บทที่ 7
ความยืดหยุ่นและการเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต

เค้าโครงเรื่อง

7.1 ความเค้นและความเครียด

ความเค้นเฉือน ความเค้นอัด และความเค้นดึง

ความเครียดดึง ความเครียดอัด ความเครียดเฉือน และความเครียดปริมาตร

7.2 มอดุลัสของความยืดหยุ่น

มอดุลัสของญัง มอดุลัสเฉือน มอดุลัสเชิงปริมาตร และสภาพอัดได้

7.3 ค่าคงตัวของแรง

ค่าคงตัวของแรงหรือความแข็งตึงหรือค่าคงตัวของความยืดหยุ่น

7.4 การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

การเคลื่อนที่แบบเป็นคาบและปริมาณที่เกี่ยวข้อง

7.5 การเคลื่อนที่ของมวลยึดติดกับสปริง

พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของสปริง

7.6 ลูกตุ้มอย่างง่าย

สมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่เชิงมุม

7.7 ลูกตุ้มฟิสิกัล

การแกว่งภายใต้แรงโน้มถ่วง

7.8 ลูกตุ้มชนิดบิด

ทอร์กคืนตัวและสมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

7.9 วงจรออสซิลเลเตอร์

วงจรไฟฟ้าแอลซีและสมการการออสซิลเลต

7.10 การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด

การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดในกรณีที่เคลื่อนที่ไปทางเดียวกันโดยมีความถี่เท่ากัน และในกรณีที่เคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากกันโดยมีความถี่เท่ากัน

7.11 การออสซิลเลตแบบหน่วง

แรงต้านทานหรือแรงหน่วงและพารามิเตอร์ของความหน่วง

7.12 การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ

การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำจากภายนอกแบบเป็นคาบไทยไม่มีแรงหน่วง และโดยมีแรงหน่วง การสั่นพ้อง

สาระสำคัญ

1. ปริมาณทางฟิสิกส์สำหรับอธิบายการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือขนาดของวัตถุ คือ ความเค้นและความเครียด โดยความเค้นแปรในสัดส่วนโดยตรงกับแรงกระทำต่อวัตถุทำให้รูปทรงเปลี่ยนแปลงไป และความเครียดเป็นปริมาณซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลง

2. อัตราส่วนระหว่างความเค้นกับความเครียด เรียกว่า มอดุลัสของความยืดหยุ่น ซึ่งมี 3 ชนิด คือ มอดุลัสของยัง มอดุลัสเฉือน และมอดุลัสเชิงปริมาตร

3. การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายมีลักษณะเป็นคาบ โดยมีสมการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

และมีความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ คือ

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบเรียกว่า คาบ (T)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ส่วนกลับของคาบคือ ความถี่ของการเคลื่อนที่ $(f) = \frac{1}{T}$

มวลติดกับสปริงแขวนในแนวดิ่งหรือเคลื่อนที่ในแนวระนาบบนพื้นเรียบที่ไม่มีแรงเสียดทานจะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมีคาบของการเคลื่อนที่

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

เมื่อ k คือ ค่าคงตัวของแรงหรือค่าคงตัวของสปริง
และ m คือ มวลที่ยึดติดกับสปริง

พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิก คือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \alpha)$$

พลังงานรวม $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$ = ค่าคงตัว

ลูกตุ้มอย่างง่ายความยาว L ไม่คิดน้ำหนักของเชือกแขวนและแกว่งด้วยมุมเล็ก ๆ จะเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยมีคาบของการเคลื่อนที่

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ลูกตุ้มฟิสิกัล เคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายรอบแกนที่ไม่ผ่านศูนย์กลางมวล โดยมีคาบของการเคลื่อนที่

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุน
และ D คือ ระยะทางจากจุดบนแกนหมุนถึงศูนย์กลางมวลในแนวตั้งฉาก

การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด ซึ่งมีแนวตั้งฉากซึ่งกันและกันด้วยความถี่เดียวกัน จะรวมกันเป็นรูปลิซซาจู

4. การออสซิลเลตแบบหน่วงเนื่องจากความต้านทาน ทำให้ระบบสูญเสียพลังงานไป จะมีความถี่เชิงมุมน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์และแอมปลิจูดจะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำจากภายนอกซึ่งมีลักษณะเป็นคาบ ถ้าความถี่ของแรงกระทำเท่ากับความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แรงกระทำจะถ่ายทอดพลังงานแก่ออสซิลเลเตอร์ได้สูงสุด

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. อธิบายความหมายของปริมาณที่แสดงถึงการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ เช่น ความเค้น ความเครียด และมอดุลัสของความยืดหยุ่นได้

2. แสดงกราฟของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะกระจัดกับเวลา ความเร็วกับเวลา และความเร่งกับเวลาได้

3. ระบุตัวอย่างปรากฏการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกิดจากการแทรกสอดและการสั่นพ้องได้

4. แสดงวิธีคำนวณหาปริมาณทางฟิสิกส์ที่กล่าวไว้ในบทนี้ ตามตัวอย่างที่ให้ไว้และแบบฝึกหัดข้างท้ายบทได้

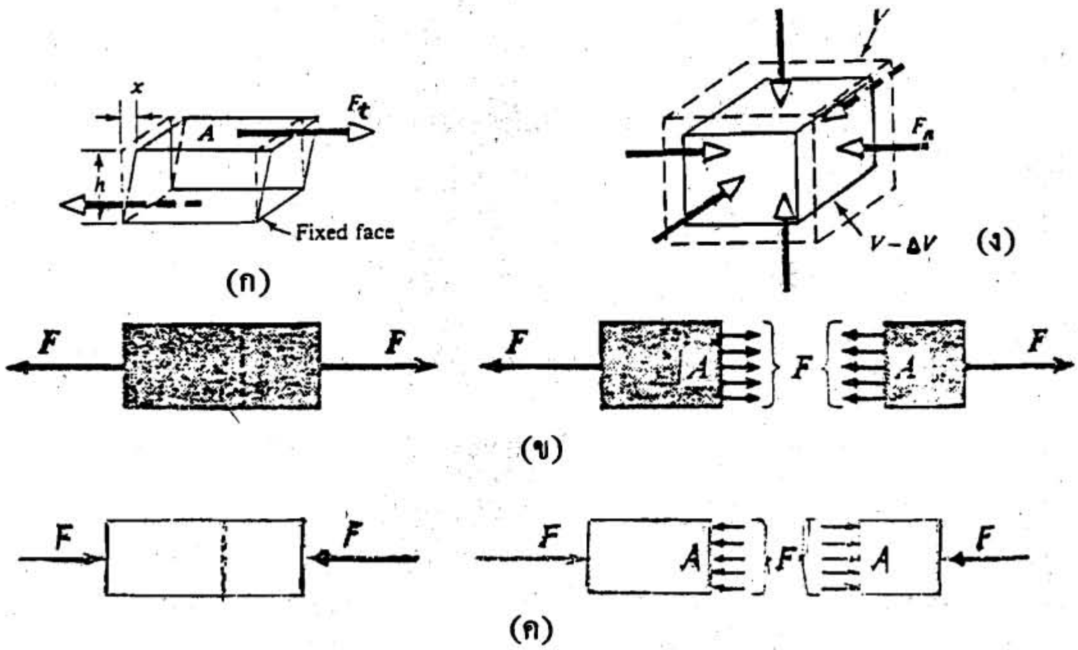
ในบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุ "แข็งเกร็ง" โดยสมมติว่า วัตถุนั้นไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างและขนาดเมื่อถูกแรงกระทำจากภายนอก ซึ่งเป็นข้อสมมติเพื่อให้สะดวกในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ แต่ในความเป็นจริงสสารหรือวัตถุทุกชนิดย่อมเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือขนาดได้เมื่อมีแรงกระทำ เช่น ยืด หด หรือบิดตัว ในบทนี้จะกล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์สำหรับใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือขนาดต่อไป

7.1 ความเค้นและความเครียด (stress and strain)

ความเค้น

เมื่อวัตถุซึ่งมีพื้นที่ภาคตัด A ได้รับแรงกระทำ F ดึงปลายทั้งสองข้างไว้ โดยแรง F เท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม พิจารณารอยตัดใด ๆ ในแนวตั้งฉากกับความยาว ดังรูปที่ 7.1 ตามเส้นประเนื่องจากทุกส่วนของแท่งวัสดุอยู่ในสภาพสมดุล ส่วนที่ตั้งฉากทางขวาจะดึงทางซ้ายด้วยแรง F และส่วนทางซ้ายก็จะดึงทางขวาด้วยแรง F เท่ากันเช่นกัน

แรงดึงนี้จะกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดภาคตัด A ดังแสดงด้วยลูกศรขนาดสั้นในรูป ดังนั้น จึงจะได้คำนิยามสำหรับความเค้นว่าคือ



รูปที่ 7.1 (ก) ความเค้นเฉือน (ข) ความเค้นดึง (ค) ความเค้นอัด (ง) ความเค้นปริมาตร

อัตราส่วนระหว่างแรง F ต่อพื้นที่ภาคตัด A ดังนี้

$$\text{ความเค้น} = \frac{F}{A} \qquad \text{........7.1}$$

ความเค้นมีหน่วยเป็นนิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) เนื่องจากแรงกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัด เราจึงเรียกเป็น ความเค้นตั้งฉาก (normal stress)

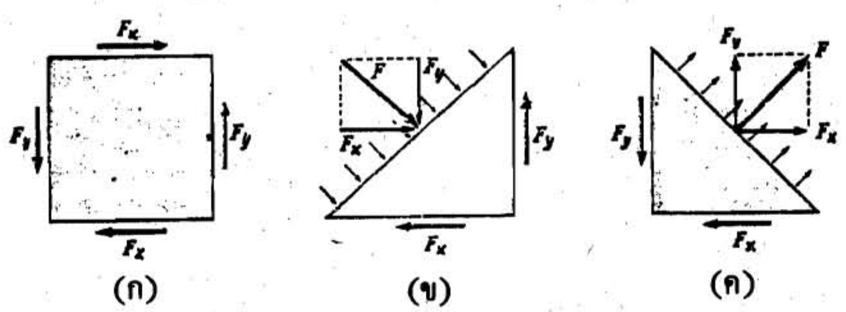
$$\text{ความเค้นตั้งฉาก} = \frac{F_n}{A} \qquad \text{........7.2}$$

ความเค้นตั้งฉากมีสองชนิด คือ ความเค้นดึง (รูปที่ 7.1 (ข)) และความเค้นอัด (compressive stress) รูปที่ 7.1 (ค) กรณีนี้แท่งวัตถุมีแรงอัดเข้าหากันจากปลายทั้งสอง แต่ละส่วนอัดเข้าหากันจึงเรียกเป็นความเค้นอัด

ต่อไปพิจารณาภาคตัดขวางในแนวทิศใด ๆ ที่ไม่ตั้งฉากกับวัตถุหรือในกรณีที่แรงกระทำในแนวสัมผัสกับพื้นที่ อัตราส่วนระหว่างแรงตามแนวสัมผัสกับพื้นที่ F_t ต่อพื้นที่ A (A คือพื้นที่ผิวที่สัมผัสกับแรงกระทำ) เรียกว่า ความเค้นแนวสัมผัส (tangential stress) หรือความเค้นเฉือน (shearing stress) ดังรูปที่ 7.1 (ก) เขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$\text{ความเค้นเฉือน} = \frac{F_t}{A} \qquad \text{........7.3}$$

ถ้าเราเลือกรอยตัดใด ๆ ที่ไม่ตั้งฉากดังกล่าวมาแล้ว ความเค้นก็จะมีทั้งความเค้นเฉือนและความเค้นอัด ดูรูปที่ 7.2

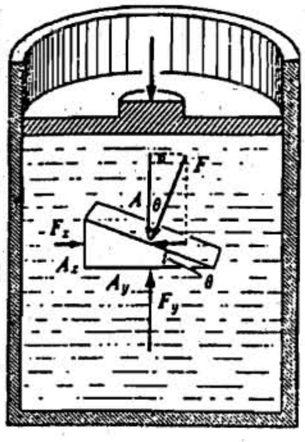


รูปที่ 7.2 (ก) วัตถุกำลังถูกแรงเฉือน (shear) (ข) ความเค้นตามเส้นทแยงมุมเป็นความเค้นอัด (ค) ตามอีกเส้นหนึ่งเป็นความเค้นดึง

พิจารณารูปที่ 7.2 แท่งสี่เหลี่ยมซึ่งมีภาคตัดเป็นจัตุรัสในรูปที่ 7.2 (ก) ถูกกระทำด้วยแรงคู่ควบ 2 ชุด ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม เกิดจากแรงคู่หนึ่งคือ F_x และ F_y กระทำตลอดผิวแท่งสี่เหลี่ยมนี้อยู่ในภาวะสมดุล ดังนั้น ทุก ๆ ส่วนของวัตถุแท่งนี้จึงอยู่ในภาวะสมดุลด้วย ดังนั้นแรงที่กระจายตลอดเส้นทแยงมุมในรูปที่ 7.2 (ข) ย่อมมีแรงลัพท์ F ซึ่งมีองค์ประกอบเป็น F_x และ F_y ความเค้นที่รอยตัดนี้จึงเป็นแบบความเค้นอัด แม้ความเค้นด้านขวาและด้านล่างจะเป็นความเค้นเฉือนก็ตาม ในทำนองเดียวกันรูปที่ 7.2 (ค) เราเห็นได้ว่า เส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งเป็นแบบความเค้นดึง

ความเค้นไม่เป็นปริมาณเวคเตอร์ เพราะไม่สามารถกำหนดทิศเป็นอย่างอื่นนอกจากที่ได้นิยามไว้ แรงที่กระทำต่อวัตถุด้านใดด้านหนึ่งย่อมมีทิศจำกัดแน่นอน ความเค้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของปริมาณทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า เทนเซอร์ (Tensor)

ในกรณีที่วัตถุเป็นของไหล แรงที่ของไหลกระทำกับวัตถุในแนวตั้งฉากต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ เรียกว่า ความดัน แทนด้วย P เมื่อของไหลอยู่ภายใต้แรงกดดัน โดยที่ของไหลหมายถึงสารที่ไหลถ่ายเทได้ ดังนั้นจึงหมายรวมทั้งของเหลวและแก๊ส ถ้ามีความเค้นเฉือน ณ จุดใด ๆ ในของไหล ของไหลจะหมุนวนนานเท่านานที่แรงเฉือนยังกระทำอยู่ ดังนั้นของไหลที่อยู่นิ่งหมายถึงความเค้นเฉือนเป็นศูนย์ทุกหนทุกแห่งในของไหล ดังรูปที่ 7.3 แสดงถึงของไหลในกระบอกสูบพร้อมลูกสูบที่ออกแรงกดลงล่าง วัตถุที่เป็นของไหลแสดงด้วยสามเหลี่ยมรูปลิ่ม ถ้าไม่คิดน้ำหนักของของไหลชิ้นนี้ แรงที่กระทำคือแรงที่เกิดจากของไหลส่วนอื่น ๆ พิจารณาเนื่องจากของไหลอยู่นิ่งจะไม่มีความเค้นเฉือนกระทำดังได้กล่าวมาแล้ว จึงมีแต่แรงตั้งฉากที่เท่ากันกระทำต่อลิ่มนี้ กำหนดให้ F_x, F_y และ F เป็นแรงที่กระทำต่อพื้นที่ผิวทั้งสาม เนื่องจากของไหลอยู่ในภาวะสมดุล จะได้ว่า



$$F \sin \theta = F_x \quad \text{และ} \quad F \cos \theta = F_y \qquad \text{........7.4}$$

