m \rightarrow dm$ นอกจากนั้นมวลของเชื้อเพลิงที่ถูกขับออกไปจะเท่ากับมวลของจรวดที่ลดลง นั่นคือ $dm = -dM$ จึงจะเขียนสมการข้างต้นเสียใหม่ได้ว่า

$$M\,dv = -v_e\,dM \qquad \text{......5.61}$$

โดยวิธีอินทิเกรตสมการข้างต้นนี้และให้มวลทั้งหมดของจรวดเมื่อเริ่มต้นคือ M_i และมวลทั้งหมดของจรวดรวมกับเชื้อเพลิงที่เหลือในเวลาต่อมาคือ M_f จะได้

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} dM/M$$

$$v_f - v_i = v_e \ln (M_i/M_f) \qquad \text{......5.62}$$

สมการ 5.62 แสดงว่าความเร็วของจรวดจะเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วของเชื้อเพลิงที่ขับดันออกมา และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับลอการิทึมของอัตราส่วนระหว่างมวลเริ่มต้นกับมวลสุดท้ายของจรวด ดังนั้น ถ้าต้องการให้จรวดพุ่งไปได้อย่างรวดเร็วจะต้องเพิ่มความเร็วของเชื้อเพลิงที่ขับดันออกมา และจะต้องบรรจุแก๊สเชื้อเพลิงไปกับจรวดให้มากที่สุด สมการนี้จึงนับได้ว่าเป็นสมการพื้นฐานในกรณีการขับเคลื่อนจรวด

สำหรับแรงขับเคลื่อนจรวดซึ่งเกิดจากแก๊สเชื้อเพลิงที่พ่นออกมา จึงจะหาความสัมพันธ์ของแรงขับเคลื่อนนี้จากสมการ 5.61 ดังนี้

$$\text{แรงขับเคลื่อน} = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| \qquad \text{......5.63}$$

โดยความสัมพันธ์นี้จะเห็นได้ว่า แรงขับเคลื่อนจะเพิ่มขึ้นเมื่อความเร็วของเชื้อเพลิงที่พ่นออกมาเพิ่มขึ้น และอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลหรืออัตราการเผาไหม้เพิ่มขึ้นด้วยดังกล่าวแล้ว

ตัวอย่าง 5.24 จรวดหนึ่งเคลื่อนที่อยู่ในอวกาศด้วยความเร็ว 3×10^3 เมตร/วินาที ขับดันแก๊สเชื้อเพลิงออกมาในทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ของจรวดด้วยความเร็ว 5×10^3 เมตร/วินาที เมื่อเทียบสัมพัทธ์กับความเร็วของจรวด จงหา (ก) อัตราเร็วของจรวดขณะที่มีมวลลดลงไปครึ่งหนึ่งของเดิม และ (ข) แรงขับเคลื่อนจรวดในขณะที่อัตราการเผาไหม้เป็น 50 กิโลกรัม/วินาที

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 5.62 จะได้

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + v_e \ln (M_i/M_f) \\ &= (3 \times 10^3 \text{ m/s}) + (5 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln (M_i/0.5\, M_i) \\ &= 6.47 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 5.63 จะได้

$$\text{แรงขับเคลื่อน} = v_e\, dM/dt = (5 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) = 2.5 \times 10^5 \text{ N}$$

กิจกรรม 5.4

ให้นักศึกษาพิจารณาข้อมูลในตัวอย่าง 5.24 ว่า แรงขับเคลื่อนและอัตราการเผาไหม้ของจรวดจะเพิ่มขึ้นอย่างไร

สรุป

มวลของระบบอิสระใด ๆ จะเป็นไปตามกฎการคงตัวของมวลเสมอ โดยแรงภายในของระบบรวมกันเป็นศูนย์

$$\Sigma F_{\text{ภายใน}} = 0 \qquad \text{........5.3}$$

จุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค คือ ตำแหน่งโดยเฉลี่ยของมวลต่าง ๆ ของระบบ ซึ่งจะหาได้จาก

