บทที่ 11
ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

เค้าโครงเรื่อง

11.1 การแปลงแบบกาลิเลโอ

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงที่ต่างเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน

11.2 กรอบอ้างอิงสัมบูรณ์

กรอบอ้างอิงของอีเทอร์หรือกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์

11.3 การทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์

การหาจำนวนแถบการแทรกสอดที่เลื่อนไป

11.4 สัจพจน์ของไอน์สไตน์

สัจพจน์ 2 ข้อของไอน์สไตน์

11.5 การแปลงแบบลอเรนตซ์

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงเฉื่อยด้วยความเร็วสัมพัทธ์ใกล้เคียงความเร็วของแสง

11.6 ความยาวและเวลาในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ความสัมพันธ์ของความยาวและเวลาที่วัดได้ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย

11.7 มวลและโมเมนตัมในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

มวลสัมพัทธ์และนิยามของโมเมนตัมในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

11.8 แรงและพลังงานในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงในแนวขนานและแนวตั้งฉากกับความเร็ว มวลตามยาวและมวลตามขวาง พลังงานจลน์ บวกกับพลังงานของมวลนิ่งคือพลังงานรวม

สาระสำคัญ

1. กรอบอ้างอิงเฉื่อยคือระบบที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงที่ต่างกัน การแปลงแบบกาลิเลโอ คือ การหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงที่ต่างเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน

2. กรอบอ้างอิงของอีเทอร์เป็นกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่ง เรียกว่า กรอบอ้างอิงสัมบูรณ์โดยอีเทอร์เป็นตัวกลางของแรงตามความเชื่อเดิม

3. การทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์จากการแทรกสอดของแสงไม่พบว่ามีความเร็วของกระแสอีเทอร์

4. สัจพจน์ของไอน์สไตน์เกี่ยวกับกรอบอ้างอิงมี 2 ข้อ คือ กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์จะมีรูปแบบเดียวกันในกรอบอ้างอิงเฉื่อย และความเร็วของแสงคงที่เสมอไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดหรือสู่สังเกต

5. ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธ์สูงใกล้เคียงกับความเร็วของแสงจะหาได้จากกรรมวิธีการแปลงแบบลอเรนตซ์

6. การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างสู่สังเกตกับวัตถุเป็นผลให้ความยาวของวัตถุเปลี่ยนแปลงได้ ความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเรียกว่า ความยาวเฉพาะ และความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับความยาวของวัตถุ เรียกว่า ความยาวไม่เฉพาะ

เวลาที่วัดได้โดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะน้อยกว่าเวลาที่วัดโดยผู้สังเกตเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับเหตุการณ์

7. ถ้ามวลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำกว่าความเร็วแสงมาก จะมีมวลไม่เปลี่ยนแปลง เรียกว่ามวลนิ่ง แต่ถ้าเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงใกล้เคียงกับความเร็วแสงจะมีมวลเพิ่มขึ้น เรียกว่ามวลสัมพัทธ์

โมเมนตัมรวมคงที่ในกรอบอ้างอิงหนึ่ง แต่อาจไม่คงที่ในกรอบอ้างอิงอื่น ๆ

8. พลังงานรวมของอนุภาคในทฤษฎีสัมพัทธภาพเท่ากันพลังงานจลน์บวกกับพลังงานของมวลนิ่งโดยแรงกระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุในทิศขนานกับความเร็วมีผลทำให้วัตถุมีความเร่งในทิศเดียวกับแรงและความเร็วด้วย ซึ่งมวลของอนุภาคเรียกว่า มวลตามยาว ในทำนองเดียวกันมวลตามขวางจะเกี่ยวข้องกับแรงในแนวตั้งฉากกับความเร็ว

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

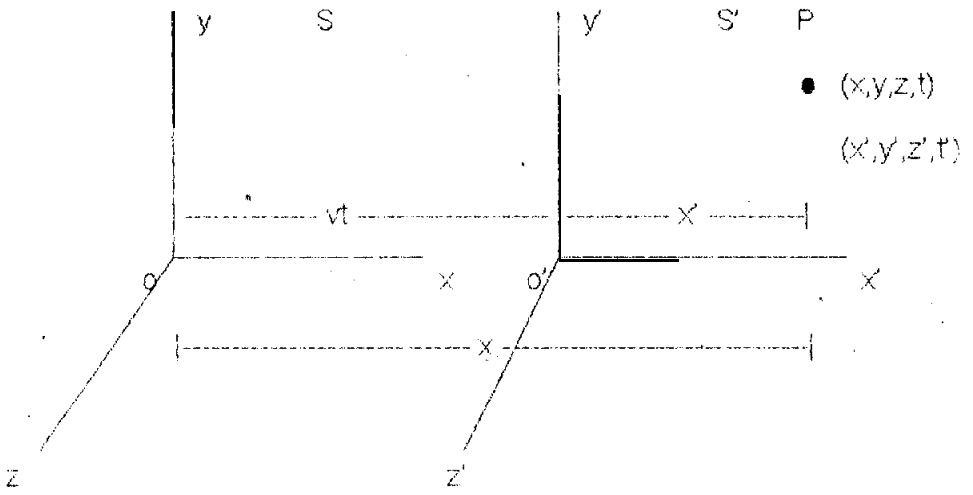
1. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันด้วยกราฟและสมการตามการแปลงแบบกาลิเลโอและแบบลอเรนตซ์ได้
2. ชี้แจงความหมายของกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์เปรียบเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยได้
3. บรรยายรายละเอียดการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์และข้อสรุปของการทดลองนี้ได้
4. แถลงสัจพจน์ของไอน์สไตน์และความมุ่งหมายพื้นฐานของสัจพจน์ได้
5. คำนวณหาปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น ความยาวและเวลาในทฤษฎีสัมพัทธภาพตามสูตรต่าง ๆ ในบทนี้ได้

ก่อนปี ค.ศ. 1900 ถือว่าอยู่ในช่วงฟิสิกส์ยุคเก่า ทฤษฎีกลศาสตร์ของนิวตัน ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ นับว่าเป็นกฎเกณฑ์ที่อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ได้อย่างแม่นยำ อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์ของวัตถุขนาดเล็กระดับอะตอมยังเป็นเรื่องที่ไม่สามารถอธิบายได้สอดคล้องกับการทดลอง และในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงใกล้ความเร็วแสงยังต้องการทฤษฎีที่มาอธิบายให้ถูกต้อง ในช่วงหลังปี ค.ศ. 1900 เล็กน้อยถือว่าเข้าสู่ช่วงฟิสิกส์ยุคใหม่ คือมีการอธิบายปรากฏการณ์ของอะตอมได้ถูกต้องสอดคล้องกับการทดลอง ในการพัฒนาความรู้ด้านฟิสิกส์อย่างหนึ่ง คือการอธิบายปรากฏการณ์ของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงใกล้ความเร็วแสง ซึ่ง อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ (ค.ศ. 1879-1955) ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษในปี ค.ศ. 1905 เป็นการอธิบายปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ของวัตถุที่มีความเร็วสูงใกล้แสง ด้านไฟฟ้าและแม่เหล็กของประจุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงใกล้แสง โดยจำกัดว่าวัตถุหรือประจุไม่มีความเร่งเทียบกับผู้สังเกตซึ่งทำให้กฎเกณฑ์ด้านกลศาสตร์ ด้านไฟฟ้าและแม่เหล็กสมบูรณ์ขึ้น อีก 10 ปีต่อมา ไอสไตน์ได้เสนอ ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (General relativity) สำหรับวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงใกล้แสง และมีความเร่ง เทียบกับผู้สังเกต ทำให้กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

11.1 การแปลงแบบกาลิเลโอ (The Galileo transformation)

ระบบที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่เราเรียกว่าระบบนั้นเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย (initial frame of reference) โลกเราซึ่งโคจรรอบดวงอาทิตย์ด้วยความเร็วเชิงเส้นค่อนข้างคงที่ ประมาณ 3×10^4 m/s เราถือว่าโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยกรอบหนึ่ง กรอบอ้างอิงที่ไม่มีการเคลื่อนที่นั้นอาจกล่าวได้ว่าไม่มีเพราะวัตถุทุกชนิดเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันเสมอ เนื่องจากการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันนี้เอง การสังเกตในกรอบอ้างอิงที่ต่างกันน่าจะมีผลการสังเกตต่างกัน ผลที่กล่าวถึงได้แก่ พิกัด ความเร็ว ความเร่ง แรงที่กระทำต่อวัตถุ

พิจารณากรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ เคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน โดย S′ มีความเร็วคงที่ v เทียบกับ S ในทิศ x - x′ ที่เวลา $t = t' = 0$ จุดกำเนิดของกรอบอ้างอิงทั้งสองซ้อนกันพอดี ต่อมาในเวลา t ใน S และ t′ ใน S′ เหตุการณ์หนึ่งเกิดที่จุด P ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S มีพิกัดเป็น (x, y, z, t) และในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S′ มีพิกัดเป็น (x′, y′, z′, t′)



รูปที่ 11.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบ S และ S′

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของทั้งสองชุด คือ

$$x' = x - vt \qquad \text{.....11.1}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

สมการนี้เรียกว่า การแปลงพิกัดแบบกาลิเลโอ (coordinate Galileo transformation) การแปลงกลับจาก S′ เป็น S จะได้

$$x = x' + vt' \qquad \text{.....11.2}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

จากสมการการแปลงพิกัดแบบกาลิเลโอจะได้

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x' + vt') = u', + v \qquad \text{.....11.3}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = u'_y$$

$$u_z = d\frac{dz}{t} = \frac{dz'}{dt'} = u'_z$$

u_x u_y u_z และ u'_x u'_y u'_z เป็นอัตราเร็วของวัตถุในแนว x y z ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ ตามลำดับ สมการชุดนี้เรียกว่าการแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ และสมการแบบกลับของการแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ ทำได้โดยแทนเครื่องหมาย prime เป็น unprime และ unprime เป็น prime แทน -v ด้วย +v จะได้ว่า

$$u'_x = u_x - v \qquad \text{.....11.4}$$

$$u'_y = u_y$$

$$u'_z = u_z$$

ซึ่งอัตราเร็วใน S จะเป็น $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$

และใน S′ $u' = (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)^{1/2}$

จากความสัมพันธ์ของความเร็ว จะได้

$$u' = (u_x^2 + u_y^2 + (u_z^2 - v))^{1/2}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $u \neq u'$ นั่นคือ อัตราเร็วที่ผู้สังเกตซึ่งอยู่ในสองกรอบอ้างอิง S และ S′ เห็นไม่เท่ากัน จากสมการการแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ จะได้

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d}{dt}(u'_x + v) = a', \qquad \text{.....11.5}$$

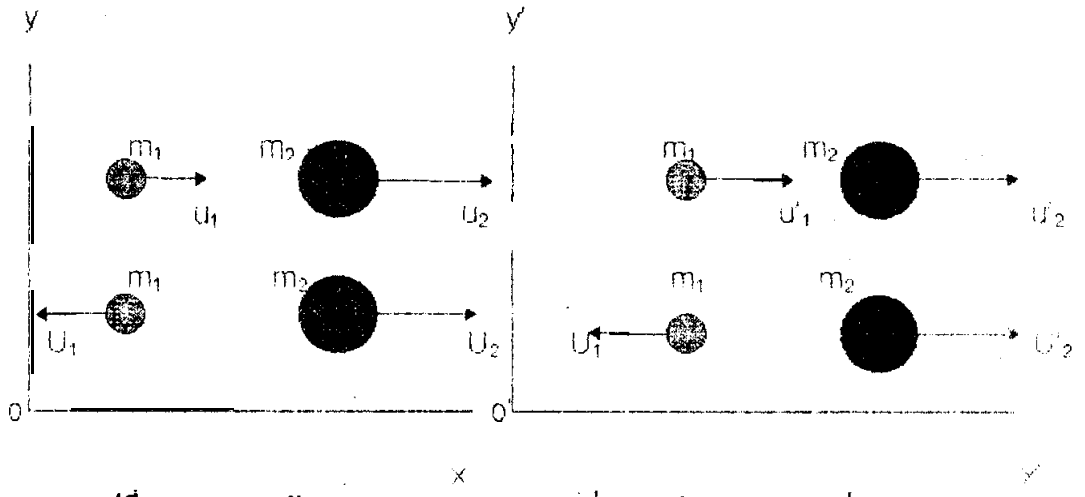
$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{du'_y}{dt} = a'_y$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{du'_z}{dt} = a'_z$$

ซึ่งจะเห็นว่า อัตราเร่งในแนวแกน x y z เท่ากันทั้งสองกรอบอ้างอิงเฉื่อย จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\Sigma F = ma$$

เนื่องจาก a = a′ ดังนั้น แรง F = F′ แสดงว่าผู้สังเกตในทั้งสองกรอบอ้างอิงสังเกตเห็นแรงกระทำต่อวัตถุเท่ากัน ในกลศาสตร์นิวตันนั้นเรื่องที่เราศึกษากันได้แก่ จลนศาสตร์ (Kinematics mechanics) ซึ่งว่าด้วยการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ไม่เกี่ยวข้องกับแรงหรือไม่คำนึงว่ามีแรงอะไรกระทำต่อวัตถุบ้าง และอีกส่วนคือ พลศาสตร์ (dynamics mechanics) ซึ่งว่าด้วยการเคลื่อนที่ซึ่งเกี่ยวข้องกับแรงรวมทั้งเรื่องงาน พลังงาน โมเมนตัม การชน แต่ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษโดยอาศัยการแปลงแบบกาลิเลโอ สมการของงาน พลังงาน โมเมนตัมจะเป็นอย่างไร พิจารณาได้ดังนี้ พิจารณาการชนกันของวัตถุมวล m_1 และ m_2 ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 และ u_2 ตามแกน x ในกรอบอ้างอิง S หลังจากการชนแล้วความเร็วของมวลทั้งสองคือ U_1 และ U_2 และยังคงอยู่ในแนวแกน x



รูปที่ 11.2 การชนกันระหว่างมวล m_1 และ m_2 เมื่อสังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ในกรอบ S จะได้ว่า

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1U_1 - m_2U_2 \quad \text{.....11.6}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1U_1^2 + \frac{1}{2}m_2U_2^2 \quad \text{.....11.7}$$

โดยการใช้การแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ $u_1 = u'_1 + v$ $u_2 = u'_2 + v$ $U_1 = U'_1 + v$ และ $U_2 = U'_2 + v$ ในสองสมการจะได้

$$m_1(u'_1 + v) + m_2(u'_2 + v) = m_1(U'_1 + v) - m_2(U'_2 + v)$$

$$m_1u'_1 + m_2u'_2 = -m_1U'_1 + m_2U'_2 \quad \text{.....11.8}$$

จะเห็นว่ากฎการอนุรักษ์โมเมนตัมยังคงเป็นจริงในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S′

$$\frac{1}{2}m_1(u'_1 + v)^2 + \frac{1}{2}m_2(u'_2 + v)^2 = \frac{1}{2}m_1(U'_1 + v)^2 + \frac{1}{2}m_2(U'_2 + v)^2 \quad \text{.....11.9}$$

ใช้สมการ (11.8) ในสมการข้างบนนี้ จะได้

$$\frac{1}{2}m_1u'^2_1 + \frac{1}{2}m_2u'^2_2 = \frac{1}{2}m_1U'^2_1 + \frac{1}{2}m_2U'^2_2 \quad \text{.....11.10}$$

จะเห็นว่ากฎการอนุรักษ์พลังงานจลน์เป็นจริงในกรอบอ้างอิง S′ สรุปได้ว่ากฎต่าง ๆ ในกลศาสตร์ทั้งจลนศาสตร์ และพลศาสตร์ไม่มีการเปลี่ยนแปลง คือรูปแบบสมการยังคงเดิมทั้งในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′

เมื่อใช้การแปลงแบบกาลิเลโอในแม่เหล็กไฟฟ้า ตัวอย่างเช่น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่กระจายเป็นทรงกลมด้วยความเร็วคงที่ c ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S จะได้สมการของจุดบนหน้าคลื่น ดังนี้

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad \text{.....11.11}$$

ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S จะได้สมการของจุดบนหน้าคลื่น ดังนี้

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad \text{.....11.12}$$

จากสมการการแปลงพิกัดแบบกาลิเลโอ จะได้

$$(x' + v)^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

$$x'^2 + 2x'v + v^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t^2 \quad \text{.....11.13}$$