และพื้นที่ $A \sin \theta = A_x$ และ $A \cos \theta = A_y$ 7.5

โดยการที่สมการ 7.4 หารด้วยสมการ 7.5 จะเห็นได้ว่า

$$\frac{F}{A} = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_y}{A_y} \qquad \text{........7.6}$$

ปรากฏว่าแรงต่อหน่วยพื้นที่มีค่าเท่ากันทุกทิศทาง และเป็นแรงอัดทั้งสิ้น จึงเรียกแรงต่อหน่วย พื้นที่นี้ว่า ความดันในของไหลที่อยู่นิ่ง (hydrostatic pressure) เขียนแทนด้วย P ดังนั้น

รูปที่ 7.3

$$P = \frac{F}{A} \; ; \quad F = PA \qquad \text{........7.7}$$

หน่วยของความดันคือนิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) ปริมาณนี้ไม่เป็นปริมาณเวคเตอร์เช่นเดียวกับความเค้น เพราะว่าไม่สามารถกำหนดทิศทางใด ๆ ให้แก่ความดันได้ จึงสรุปได้ว่า ความดันในของไหลที่อยู่นิ่ง ณ จุดใดๆ ย่อมเท่ากันทุกทิศทาง ดังนั้น จึงอาจเรียกความดันเป็นความเค้นปริมาตร (volume stress) และนิยามได้ว่า

$$\text{ความเค้นปริมาตร} = \text{ความดัน} = P = \frac{F}{A} \quad \text{........7.8}$$

ความเครียด

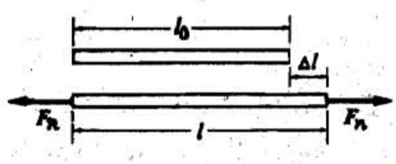
ความเครียดหมายถึง การเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ในมิติหรือรูปร่างของวัตถุ (deformation) หรือเรียกว่าการผิดรูป เมื่อถูกกระทำด้วยความเค้น ความเค้นแบบใดที่กระทำต่อวัตถุก็จะทำให้เกิดความเครียดแบบเดียวกัน เช่นความเค้นดึงทำให้ความยาวเปลี่ยนจาก L_0 เป็น L จึงนิยามความเครียดดึง (tensile strain) ว่า

$$\text{ความเครียดดึง} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{........7.9}$$

เมื่อ $\Delta L = L - L_0$ คืออัตราส่วนระหว่างความยาวที่เพิ่มขึ้นต่อความยาวเดิม ในทำนองเดียวกัน นิยามความเครียดอัดได้ว่า

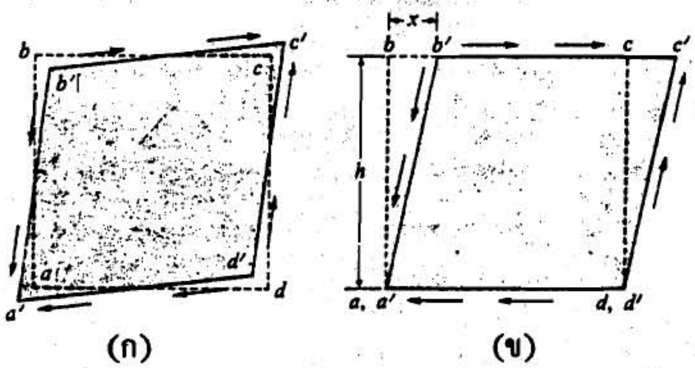
$$\text{ความเครียดอัด} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{......7.10}$$

เมื่อ $\Delta L = L_0 - L$ คืออัตราส่วนระหว่างความยาวที่หดลงต่อความยาวเดิม จากสมการ 7.9 และ 7.10 จะเห็นได้ชัดว่าความเครียดไม่มีหน่วย และความเครียดดึงและความเครียดอัดมีสูตรเหมือนกัน ต่างกันที่ความหมายของ ΔL คือ ในสมการ 7.9 ΔL คือความยาวที่ยืดออกจากเดิม แต่ในสมการ 7.10 ΔL คือความยาวที่หดลง



รูปที่ 7.4 แท่งวัตถุเดิมยาว L_0 เมื่อถูกแรง F_n ดึงหัวท้ายทำให้ได้ความยาวเพิ่มขึ้นเป็น L การยืดออกเป็นไปตลอดแท่ง ไม่ใช่ยืดออกที่หัวและท้ายเท่านั้น

ความเครียดเฉือนทำให้รูปร่างของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปดังรูปที่ 7.5



รูปที่ 7.5 การเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุด้วยแรงเฉือน โดยความเครียดเฉือนเท่ากับ x/h.

รูปที่ 7.5 (ก) แสดงการเปลี่ยนรูปทรงของวัตถุสี่เหลี่ยมเมื่อมีแรงเฉือนมากระทำดังเช่นในรูปที่ 7.2 เส้นประ abcd เป็นรูปทรงของวัตถุเดิมเมื่อยังไม่ถูกแรงกระทำ, ส่วนเส้นทึบ a′ b′ c′ d′ เป็นรูปทรงเมื่อเกิดความเครียดแล้ว จุดศูนย์กลางของรูปที่ 7.5 (ก) เป็นจุดเดียวกันทั้งก่อนและหลังเครียด, ส่วนในรูปที่ 7.5 (ข) มีด้าน ad และ a′d′ ซ้อนร่วมกัน การบิดเบือนรูปทรงของวัตถุนี้เรียกว่าเกิด*ความเครียดเฉือน* ซึ่งความเครียดเฉือนเป็นอัตราส่วนของระยะขจัด x ที่บิดเบือนไปต่อความยาวเดิมของด้านขวาง h

$$\text{ความเครียดเฉือน} = \frac{x}{h} \qquad \text{......7.11}$$

ความเครียดที่เกิดจากความดันในของไหล เรียกว่า ความเครียดปริมาตร (volume strain) ซึ่งนิยามว่าเป็นอัตราส่วนของปริมาตรที่เปลี่ยนไป ΔV ต่อปริมาตรเดิม V ดังนั้น

$$\text{ความเครียดปริมาตร} = \frac{\Delta V}{V} \qquad \text{......7.12}$$

7.2 มอดุลัสของความยืดหยุ่น (Elastic Modulus)

ความเค้นที่ต้องใช้เพื่อให้เกิดความเครียดที่กำหนดให้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติจากที่ได้ซึ่งความเค้น อัตราส่วนของความเค้นต่อความเครียดเรียกว่า มอดุลัสของความยืดหยุ่นของวัตถุดังนั้น

$$\text{มอดุลัสของความยืดหยุ่น} = \frac{\text{ความเค้น}}{\text{ความเครียด}} \qquad \text{......7.13}$$

ซึ่งมี 3 ประเภท ลักษณะของความเค้นและความเครียด ดังนี้

ประเภทแรกคือ มอดุลัสของญัง (young's modulus) แทนด้วย Y มีนิยามดังนี้

อัตราส่วนของความเค้นดึงต่อความเครียดดึงสำหรับวัตถุชนิดหนึ่งๆ ย่อมเท่ากับอัตราส่วนของความเค้นอัดต่อความเครียดอัด

$$Y = \frac{\text{ความเค้นดึง}}{\text{ความเครียดดึง}} = \frac{\text{ความเค้นอัด}}{\text{ความเครียดอัด}}$$

$$= \frac{F_n/A}{\Delta L/L_0} = \frac{L_0 F_n}{A \Delta L} \qquad \text{......7.14}$$

เนื่องจากความเครียดเป็นเลขจำนวนไม่มีมิติ หน่วยของมอดุลัสของญัง จึงเหมือนกับหน่วยของความเค้นคือ แรงต่อหน่วยพื้นที่

มอดุลัสเฉือน (Shear modulus) แทนด้วย S มีคำจำกัดความว่า

$$S = \frac{\text{ความเค้นเฉือน}}{\text{ความเครียดเฉือน}}$$

$$= \frac{F_1/A}{x/h} = \frac{hF_1}{Ax} \qquad \text{......7.15}$$

มอดุลัสเฉือนมีหน่วยเป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่เช่นกัน มอดุลัสมีนัยสำคัญต่อของแข็งเท่านั้น ของเหลวและก๊าซจะไหลภายใต้การกระทำของความเค้นเฉือน จึงไม่เกิดการบิดเบี้ยวได้

มอดุลัสเชิงปริมาตร หรือ บัลค์มอดุลัส (bulk modulus) แทนด้วย B มีคำจำกัดความดังนี้

$$B = \frac{\text{ความเค้นปริมาตร}}{\text{ความเครียดปริมาตร}}$$

$$= \frac{F_n/A}{\Delta V/V} \qquad \text{......7.16}$$

ในกรณีที่วัสดุเป็นของไหล B เขียนในเชิงอนุพันธ์ได้ว่า

$$B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}} \qquad \text{......7.17}$$

เครื่องหมายลบที่ปรากฏอยู่ในนิยามของ B เนื่องจากว่าความดันที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ปริมาตรลดลง $dp = p - p_0$ ถ้าเป็นการเปรียบเทียบเมื่อวัตถุอยู่ในอากาศกับอยู่ในของเหลว P_0 ก็คือความดันบรรยากาศซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.01×10^5 นิวตัน/เมตร^2 ตาราง 7.1 แสดงมอดุลัสทั้ง 3 แบบของวัสดุบางชนิด มีหน่วยเป็นนิวตันต่อตารางเมตร

ตาราง 7.1 มอดุลัสของความยืดหยุ่น

วัสดุ	มอดุลัสของญัง, Y 10^{10} N . m^{-2}	มอดุลัสเฉือน, S 10^{10} N . m^{-2}	มอดุลัสเชิงปริมาตร, B 10^{10} N . m^{-2}
กระจก	5.5	2.3	3.7
ตะกั่ว	1.6	0.56	0.77
ทองแดง	11	4.2	14
ทองเหลือง	9.1	3.6	6.1
ทังสเตน	36	15	20
นิกเกิล	21	7.7	26
เหล็ก	9.1	7.0	10
เหล็กกล้า	20	8.4	16
อะลูมินัม	7.0	2.4	7.0

ตาราง 7.2 สภาพอัดได้ของของเหลว

ของเหลว	สภาพอัดได้	
	10^{-10} (N . m^{-2})$^{-1}$	10^{-6} atm^{-2}
กลีเซอรีน	2.1	22
คาร์บอนไดซัลไฟด์	6.4	66
น้ำ	4.9	50
ปรอท	0.37	3.8
เอทิลแอลกอฮอล์	11.0	115

ส่วนกลับของบัลค์มอดุลัสเรียกว่า สภาพอัดได้ (compressibility) แทนด้วย k นั่นคือ

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{dV/V}{dP} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \quad ......7.18$$

สภาพอัดได้ของของไหลบางชนิด แสดงไว้ในตาราง 7.2

ดังนั้น สภาพอัดได้ของวัตถุแปรตามสัดส่วนที่ลดลงของปริมาตร, $-dV/V$ ต่อหนึ่งหน่วยที่เพิ่มขึ้น dp ของความดัน

หน่วยของบัลค์มอดุลัสเหมือนกับหน่วยของความดัน แต่หน่วยของสภาพอัดได้เป็นส่วนกลับของหน่วยความดันดังนั้นสภาพอัดได้ของน้ำซึ่งเท่ากับ 50×10^{-6} atm^{-1} จึงหมายความว่าน้ำมีปริมาตรลดลง 50 ใน 1 ล้านของปริมาตรเดิม เมื่อความดันเพิ่มขึ้น 1 บรรยากาศ (1 atm = 1.013×10^5 N/m^2)

ตัวอย่าง 7.1 คานอะลูมิเนียมยาว 1 เมตร ถูกดึงด้วยแรง 8,000 นิวตันที่ปลายทั้งสองข้าง คานนี้จะยาวขึ้น 2.86×10^{-2} เมตร พื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ 4 ตารางเซนติเมตร

จงหา (ก) ความเค้นดึง (ข) ความเครียดดึง (ค) มอดุลัสของญัง

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.2 จะได้ :

$$\text{ความเค้นดึง} = F_n/A = \frac{8000 \text{ N}}{4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ 7.9 จะได้ :

$$\text{ความเค้นดึง} = \Delta L/L_0 = \frac{2.86 \times 10^{-2}}{1} = 2.86 \times 10^{-2}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.14 จะได้ :

$$\text{มอดุลัสญัง} = \text{ความเค้นดึง/ความเครียดดึง} = 2 \times 10^7/2.86 \times 10^{-2} = 7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

ตัวอย่าง 7.2 แท่งน้ำหนัก 12,000 นิวตัน ถูกแขวนด้วยสายเคเบิลเหล็กยาว 10.0 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลาง 16 มิลลิเมตร ทำให้สายเคเบิลยาวขึ้นอีก 3 มิลลิเมตร จงหา

(ก) ความเค้นดึง (ข) ความเครียดดึง (ค) มอดุลัสของญัง

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.2 จะได้

$$\text{ความเค้นดึง} = \frac{F_n}{A} = \frac{F_n}{\pi r^2}$$

(ข) แทนค่าลงในสมการ จะได้

$$= \frac{12{,}000\ \text{N}}{\pi(0.008\ \text{m})^2} = 6 \times 10^7\ \text{N/m}^2$$

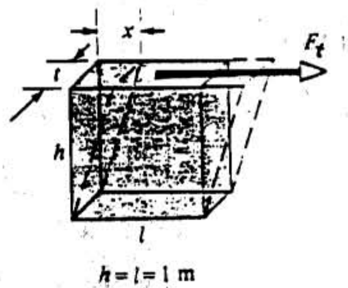
$$\text{ความเครียดดึง} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.003\ \text{m}}{10.0\ \text{m}} = 3 \times 10^{-4}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.14 จะได้

$$\text{มอดุลัสของญัง} = \frac{6 \times 10^7\ \text{N/m}^2}{3 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2$$

ตัวอย่าง 7.3 แท่งเหล็กกล้ารูปจัตุรัส ด้านยาว 1 เมตร หนา t เท่ากับ 1 เซนติเมตร ฐานถูกตรึงกับพื้นดังรูปที่ 7.6 แรง F_t กระทำกับขอบด้านบนเกิดการกระจัด x = 0.005 เซนติเมตร จงหา

(ก) ความเครียดเฉือน (ข) แรง F_t (ค) ความเค้นเฉือน



รูปที่ 7.6 จากโจทย์ตัวอย่าง 7.3

วิธีทำ (ก) แทนค่าลงในสมการ 7.11 จะได้

$$\text{ความเครียดเฉือน} = \frac{x}{h}$$

$$= \frac{5 \times 10^{-5}\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 5 \times 10^{-5}$$

(ข) พิจารณาสมการ 7.15 คือ $S = \frac{hF_t}{Ax}$ ดังนั้น $F_t = \frac{SAx}{h}$

เมื่อแทนค่าจะได้ $F_t = \frac{(8.4 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)(10^{-2}\ \text{m}^2)(5 \times 10^{-5}\ \text{m})}{1\ \text{m}}$

โดยที่ S (จากตาราง) $= 8.4 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2$

$$= 4.2 \times 10^{4}\ \text{N}$$

(ค) แทนค่าลงในสมการ 7.3 จะได้

$$\text{ความเค้นเฉือน} = \frac{F_t}{A}$$

$$= \frac{4.2 \times 10^{4}\ \text{N}}{10^{-2}\ \text{m}^2}$$

$$= 4.2 \times 10^{6}\ \text{N/m}^2$$

ตัวอย่าง 7.4 แท่งเหล็กรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 8 cm x 15 cm ยาว 3.5 m เมื่อถูกอัดด้วยแรง 15,500 นิวตัน จะมีความยาวลดลงเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.14 คือ $y = \frac{F_n/A}{\Delta L/L_0}$ ดังนั้น $\Delta L = \frac{L_0F_n}{Ay}$