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad \text{......5.12}$$

โดยที่ $M = \Sigma m_i$ คือมวลทั้งหมดของระบบ และ $\mathbf{r}_i$ คือตำแหน่งของอนุภาคลำดับที่ i ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

จุดศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุ คือ

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \qquad ......5.16$$

ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคเปรียบเสมือนความเร็วของอนุภาคหนึ่งซึ่งมีมวลเท่ากับระบบอนุภาคนั้น ดังนี้

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{v}_i}{M} \qquad ......5.17$$

โมเมนตัมทั้งหมดของระบบอนุภาคเท่ากับมวลทั้งหมดของระบบคูณด้วยความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM} \qquad ......5.34$$

กฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับระบบอนุภาคจะเขียนได้ว่า

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ภายนอก}} = M\mathbf{a}_{CM} = d\mathbf{P}/dt \qquad ......5.37$$

โดยที่ $\mathbf{a}_{CM}$ คือ อัตราเร่งของจุดศูนย์กลางมวล และ Σ คือการรวมแรงกระทำภายนอก ต่อระบบทั้งหมด

โมเมนตัมเชิงเส้นทั้งหมดของระบบอนุภาคจะคงตัว ตามกฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น เมื่อไม่มีแรงกระทำภายนอก

แรงดลเนื่องจากแรง $\mathbf{F}$ กระทำต่ออนุภาค เท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \qquad ......5.32$$

แรงดลที่เกิดจากแรงกระทำในเวลาสั้น ๆ มีค่ามากเมื่อเทียบกับแรงกระทำอื่น ๆ ต่อระบบ โดยเฉพาะในการชนกันระหว่างระบบ

การชนกันระหว่างสองอนุภาคจะทำให้โมเมนตัมทั้งหมดของระบบก่อนชนเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดของระบบหลังชนในทุกกรณี

การชนแบบไม่ยืดหยุ่น หมายถึง กรณีที่พลังงานกลไม่คงตัว แต่โมเมนตัมคงตัว

การชนแบบ**ไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์** หมายถึง กรณีที่วัตถุติดไปด้วยกันภายหลังการชน

การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ หมายถึง กรณีการชนที่ทำให้ทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์ของระบบต่างคงตัว โดยความเร็วสัมพัทธ์ของทั้งสองอนุภาคก่อนชนเท่ากัน ความเร็วสัมพัทธ์ของทั้งสองอนุภาคหลังชน หรือ "ความเร็วของการเคลื่อนที่เข้าหากัน เท่ากับความเร็วของการเคลื่อนที่แยกจากกัน แต่ทิศตรงข้าม"

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad ......5.50$$

สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว, e หมายถึงอัตราส่วนระหว่างความเร็วของการเคลื่อนที่แยกจากกันกับความเร็วของการเคลื่อนที่เข้าหากัน ซึ่งจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ตามชนิดการชนแบบต่าง ๆ ดังนี้

$e = 0$	หมายถึง	การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์
$0 < e < 1$	หมายถึง	การชนแบบไม่ยืดหยุ่น
$e = 1$	หมายถึง	การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

การชนกันระหว่างอนุภาคมวลเท่ากันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ โดยการชนไม่อยู่ในแนวเส้นตรงและอนุภาคหนึ่งอยู่กับที่ภายหลังการชนจะทำมุมฉากซึ่งกันและกันระหว่างอนุภาคทั้งสอง

แรงขับเคลื่อนจรวดเกิดจากการขับดันแก๊สเชื้อเพลิงออกไปในทิศทางตรงข้ามกับการเคลื่อนที่

$$\text{แรงขับเคลื่อน} = M\,dv/dt = |\,v_e\,dM/dt\,| \qquad ......5.63$$

แบบฝึกหัดที่ 5

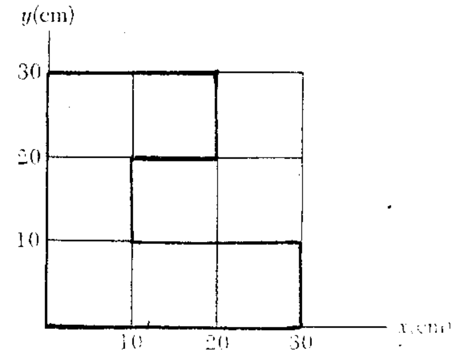
5.1 อนุภาคมวล 3 กิโลกรัม อยู่บนแกน x ในตำแหน่ง $x = -5$ เมตร และอนุภาคมวล 4 กิโลกรัม อยู่บนแกน x เช่นเดียวกันในตำแหน่ง $x = 3$ เมตร จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบซึ่งประกอบด้วยอนุภาคทั้งสอง