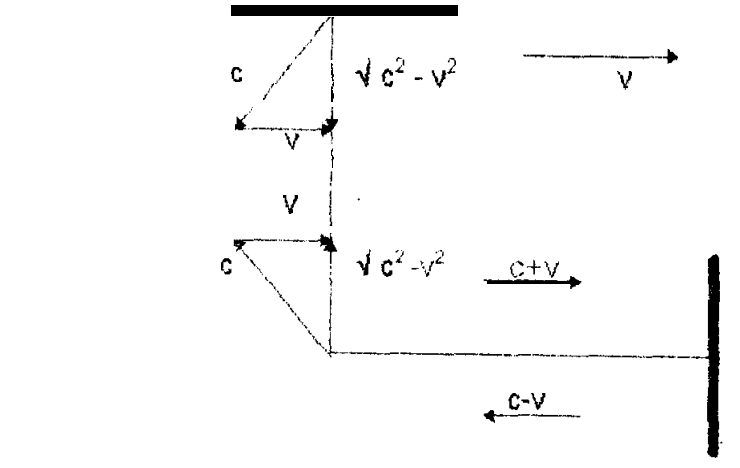
จะเห็นว่าสมการของจุดบนหน้าคลื่นทรงกลมในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ ไม่เท่ากัน จึงพูดได้ว่าการแปลงแบบกาลิเลโอใช้ไม่ได้ในแม่เหล็กไฟฟ้า

11.2 กรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ (absolute frame of reference)

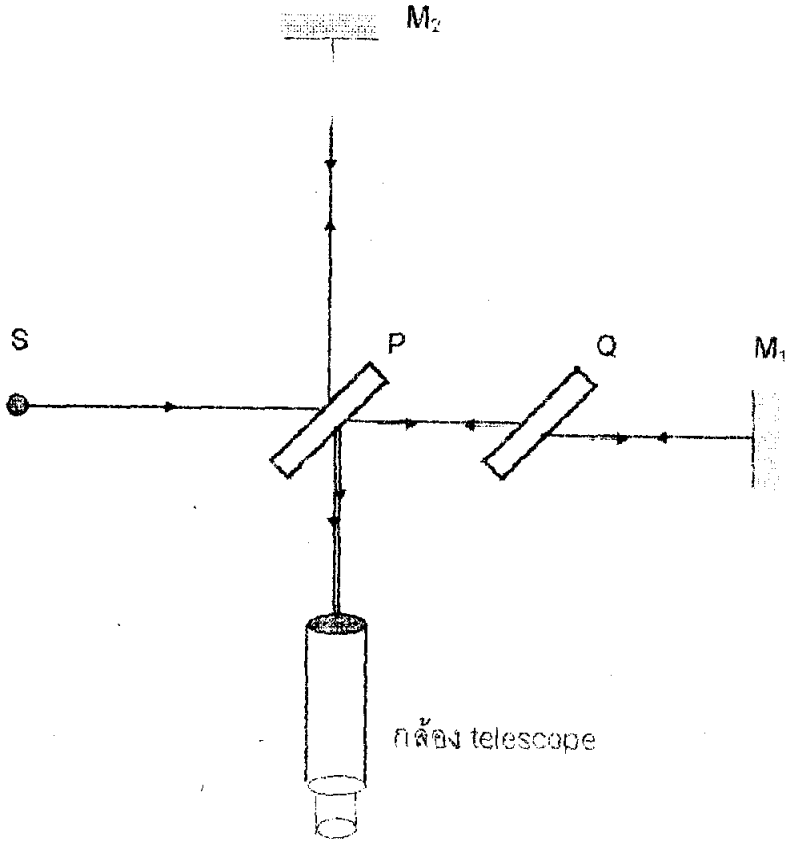
แมกซ์เวลล์ (Maxwell) ได้เสนอทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าเรียกว่าสมการแมกซ์เวลล์ในปี ค.ศ. 1860 ในทฤษฎีของเขาสามารถคำนวณได้ว่า ความเร็วคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในอวกาศมีค่าประมาณ 3×10^8 m/s ซึ่งเท่ากับความเร็วแสง จึงคิดว่าแสงน่าจะเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ในปี ค.ศ. 1888 เฮิรทซ์ (Hertz) ได้ทดลองสร้างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในห้องปฏิบัติการได้ รวมทั้งแสดงให้เห็นว่าแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ แมกซ์เวลล์ไม่ได้คำนึงว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีตัวกลางเป็นอย่างไรมีคุณสมบัติอย่างไร นักฟิสิกส์หลาย ๆ คนคิดว่าน่าจะมีตัวกลางในการเคลื่อนที่ ทั้งนี้คลื่นอื่น ๆ มีตัวกลางในการเคลื่อนที่ทั้งสิ้น จึงได้กำหนดกันว่าให้แสงมีตัวกลางซึ่งเรียกว่าอีเทอร์ส่องสว่าง (luminous ether) หรือเรียกสั้น ๆ ว่าอีเทอร์ โดยมีคุณสมบัติคือ มีอยู่ทั่วทุกแห่งหน โปร่งใสเพราะมองไม่เห็น ไม่มีมวล มีความยืดหยุ่นเพื่อรับการสั่นของคลื่นในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ วัตถุทุกชนิดสามารถเคลื่อนที่ผ่านอีเทอร์ได้อย่างอิสระ และกำหนดกันอีกว่ากรอบอ้างอิงของอีเทอร์นี้เป็นกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งเรียกว่ากรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ เมื่อกำหนดว่ามีตัวกลางของแสงนักฟิสิกส์ทั้งหลายจึงพยายามทดลองค้นหาตัวกลางของแสงกันต่อมา

11.3 การทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์ (Michelson and Morley experiment)

การทดลองที่สำคัญครั้งหนึ่งเพื่อค้นหาอีเทอร์ตามความเชื่อที่ว่าอีเทอร์เป็นตัวกลางของแสง ในปี ค.ศ. 1887 โดยไมเคิลสันและมอร์เลย์ ได้ร่วมมือกันทดลองโดยอาศัยสมมติฐานที่ว่าโลกเคลื่อนที่ทะลุผ่านอีเทอร์ ดังนั้นจึงมีกระแสอีเทอร์ ทำนองเดียวกับการที่เราวิ่งฝ่าอากาศที่อยู่นิ่ง ย่อมเกิดกระแสลมสัมพัทธ์กับตัวเราความเร็วในการโคจรของโลกเท่ากับ 3×10^4 m/s ไม่คิดการหมุนเพราะความเร็วเชิงมุมของการหมุนน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วในการโคจรของโลก เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นพิจารณาการแข่งขันว่ายน้ำของนักว่ายน้ำสองคน คนหนึ่งว่ายตัดกระแสน้ำ อีกคนหนึ่งว่ายตามกระแสน้ำ ดังรูป 11.3



รูป 11.3 ก



รูป 11.3 ข

รูปที่ 11.3 ก. แสดงแผนภาพการว่ายน้ำในแนวตั้งฉากและขนานกับกระแสน้ำ v = ความเร็วของกระแสน้ำ และ c = ความเร็วของนักว่ายน้ำ

ข. แสดงแผนภาพเครื่องมือของไมเคิลสันและมอร์เลย์ v = ความเร็วของกระแสอีเทอร์ และ c = ความเร็วแสง

ในรูป 11.3 ก. หาเวลาในการว่ายน้ำแต่ละทิศทางได้ดังนี้ สำหรับคนที่ว่ายขนานกับกระแสน้ำ เวลาที่ใช้ว่ายไปกลับ

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v}$$

$$= \frac{2Lc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad \text{.....11.14}$$

เวลาว่ายไปกลับสำหรับคนที่ว่ายตั้งฉากกับกระแสน้ำเท่ากับ

$$t_2 = \frac{2L}{c^2 - v^2} \qquad \text{.....11.15}$$

สมการที่ 11.14 หารด้วยสมการ 11.15 จะได้

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \times \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2L}$$

$$t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = yt_2 \qquad \text{.....11.16}$$

เนื่องจาก $v < c$ จะเห็นว่า เวลาในการว่ายน้ำในทิศขนานกับกระแสจะมากกว่าเวลาในการว่ายน้ำในทิศตั้งฉากกับกระแสน้ำ นั่นคือไมเคิลสันและมอร์เลย์หวังว่าการแทรกสอดของแสงจะให้ผลสรุปว่ามีความเร็วของกระแสอีเทอร์หรือไม่

ถ้านำสมการ 11.14 ลบด้วยสมการ 11.15 จะได้ว่า

$$t_1 - t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} - \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$= \frac{2L}{C}[(1 - \beta^2)^{-1} - (1 - \beta^2)^{-1/2}]$$

เนื่องจาก $v < c$ ดังนั้นเราสามารถกระจายเทอมที่อยู่ในวงเล็บเล็กได้ โดยใช้การกระจายแบบทวินาม **(binomial expansion)**