เมื่อแทนค่าจะได้ $\Delta L = \frac{(15{,}500\ \text{N})(3.50\ \text{m})}{(120 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(9.1 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)}$

$$= 5.0 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

$$= 0.05\ \text{mm}$$

ตัวอย่าง 7.5 ตะกั่วทรงกลมรัศมี 1 เมตร ถูกหย่อนลงในทะเลลึก ความดัน 70 x 10^6 นิวตัน/เมตร$^{-2}$ ดังรูปที่ 7.7 จงหาปริมาตรที่ลดลงในหน่วยของลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.17 คือ

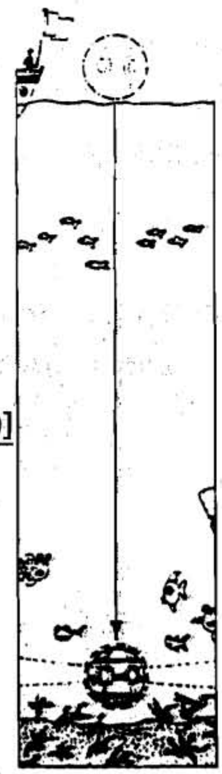
$$B = -\frac{dP}{dV/V} \quad \text{ดังนั้น } dV = -\frac{VdP}{B}$$

เมื่อแทนค่าจะได้ $dV = \frac{[\frac{4}{3}\pi(1.0 \text{ m})^3 (70.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2)]}{(0.77 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}$

$$= -0.038 \text{ m}^3$$

$$= -0.038 \times 10^6 \text{ cm}^3$$

ปริมาตรลดลง 38,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร



รูปที่ 7.7 ตัวอย่าง 7.5

ตัวอย่าง 7.6 เครื่องอัดไฮดรอลิกแบบหนึ่ง มีน้ำมันบรรจุอยู่ 135 ลิตร จงหาว่าปริมาตรของน้ำมันจะลดลงเท่าไร ถ้าเพิ่มความดันอัดน้ำมันนี้อีก 136 บรรยากาศ กำหนดให้สภาพอัดได้ของน้ำมันเท่ากับ 20 x 10^{-6} ต่อบรรยากาศ

วิธีทำ พิจารณาสมการ 7.16

$$B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

ดังนั้น $dV = -\frac{V}{B}dP$

$$= -k\, VdP$$

แทนค่าจะได้ $dV = -\frac{(20 \times 10^6)(135 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(135 \times 1.05 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{1.05 \times 10^5 \text{ N/m}^2}$

$$= -0.367 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$= -0.367 \text{ liters}$$

เพราะฉะนั้น ปริมาตรลดลง 0.367 ลิตร

กิจกรรม 7.1

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 7.1 กับ 7.2 ถ้าเปลี่ยนจากคานอะลูมิเนียมเป็นคานเหล็กและเปลี่ยนจากเคเบิลเหล็กเป็นเคเบิลอะลูมิเนียม

7.3 ค่าคงตัวของแรง (Force constant)

มอดุลัสของความยืดหยุ่นทุกชนิดเป็นปริมาณสำหรับแสดงถึงสมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุนั้น ๆ แต่ไม่ได้แสดงว่าแท่งวัตถุ สายลวด หรือสปริงที่ใช้นั้นจะยืดหดหรือบิดเบี้ยวไปเท่าไร ถ้าหากถ่วงด้วยลูกตุ้มน้ำหนัก เมื่อพิจารณาสมการมอดุลัสของยัง 7.14 เพื่อหาค่า F_n ปรากฏว่า

$$F_n = \frac{YA}{L_0}\Delta L$$

กำหนดให้ $\frac{YA}{L_0} = k$ และ $\Delta L = x$ จะได้

$$F_n = kx \qquad \text{......7.19}$$

นั่นแสดงว่าแรงที่ใช้ดึงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับส่วนที่ยืดออก ค่าคงตัว k นี้ เรียกว่า ค่าคงตัวของแรง หรือความแข็งตึง (stiffness) บางครั้งเรียกว่า ค่าคงตัวของความยืดหยุ่น (elastic constant) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของแรงต่อความยาวที่ยืดหรือหด มีหน่วยเป็นนิวตันต่อเมตร

อัตราส่วนของความยาวที่ยืดหรือหดต่อหนึ่งหน่วยของแรงเรียกว่า compliance ซึ่งเป็นส่วนกลับของค่าคงตัวของแรงนั่นเอง หน่วยที่ใช้จึงเป็น เมตรต่อนิวตัน

ตัวอย่าง 7.7 เดิมสปริงยาว 15 ซม. เมื่อเอาน้ำหนัก 16 นิวตันมาห้อยถ่วงไว้ สปริงจะยาวเป็น 20 ซม. (ก) ค่าคงตัวของแรงของสปริงเท่ากับเท่าไร ? (ข) ถ้าเพิ่มน้ำหนักอีก 12 นิวตัน สปริงจะยาวเท่าไร?

วิธีทำ (ก) พิจารณาสมการ 7.19 คือ $F_n = kx$

ดังนั้น $k = F_n/x$

แทนค่าจะได้ $k = \frac{16\ N}{5 \times 10^{-2} m} = 320\ N/m$

(ข) พิจารณาสมการ 7.19 $F_n = kx$

ดังนั้น $x = F_n/k$

แทนค่าจะได้ $x = \dfrac{28\ N}{320\ N/m}$

$= 0.0875\ m = 8.75\ cm.$

สปริงจะยาว = 15 ซม. + 8.75 ซม. = 23.75 ซม.

7.4 การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

อนุภาคเคลื่อนที่แบบกวัดแกว่งหรือเคลื่อนที่ไปแล้วกลับมาที่เดิม (oscillatory motion) หมายถึงการเคลื่อนที่ซ้ำรอยการเคลื่อนที่เดิมเป็นคาบเวลารอบตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งที่เป็นตำแหน่งสมดุล เรียกว่าการเคลื่อนที่แบบพีริออดิก (periodic) หรือการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ เรียกว่าคาบ (period) แทนด้วย T ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบพีริออดิกมีมากมาย ได้แก่ การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา การเคลื่อนที่ของอะตอมในของแข็ง อะตอมในโมเลกุลก็เคลื่อนที่ไปมาสัมพัทธ์กันและกัน การเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริง การโคจรของดวงจันทร์รอบโลก การสั่นของสายลวดไวโอลิน การเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นเสียง โมเลกุลของอากาศจะออสซิลเลตตามแนวการเคลื่อนที่ของคลื่น คลื่นแสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ๆ นั้น สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะออสซิลเลตในทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ในบรรดาการเคลื่อนที่แบบกวัดแกว่งเป็นคาบด้วยกัน การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิคอย่างง่าย (Simple Harmonic Motion, SHM) นับเป็นชนิดสำคัญที่สุด เพราะว่าเราสามารถใช้คณิตศาสตร์อธิบายการเคลื่อนที่ของมันได้ง่าย และค่อนข้างถูกต้องที่สุด สำหรับในหนึ่งมิติระยะกระจัด x ของอนุภาคสัมพันธ์กับจุดกำเนิดของระบบโคออดิเนตที่เป็นฟังก์ชันของเวลา สามารถเขียนได้ ดังนี้คือ

$$X = A \sin (\omega t + \varnothing) \qquad \text{......7.20}$$

เมื่อ A, ω และ ø เป็นค่าคงตัว ระยะกระจัดที่มีค่ามากที่สุด A เรียกว่า แอมปลิจูด (amplitude) ปริมาณ ωt + ø เรียกว่า มุมเฟส (phase angle และ ø คือค่าคงตัวเฟส (phase constant) หรือเฟสเริ่มต้น (initial phase) มีความหมายคือเป็นตัวบอกตำแหน่งของอนุภาคขณะเริ่มต้นกวัดแกว่ง แม้ว่าเราจะนิยามการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายในพจน์ของฟังก์ชันไซน์ (sine function) เราอาจจะนิยามให้อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) ก็ได้ ความแตกต่าง

อยู่ที่ ความต่างเฟส (phase fifference) คือ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน ดังนี้

$$\cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \qquad ......7.21$$

$$-\cos\theta = \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \qquad ......7.22$$

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แปรค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 ระยะกระจัดของอนุภาคจึงแปรค่าอยู่ระหว่าง -A และ +A นอกจากนี้ฟังก์ชันไซน์ยังซ้ำตัวเองทุกครั้งเมื่อ $\pi\omega t$ เพิ่มขึ้น 2π ทำให้ระยะกระจัดของอนุภาคซ้ำตัวเองภายหลังอันตรภาคเวลา $\frac{2\pi}{\omega}$ ซึ่งเรียกว่าคาบ เขียนได้เป็น $T = \frac{2\pi}{\omega}$ จำนวนการออสซิลเลตต่อหนึ่งหน่วยเวลา เรียกว่า ความถี่ (frequency) ซึ่งเป็นส่วนกลับของคาบนั่นเอง แทนด้วย

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad ......7.23$$

หรือ

$$\omega = 2\pi f = \qquad ......7.24$$

ค่าคงตัว ω ก็คือความถี่เชิงมุม (angular frequency) f มีหน่วยเป็น รอบ/วินาที หรือนิยามเรียกเป็น เฮิรตซ์ (Hertz, H_z) ω มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที (rad/s) ความเร็วของอนุภาคคือ

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \emptyset) \qquad ......7.24$$

และความเร่งของอนุภาค คือ

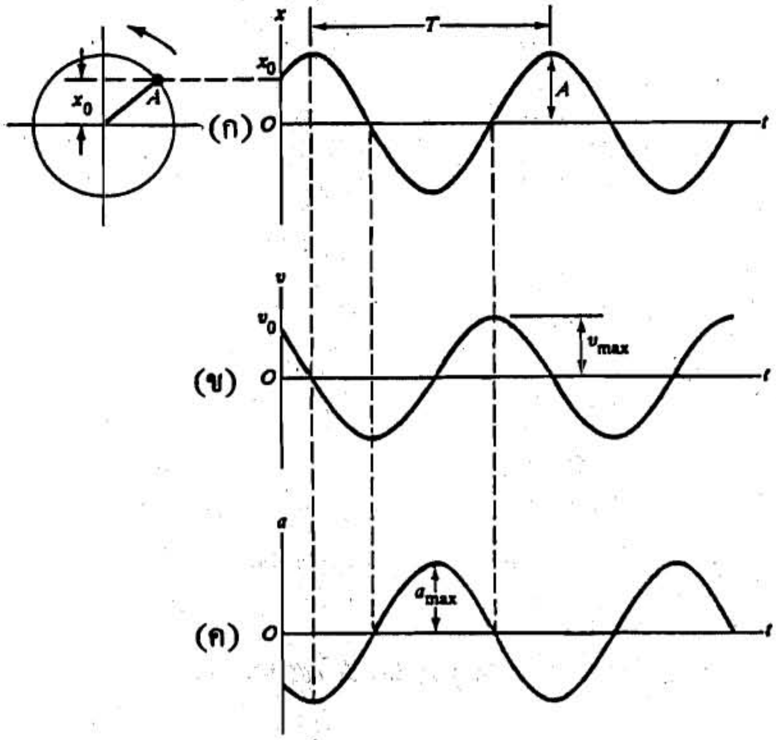
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \emptyset) \qquad ......7.25$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ความเร่งเป็นสัดส่วนโดยตรง และมีทิศทางตรงกันข้ามกับระยะกระจัด

จากสมการ (7.24) และ (7.25) จะเห็นได้ว่าค่าสูงสุดของความเร็วและของความเร่งเขียนได้เป็น

$$v_{max} = A\omega, \qquad a_{max} = A\omega^2 \qquad ......7.26$$

สำหรับความสัมพันธ์ของระยะกระจัด x ความเร็ว v และความเร่ง a เทียบกับเวลา ของอนุภาคเคลื่อนที่เป็นฮาร์มอนิกอย่างง่าย ได้แสดงในรูป 7.8



รูปที่ 7.8 แสดงความสัมพันธ์ของระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่ง เปรียบเทียบกับเวลา ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย (SHM)

ในรูป 7.8 (ก) ระยะกระจัดกับเวลา (ข) ความเร็วกับเวลา และ (ค) ความเร่งกับเวลา โดยกำหนดให้ x_0 เป็นระยะกระจัดเริ่มต้น v_0 เป็นความเร็วเริ่มต้น ($t = 0$) ดังนั้น $x_0 = A \sin Ø$ และ $v_0 = A\omega \cos Ø$ ถ้าหาร x_0 ด้วย v_0 เราจะได้

$$\tan Ø = \frac{x_0 \omega}{v_0} \qquad \text{......7.27}$$

นอกจากนั้น $x_0^2 = A^2 \sin^2 Ø$ และ $\frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \cos^2 Ø$ นั่นคือ

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \sin^2 Ø + A^2 \cos^2 Ø$$

หรือ

$$A = \left[\, x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{......7.28}$$

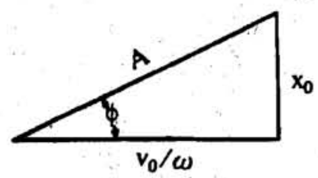
จากสมการ (7.27) และ (7.28) สามารถเขียน $\sin Ø$ และ $\cos Ø$ ได้เป็น

$$\sin \phi = \frac{x_0}{\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{x_0}{A} \qquad ......7.29$$

และ

$$\cos \phi = \frac{v_0}{\left[x_0^2\,\omega^2 + v_0^2\right]^{1/2}} = \frac{v_0}{\omega A} \qquad ......7.30$$

ดังแสดงในรูป 7.9



รูปที่ 7.9 แสดงค่าคงตัวเฟสØ

สมการ (7.27) ถึง (7.30) ใช้สำหรับหาค่า Ø และ A ในพจน์ของตัวทราบค่า คือ x_0, v_0 และ ω

ตัวอย่าง 7.8 อนุภาคออสซิลเลตแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามแกน x ระยะกระจัดแปรตามเวลาตามสมการ

$$x = 4.0 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

เมื่อ x มีหน่วยเป็นเมตร, t มีหน่วยเป็นวินาที, มุม มีหน่วยเป็นเรเดียน

ก. จงหาแอมปลิจูด, ความถี่, คาบของการเคลื่อนที่

ข. จงหาความเร็วและความเร่ง ณ เวลา t ใด ๆ

ค. จงหาตำแหน่ง, ความเร็ว, ความเร่ง ในเวลา t = 1 วินาที

ง. จงหาค่าอัตราเร็วสูงสุดและอัตราเร่งสูงสุดของอนุภาค

จ. จงหาระยะกระจัดระหว่างเวลา t = 0 และ t = 1 วินาที

ฉ. มุมเฟสเท่ากับเท่าไร ณ เวลา t = 2 วินาที

วิธีทำ โดยการเทียบ $x = A \sin(\omega t + \phi)$

กับ $x = 4.0 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ ได้

$A = 4.0$ m, $\omega = \pi$ rad/s, $\phi = \frac{\pi}{4}$ rad

ก. จาก $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $T = \frac{1}{f}$

แทนค่า : $f = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ Hz

$T = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ s

$A = 4.0$ m

ข. จาก $v = \frac{dx}{dt}$ และ $a = \frac{dv}{dt} = -\omega a^2 x$

แทนค่า : $v = (4.0\,\pi)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$a = -4.0\,\pi^2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

ค. แทนค่า : $t = 1$ ลงในสมการเช่นเดียวกับข้อ ข.