ตอบ - 0.429 m

5.2 จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ 3 อนุภาคบนระนาบ xy ซึ่งประกอบด้วยมวล 2 กิโลกรัม อยู่ในตำแหน่ง (3, -2) เมตร มวล 3 กิโลกรัมอยู่ที่ (- 2, 4) เมตร และมวล 1 กิโลกรัมอยู่ที่ (2, 2) เมตร

ตอบ ($\frac{1}{3}$, 5/3) m

5.3 แผ่นโลหะซึ่งมีมวลกระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอแผ่นหนึ่งลักษณะดังรูปที่ 5.28 จะมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ในตำแหน่งใดบนระนาบ xy



รูปที่ 5.28 แบบฝึกหัด 5.3

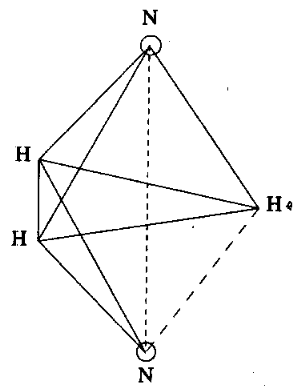
ตอบ (70/6, 80/6) cm

5.4 จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของโลกกับดวงจันทร์ ซึ่งมีระยะห่างกัน 3.84×10^8 เมตร โดยวัดจากจุดศูนย์กลางของโลก กำหนดมวลดวงจันทร์ประมาณ 0.0123 เท่าของโลก

ตอบ 4.67×10^6 m จากจุดศูนย์กลางของโลก โดยจุดนี้อยู่ภายในโลก

5.5 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของโมเลกุลแอมโมเนีย (NH_3) ซึ่งประกอบด้วยไฮโดรเจน (H)3 อะตอมอยู่ในตำแหน่งทำมุมสามเหลี่ยมด้านเท่าห่างกัน 1.628 x 10^{-10} เมตร โดยจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่านี้อยู่ห่างจากแต่ละอะตอมของไฮโดรเจน 9.39 x 10^{-11} เมตร ดังรูปที่ 5.28 และไนโตรเจน (N) 2 อะตอม อยู่ในตำแหน่งทำมุมยอดของปิรามิด โดยมีอะตอมของไฮโดรเจนประกอบกันเป็นฐานของปิรามิด ในระยะห่างกันระหว่างอะตอมของไนโตรเจนกับไฮโดรเจน 1.014 x 10^{-10} เมตร

ตอบ 6.75 x 10^{-13} m ห่างจากอะตอมของไนโตรเจนตามแกนสมมาตร



รูปที่ 5.29 แบบฝึกหัด 5.5

5.6 อนุภาคมวล 2 กิโลกรัมมีความเร็ว ($2\hat{i} - 3\hat{j}$) เมตร/วินาที และอนุภาคมวล 3 กิโลกรัมมีความเร็ว ($\hat{i} + 6\hat{j}$) เมตร/วินาที จงหา (ก) ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล และ (ข) โมเมนตัมทั้งหมดของระบบ

ตอบ (ก) ($1.4\hat{i} + 2.4\hat{j}$) m/s (ข) ($7.01\hat{i} + 12.0\hat{j}$) kg. m/s

5.7 อนุภาค P และ Q อยู่ห่างกันในตำแหน่งหนึ่งอยู่กับที่เป็นระยะ 1 เมตร โดยที่ P มีมวล 0.1 กิโลกรัม และ Q มีมวล 0.3 กิโลกรัม ทั้งสองอนุภาคมีแรงดึงดูดซึ่งกันและกันคงตัว 1.0 x 10^{-2} นิวตัน (ก) จงแสดงการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของระบบสองอนุภาคนี้และ (ข) อนุภาคทั้งสองจะชนกันเมื่ออนุภาค P เคลื่อนที่ห่างออกไปจากตำแหน่งเดิมที่อยู่นิ่งเท่าไร พิจารณาโดยไม่คำนึงถึงแรงกระทำจากภายนอก