ตามสูตร $(1 + x)^n \cong 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$ เมื่อ $x < 1$

$$= \frac{2L}{c}[(1+\beta^2 \ldots\ldots\ldots) - (1 - \frac{\beta^2}{2} \ldots\ldots\ldots)]$$

$$= \frac{2L}{c}\frac{(\beta^2)}{2}$$

$$= \frac{L\beta^2}{C}$$

ในการหมุนเครื่องมือไป 90° จะได้ว่าความแตกต่างของเวลาในการเคลื่อนที่ของแสงเท่ากับ $2\Delta t$ จำนวนแถบการแทรกสอดที่เลื่อนไปจากเดิม (Δn) คือ

$$\Delta n = \frac{\text{ระยะทางที่แตกต่างกันของทางเดินสองทิศทาง}}{\text{ความยาวคลื่น}}$$

$$= \frac{2\Delta tc}{\lambda}$$

$$= \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \qquad \ldots\ldots\ldots 11.17$$

ในการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์ให้แสงเดินทางกลับไปกลับมาได้ระยะทางเท่ากับ 10 เมตร ใช้แสงที่มีความยาวคลื่น 500 nm ดังนั้นหาจำนวนแถบที่เลื่อนไป ดังนี้

$$\Delta n = \frac{(2 \times 10\text{m}) \times (3 \times 10^4\ \text{m/s})^2}{(5.0 \times 10^{-7}\ \text{m}) \times (3 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$

$$= 0.4$$

ในการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์เครื่องมีความละเอียดเพียงพอที่จะวัดการเลื่อนไปของแถบ คือวัดความสามารถวัดได้ถึง 1/100 ของแถบที่เลื่อนไป ดังนั้นการเลื่อนไปถึง 0.4 แถบนั้น สามารถวัดได้อย่างชัดเชน แต่ผลการทดลองของเขาทั้งสองไม่ปรากฏว่ามีการเลื่อนไปของแถบเลยแม้แต่น้อย เขาพยายามวัดในวัน เวลา ฤดู พื้นที่สูงต่ำต่างกัน ทั้งนี้คิดว่าที่บริเวณใกล้ผิวโลกอีเทอร์อาจถูกโลกลากไปด้วยก็ได้ (คล้าย ๆ กับอากาศใกล้ ๆ รถที่ถูกลากไปขณะที่รถเคลื่อนที่) ซึ่งเมื่อทดลองบนเขาสูงผลก็ยังเป็นเช่นเดิมคือไม่มีการเลื่อนของแถบ เขาทั้งสองรวมทั้งนักฟิสิกส์หลายคนจึงลงความเห็นว่า การที่ไม่พบการเลื่อนของแถบตามที่คาดเพราะ

1) ในปี ค.ศ. 1893 ฟิตซ์เจอรัลด์ (Fitzgerald) ได้เสนอว่าแขนของเครื่องมือด้านที่ขนานการเคลื่อนที่หดสั้นลงด้วยแฟกเตอร์ $(1 - \beta^2)$ จึงทำให้เวลาในการเคลื่อนที่ของแสงมาถึงกล้องโทรทัศน์พร้อมกัน ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 1895 ลอเรนซ์ (Lorentz) ได้สนับสนุนความคิดของฟิตซ์เจอรัลด์ อย่างไรก็ตามข้อเสนอของทั้งสองท่านนั้นเป็นเพียงสมมติฐาน ไม่มีการทดลองที่พิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงแต่ในการทดลองใช้เครื่องวัดการแทรกสอดที่มีแขนไม่เท่ากันก็ได้ผลคัดค้านสมมติฐานนี้

2) โลกได้ลากอีเทอร์ไปด้วยจึงไม่เกิดกระแสอีเทอร์สัมพัทธ์กับโลก หรือ $v = 0$ ซึ่งทำให้เวลาในการเคลื่อนที่ทั้งสองแนวเท่ากัน แต่จากการทดลองของแบร็ดลีย์เกี่ยวกับความคลาดของดาวทำให้ทราบว่าโลกเราไม่ได้ลากอีเทอร์ไปด้วย ความคิดที่ว่าโลกลากอีเทอร์ไปด้วยจึงตกไป

3) เหตุผลหนึ่ง คือการไม่มีตัวกลางของแสงหรืออีเทอร์ แต่ดูเหมือนว่านักวิทยาศาสตร์ทั้งหลายไม่กล้าที่จะพูดอย่างชัดเจนว่าอีเทอร์ไม่มี

การที่ผลการทดลองหาอีเทอร์แต่ละครั้ง ซึ่งศึกษาเกี่ยวข้องนี้เป็นเวลานานนับสิบ ๆ ปี จึงน่ากล่าวได้ว่าตัวกลางของแสงไม่มี ในปัจจุบันนักวิทยาศาสตร์ไม่สนใจในเรื่องตัวกลางของแสง เพราะการอธิบายปรากฏการณ์เกี่ยวกับแสงนั้นอธิบายได้อย่างถูกต้องตรงกับผลการทดลอง

11.4 สัจพจน์ของไอน์สไตน์

ไอน์สไตน์ได้ศึกษาผลงานทั้งด้านทฤษฎีและการทดลองของนักฟิสิกส์รุ่นก่อน ๆ พบว่ามีปัญหาอยู่หลายประการเกี่ยวกับกรอบอ้างอิง เรื่องเกี่ยวกับความเร็วแสง ไอน์สไตน์คิดว่าปัญหาต่าง ๆ จะหมดไปถ้ามีสัจพจน์สองข้อต่อไปนี้

1) กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์จะมีรูปแบบอย่างเดียวกัน ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย หมายถึงว่าสมการต่างๆ ที่อธิบายเหตุการณ์ในแต่ละกรอบอ้างอิงเฉื่อย จะมีรูปแบบเดียวกัน เช่น ผลการทดลองทางฟิสิกส์ที่ปรากฏต่อผู้สังเกตบนพื้นโลก จะตรงกับผลการทดลองเดียวกันบนรถไฟที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ที่ปรากฏต่อผู้สังเกตบนรถไฟ รูปแบบสมการที่ใช้อธิบายได้สอดคล้องกับการทดลองทั้งสองกรณีจะเหมือนกัน

2) ความเร็วของแสงจะมีค่าคงที่เสมอไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิด หรือการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต

สัจพจน์ของไอน์สไตน์ทั้งสองข้อคล้ายกับว่าจะขัดความรู้สึกหรือความคิดง่าย ๆ ทั่วไป เช่นความเร็วเสียงที่ปรากฏต่อผู้สังเกตจะขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต อย่างไรก็ตามความคิดของไอน์สไตน์ทั้งสองข้อนี้ ทำให้ปัญหาต่าง ๆ หมดไป

11.5 การแปลงแบบลอเรนตซ์ (The Lorentz transformation)

ลอเรนตซ์ (H. A. lorentz) เป็นผู้ริเริ่มศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของกรอบอ้างอิงเฉื่อย และใช้อธิบายทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของเขา ต่อมาไอน์สไตน์ได้ใช้การแปลงนี้สำหรับอธิบายทฤษฎีสัมพัทธภาพ ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ ต่างไปจากการแปลงแบบกาลิเลโอซึ่งเป็นจริงเฉพาะความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างกรอบ S และ S′ มีค่าน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ ในที่นี้จะไม่พิสูจน์ให้เห็นจริงแต่จะนำความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดมาแสดงไว้ดังนี้ (สำหรับนักศึกษาที่สนใจ อ่านได้จากตำราฟิสิกส์ยุคใหม่ หรือฟิสิกส์ชั้นสูงขึ้นไป)
เมื่อกรอบ S′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เทียบกับ S ในทิศ x-x′ การแปลงพิกัดแบบลอเรนตซ์จากกรอบอ้างอิงเฉื่อย S ไป S′ จะได้

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad \text{.....11.18}$$

โดยที่ $\gamma = \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$

สมการนี้เรียกว่า สมการการแปลงแบบลอเรนตซ์ (Lorentz transformation equations) สำหรับการแปลงกลับจาก S′ เป็น S ได้โดยเปลี่ยนเครื่องหมาย prime เป็น unprime และจาก -v เป็น +v จะได้

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \qquad \text{.....11.19}$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่า t และ t′ ไม่เท่ากัน และความสัมพันธ์ระหว่างเวลาทั้งสองขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x คือ ตำแหน่งที่เหตุการณ์เกิดขึ้น ถ้า $v << c$ แล้ว สมการการแปลงแบบลอเรนตซ์นี้จะกลายเป็นสมการการแปลงแบบกาลิเลโอ

11.6 การแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์

ให้วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในกรอบอ้างเฉื่อย S ด้วยความเร็ว u ซึ่งมีองค์ประกอบตามแกนเป็น u_x u_y และ u_z โดยที่