$x = 4.0 \sin(\pi + \frac{\pi}{4})$

$= 4 \sin \frac{5\pi}{4} = 4 \sin 225^\circ$

$= 4 \sin(180^\circ + 45^\circ) = 4\,(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4(.707) = -2.8$ m

$v = 4\,\pi \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -8.9$ m/s

$a = -\omega^2 x = -\pi^2(-2.8)$ m/s^2

$= 28$ m/s^2

ง. จาก $v_{max} = A\omega$, $a_{max} = A\omega^2$

แทนค่า : $v_{max} = (4.0\text{ m})(\pi) = 12.57$ m/s

$a_{max} = (4.0\text{ m})\,\pi^2 = 39.48$ m/s^2

ข. $\Delta x = x_1 - x_0 = -2.8 - 4.0 \sin\frac{\pi}{4}$

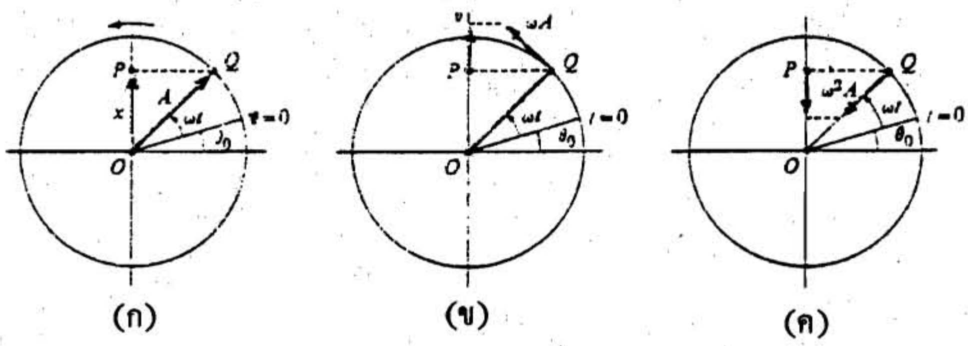
$= -5.6$ m

ฉ. มุมเฟส $= \pi t + \frac{\pi}{4} = \pi(2) + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ rad

กิจกรรม 7.2

ให้นักศึกษาแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่งเทียบกับเวลา สำหรับการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายตามตัวอย่าง 7.8

ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่วงกลมอย่างเอกรูป



รูป 7.10 ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายและการเคลื่อนที่วงกลมเอกรูป

พิจารณาอนุภาค Q (รูป 7.10) เคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี A ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ เงาตรงของ Q บนเส้นผ่านศูนย์กลางคือ P จากรูปจะพบว่า ขณะที่ Q เคลื่อนที่รอบวงกลม P จะเคลื่อนที่กลับมาซ้ำรอยเดิมผ่านจุดศูนย์กลาง O ถ้า $\theta = \omega t + \theta_0$ เป็นมุมที่มีรัศมี OQ ทำกับแกน +X เราได้ว่า

$$OP = OQ \sin\theta. \quad \text{หรือ} \quad x = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งแสดงว่า P เคลื่อนที่แบบ SHM ดังนั้นเรากล่าวได้ว่า เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมเอกรูป เงาตรงของมันบนเส้นศูนย์กลางจะเคลื่อนที่เป็น SHM

ความเร็วของ Q ที่ตั้งฉากกับ OQ คือความเร็วที่สัมผัสกับวงกลม มีขนาด = ωA องค์ประกอบของความเร็วตามแกน Y คือ

$$v = \omega A \cos\theta, \quad \text{หรือ} \quad v = \omega A \cos(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งเป็นความเร็วของ P นั่นเอง ความเร่งของ Q เป็นความเร่งสู่ศูนย์กลาง จึงมีทิศตรงกันข้ามกับระยะขจัด x และมีขนาด = $\omega^2 A$ ดังนั้นองค์ประกอบของความเร่งตามแกน Y คือ

$$a = -\omega^2 A \sin\theta, \quad \text{หรือ} \quad a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0)$$

ซึ่งเป็นความเร่งของ P เช่นกัน เพราะฉะนั้น ความเร็วและความเร่งของเงาตรง P เท่ากับองค์ประกอบตามเส้นผ่านศูนย์กลางของความเร็วและความเร่งของ Q

7.5 การเคลื่อนที่ของมวลยึดติดกับสปริง

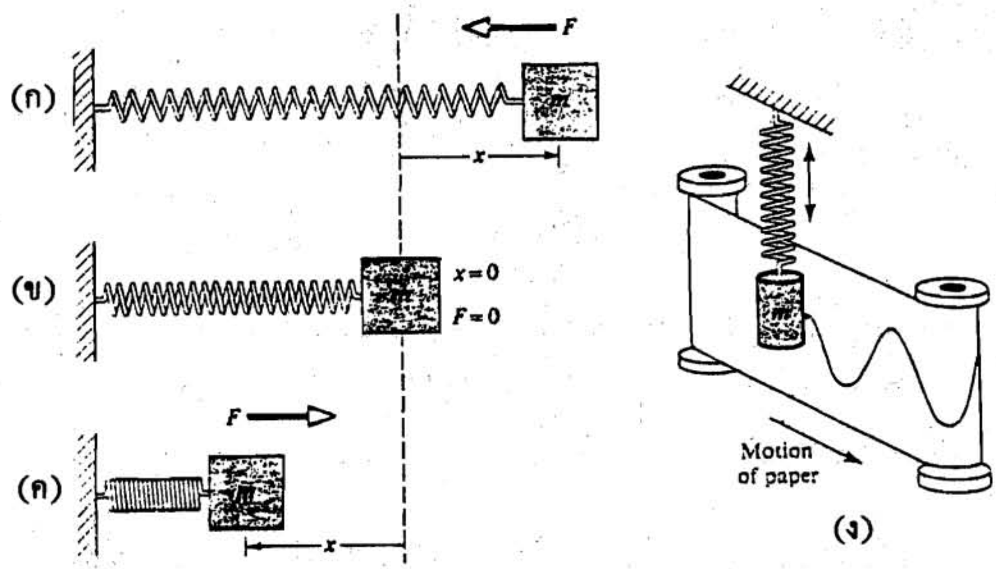
จากสมการของการเคลื่อนที่ F = ma และใช้สมการ 7.25 $a = -\omega^2 x$ ซึ่งเป็นค่าของความเร่ง เราสามารถหาแรงซึ่งกระทำต่อมวล m เพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย แรง F ในที่นี้คือ

$$F = -m\omega^2 x = -kx \qquad \text{......7.31}$$

และเราให้

$$k = m\omega^2 \text{ หรือ } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{......7.32}$$

เราเรียก k ว่า ค่าคงตัวของสปริง ดังนั้นเราพบว่าแรงเป็นสัดส่วนโดยตรงและมีทิศทางตรงกันข้ามกับระยะกระจัด ดังรูป 7.11



รูปที่ 7.11 (ก), (ข), (ค) แรงคืนตัวกับระยะกระจัด จะมีทิศตรงกันข้าม สำหรับ (ง) การเคลื่อนมวลติดกับสปริงเป็นการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

หมายความว่า เมื่อระยะกระจัดมีทิศไปทางขวาหรือมีทิศขึ้น แรงจะมีทิศไปทางซ้ายหรือมีทิศลง และเมื่อระยะกระจัดมีทิศไปทางซ้ายหรือลง แรงก็จะมีทิศไปทางขวาหรือมีทิศขึ้น ฉะนั้นแรงย่อมมีทิศพุ่งไปทางจุดกำเนิด หรือจุดสมดุลเสมอ

จากรูปที่ 7.11 หากมวล m วางอยู่บนพื้นราบไม่มีแรงเสียดทาน เมื่อปล่อยมวล m มวล m จะเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ในรูป 7.11 (ง) นั้น มวล m แขวนอยู่กับสปริงในแนวดิ่งที่มวล m มีปากกาติดอยู่ แสดงให้เห็นได้ว่า การเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริงเป็นกราฟแบบไซน์

จากสมการ (7.24) และ (7.32) เราได้ว่า

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ หรือ } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{......7.33}$$

ค่ามวลในสมการ (7.33) ไม่ได้คิดมวลของสปริงแต่ประการใด ทั้ง ๆ ที่ความจริงแล้วสปริงก็ยืดหยุ่นไปมาด้วย ถ้าจะคิดมวลของสปริงก็จะต้องพิจารณาว่า มวลทั้งหมดของสปริงไม่ได้ยืดหยุ่นไปมาด้วยแอมปลิจูดเดียวกัน สปริงส่วนล่างสุดจะยืดหยุ่นด้วยแอมปลิจูดเดียวกับมวลของวัตถุที่แขวนที่ปลายสปริง ขณะที่ส่วนบนสุดไม่ได้ยืดหยุ่นเลย เพื่อที่จะให้การคำนวณถูกต้องยิ่งขึ้น ค่าความถี่เชิงมุม (การพิสูจน์ดูในวิชากลศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป) ต้องเขียนเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \qquad ......7.34$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_s/3}{k}} \qquad ......7.35$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}} \qquad ......7.36$$

เมื่อ m_s คือ มวลทั้งหมดของสปริง จากสมการ 7.25 เขียนใหม่ได้ว่า

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad ......7.37$$

สมการ 7.37 เขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ว่า

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad ......7.38$$

รากของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 สมการ 7.38 คือ

$$x = B \sin \omega t + C \cos \omega t \qquad ......7.39$$

ถ้ากระจายสมการ 7.20 จะได้

$$x = A \sin (\omega t + \emptyset)$$

$$= [A \cos \emptyset] \sin \omega t + [A \sin \emptyset] \cos \omega t \qquad ......7.40$$

เปรียบเทียบสมการ 7.39 กับ 7.40 และใช้ความสัมพันธ์สมการ 7.29 และ 7.30 จะได้

$$B = A \cos \emptyset = A\frac{v_0}{\omega A} = \frac{v_0}{\omega}$$

$$C = A \sin \emptyset = A\frac{x_0}{A} = x_0$$

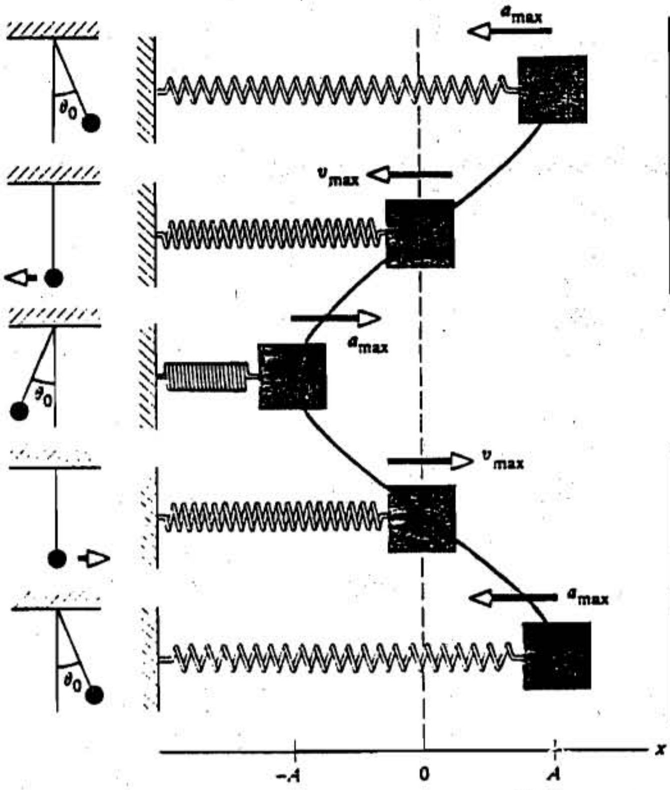
สมการ (7.20), (7.39) และ (7.40) อาจเขียนได้เป็น

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \qquad ......7.41$$

พลังงานของสปริง ในบทที่ 5 เราได้กล่าวถึงพลังงานของสปริงบ้างแล้ว ซึ่งพอสรุปได้ว่า พลังงานของสปริงจะประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ คือ

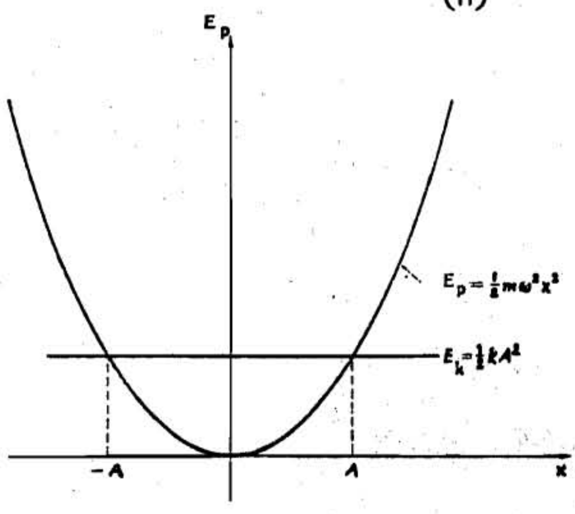
$$E = E_{p,s} + E_{k,s}$$

พลังงานของอนุภาคมวล m จะเปลี่ยนรูประหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ดังรูป 7.12 (ก)



t	x	v	a	E_k	E_p
0	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	$A\omega$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-A\omega^2$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

(ก)



(ข)

รูปที่ 7.12 (ก) เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของมวลติดกับสปริงกับการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มอย่างง่าย (ข) พลังงานศักย์ของมวลติดกับสปริง

รูปที่ 7.12 (ข) แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์เป็นรูปพาราโบลาหงาย อย่างไรก็ดี พลังงานจะมีค่าคงตัว ดังสมการต่อไปนี้

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \; ; \quad k = \omega^2 m$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 [\, A \sin(\omega t + \varnothing)]^2 + \frac{1}{2}m [\, A\omega \cos(\omega t + \varnothing)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varnothing) + \cos^2(\omega t + \varnothing)]$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{ค่าคงตัว} \qquad \text{......7.42}$$

ตัวอย่าง 7.9 มวล 1 กิโลกรัม แขวนไว้ที่ปลายสปริงซึ่งมีมวล 0.09 กิโลกรัม และมีค่าคงตัวของสปริง $k = 66$ นิวตัน/เมตร จงหาความถี่เชิงมุมและแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่ ถ้าปรากฏว่า ขณะที่วัตถุยืดสปริงลงใต้ตำแหน่งสมดุล 0.03 เมตร และความเร็วมีทิศลงข้างล่าง 0.4 เมตร/วินาที

วิธีทำ แทนค่า $m = 1\text{ kg}, \quad m_s = 0.09\text{ kg}, \quad k = 66\text{ N/m}$

$x_0 = 0.03\text{ m}, \quad v_0 = 0.4\text{ m/s}$

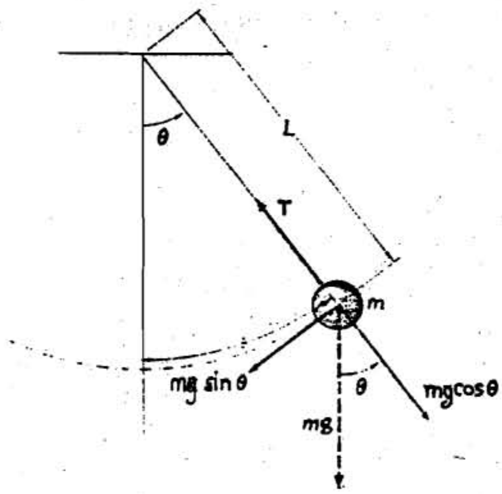
ในสมการ $\omega = \left[\dfrac{k}{m + \frac{m_s}{3}}\right]^{1/2}$, $A = \left[x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$

จะได้ $\omega = \left[\dfrac{66\text{ N/m}}{1\text{ kg} + \frac{0.09}{3}\text{ kg}}\right]^{1/2} = 8.0\text{ rad/s}$

$$A = \left[(0.03)^2 + \left(\frac{0.4}{8.0}\right)^2\right]^{1/2} = 0.058\text{ m}$$

7.6 ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple Pendulum)

ลูกตุ้มอย่างง่ายเป็นตัวอย่างที่สำคัญอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่แบบพีริออดิก หรือแบบเป็นคาบ ประกอบด้วยมวล m แขวนกับเชือกเบาความยาว L ดังรูป 7.13 s คือความยาวของส่วนโค้ง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ L และ θ คือ