ตอบ (ก) จุดศูนย์กลางมวลอยู่นิ่งกับที่ (ข) 0.75 m

5.8 จงหา (ก) โมเมนตัมของรถยนต์มวล 1,800 กิโลกรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 50 กิโลเมตร/ชั่วโมง และ (ข) จงหาว่ารถบรรทุกขนาด 10 ตัน จะมีความเร็วเท่าใด เมื่อรถบรรทุกมีโมเมนตัมเท่ากัน

ตอบ (ก) 2.5×10^4 kg. m/s (ข) 2.5 m/s

5.9 ลูกปืนมวล 10 กรัม ถูกยิงฝังอยู่ในท่อนไม้มวล 5 กิโลกรัม ทำให้ทั้งลูกปืนและท่อนไม้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตร/วินาที ภายหลังจากปะทะกัน จงหาอัตราเร็วก่อนชนของลูกปืน

ตอบ 301 m/s

5.10 รถยนต์มวล 1,200 กิโลกรัม แล่นด้วยอัตราเร็ว 25 เมตร/วินาที ไปทางทิศตะวันออกพุ่งชนท้ายรถบรรทุกมวล 9,000 กิโลกรัม ซึ่งแล่นไปในทิศทางเดียวกันด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาที ทำให้รถยนต์มีความเร็ว 18 เมตร/วินาที ไปทางทิศตะวันออกในทันทีทันใดหลังการชน (ก) จงหาความเร็วของรถบรรทุกในทันทีทันใดหลังการชน และ (ข) พลังงานจลน์จะสูญเสียไปเท่าใดในการชนกันนี้

ตอบ (ก) 20.9 m/s ไปทางทิศตะวันออก (ข) 8.74 kJ

5.11 อนุภาคโปรตอนมวล 1.66×10^{-27} กิโลกรัม พุ่งชนโดยตรงกับอะตอมฮีเลียมมวล 6.64×10^{-27} กิโลกรัม ซึ่งอยู่นิ่ง ทำให้อะตอมฮีเลียมเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5×10^5 เมตร/วินาที จงหา (ก) ความเร็วของโปรตอนก่อนและหลังชน และ (ข) พลังงานที่ถ่ายโอนให้กับอะตอมฮีเลียมคิดเป็นร้อยละ

ตอบ (ก) 1.25×10^6 m/s, -7.5×10^5 m/s (ข) 64%

5.12 ลูกปืนมวล 12 กรัม ถูกยิงฝังอยู่ในท่อนไม้มวล 100 กรัม ซึ่งอยู่นิ่งบนพื้นระนาบทำให้ท่อนไม้ไถลไป 7.5 เมตรก่อนที่จะหยุดเคลื่อนที่ ถ้าสัมประสิทธิ์ความต้านทานระหว่างผิวสัมผัสเป็น 0.65 จงหาอัตราเร็วของลูกปืนในทันทีทันใดก่อนชน

ตอบ 91.2 m/s

5.13 มวล 2 กิโลกรัม พุ่งไปด้วยความเร็ว 5 $\hat{i}$ เมตร/วินาที ปะทะกับมวล 3 กิโลกรัม ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว -3 $\hat{j}$ เมตร/วินาที จงหาความเร็วของมวลทั้งสองภายหลังจากการชนกันแล้วเคลื่อนที่ติดไปด้วยกัน