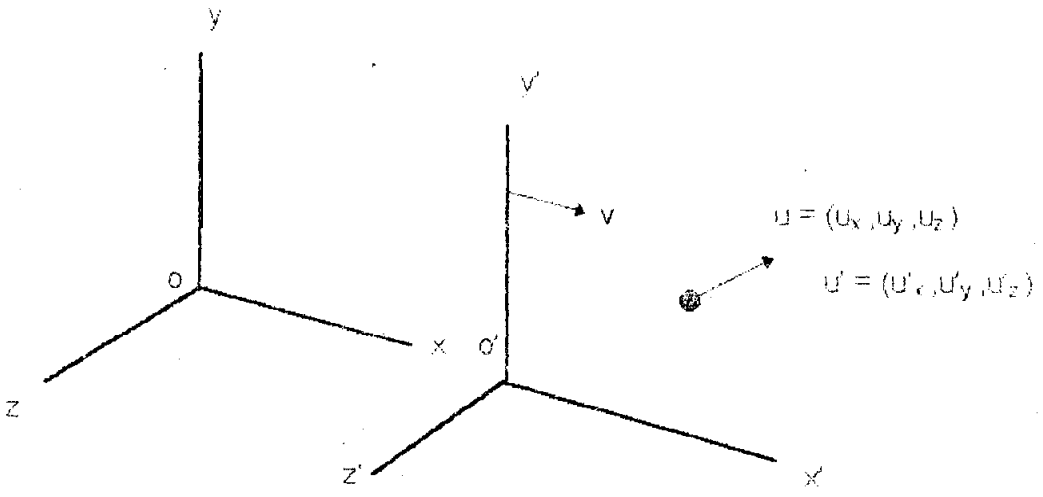
$$u = \{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\}^{1/2}$$

$$u_x = dx/dt \qquad u_y = dy/dt \qquad u_z = dz/dt$$

ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย s′ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในทิศ x-x′ เทียบกับ S วัดความเร็วของวัตถุนี้เป็น u′ ซึ่งมีองค์ประกอบตามแกนเป็น u'_x u'_y และ u'_z โดยที่

$$u' = \{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z]^{1/2}$$

$$u'_x = dx'/dt' \qquad u'_y = dy'/dt' \qquad u'_z = dz'/dt'$$



รูปที่ 11.4 ความเร็ววัตถุเทียบกับผู้สังเกตในกรอบ S และ S′

เนื่องจาก $u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}$

จากสมการการแปลงพิกัดแบบลอเรนตซ์ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับ t เราจะได้

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right) = \gamma(u_x - v)$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_y$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} = u_z$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{vdx}{c^2dt}\right) = \gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)$$

ดังนั้น $u'_x = \frac{dx'}{dt'} = dx'\frac{dt}{dt'} = \frac{\gamma(u_x - v)}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad \ldots\ldots 11.20$$

และ $u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$

สมการทั้งสาม เรียกว่า การแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์ หรือ การแปลงความเร็วแบบสัมพัทธ์ (relativistic velocity transformation) สำหรับการแปลงจากกรอบ S เป็น S′ ทำได้โดย เปลี่ยน u'_x, u'_y, u'_z เป็น u_x, u_y, u_z ตามลำดับ (เปลี่ยนเครื่องหมาย prime เป็น unprime) และเปลี่ยนจาก -v เป็น v เราจะได้

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad \ldots\ldots 11.21$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

และ $$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

จากสมการการแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์ จะเห็นว่าความเร็ววัตถุในทุกแกนขึ้นอยู่กับความเร็วในแนวแกน x และถ้า v<<c จะได้การแปลงความเร็วแบบกาลิเลโอ นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงให้เห็นว่า ความเร็วแสงมีค่าคงที่เสมอ ไม่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตหรือแหล่งกำเนิดแสง และไม่มีวัตถุใดที่จะเคลื่อนที่ได้เร็วกว่าความเร็วแสง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งในกรอบ S ปล่อยสัญญาณแสงออกไปด้วยความเร็ว c เทียบกับผู้สังเกต จงหาว่าผู้สังเกตที่อยู่นิ่งในกรอบ S′ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว (4/5)c ในแนวแกน x - x′ ทิศออกจาก S จะสังเกตความเร็วของสัญญาณแสงเป็นเท่าใด

วิธีทำ สัญญาณแสงที่ส่งออกไปเปรียบได้กับวัตถุ ดังนั้น $u_x = (4/5)c$

จาก $$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

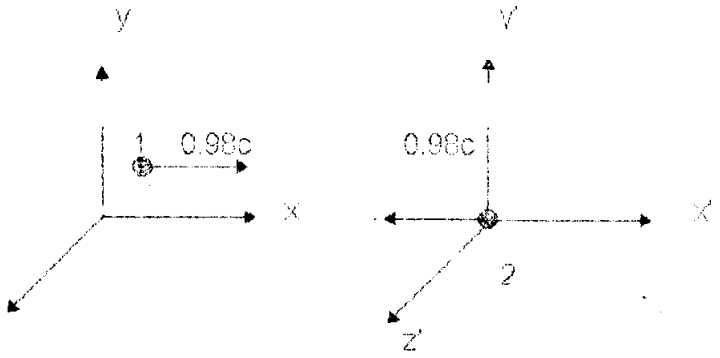
แทนค่า $$u' = \frac{c - (4/5)c}{1 - \frac{(4/5)c(c)}{c^2}}$$

$$= c$$

ดังนั้น ความเร็วสัญญาณแสงที่สังเกตได้ในกรอบ S′ เท่ากับ c

ตัวอย่างที่ 2 ให้อนุภาคสองอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0.98c เท่ากัน ในทิศสวนทางกัน จงหาว่าอนุภาคแต่ละตัวจะสังเกตเห็นอนุภาคอีกตัวมีความเร็วเท่าใด

วิธีทำ ให้อนุภาคทั้งสองอยู่ในกรอบเฉื่อย S และ S′ ซึ่งกำลังเคลื่อนที่สวนทางกัน



จาก $u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}$

$= \dfrac{0.95c + 0.95c}{1 + \dfrac{(0.95c)(0.95c)}{c^2}}$

$= \dfrac{1.90\ c}{1 + 0.9025}$

$= 0.997c$

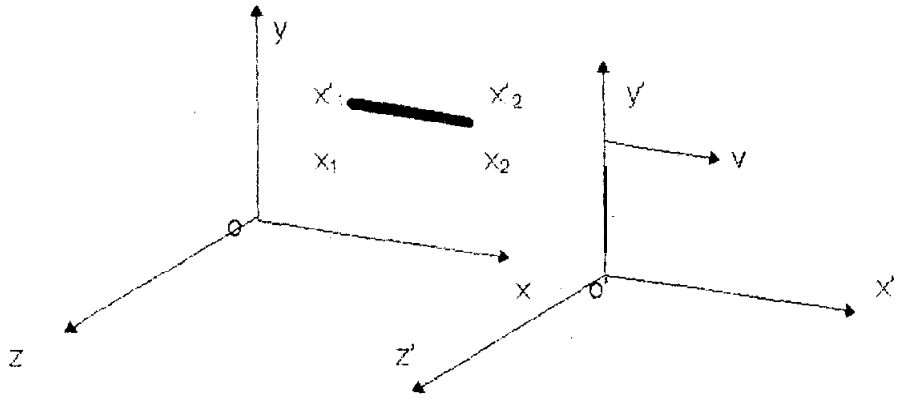
นั่นคือ ผู้สังเกตใน S′ หรืออนุภาคที่ 2 จะเห็นความเร็วของอนุภาคที่ 1 เป็น 0.997c มีทิศตามแกน +x ซึ่งมีค่าน้อยกว่า c และพบว่าถ้าใช้การแปลงแบบกาลิเลโอจะเห็นความเร็วซึ่งกันและกันเป็น = 1.90 c ซึ่งมากกว่า c

กิจกรรม 11.1

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบข้อแตกต่างระหว่างการแปลงแบบกาลิเลโอกับการแปลงแบบลอเรนตซ์โดยแจกแจงรายละเอียดเกี่ยวกับกรรมวิธีและผลลัพธ์ที่ได้ในแต่ละแบบว่าเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

11.7 ความยาวและเวลาในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ความยาวและเวลาในฟิสิกส์ยุคเก่า ผู้สังเกตในแต่ละกรอบอ้างอิงจะวัดได้เท่ากันแต่ในทฤษฎีสัมพัทธภาพวัดได้ต่างกัน ดังการวิเคราะห์ต่อไปนี้