รูปที่ 7.13 แสดงระบบลูกตุ้มอย่างง่าย

$$s = L\theta \qquad ......7.43$$

ความเร่งตามแนวเส้นสัมผัส $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ คือ g sin θ เขียนเป็นสมการตามกฎข้อ 2 ของนิวตันได้ ดังนี้

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta \qquad ......7.44$$

เครื่องหมายลบ เพราะว่าแรงมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเพิ่มของมุม θ
สมการ 7.44 เขียนใหม่ได้เป็น

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + mg\sin\theta = 0 \qquad ......7.45$$

สมการที่ 7.45 ไม่ใช่สมการการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ถ้า θ เล็กมาก (s มีค่าน้อยกว่า L มาก ๆ) สามารถประมาณค่าได้ว่า

$$\sin\theta \cong \theta \text{ เรเดียน} \qquad ......7.46$$

แทนค่าสมการ 7.43 และ 7.46 ใน 7.45 และ $s = L\theta$ ได้

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad ......7.47$$

สมการ 7.47 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ 7.37 เมื่อเปรียบเทียบ θ กับ x จึงเป็นการเคลื่อนที่เชิงมุม แทนที่จะเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้น ดังนั้น

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad ......7.48$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad ......7.49$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad ......7.50$$

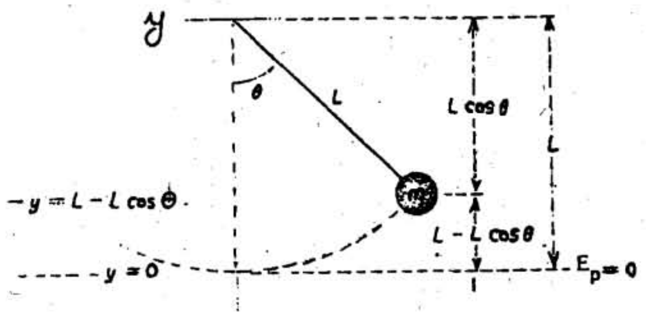
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad ......7.51$$

และ θ_0 คือแอมปลิจูด จะเห็นว่า ω, T, f ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้มเลย ถ้าเป็นการแกว่งที่มีแอมปลิจูดกว้าง คือ θ_0 กว้าง จะไม่เป็นการแกว่งแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกต่อไป (ดูสมการ 7.49) แต่อย่างไรก็ตาม ถ้า θ_0 ไม่โตเกินไปนัก คาบของการแกว่งจะได้

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right) \quad ......7.52$$

เมื่อ θ_0 วัดเป็นเรเดียน สูตรนี้เป็นการประมาณค่าที่ใช้ได้ดีพอสมควรสำหรับทางปฏิบัตินั้นส่วนมากความจริงพจน์แก้ไข $\frac{1}{16}\theta_0^2$ มีค่าน้อยกว่า 1 เปอร์เซ็นต์สำหรับแอมปลิจูดที่น้อยกว่า 23 องศา

พลังงานศักย์ของลูกตุ้มอย่างง่ายคือ พลังงานศักย์แห่งความโน้มถ่วง mgy เมื่อ y คือความสูงวัดจากระดับอ้างอิง ดังรูป 7.14



รูปที่ 7.14 ความสูงของมวลเหนือตำแหน่งสมดุล $y = L - L\cos\theta$ พลังงานศักย์เท่ากับ $E_p = mgy = mgL(1 - \cos\theta)$

$$y = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$
$$E_p = mgL(1-\cos\theta)$$

ดังนั้น พลังงานรวม

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mg(1-\cos\theta) \qquad ......7.53$$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมเล็ก เราใช้ค่าประมาณ

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + ...$$
$$\cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

ดังนั้น $1 - \cos\theta \cong \frac{1}{2}\theta^2$

และค่าประมาณของพลังงานศักย์ คือ

$$E_p \cong \frac{1}{2}mgL\,\theta^2 \qquad ......7.54$$

ใช้สมการ 7.43 ในสมการ 7.54 ได้

$$E_p = \frac{1}{2}mgL\left(\frac{s}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{L}s^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \qquad ......7.55$$

พลังงานรวมกลายเป็น

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 \qquad ......7.56$$

ตัวอย่าง 7.10

ก. จงหาความยาวของลูกตุ้มอย่างง่าย กำหนดให้คาบเท่ากับ 1 วินาที

ข. ถ้าลูกตุ้มอย่างง่ายในข้อ ก. นำไปแขวนที่ผิวของดวงจันทร์ กำหนดให้ความเร่งแห่งความโน้มถ่วงของดวงจันทร์เท่ากับ 1.67 เมตร/วินาที² จงหาคาบของการแกว่ง

วิธีทำ ก. จาก $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

หรือ $L = \frac{T^2}{4\pi^2}g$

แทนค่าจะได้ $L = \frac{(1\ s)^2\ (9.8\ m/s^2)}{4\pi^2}$

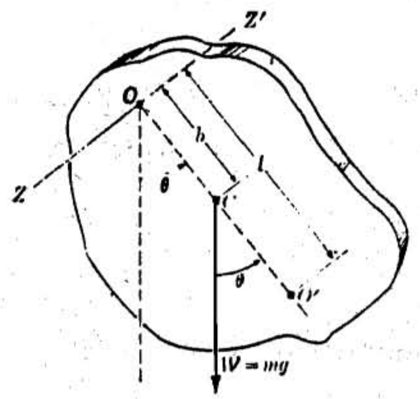
$= 0.248\ m$

ข. จาก $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

แทนค่าจะได้ $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.248\ m}{1.67\ m/s^2}} = 2.42\ s$

7.7 ลูกตุ้มฟิสิกัล (Physical Pendulum)

ตัวอย่างที่สำคัญอย่างหนึ่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งใด ๆ ก็คือ ลูกตุ้มฟิสิกัล ซึ่งสามารถแกว่งไปมาอย่างอิสระรอบแกนในแนวระดับภายใต้แรงโน้มถ่วง (ดูรูป 7.15) เราให้ ZZ′ เป็นแกนแนวระดับ ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวล C ถึงแกนหมุนซึ่งตั้งได้ฉากกับหน้ากระดาษเท่ากับ b เมื่อเส้นตรง OC ทำมุม θ กับแนวดิ่ง องค์ประกอบ Z ของทอร์กกระทำบนวัตถุรอบจุดหมุน ($I\alpha$) คือ $mgb \sin\theta$ ดังนั้น



รูปที่ 7.15 แสดงลูกตุ้มฟิสิกัล สามารถแกว่งอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงรอบแกนในแนวระดับที่จุด O โดยมี C เป็นศูนย์กลางมวล

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb \sin\theta$$

หรือ $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\sin\theta = 0 \qquad ......7.57$$

α คือ ความเร่งเชิงมุมเท่ากับ $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ส่วน I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบจุดหมุน สมการ 7.57 คล้ายกับสมการ 7.45 ซึ่งไม่ใช่สมการฮาร์มอนิกอย่างง่าย แต่ในกรณี θ มีค่าน้อย ๆ และเราใช้การประมาณค่า $\sin\theta = \theta$ สมการ 7.57 จะกลายเป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \qquad \text{......7.58}$$

ดังนั้น สมการ 7.58 จึงเป็นสมการฮาร์มอนิกอย่างง่าย เปรียบเทียบสมการ 7.58 กับสมการ 7.47 หรือสมการ 7.25 จะได้ว่า $\omega^2 = \frac{mgb}{I}$ หรือ

หรือ $$\omega = \left[\frac{mgb}{I}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.59}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{I}{mgb}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.60}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{mgb}{I}\right]^{1/2} \qquad \text{......7.61}$$

ตัวอย่าง 7.11 แท่งโลหะเอกรูปอันหนึ่งยาว 1 เมตร จัดให้แกนหมุนอยู่ที่ปลายข้างใดข้างหนึ่ง การแกว่งของแท่งโลหะนี้เป็นแบบลูกตุ้มฟิสิกัล จงหาคาบของการแกว่ง ถ้าแอมปลิจูดของการแกว่งมีค่าน้อย ๆ

วิธีทำ แทนค่า L = 1 เมตร $\quad b \ \frac{L}{2}$

I (ของแท่งโลหะรอบปลายข้างใดข้างหนึ่ง) $= \frac{1}{3}mL^2$

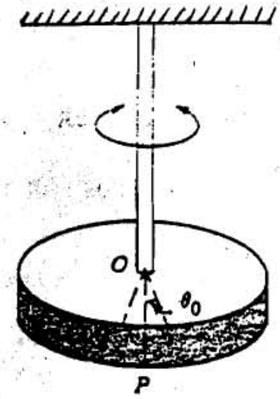
ในสมการ $$T = 2\pi\left[\frac{I}{mgb}\right]^{1/2}$$

จะได้ $$T = 2\pi\left[\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mgL/2}\right]^{1/2} = 2\pi\left[\frac{2L}{3g}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{2\,(1\text{ m})}{3\,(9.8\text{ m/s}^2)}\right]^{1/2} = 1.64 \text{ วินาที}$$

7.8 ลูกตุ้มชนิดบิด (Torsional Pendulum)

ลูกตุ้มชนิดบิดประกอบด้วยวัตถุแผ่นกลมแบนมวลสม่ำเสมอ แขวนด้วยลวดโลหะยาวที่จุดกึ่งกลางของแผ่นในแนวดิ่ง ดังรูป 7.16



รูปที่ 7.16 ลูกตุ้มชนิดบิดจะออสซิลเลตผ่านจุด OP ด้วยแอมปลิจูด θ_0

เมื่อแผ่นโลหะหมุนไปเป็นมุม θ เล็กน้อยจากตำแหน่งสมดุล ลวดจะบิดตัวทำให้เกิดทอร์กต่อแผ่นโลหะกลมเพื่อต้านกับระยะกระจัด θ ซึ่งเป็นทอร์กที่เรียกว่า ทอร์กคืนตัว (restoring torque) ทอร์กนี้จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ θ นั่นคือ

$$\Gamma = -\kappa\theta \qquad ......7.62$$

ในที่นี้ κ (อ่านว่า คัปปา, kappa) คือสัมประสิทธิ์การบิดตัวของลวด จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน $T = I\alpha$ จะได้

$$I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa\theta}{I} = 0 \qquad ......7.63$$

I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของแผ่นโลหะกลมรอบแกนดิ่ง สมการ 7.63 เป็นสมการของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ 7.38 เราจะได้ $\omega^2 = \frac{\kappa}{I}$ หรือ

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad ......7.64$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad ......7.65$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad ......7.66$$

รากของสมการ 7.63 คือ

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \emptyset) \qquad ......7.67$$

และ

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0\omega \cos(\omega t + \emptyset) \qquad ......7.68$$

พลังงานศักย์ของลูกตุ้มชนิดบิด เขียนได้เป็น (จาก $\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$ $\therefore K = I\omega^2$)

$$E_p = \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{1}{2}I\omega^2\theta^2 \qquad ......7.69$$

และพลังงานจลน์ E_k คือ

$$E_k = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad ......7.70$$

ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานใด ๆ พลังงานรวมจะคงที่ แทนค่า θ และ $\frac{d\theta}{dt}$ ในสมการ 7.69 และ 7.70 ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}
E &= E_p + E_k \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 I \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2 \,|\, \theta_0 \sin(\omega t + \emptyset) \,|^2 + \frac{1}{2} |\, \theta_0\, \omega \cos(\omega t + \emptyset) \,|^2 I \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta_0^2 \, [\sin^2(\omega t + \emptyset) + \cos^2(\omega t + \emptyset)] \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\theta_0^2 \qquad = \frac{1}{2}K\theta_0^2 \qquad 7.71
\end{aligned}$$

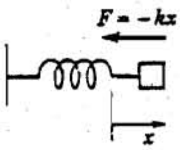
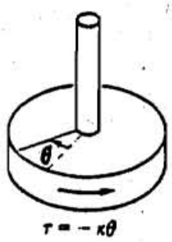
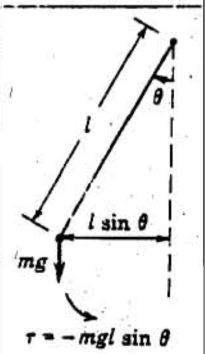
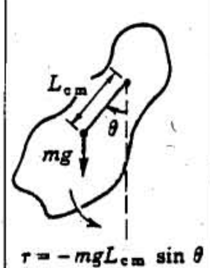
กิจกรรม 7.3

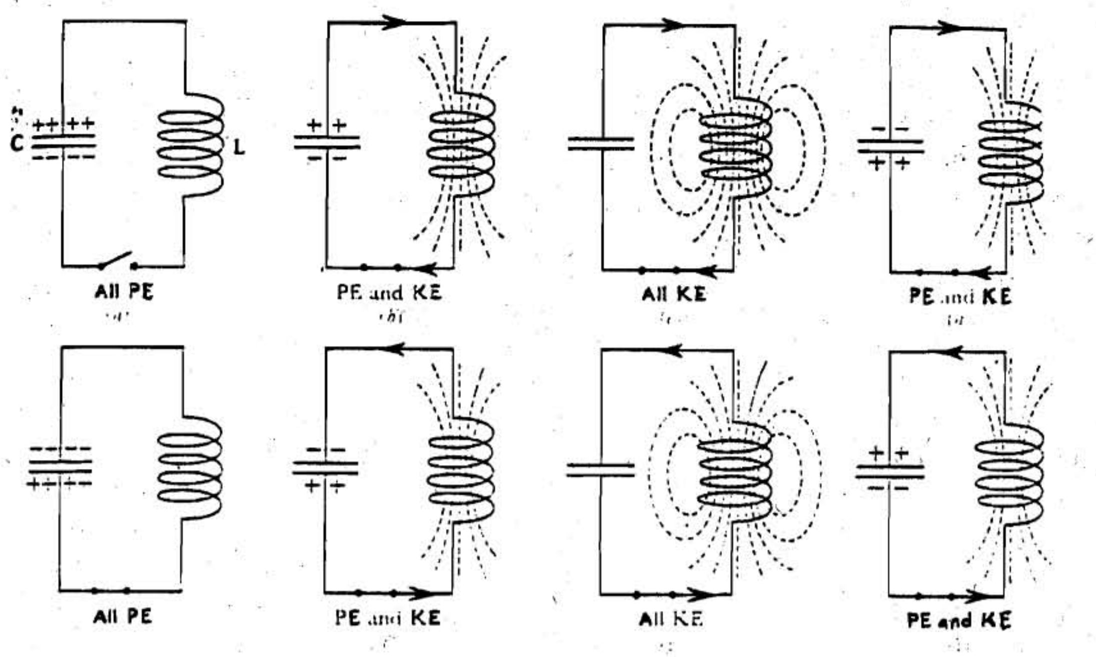
ให้นักศึกษาเปรียบเทียบสูตรสำหรับหาค่าต่าง ๆ สำหรับลูกตุ้มอย่างง่าย ลูกตุ้มชนิดบิด และลูกตุ้มฟิสิกัลว่าคล้ายกันหรือแตกต่างกันอย่างไร

7.9 วงจรออสซิลเลเตอร์ (LC)

ระบบที่มีการออสซิลเลตแบบการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกชนิดหนึ่งก็คือ วงจรออสซิลเลเตอร์ (oscillator) ซึ่งเป็นวงจรไฟฟ้า LC ประกอบด้วยตัวเก็บประจุ C และขดลวด L ดังรูปที่ 7.17

ตาราง 7.3 แสดงออสซิลเลเตอร์ซึ่งมีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย

OSCILLATOR	FIGURE	NEWTON'S LAW	ACCELERATION-DISPLACEMENT RELATION	PERIOD
Spring		$\Sigma F = ma$ $-kx = ma$	$a_x = -\left(\frac{k}{m}\right)x$	[17-12] $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Torsion pendulum		$\Sigma\tau = I\alpha$ $-\kappa\theta = I\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta$	[17-16] $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
Simple pendulum		$\Sigma\tau = I\alpha$ $-mgl\sin\theta = ml^2\alpha$ For small θ, $\sin\theta \simeq \theta$, and $-mgl\theta \simeq ml^2\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{g}{l}\right)\theta$	[17-17] $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Compound pendulum		$\Sigma\tau = I\alpha$ $-mgL_{cm}\sin\theta = I\alpha$ For small θ, $\sin\theta \simeq \theta$, and $-mgL_{cm}\theta \simeq I\alpha$	$\alpha = -\left(\frac{mgL_{cm}}{I}\right)\theta$	[17-18] $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL_{cm}}}$



รูปที่ 7.17 วงจรออสซิลเลเตอร์ แสดงการเปลี่ยนแปลงรูปของพลังงานในวงจร LC

ซึ่งสมการการออสซิลเลตของกระแสเขียนได้เป็น (เนื้อหาโดยละเอียดจะกล่าวในกระบวนวิชาฟิสิกส์พื้นฐาน 2 PH 112)

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \qquad \text{......7.72}$$

ซึ่งสมการ 7.72 เป็นสมการของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีความถี่เชิงมุม

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{......7.73}$$

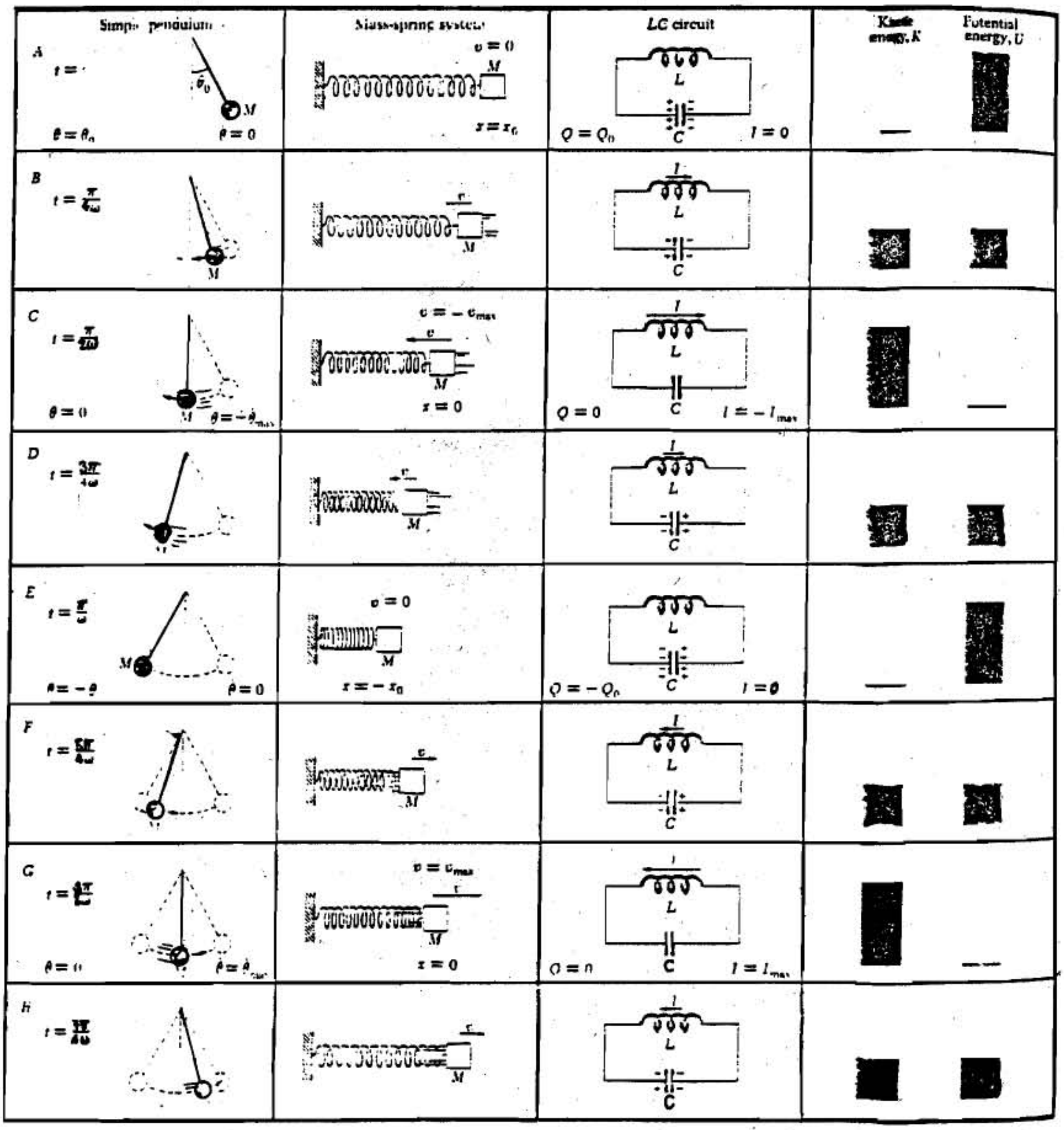
สำหรับพลังงานไฟฟ้า $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$; Q คือ ประจุบนตัวเก็บประจุ

พลังงานแม่เหล็ก $= \frac{1}{2}LI^2$

ดังนั้น พลังงานรวม E $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$ 7.74

E มีค่าคงตัว แม้ว่าพลังงานไฟฟ้าหรือพลังงานแม่เหล็กจะเปลี่ยนแปลงค่า เพราะว่าการเปลี่ยนแปลงพลังงานระหว่างพลังงานแม่เหล็กกับพลังงานไฟฟ้า เช่นเดียวกับการเปลี่ยนแปลงพลังงานระหว่างพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ที่กล่าวถึงในบทนี้ ซึ่งแสดงไว้ในตาราง 7.4

ตาราง 7.4



7.10 การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด

การรวม (superposition) หรือเรียกอีกอย่างว่า การแทรกสอด (interference) ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มี 2 แบบ คือ

1. การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่มีการเคลื่อนที่ไปทางเดียวกัน มีความถี่เท่ากัน

การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มีความถี่เท่ากัน เขียนได้ดังนี้

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \qquad \text{......7.75}$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \qquad \text{......7.76}$$

กระจายสมการ 7.75 และ 7.76 ได้

$$x_1 = A_1 \cos\phi_1 \sin\omega t + A_1 \sin\phi_1 \cos\omega t \qquad \text{......7.77}$$

$$x_2 = A_2 \cos\phi_2 \sin\omega t + A_2 \sin\phi_2 \cos\omega t \qquad \text{......7.78}$$

รวมกันได้

$$x = x_1 + x_2 = [A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2] \sin\omega t + [A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2] \cos\omega t$$

$$= B \sin\omega t + C \cos\omega t \qquad \text{......7.79}$$

เมื่อ

$$B = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 \qquad \text{......7.80}$$

$$C = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 \qquad \text{......7.81}$$

ถ้าเราเขียน

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$= A \cos\phi \sin\omega t + A \sin\phi \cos\omega t \qquad \text{......7.82}$$

เปรียบเทียบสมการ 7.79 กับสมการ 7.82 โดยใช้คำจำกัดความของ B และ C จากสมการ 7.80 และ 7.81 จะได้

$$A \cos\phi = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 \qquad \text{......7.83}$$

$$A \sin\phi = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 \qquad \text{......7.84}$$

สมการ 7.84 หารด้วยสมการ 7.83 จะได้

$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2} \qquad \text{......7.85}$$

จาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

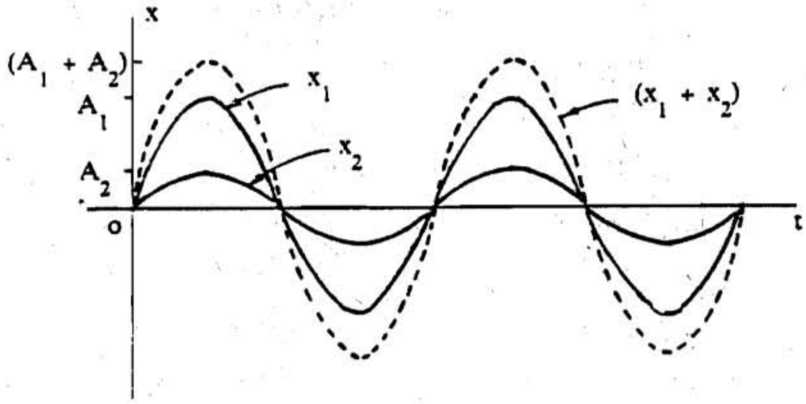
ผลบวกของกำลังที่สองของสมการ 7.83 และ 7.84 จะได้

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2[\cos\emptyset_1\cos\emptyset_2 + \sin\emptyset_1\sin\emptyset_2]$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\emptyset_2 - \emptyset_1)$$

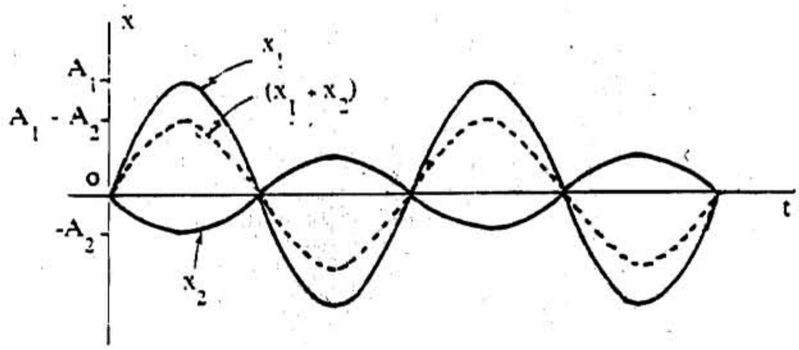
หรือ $A = [A_1^2 + 2A_1A_2\cos|\emptyset_2 - \emptyset_1| + A_2^2]^{\frac{1}{2}}$ 7.86

กรณีที่น่าสนใจกรณีแรก คือ $|\emptyset_2 - \emptyset_1| = 0$ **หรือ** $\emptyset_1 = \emptyset_2$ **เพื่อความสะดวก ให้** $\emptyset_1 = \emptyset_2 = 0$ **ดังนั้น**

$$x = A_1\sin\omega t + A_2\sin\omega t = (A_1 + A_2)\sin\omega t$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 7.18 การแทรกสอดของคลื่น 2 คลื่น

(ก) เมื่อมุมเฟสเท่ากัน (ข) เมื่อมุมเฟสแตกต่างกัน 180°

นั่นแสดงว่าการเคลื่อนที่รวมเป็นฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีความถี่ ω คงเดิม และมีแอมปลิจูดเปลี่ยนไปเป็น $A_1 + A_2$ ดังรูป 7.18 (ก)

กรณีที่สอง $|\varnothing_2 - \varnothing_1| = \pi$ นั่นคือ x_1 กับ x_2 มีเฟสตรงกันข้าม (out of phase) เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\varnothing_1 = 0$ และ $\varnothing_2 = \pi$ ดังนั้น

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \pi) \\ &= A_1 \sin \omega t - A_2 \sin \omega t \\ &= (A_1 - A_2) \sin \omega t \end{aligned}$$

แสดงว่า การเคลื่อนที่รวมยังคงเป็นฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่มีความถี่เท่าเดิม แต่แอมปลิจูดเท่ากับผลต่างของ A_1 และ A_2 ดังรูป 7.18 (ข)

ตัวอย่าง 7.12 อนุภาคตัวหนึ่งมีการเคลื่อนที่ของฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดพร้อม ๆ กัน ด้วยความถี่และทิศทางเดียวกัน ถ้าสมการของการเคลื่อนที่ทั้งสองเป็น $x_1 = 10 \sin 2t$ และ $x_2 = 6 \sin [2t + (5\pi/12)]$ ตามลำดับ จงหาสมการของการเคลื่อนที่รวมของอนุภาค

วิธีทำ เนื่องจากว่าผลต่างของมุมเฟสเท่ากับ $5\pi/12$ เรเดียน และแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่เป็น $A_1 = 10$ และ $A_2 = 6$ ดังนั้น จากสมการ 7.85 จะมีแอมปลิจูดรวมเป็น

$$\begin{aligned} A &= [10^2 + 6^2 + 2(10)(6)\cos(5\pi/12)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 12.92 \end{aligned}$$

และสมการของการเคลื่อนที่รวมเป็น

$$x = 12.92 \sin(2t + \varnothing)$$

โดย $\varnothing$ เป็นผลต่างของมุมเฟส ระหว่าง x และ x_1 ที่เวลา $t = 0$ จะได้

$$x = 12.92 \sin \varnothing$$

และ

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + x_2) \\ &= 0 + 6 \sin(5\pi/12) = 5.796 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \sin \varnothing &= \frac{5.796}{12.92} = 0.4486 \\ \varnothing &= 26.5^\circ = 0.15\pi \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x = 12.92 \sin(2t + 1.15\pi)$$

กิจกรรม 7.4

ให้นักศึกษาแสดงกราฟของการรวมคลื่นสำหรับตัวอย่าง 7.12

2. การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดมีแนวตั้งฉากกันและความถี่เดียวกัน ให้ระยะกระจัด x และ y เป็นของทั้งสองฮาร์มอนิก โดยที่

$$x = A \sin(\omega t + \phi_1) \qquad ......7.87$$

$$y = B \sin(\omega t + \phi_2) \qquad ......7.88$$

กำหนดให้ผลต่างของเฟสเริ่มต้น $\delta = \phi_1 - \phi_2$ จะพิจารณากรณีง่าย ๆ ที่ δ มีค่าต่าง ๆ เพียงบางกรณี ดังนี้

ก. $\delta = 0, 2\pi\ (= 360^\circ)$ ซึ่ง x และ y จะมีเฟสตรงกัน ให้ $\phi_1 = \phi_2 = 0$ จากสมการ 7.87 และ 7.88 เราได้

$$y = \frac{B}{A}x \qquad ......7.89$$

สมการ 7.89 เป็นสมการเส้นตรง มีความชันเท่ากับ $\frac{B}{A}$ มีแอมปลิจูดเท่ากับ $[A^2 + B^2]^{1/2}$ และการที่รวมเฟสมีทิศการเคลื่อนที่ที่ทำให้ x และ y มีเครื่องหมายเหมือนกันตลอดเวลา คือ บวกทั้งคู่ หรือลบทั้งคู่ ดูรูป 7.19

ข. $\delta = \pi = 180^\circ$ ให้ $\phi_1 = 0,\ \phi_2 = \pi$

จะได้

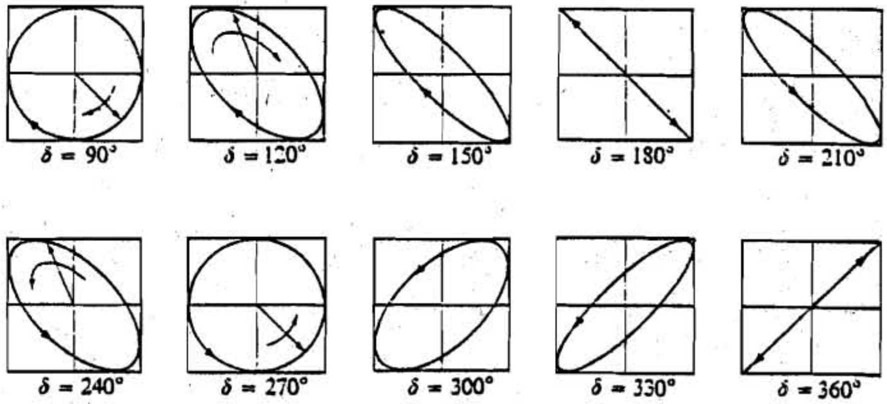
$$x = A \sin \omega t$$

$$y = B \sin(\omega t + \pi) = -B \sin \omega t$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y คือ

$$y = -\frac{B}{A}x \qquad ......7.90$$

ซึ่งสมการ 7.90 เป็นสมการเส้นตรงเหมือนกับสมการ 7.89 แต่ความชันมีค่าเป็นลบ หมายความว่า x และ y มีเครื่องหมายตรงข้าม ดังรูป 7.19