ตอบ $(2\hat{i} - 1.8\hat{j})$ m/s

5.14 ในขณะที่นิวเคลียสซึ่งไม่เสถียรมวล 17×10^{-27} กิโลกรัมอยู่นิ่งกับที่สลายตัวออกเป็น 3 อนุภาค โดยอนุภาคแรกมีมวล 5.0×10^{-27} กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปตามแกน y ด้วยความเร็ว 6×10^{6} เมตร/วินาที อนุภาคที่สองมีมวล 8.4×10^{-27} กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปตามแกน x ด้วยความเร็ว 4×10^{6} เมตร/วินาที จงหา (ก) ความเร็วของอนุภาคที่สาม และ (ข) พลังงานทั้งหมดที่ปลดปล่อยออกมา

ตอบ (ก) $-(9.3\hat{i} + 8.3\hat{j}) \times 10^{6}$ m/s (ข) 4.4×10^{-13} J

5.15 มวล 1 กิโลกรัม ผูกติดกับสปริงเบาซึ่งมีค่าคงตัวของสปริง 200 นิวตัน/เมตร วางอยู่บนพื้นเรียบซึ่งไม่คิดแรงเสียดทาน ดังรูปที่ 5.29 เมื่อยิงลูกปืน มวล 20 กรัมเข้าไปในมวล 1 กิโลกรัม นั้น ทำให้สปริงหดเข้าไป 13.3 เซนติเมตร จงหา (ก) ความเร็วก่อนชนของลูกปืน และ (ข) พลังงานสูญเสียจากการชนคิดเป็นร้อยละ

ตอบ (ก) 94.9 m/s (ข) 98%

5.16 ลูกบิลเลียดเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5 เมตร/วินาที พุ่งเข้าชนลูกบิลเลียดอีกลูกหนึ่งซึ่งมีมวลเท่ากันแต่อยู่นิ่งกับที่ ทำให้ลูกแรกเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 4.33 เมตร/วินาที เป็นมุม 30° กับแนวการเคลื่อนที่เดิม จงหาขนาดและทิศทางของความเร็วสำหรับลูกที่สองซึ่งถูกชน โดยไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานใด ๆ และการหมุนของลูกบิลเลียด

ตอบ 2.5 m/s ทำมุม -60°

5.17 จงหาแรงขับเคลื่อนของจรวดซึ่งเผาผลาญเชื้อเพลิงในอัตรา 75 กิโลกรัม/วินาที และถูกพ่นออกมาด้วยความเร็ว 4×10^{3} เมตร/วินาที

ตอบ 3×10^{5} N

5.18 จรวดขนาดใหญ่สามารถพ่นแก๊สเชื้อเพลิงออกมาด้วยความเร็ว v_e = 3,000 เมตร/วินาที กลายเป็นแรงขับเคลื่อนขนาด 24 ล้านนิวตัน (ก) จงหาอัตราการพ่นเชื้อเพลิงในหนึ่งวินาที และ (ข) อัตราเร็วสูงสุดของจรวดจากจุดนิ่งอยู่กับที่โดยที่ v_e = 3 กิโลกรัม/วินาที และร้อยละ 90 ของมวลเริ่มต้นของจรวดเป็นเชื้อเพลิง ภายใต้สภาพที่ปราศจากแรงกระทำอื่นใด

ตอบ (ก) 8×10^3 kg/s (ข) 6.9 km/s

5.19 เชื้อเพลิงบรรจุอยู่ในจรวดมีความหนาแน่น 1.4×10^3 กิโลกรัม/ม.^{3} ถูกพ่นออกด้วยอัตราเร็ว 3×10^3 เมตร/วินาที ถ้าเครื่องยนต์มีแรงขับเคลื่อน 2.5×10^6 N จงหาปริมาตรของเชื้อเพลิงซึ่งถูกเผาไหม้ในหนึ่งวินาที

ตอบ 0.595 m^3/s

5.20 ภายหลังจากที่จรวดหยุดเดินเครื่องยนต์จนทำให้มีอัตราเร็ว 5×10^3 เมตร/วินาที จึงเริ่มเดินเครื่องยนต์อีกครั้งหนึ่งขณะที่มวลลดลงเหลือร้อยละ 90 ของมวลเดิม ปรากฏว่าอัตราเร็วเป็น 6.5×10^3 เมตร/วินาที จงหาความเร็วของเชื้อเพลิงที่พ่นออกไปในขณะนั้น

ตอบ 1.4×10^4 m/s