รูปที่ 11.5 แสดงความยาววัตถุที่สังเกตในกรอบอ้างอิง S และ S′

ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง S จะวัดความยาวได้เท่ากับ $x_2 - x_1$ ให้เป็น L และความยาวที่วัดได้ในกรอบอ้างอิง s′ เท่ากับ $x'_2 - x'_1$ ให้เป็น L′ ซึ่งในการวัดความยาวของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต้องวัดที่เวลาเดียวกัน คือ ในกรอบ S วัดที่เวลา $t_1 = t_2$ และในกรอบ S′ วัดที่เวลา $t'_1 = t'_2$

$$L' = x'_2 - x'_1$$

แต่จาก $x' = \gamma(x - vt)$ จะได้

$$\begin{aligned} L' &= \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \\ &= \gamma(x_2 - x_1) \\ &= \gamma L \end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ ความสัมพันธ์ของความยาวที่วัดได้ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ เป็นดังนี้

$$L' = \gamma L \qquad \text{.....11.22}$$

ซึ่งเห็นว่าความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับความยาวจะมากกว่าความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่เทียบกับความยาวนั้น หรือความยาวที่เคลื่อนที่เทียบกับผู้สังเกตจะหดสั้นลงด้วยแฟกเตอร์ $\gamma = 1/[1 - (v^2/c^2]^{1/2}$ ถ้า $v << c$ จะได้ $\gamma = 1$ ซึ่ง $L = L'$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วน้อย ๆ ผู้สังเกตจะวัดความเร็วได้เท่ากัน อนึ่ง พึงเข้าใจว่าการหดตัวของความยาวนี้หดเฉพาะด้านที่ขนานกับการเคลื่อนที่เท่านั้นด้านที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่จะวัดได้เท่าเดิม การหดตัวนี้ไม่ใช่การหดตัวทางกายภาพ เช่น การหดตัวที่อุณหภูมิต่ำๆ หรือการที่วัตถุถูกอัดด้วยแรงอัด แต่การเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันระหว่างผู้สังเกตกับวัตถุเป็นสาเหตุให้วัดได้สั้นลง และจะวัดได้สั้นลงมากน้อยเพียงไรขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์นั้น ความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเรียกว่า ความยาวเฉพาะ (proper length) ความยาวที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับความยาว (วัตถุ) นั้น เรียกว่า ความยาวไม่เฉพาะ (nonproper length)

สำหรับการวัดช่วงเวลาในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S และ S′ เราพิจารณาได้ดังนี้ ให้เหตุการณ์สองเหตุการณ์เกิดที่เวลา t_1 และ t_2 ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S ที่ตำแหน่งหนึ่ง คือ $x_2 = x_1$ ยกตัวอย่างเช่น ให้แสงวาบออกจากแหล่งกำเนิดอันหนึ่งที่เวลา t_1 และที่ตำแหน่ง x_1 เวลาต่อมา t_2 แสงวาบจากแหล่งกำเนิดอันเดียวกันนั้นที่ตำแหน่ง $x_2 = x_1$ ดังนั้นช่วงเวลาในกรอบ S นี้จะเป็น

$$At' = t_2 = t_1$$

จากการแปลงแบบลอเรนตซ์ จะได้

$$At = \gamma\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right)$$

$$= \gamma(t'_2 - t'_1) + \frac{\gamma v}{c^2}(x'_2 - x'_1) \qquad \ldots\ldots 11.23$$

เนื่องจากเมื่อเวลาผ่านไปกรอบ S′ เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v ในแนวแกน x - x′ ทำให้ตำแหน่งที่เกิดเหตุการณ์ครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สองไม่เท่ากัน แต่พิจารณาได้จาก

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$$
$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$
$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$
$$= \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1)$$

เนื่องจาก $x_2 = x_1$ ดังนั้น จะได้

$$x'_2 - x'_1 = -\gamma v(t_2 - t_1) = -\gamma v\Delta t$$

แทนในสมการที่ 11.23 และให้ $t'_2 - t', = At'$ จะได้

$$At = \gamma\Delta t' + \frac{\gamma v(-\gamma v\Delta t)}{c^2}$$

$$= \gamma\Delta t' - \frac{\gamma^2 v^2 At}{c^2}$$

$$= \gamma\Delta t' - (\gamma^2 - 1)\, At$$

$$\gamma^2\Delta t = \gamma\Delta t'$$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t \qquad \ldots\ldots 11.24$$

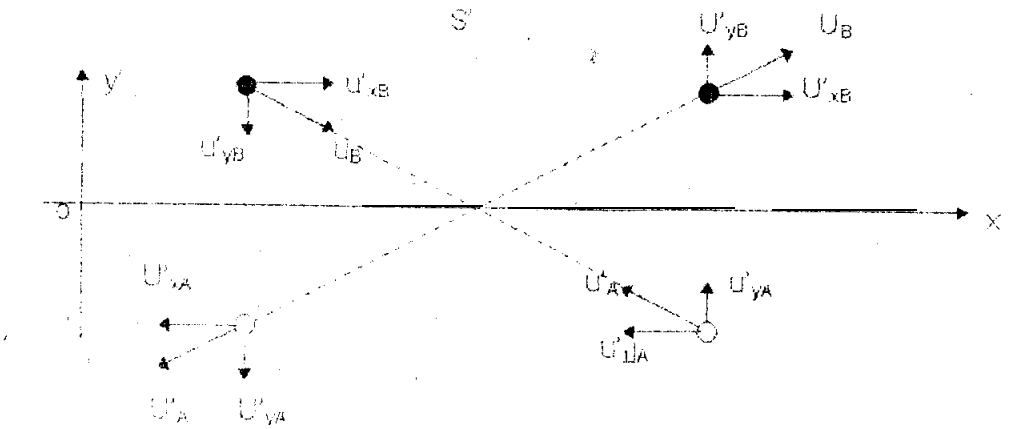
จะเห็นว่าช่วงเวลาที่วัดในกรอบ S และ S′ ไม่เท่ากัน โดยช่วงเวลาที่วัดได้ในกรอบ S′ จะมากกว่าช่วงเวลาที่วัดได้ในกรอบ S (เพราะ $\gamma > 1$) เรากล่าวได้ว่าช่วงเวลาที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับเหตุการณ์จะน้อยกว่าช่วงเวลาที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์เทียบกับเหตุการณ์ข้อสังเกต ถ้าความเร็วของกรอบ s′ เท่ากับศูนย์เทียบกับเท่ากับกรอบ S ($v = 0$) จะได้ $x'_1 = x_1$ และ $x'_2 = x_2$ ทั้งสองกรอบจะเห็นเหตุการณ์ที่ตำแหน่งเดียวกัน และช่วงเวลาก็จะเท่ากันด้วย หรือมองได้ว่ากรอบ S และ S′ เป็นกรอบเดียวกันนั่นเอง เวลาที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับเหตุการณ์ เรียกว่า เวลาเฉพาะ (proper time) และเวลาที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับเหตุการณ์เรียกว่า เวลาไม่เฉพาะ (nonproper time) เพื่อให้เข้าใจเรื่องเวลาเฉพาะ

และไม่เฉพาะลองพิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้มีคนขับจรวดลำหนึ่งความเร็วสูงมากใกล้ความเร็วแสงผ่านจากจุด ก. ไปยังจุด ข. บนโลก (สมมติห่างกันมาก) คนขับจรวดเป็นผู้สังเกตที่อยู่ในเหตุการณ์สองเหตุการณ์คือ ผ่าน ก. และผ่าน ข. หรืออยู่ในกรอบอ้างอิงของเหตุการณ์ จะวัดเวลาได้เป็นเวลาเฉพาะซึ่งน้อยกว่าผู้สังเกตบนโลกซึ่งไม่ได้อยู่ในเหตุการณ์ทั้งสองและการวัดของผู้สังเกตบนโลกต้องใช้นาฬิกาสองเรือนที่มีสมบัติเหมือนกันทุกประการวางที่ ก. และ ข. เวลาที่วัดโดยผู้สังเกตบนโลกนี้เป็นเวลาไม่เฉพาะ ข้อสังเกตเวลาเฉพาะวัดได้โดยนาฬิกาเพียงเรือนเดียว แต่เวลาไม่เฉพาะวัดได้โดยใช้นาฬิกาสองเรือนและเหตุการณ์เกิดขึ้นคนละตำแหน่ง คือเหตุการณ์ผ่าน ก. ซึ่งห่างจากผู้สังเกตระยะหนึ่ง และเหตุการณ์ผ่าน ข. ซึ่งห่างจากผู้สังเกตอีกระยะหนึ่ง แต่การผ่านจุด ก. และจุด ข. ของคนขับจรวดจะเป็นตำแหน่งเดียวกัน