รูปที่ 7.19 แสดงการรวมเฟสของสองคลื่นฮาร์มอนิกอย่างง่ายสำหรับ δ มีค่าต่าง ๆ บางค่า เรียกว่า รูปลิซซาจู

ค. $\delta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ และ $\delta = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ ให้ $\varnothing_1 = 0$

ถ้า $\varnothing_2 = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$x = A \sin \omega t \text{ และ } y = B \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B \cos \omega t \qquad \text{......7.91}$$

ถ้า $\varnothing_2 = \frac{3\pi}{2}$ จะได้

$$x = A \sin \omega t \text{ และ } y = B \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -B \cos \omega t \qquad \text{......7.92}$$

ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ดังนี้

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad \text{......7.93}$$

ทั้ง $\varnothing_2 = \frac{\pi}{2}$ และ $\varnothing_2 = \frac{3\pi}{2}$

สมการ 7.93 แสดงว่าคลื่นรวมเคลื่อนที่เป็นวงรี (ellipse) กรณีพิเศษคือ A = B จะได้การเคลื่อนที่เป็นวงกลม ในกรณีที่ $\varnothing_2 = 90^\circ$ นั้น (ดูสมการ 7.90 ประกอบรูป) พิจารณาที่

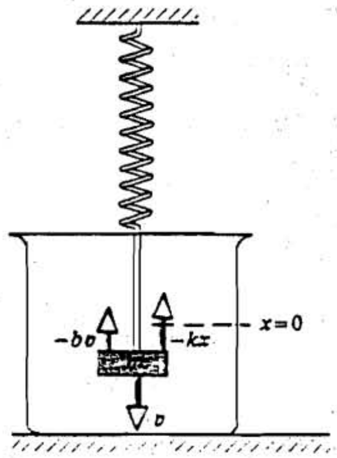
จุดเริ่มต้น t = 0 (จุดบนสุด) x = 0, y มีค่ามากที่สุด คือเท่ากับ A เมื่อ t เพิ่ม x จะเพิ่มขึ้น แต่ y จะลดลงจากค่าสูงสุด ในกรณีนี้เส้นทางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามเข็มนาฬิกา กรณีที่ ϕ_2 = 270° นั้น (ดูสมการ 7.92 ประกอบรูป) พิจารณาจุดเริ่มต้น t = 0 (จุดล่างสุด) x = 0, y มีค่าน้อยที่สุด คือ (-A) เมื่อ t เพิ่ม x จะเพิ่มขึ้น และ y จะมีค่ามากขึ้น เส้นทางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อรวมการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่ตั้งฉากกัน แต่ความถี่ไม่เท่ากัน ผลรวมจะได้เส้นทางการเคลื่อนที่ที่มีรูปร่างต่าง ๆ กัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความถี่ ($\omega_1 : \omega_2$) และผลต่างของมุมเฟสเริ่มต้น (δ) เส้นทางเหล่านี้เป็นไปตาม รูปลิซซาจู (Lissajous figures) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Jules Antoine Lissajous (1822-1880) ผู้ได้ศึกษาเรื่องนี้ไว้อย่างละเอียด

สำหรับการรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มีทิศเดียวกันแต่ความถี่ต่างกัน จะพูดถึงในบทที่ 10 เมื่อกล่าวถึงปรากฏการณ์ที่เรียกว่า บีตส์ (beats)

7.11 การออสซิลเลตแบบหน่วง (Damped Oscillation)

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของระบบต่าง ๆ ที่แล้วมา เราได้ละเว้นไม่ได้นำแรงต้านทาน เช่น แรงเสียดทานของอนุภาคมาคิดด้วย จึงได้แอมปลิจูดของการออสซิลเลตมีค่าคงตัว และการออสซิลเลตดำเนินไปได้อย่างไม่หยุดยั้งตามการเคลื่อนที่อย่างอิสระของอนุภาค แต่โดยความเป็นจริงของธรรมชาติแล้ว อนุภาคเมื่อมีการเคลื่อนที่ย่อมต้องมีแรงต้านทานหรือแรงเสียดทานเกิดขึ้นเสมอ ทำให้แอมปลิจูดของการเคลื่อนที่จะค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 7.20



รูปที่ 7.20 ตัวอย่างหนึ่งของการออสซิลเลตแบบหน่วงคือ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในของเหลว

แรงต้านทานหรือแรงหน่วงชนิดหนึ่งที่คุ้นเคยกันดี ซึ่งเป็นสัดส่วนตรงกับความเร็ว แต่กระทำในทิศทางที่ตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ อย่างในรูป 7.20 นั้น แรงหน่วง = -bv เมื่อ b คือค่าคงตัว และแรงคืนตัวคือ -kx ดังนั้นกฎข้อ 2 ของนิวตัน เขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$ma = m\frac{d^2x}{dt} = -kx - bv \; ; \; v = \frac{dx}{dt}$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ......7.94$$

ซึ่งรากของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการ 7.94 คือ

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad ......7.95$$

$$\omega = \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]^{1/2} \qquad ......7.96$$

ในกรณีนี้เราให้ $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ และเรียก ω_0 ว่า **ความถี่ธรรมชาติ** (natural frequency) ซึ่งหมายถึงความถี่ถ้าไม่นำแรงหน่วงมาคิด คือกรณีที่ b = 0 และถ้าให้ $\gamma = \frac{b}{2m}$, เรียก γ ว่า **ค่าพารามิเตอร์ของความหน่วง** (damping parameter) สมการ 7.96 อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2} \qquad ......7.97$$

ดังนั้น ความถี่ ω จะมีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ ω_0

การที่จะตรวจสอบว่า สมการ 7.95 เป็นรากของสมการ 7.94 จริงนั้น ก็ทำได้โดยการแทนค่า x(t) จากสมการ 7.95 ในสมการ 7.94 จากสมการ 7.97 ถ้า γ มีค่าไม่มากนัก ($\gamma < \omega_0$) จะเห็นว่าการหน่วงมีผลทำให้ความถี่ของการออสซิลเลตลดลง แต่คาบของการแกว่ง ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) ยาวขึ้น นั่นคือแรงเสียดทานจะทำให้การเคลื่อนที่ช้าลง แอมปลิจูด $Ae^{-\gamma t}$ จะมีค่าลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่าง 7.13 แอมปลิจูดของออสซิลเลเตอร์แบบหน่วงอันหนึ่งลดลง 50 เปอร์เซ็นต์ ในแต่ละรอบ

ก. จงพิสูจน์ว่า $\frac{bT}{2m} = \ln 2$ หรือ $\frac{b}{2m} = (\ln 2)\frac{\omega}{2\pi}$

ข. จงพิสูจน์ว่า อัตราส่วนการลดของความถี่เท่ากับ 0.006

วิธีทำ

ก. พิสูจน์ : แอมปลิจูด ณ เวลา t $= Ae^{-\gamma t}$ ....(1)

แอมปลิจูด ณ เวลา (t + T) $= Ae^{-\gamma(t+T)}$ ....(2)

สมการ (2) หารด้วยสมการ (1) เท่ากับ ๕๐ เปอร์เซ็นต์

นั่นคือ
$$e^{-\gamma T} = \frac{1}{2}$$
$$e^{\gamma T} = 2$$
$$\ln(e^{\gamma T}) = \ln 2, \qquad \gamma T = \ln 2$$

จาก $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

จะได้ $\dfrac{b}{2m}T = \ln 2$

จาก $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

ดังนั้น $\dfrac{b}{2m} = (\ln 2)\dfrac{\omega}{2\pi}$

ข. จากสมการ 7.97 $\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2}$

$$\omega = [\omega_0^2\{1 - (\frac{\gamma}{\omega_0})^2\}]^{1/2}$$

ใช้การกระจายทฤษฎีบททวินาม จะได้

$$\omega \cong \omega_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\right]$$

จากข้อ ก. $\dfrac{\gamma}{\omega_0} \cong \dfrac{1}{2\pi}\ln 2$

ดังนั้น
$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\ln 2\right)^2$$
$$= 0.006$$

7.12 การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ

ถ้ามีแรงภายนอกที่เป็นการเคลื่อนที่แบบคาบมากระทำต่อวัตถุ และทำให้วัตถุนั้นออสซิลเลต เราเรียกการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบนี้ว่า **การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำ** (forced oscillation) เช่น แรงภายนอก คือ

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t \qquad ......7.98$$

เมื่อ ω คือ ความถี่เชิงมุมของแรง ซึ่งตามปกติแล้วก็ไม่มีอะไรที่เกี่ยวข้องกับความถี่เชิงมุมธรรมชาติของระบบ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ มวล m ที่ติดอยู่กับสปริงซึ่งมีค่า $k = m\omega^2_0$ อยู่ภายใต้แรง F_{ext} ซึ่งเราจะพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

1. การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำแต่ไม่มีแรงหน่วง

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m เขียนได้เป็น

$$ma = -kx + F_{ext}$$

หรือ
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

หรือ
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \qquad ......7.99$$

รากของสมการ 7.99 คือ

$$x = A \sin \omega t \qquad ......7.100$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t \qquad ......7.101$$

แทนสมการ 7.100 และ 7.101 ในสมการ 7.99 ได้

$$-A\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 A \sin \omega t = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

หรือ
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad ......7.102$$

จากสมการ 7.102 จะเห็นว่า A เป็นบวก ถ้า $\omega < \omega_0$ และ A จะเป็นลบ ถ้า $\omega > \omega_0$ ดังนั้น ถ้าจะให้ A เป็นเฉพาะค่าบวก โดยเขียน A ดังนี้คือ

$$A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \qquad ......7.103$$

ดังนั้น ระยะกระจัด x (สมการ 7.99 ต้องเขียนเป็น)

$$x = A \sin (\omega t - \varnothing) \qquad ......7.104$$

เมื่อค่าคงตัวเฟส $\varnothing = 0$ เมื่อ $\omega < \omega_0$ และ $\varnothing = \pm \pi$ เมื่อ $\omega > \omega_0$

จากสมการ 7.103, 7.104 จะเห็นว่า มวลจะออสซิลเลต in phase กับแรงขับ F_{ext} ถ้า ω น้อยกว่า ω_0 และจะออสซิลเลตมีเฟสแตกต่าง 180 องศา ถ้า ω มากกว่า ω_0

แอมปลิจูดของการออสซิลเลตจะมีค่ามาก ถ้าความถี่ของแรงภายนอก ω มีค่าใกล้กับความถี่ธรรมชาติ ω_0 และในกรณีที่ ω มีค่าเข้าใกล้ ω_0 แอมปลิจูดจะเข้าสู่ค่าอนันต์ แต่ในธรรมชาติจริง ๆ นั้นมักจะมีแรงหน่วงเกิดกับระบบเสมอ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

2. การออสซิลเลตด้วยแรงกระทำและมีแรงหน่วง

การเคลื่อนที่ของมวล m อยู่ภายใต้แรงหน่วง -bv ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ตามกฎข้อ 2 ของนิวตัน เขียนได้เป็น

$$ma = -kx - bv + F_{ext}$$

หรือ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{bv}{m} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad ......7.105$$

ใช้ความสัมพันธ์ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ และ $v = \frac{dx}{dt}$ สมการ 7.105 เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad ......7.106$$

รากของสมการ 7.106 (จะไม่พิสูจน์ในตำรานี้) ที่เป็นไปได้รากหนึ่งซึ่งเป็นรากของสถานะอยู่ตัว (steady state) จะเป็น

$$x = A \sin(\omega t - \alpha) \qquad ......7.107$$

โดยที่แอมปลิจูด A มีค่าเป็น

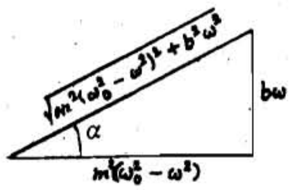
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad ......7.108$$

และค่าคงตัวเฟส α คือ

$$\tan \alpha = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

หรือถ้าเขียนในพจน์ของฟังก์ชันไซน์ (ดูรูป 7.21) จะได้

$$\sin \alpha = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0} \qquad ......7.109$$



รูปที่ 7.21 มุมเฟส α จากสมการ 7.109

ความเร็วของมวล m ในสถานะอยู่ตัว หาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ 7.107 ผลที่ได้คือ

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \alpha) \qquad ......7.110$$

กำลังที่ให้เข้าไปกับระบบ คือ

$$P = Fv = (F_0 \sin \omega t) A\omega \cos(\omega t - \alpha)$$
$$= A\omega F_0 \sin\omega t \cos(\omega t - \alpha) \qquad ......7.111$$

โดยใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

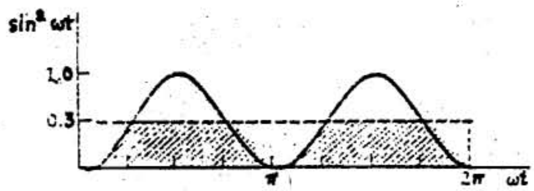
สมการ 7.111 เขียนใหม่ได้เป็น

$$P = \omega A F_0 \sin\alpha \sin^2 \omega t + \omega A F_0 \cos\alpha \sin\omega t \cos\omega t$$

ถ้าจะหากำลังเฉลี่ยในแต่ละรอบของการออสซิลเลตนั้น จะเห็นว่าค่าเฉลี่ยของ $\sin\omega t \cos\omega t$ เท่ากับศูนย์ เพราะมีค่าเป็นบวกและลบเท่า ๆ กัน และค่าเฉลี่ยของ $\sin^2 \omega t$ ในหนึ่งรอบเท่ากับ $\frac{1}{2}$ (ดูรูป 7.22)

ดังนั้น กำลังเฉลี่ย คือ

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\omega A F_0 \sin\alpha \qquad \text{......7.112}$$



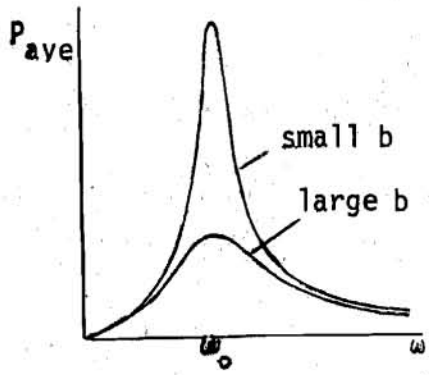
รูปที่ 7.22 กราฟของ $\sin^2 \omega t$ ในหนึ่งรอบ ค่าเฉลี่ยคือ $\frac{1}{2}$

แทนสมการ 7.108, 7.109 ในสมการ 7.112 เราจะได้

$$P_{ave} = \frac{1}{2} b\omega^2 A^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \qquad \text{......7.113}$$

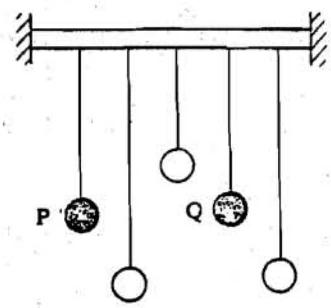
จะเห็นว่า P_{ave} จะมีค่าสูงสุด เมื่อ $\omega = \omega_0$ เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า เกิดการสั่นพ้อง (resonance) และบางครั้งเรียก $\omega = \omega_0$ ความถี่การสั่นพ้อง (resonance frequency) กราฟของสมการ 7.113 ดูได้จากรูป 7.23



รูปที่ 7.23 กราฟของกำลังเฉลี่ยสำหรับค่า b ต่างๆ กัน

สำหรับการศึกษาเรื่องการออสซิลเลตแบบหน่วง การออสซิลเลตเมื่อมีแรงกระทำ จะหาอ่านได้ในตำรากลศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป หรือตำราวิชาคลื่น