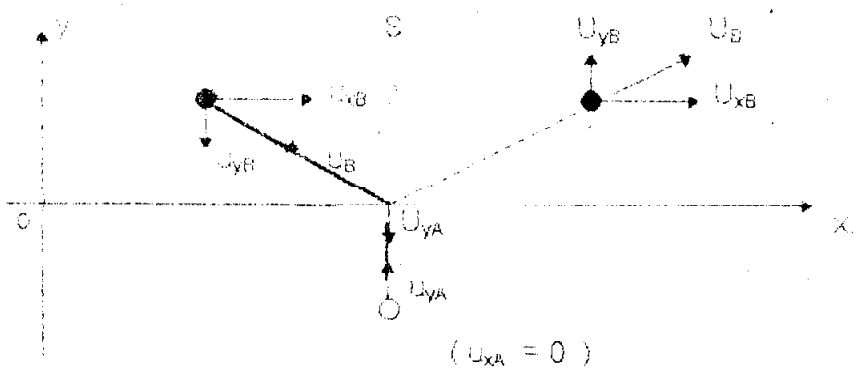
11.8 มวลและโมเมนตัมในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ในกลศาสตร์นิวตันหรือกลศาสตร์แบบเก่านั้น มวลถือว่าเป็นปริมาณที่คงที่คือวัดได้เท่ากันทุก ๆ กรอบอ้างอิงหรือเรียกว่าเป็นปริมาณที่สัมบูรณ์ แต่ในทฤษฎีสัมพัทธภาพมวลจะเป็นปริมาณไม่สัมบูรณ์เช่นเดียวกับเวลา คือผู้สังเกตในแต่ละกรอบอ้างอิงวัดมวลได้ไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างมวลและผู้สังเกต เราสามารถใช้หลักการของกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในกลศาสตร์นิวตันและการแปลงแบบลอเรนตซ์หาความสัมพันธ์ของมวลที่สังเกตในแต่ละกรอบอ้างอิงดังนี้

พิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S′ ของมวลสองก้อน A, B ที่มีมวลเท่ากัน ความเร็วขนาดเท่ากันทิศทางตรงข้ามกันดังรูป 11.6 ความเร็วก่อนชนเป็น u_A และ u_B จากกลศาสตร์นิวตันเนื่องจากโมเมนตัมรวมก่อนชนเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $u'_{yA} = -u'_{yB}$ และ $u'_{xA} = -u'_{xB}$ และเนื่องจากการชนแบบยืดหยุ่นพลังงานจลน์ไม่มีการสูญหายไปนั่นคือ ขนาดของความเร็วหลังชนจะเท่ากับขนาดความเร็วก่อนชน และโมเมนตัมรวมหลังชนเท่ากับก่อนชนคือต้องเป็นศูนย์เราได้ $u'_{yA} = -U'_{yA} = U'_{yB} = -u'_{yB}$ และ $u'_{xA} = U'_{xA} = -U'_{xB} = -u'_{xB}$ ซึ่งแสดงว่าผู้สังเกตใน S′ นี้เห็นความเร็วในแกน y ของแต่ละก้อนจะกลับทิศหลังชนแล้ว แต่ความเร็วในแกน x ของแต่ละก้อนหลังชนแล้วยังคงมีทิศเดิม



รูป 11.6 แสดงการชนแบบยืดหยุ่นที่สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S ของมวล A และ B ที่มีมวลเท่ากัน ความเร็วก่อนชนมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม



รูป 11.7 แสดงการชนกันของมวล A และ B ที่สังเกตได้ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S

เนื่องจากความเร็วของ S′ เท่ากับ V เทียบกับ S ในทิศ x - x′ ทำให้

$$v = u'_{xB} = -u_{xA}$$

จากการแปลงแบบกาลิเลโอ $u_x = u'_x + v \quad u_y = u'_y \quad u'_z = u'_z$

สำหรับมวล A $u_{xA} = u'_{xA} + v = -v + v = 0$

$u_{yA} = u'_{yA}$

สำหรับมวล B $u_{xB} = u'_{xB} + v = v + v = 2v$

$u_{yB} = u'_{yB}$

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม ทำให้ได้ ว่า $u_{yA} = -U_{yA}$ และ $u_{yB} = -U_{yB}$ โมเมนตัมของมวล A หายไป $2mu_A$ เท่ากับโมเมนตัมที่เพิ่มขึ้นในมวล B ดังนั้นในแง่ของขนาด เราได้

$$2mu_{yA} = 2mu_{yB} \qquad \ldots\ldots 11.25$$

เนื่องจากมวลเท่ากัน เราได้ว่า

$$u_{yA} = u_{yB}$$

ที่ผ่านมาทั้งหมดเราพิจารณาแบบกลศาสตร์ของนิวตัน ต่อจากนี้เราจะพิจารณาโดยการใช้การแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์ เราจะได้

$$u_{yB} = \frac{u_{yB}\,[1 - \beta^2]^{1/2}}{1 - u_{xB}v/c^2}$$

และสำหรับมวล A ซึ่ง $u_{xA} = 0$ จะได้ว่า

$$u'_{yA} = u_{yA}\,[1 - \beta^2]^{1/2}$$

จะเห็นว่า องค์ประกอบตามแกน y ได้รับผลจากการแปลงแบบสัมพัทธภาพ และสังเกตว่าปริมาณที่เท่ากันในกรอบอ้างอิงหนึ่ง จะวัดได้ไม่เท่ากันในกรอบอ้างอิงอื่น ๆ เป็นต้นว่า ถ้า $u'_{yB} = u'_{yA}$ จากสมการข้างบนนี้ เราจะได้ว่า

$$u_{yA} = u_{yB}\frac{1}{1 - u_{xB}v/c^2}$$

จะเห็นว่า ขัดแย้งกับเมื่อใช้กลศาสตร์แบบนิวตัน คือสมการ 11.2 และถ้าเราคำนวณโมเมนตัมตามสมการแบบเดิม คือ $p = mu$ หรือ $p' = mu'$ จะพบว่าเมื่อโมเมนตัมรวมคงที่ในกรอบอ้างอิงหนึ่ง แต่จะไม่คงที่ในกรอบอ้างอิงอื่น ๆ

จากผลข้างต้น จะขัดแย้งกับสัจพจน์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพในข้อที่ว่า กฎทางฟิสิกส์จะเหมือนกันในทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย แสดงว่านิยามของโมเมนตัมแบบเดิมนั้นใช้ได้ไม่ครอบคลุม ทั้งหมดจากสมการที่ผ่านมาข้างต้นความขัดแย้งกันจะหมดไปเมื่อ $u_{xB} << c$ และ $v << c$ นั่นแสดงว่าที่ความเร็วสูง ๆ แล้วกลศาสตร์นิวตันใช้ไม่ได้ จึงต้องหานิยามของโมเมนตัมที่กว้างกว่าใช้ได้ทุกกรณีและสามารถลดรูปแบบสมการดั้งเดิมแบบนิวตันได้

จากสมการข้างต้น เราอยู่บนพื้นฐานที่มวลของแต่ละก้อนเท่ากัน อย่างไรก็ตามในกรณีของเวลา และความยาว ผลการวัดขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต ดังนั้นมวลเราเขียนให้ไม่เท่ากัน โดยจากสมการ 11.25 เขียนได้เป็น

$$2m_A u_{yA} = 2m_B u_{yB}$$

จากรูปที่ 11.7 ความเร็วของ A และ B ไม่เท่ากัน จากสมการนี้ เราได้ว่า

$$m_B = \frac{m_A u_{yA}}{u_{yB}} = \frac{m_A}{1 - u_{xB}v/c^2} \quad \ldots\ldots 11.26$$

จากการแปลงความเร็วแบบลอเรนตซ์ และจาก $v = u'_{xB}$ จะได้ว่า

$$u'_{xB} \ (=v) = \frac{u_{xB} - v}{1 - u_{xB}v/c^2}$$

แก้สมการหาค่า v จะได้

$$v = \frac{c^2\left(1 - \sqrt{1 - (u_{xB}c)^2}\right)}{u_{XB}}$$

แทน v ในสมการ 11.26 ได้

$$m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - (u_{xB}/c)^2}} \quad \ldots\ldots 11.27$$

เนื่องจากมวล A อยู่นิ่งใน S เราเรียกว่า มวลนิ่ง (rest mass) ใช้สัญลักษณ์เป็น m_o สำหรับมวล B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_{xB} (แทนด้วย u) เรียกว่า มวลสัมพัทธ์ (relative mass) เขียนสมการข้างนี้ใหม่ดังนี้

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \ldots\ldots 11.28$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้า $u = 0$ ได้ว่า $m = m_0$ ถ้ามวลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $u << c$ จะได้ $m \cong m_o$ จากสมการของโมเมนตัมแบบนิวตัน $p = mu$ เราคงสามารถคงรูปแบบของสมการนี้ได้เมื่อเราใช้สมการทั่วไป คือแทน m ด้วยมวลสัมพัทธ์ ดังนี้

$$p = mu = \frac{m_o u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \ldots\ldots 11.29$$

ในแต่ละองค์ประกอบเขียนโมเมนตัม ได้ดังนี้

$$p_x = \frac{m_o u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \ldots\ldots 11.30$$

$$p_y = \frac{m_o u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$p_z = \frac{m_o u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

โดยที่ $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ เป็นขนาดความเร็วของวัตถุ

11.9 แรงและพลังงานในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงและพลังงานที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นแรงที่กระทำต่ออนุภาคเดี่ยว (single particle) และพลังงานของอนุภาคเดี่ยว จากกลศาสตร์นิวตัน กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน คือ

$$F = \frac{d}{dt}(p)$$

แทน p ด้วย $= mu = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

และจากนิยามของพลังงานจลน์ในกลศาสตร์นิวตัน คือ

$$E_k = \int F.dl$$

ให้การเคลื่อนที่อยู่ในแนวแกน x เราเขียนได้ว่า

$$E_k = \int F.dl = \int F.dx = \int \frac{d}{dt}(mu)dx = \int(mdu + udm)u = \int(mudu + u^2dm) \quad .....11.31$$

จากสมการของมวลสัมพัทธ์ $m = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$m^2c^2 - m^2u^2 = m_0^2c^2$$

โดยการดิฟเฟอเรนชิเอต สมการข้างต้นนี้จะได้

$$2mc^2\, dm - m^2\, 2u\, du - u^2\, 2m\, dm = o$$

หารตลอดด้วย 2m จะได้

$$mu\, du + u^2dm = c^2dm$$

ดังนั้น จากสมการ 11.31 เราเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_k = \int c^2dm = c^2\int dm = mc^2 - m_0c^2 \quad ..... 11.32$$

โดยสมการมวลสัมพัทธ์ เราได้ว่า

$$E_k = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right] \quad ..... 11.33$$

เราให้ $mc^2 = E$ ซึ่งเป็นพลังงานรวม เราเขียน สมการ 11.33 ได้เป็น

$$E = m_0c^2 + E_k \quad .....11.34$$

และเรียก m_0c^2 ว่าเป็นพลังงานของมวลนิ่ง ซึ่งเป็นพลังงานของอนุภาคขณะที่อยู่นิ่ง นั่นเอง จะเห็นว่าพลังงานรวม เท่ากับ พลังงานจลน์ บวกกับพลังงานของมวลนิ่ง ในที่นี้พลังงานศักย์ไม่มี เพราะเป็นอนุภาคเดี่ยว จากสมการ 11.33 เราสามารถลดรูปพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ เป็นสมการพลังงานจลน์แบบนิวตัน ได้ดังนี้ เขียนสมการใหม่เป็น

$$E_k = m_0c^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

โดยการใช้ทฤษฎีบททวินาม กระจายวงเล็บเล็ก ได้ดังนี้

$$E_k = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \ldots\ldots - 1\right]$$

เมื่อ v << c สามารถละพจน์ที่ยกกำลังมากกว่าสองทิ้งไป จะได้

$$E_k = \frac{1}{2}m_0u^2$$

จะเห็นว่าสมการนี้ คือพลังงานจลน์แบบนิวตันที่คุ้นเคยกันนั่นเอง

จากสมการ $F = dp/dt = d(mu)/dt$ หรือ

$$F = \frac{mdu}{dt} + \frac{udm}{dt}$$

จาก $m = E/c^2$ จะได้ $\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(E_k + m_0c^2) = \frac{1}{c^2}\frac{dE_k}{dt}$

แต่ $\frac{dE_k}{dt} = \frac{(F \cdot dl)}{dt} = F \cdot \frac{dl}{dt} = F \cdot u$

ดังนั้น $\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}F.u$

เราจะได้ความเร่งในกรณีทั่วไป เป็นดังนี้

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{u}{mc^2}(F \cdot u) \qquad \ldots\ldots 11.35$$

ในกรณีที่ แรงกระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุในทิศ ขนานกับความเร็ว มีผลทำให้วัตถุมีความเร่งในทิศเดียวกับแรงและความเร็วด้วยเช่นกัน กรณีนี้เราจะได้แรงในแนวขนานกับความเร็วเป็นดังนี้ (การพิสูจน์จะอยู่ในแบบฝึกหัด)

$$F_{//} = \frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}a_{//} \qquad \ldots\ldots 11.36$$

เราอาจเรียกพจน์ $\frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}$ ว่ามวลตามยาว (longitudinal mass)

ทำนองเดียวกัน แรงในแนวตั้งฉากกับความเร็วเป็น ดังนี้ (การพิสูจน์จะอยู่ในแบบฝึกหัด)

$$F_{\perp} = \frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} a_{\perp} \qquad \text{.....11.37}$$

เราอาจเรียกเทอม $\frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$ ว่ามวลตามขวาง (transverse mass)

กิจกรรม 11.2

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์ในทฤษฎีสัมพัทธภาพกับกลศาสตร์แบบนิวตัน

11.9 สรุป

จากเนื้อหาในบทนี้ทำให้ผู้อ่านทราบว่า ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ แล้วการคำนวณค่าต่าง ๆ ต้องใช้กลศาสตร์แบบนิวตัน ซึ่งเป็นเนื้อหาในบทก่อน ๆ แต่ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วใกล้แสงแล้วจะใช้กลศาสตร์แบบนิวตันไม่ได้ ต้องใช้กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ นอกจากนี้ในเรื่องไฟฟ้า แม่เหล็ก ก็ยังมีการเกี่ยวข้องกับทฤษฎีสัมพัทธภาพอีกด้วย และที่สำคัญทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (General Relativity) ยังไม่ได้กล่าวถึงในบทนี้ นักศึกษาหรือผู้อ่านที่สนใจสามารถเรียนได้ในวิชาฟิสิกส์ขั้นสูงต่อไป

แบบฝึกหัดที่ 11

1. ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S สังเกตได้ว่ามีเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง x = 100 km, y = 10 km, z = 1 km เวลา 1 = 0.5 ms ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย S′ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว -0.8c ในแนวแกน x - x′ จะเห็นเหตุการณ์เดียวกันนี้เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง x′ y′ z′ และเวลา t′ เท่าใด

   ตอบ x′ = 367 km y′ = 10 km z′ = 1 km และ t′ = 1.28 ms

2. ที่เวลา t′ =0.4 ms ในกรอบ S′ อนุภาคอยู่ที่จุด x = 10 m, y′ = 4 m, z′ = 6 **m** จงหาตำแหน่ง **x,** y, **z** และเวลาในกรอบ **s** เมื่อความเร็ว **v** ของ **s'** เทียบกับ S เป็น ก) +500 m/s ข) -500 **m/s** ค) +2 **x** 10^8 **m/s**

   ตอบ ก) 10.2m, 4m, 6m, 4 x 10^{-4} s ข) 9.8m, 4m, 6m, 4 x 10^{-4} s

   ค) **107.4 km,** 4m, 6m, 5.37 x 10^{-4} S

3. ที่เวลา 1, ms มีระเบิดเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง x = 5km ในกรอบอ้างอิง S จงหาว่าเกิดที่เวลาเท่าใดในกรอบ S′ ถ้าตำแหน่งที่ระเบิดปรากฏคือ x′ = 35.354 km

   ตอบ 1.0067 ms

4. ยานอวกาศมีความยาวเมื่ออยู่นิ่งเท่ากับ 100 m ใช้เวลาในการเคลื่อนที่ผ่านผู้สังเกตคนหนึ่งบนพื้นโลกเท่ากับ 4 ms จงหาความเร็วของจรวดสัมพัทธ์กับโลก

   ตอบ 0.083 c

5. จรวด A เคลื่อนที่ไปทางขวาจรวด B เคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว 0.8 c และ 0.6c ตามลำดับสัมพัทธ์กับโลก ให้หาความเร็วของจรวด A เมื่อวัดโดยจรวด B

   ตอบ 0.94 c