การแสดงการสั่นพ้องนั้น สามารถแสดงได้ดังรูป 7.24



รูปที่ 7.24 การสาธิตการเกิดการสั่นพ้องด้วยลูกตุ้มอย่างง่าย

ระบบประกอบด้วยลูกตุ้มชุดหนึ่งซึ่งมีความยาวต่าง ๆ กัน แขวนจากคานเดียวกัน เราทำให้ลูกตุ้ม P ออสซิลเลต ลูกตุ้มอื่น ๆ ก็จะเริ่มออสซิลเลตด้วย แต่จะพบว่า ลูกตุ้ม Q ซึ่งมีความยาวเท่ากับลูกตุ้ม P (มีความถี่ธรรมชาติเท่ากัน) จะออสซิลเลตด้วยแอมปลิจูดกว้างที่สุด

กิจกรรม 7.5

ให้นักศึกษาเปรียบเทียบผลของการออสซิลเลตแบบหน่วงกับการออสซิลเลตด้วยแรงกระทำจากภายนอกว่าให้ผลต่างกันอย่างไร

สรุป

ตามปกติสถานะของสสารแบ่งออกได้เป็น 3 สถานะ คือ ของแข็ง ของเหลว และก๊าซ

สมบัติความยืดหยุ่นของของแข็ง สามารถอธิบายได้โดยความเค้นและความเครียด ความเค้นเป็นปริมาณที่เป็นสัดส่วนตรงกับแรงที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปทรง และความเครียดเป็นปริมาณที่วัดการเสียรูปทรง

มอดุลัสของความยืดหยุ่น มีนิยามดังนี้

$$\text{มอดุลัสของความยืดหยุ่น} \equiv \frac{\text{ความเค้น}}{\text{ความเครียด}}$$

จำแนกออกเป็น 3 ชนิด คือ มอดุลัสของญัง มอดุลัสเฉือน และมอดุลัสเชิงปริมาตร หรือบัลค์มอดุลัส

การเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายเป็นการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบ ซึ่งสมการการเคลื่อนที่เขียนได้ว่า

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบเรียกว่า คาบ (T) นิยามว่า

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ส่วนกลับของคาบคือ ความถี่ของการเคลื่อนที่ ซึ่งหมายถึงจำนวนการออสซิลเลตต่อวินาที

ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย คือ

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

ดังนั้น ความเร็วสูงสุดคือ $A\omega$ และความเร่งสูงสุดคือ $A\omega^2$ ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์เมื่อออสซิลเลเตอร์อยู่ที่จุดกลับ $x = \pm A$ และอัตราเร็วจะสูงสุดที่ตำแหน่งสมดุล $x = 0$ ขนาดของความเร่งมีค่าสูงสุดที่จุดกลับและมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสมดุล

มวลที่ยึดติดกับสปริงแขวนในแนวดิ่งหรือเคลื่อนที่ในแนวนอนบนพื้นเรียบที่ไม่มีแรงเสียดทาน จะเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ซึ่งคาบของการเคลื่อนที่ คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

เมื่อ k คือ ค่าคงตัวของแรงหรือค่าคงตัวของสปริง และ m คือ มวลที่ยึดติดอยู่กับสปริง พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิก ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา คือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \emptyset)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \emptyset)$$

พลังงานรวมซึ่งมีค่าคงตัว เท่ากับ

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

ลูกตุ้มอย่างง่ายความยาว L แกว่งด้วยมุมมีค่าน้อย ๆ จะมีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ซึ่งมีคาบ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

จะเห็นว่า คาบไม่ขึ้นอยู่กับมวลที่แขวน

ลูกตุ้มฟิสิกัลมีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายรอบแกนที่ไม่ผ่านศูนย์กลางมวล คาบของการเคลื่อนที่ คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad (D = L_{CM} \text{ ในตาราง 7.3})$$

เมื่อ I คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนหมุน และ D คือ ระยะทางจากจุดบนแกนหมุนถึงศูนย์กลางมวลในแนวตั้งฉาก

การรวมการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุด มีแนวตั้งฉากกันและมีความถี่เดียวกันจะได้รูปลิซซาจู

การแกว่งที่ถูกหน่วงเกิดขึ้นเนื่องจากระบบต้องสูญเสียพลังงานไป อันเนื่องจากความเสียดทาน ความถี่เชิงมุมจะมีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แอมปลิจูดของการเคลื่อนที่จะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

การแกว่งที่ถูกแรงบังคับ ถ้าความถี่ของแรงบังคับเท่ากับความถี่ธรรมชาติของออสซิลเลเตอร์ แรงขับเคลื่อนจะถ่ายทอดพลังงานให้กับออสซิลเลเตอร์ด้วยอัตราสูงสุด

แบบฝึกหัดที่ 7

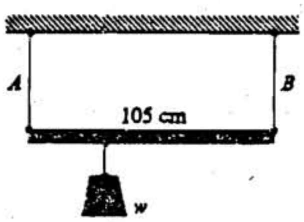
7.1 ท่อนเหล็กมีพื้นที่ภาคตัดขวาง 50 ตารางเซนติเมตร ยาว 1.80 เมตร ถ้าถูกกระทำด้วยแรงดึง 320,000 นิวตัน จะยืดออกกี่เมตร กำหนดให้มอดุลัสของยังเท่ากับ 20×10^{10} นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 5.76×10^{-4} m

7.2 ขีดจำกัดของเหล็กกล้าที่ใช้ทำสายลิฟต์ มีค่าเท่ากับ 2.8×10^8 นิวตัน/เมตร^2 จงหาความเร่งสูงสุดของลิฟต์หนัก 8,000 นิวตัน เมื่อสายลิฟต์มีพื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ 3.5×10^{-4} เมตร^2 และความเค้นต้องไม่เกิน $\frac{1}{4}$ ของขีดจำกัดของการยืดหยุ่น

ตอบ 30 m/s^2

7.3 แท่งวัตถุเบามากยาว 105 เซนติเมตร ถูกแขวนไว้ที่ปลายทั้งสองด้วยลวด A และ B ที่ยาวเท่ากัน (รูป 7.25) พื้นที่ภาคตัดขวางของ A = 1 mm^2 และของ B = 2 mm^2, มอดุลัสของยังของลวด A = 2.1×10^{11} N . m^{-2} และของ B = 1.4×10^{11} N . m^{-2} จงหาจุดแขวนของน้ำหนัก W เพื่อให้เกิด



รูปที่ 7.25

ก. ความเค้นของลวด A และ B เท่ากัน

ข. ความเครียดของลวด A และ B เท่ากัน

ตอบ ก. 70 เซนติเมตรจากปลาย A, ข. 60 เซนติเมตรจากปลาย A

7.4 แผ่นโลหะ 2 แผ่น ย้ำติดกันด้วยหมุดย้ำหัว 4 ตัว แต่ละตัวมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 มิลลิเมตร แผ่นโลหะที่ย้ำปลายแล้วนี้จะรับแรงดึงได้สูงสุดเท่าไร ทั้งนี้ความเค้นเฉือนที่หมุดจะต้องไม่เกิน 7×10^7 นิวตัน/เมตร^2 ให้ถือว่าหมุดแต่ละตัวรับน้ำหนักเท่ากัน

ตอบ 7.9×10^3 N

7.5 เดิมก๊าซมีความดัน 1 บรรยากาศ ต่อมาความดันเพิ่มเป็น 1.01 บรรยากาศโดยที่อุณหภูมิคงเดิม

ก. ปริมาตรใหม่เป็นร้อยละเท่าใดของปริมาตรเดิม

ข. บัลค์มอดุลัสของก๊าซนี้เท่ากับเท่าใด

ตอบ ก. 99% , ข. 1.01 atm

7.6 จงหาความหนาแน่นของน้ำทะเล ณ ความลึกอันหนึ่งซึ่งมีความดัน 3×10^7 นิวตัน/เมตร^2 ที่ผิวน้ำทะเลมีความหนาแน่น 1,020 กิโลกรัม/เมตร^3 น้ำมีสภาพอัดได้ = 5×10^{-10} (นิวตัน/เมตร^2)$^{-1}$ และความดันบรรยากาศ = 10^5 นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 1,035 kg . m^{-3}

7.7 บัลค์มอดุลัสของปรอท = 2.6×10^{10} นิวตัน/เมตร^2 จงหาจำนวนร้อยละของปริมาตรที่ลดลง เมื่อเพิ่มความดันเป็น 10 บรรยากาศ 1 บรรยากาศ = 1.013×10^5 นิวตัน/เมตร^2

ตอบ 3.9×10^{-3}%

7.8 เดิมสปริงยาว 20 เซนติเมตร เมื่อเอามวล 1 กิโลกรัม ไปแขวนห้อยไว้ สปริงจะยาว 24.5 เซนติเมตร

ก. ค่าแรงคงตัวของสปริงเท่ากับเท่าใด

ข. ถ้าเติมมวลอีก 0.6 กิโลกรัม สปริงจะยาวเท่าใด

ตอบ 218 N . m^{-1}, ข. 27.2 cm

7.9 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักแขวนห้อยเข้ากับสปริง ครั้งแรกแขวน 10 นิวตัน วัดสปริงได้ยาว 15 เซนติเมตร ครั้งที่สองแขวน 20 นิวตัน วัดสปริงได้ยาว 20 เซนติเมตร และครั้งสุดท้ายแขวน 30 นิวตัน วัดได้ 25 เซนติเมตร ค่าแรงคงตัวและความยาวเดิมของสปริงเป็นเท่าใด

ตอบ 200 N . m^{-1}, 10 cm

7.10 อนุภาคเคลื่อนที่ตามแกน x เป็นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย เริ่มจากจุดกำเนิด t = 0 และเคลื่อนที่ไปทางขวา ถ้าแอมปลิจูดของการเคลื่อนที่เท่ากับ 2 เซนติเมตร และความถี่เท่ากับ 1.5 เฮิรตซ์

ก. จงแสดงว่าระยะกระจัด คือ $x = 2 \sin 3\pi t$

ข. จงหาอัตราเร็วสูงสุด และเวลาที่อนุภาคมีความเร็วสูงสุดนี้เป็นครั้งแรก

ค. ความเร่งสูงสุดและเวลาที่อนุภาคมีความเร่งสูงสุดนี้เป็นครั้งแรก

ง. ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ระหว่าง $t = 0$ และ $t = 1$ วินาที

ตอบ ข. 6π cm/s, 0.33 s   ค. $18\pi^2$ cm/s², 0.5 s

ง. 12 cm

7.11 กำหนดให้วัตถุมีมวล 250 กรัม เคลื่อนที่ไปมาด้วยแรงคงตัว $k = 4$ N/m เริ่มต้นวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมีทิศไปทางขวา 40 ซม./วินาที ณ จุดเริ่มต้นซึ่งห่างจากตำแหน่งสมดุลไปทางขวา 10 ซม. จงคำนวณหา

(ก) คาบเวลา T, ความถี่ f, และความถี่เชิงมุม ω

(ข) พลังงานทั้งหมด

(ค) แอมปลิจูด A

(ง) ความเร็วและความเร่งสูงสุด

(จ) ระยะกระจัด, ความเร็วและความเร่ง ณ เวลาผ่านไป $\frac{\pi}{8}$ วินาที

ตอบ (ก) 1.57 s, 0.638 H_8, 4 rad/s   (ข) 0.04 J

(ค) 0.14 m   (ง) 0.57 m/s, 2-3 m/s²

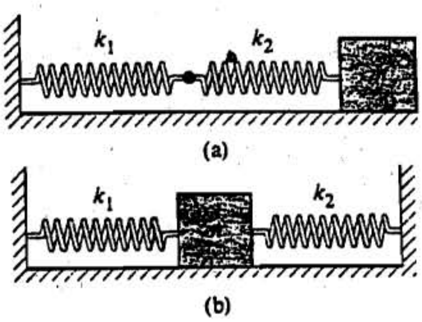
(จ) 0.1 m, -0.4 m/s, -1.6 m/s²

7.12 มวล 1 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง 2 อัน ดังรูป 7.26 ซึ่งค่าคงตัวของสปริงคือ $k_1 = 200$ นิวตัน/เมตร และ $k_2 = 250$ นิวตัน/เมตร

ก. จงหาคาบของการเคลื่อนที่ รูป 7.26 (a)

ข. จงหาคาบของการเคลื่อนที่ รูป 7.26 (b)

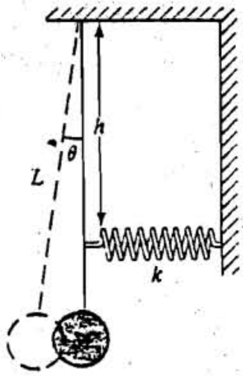
ตอบ ก. 0.6 s   ข. 0.3 s



รูปที่ 7.26 แบบฝึกหัดที่ 7.12

7.13 ลูกตุ้มความยาว L และมวล M มีสปริง ซึ่งมีค่าคงตัวของแรง k ติดอยู่ห่างจากจุดแขวน h ดังรูป 7.27 จงหาความถี่ของการเคลื่อนที่ของระบบ กำหนดว่า θ มีค่าน้อย ๆ

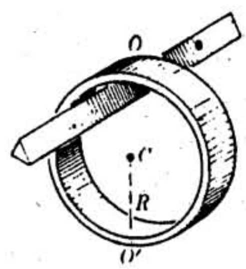
ตอบ $\omega = \left[\frac{MgL + kh^2}{I}\right]^{1/2}$



รูปที่ 7.27 แบบฝึกหัดที่ 7.13

7.14 วงแหวนรัศมี 50 เซนติเมตร คล้องอยู่กับแกน ดังรูป 7.28 ถ้าทำให้วงแหวนเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลเล็กน้อยแล้วปล่อย จงหาคาบของการออสซิลเลต

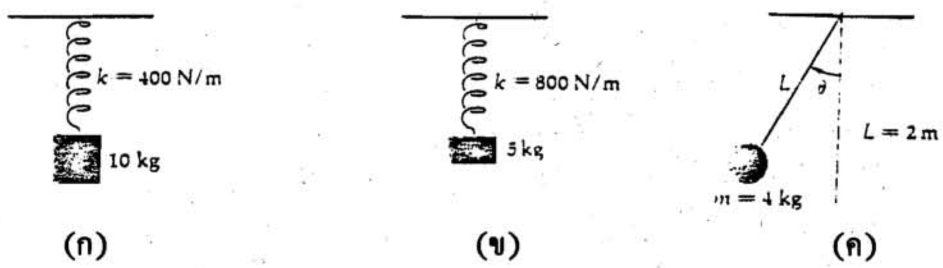
ตอบ 2 s



รูปที่ 7.28 แบบฝึกหัดที่ 7.14

7.15 จงหาความถี่แห่งการสั่นพ้อง (resonant frequency) ของระบบในรูปที่ 7.29

ตอบ ω = 6.32 rad/s, 12.65 rad/s, 2.21 rad/s



รูปที่ 7.29 แบบฝึกหัดที่ 7.15

7.16 จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของการรวมกันได้ของการเคลื่อนที่ของสองฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่ขนานกัน และมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $x_1 = 2 \sin(\omega t + \pi/3)$ และ $x_2 = 3 \sin(\omega t + \pi/2)$

ตอบ $x = 4.835 \sin(\omega t + 0.437\pi)$

7.17 จงหาสมการของทางเดินของการเคลื่อนที่รวมของอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่ฮาร์มอนิกอย่างง่ายสองชุดที่ตั้งได้ฉากกัน และมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$x = 4 \sin \omega t \quad \text{และ} \quad y = 3 \sin (\omega t + \varnothing)$$

โดยในแต่ละกรณีให้เขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาค เมื่อ

ก. $\varnothing = 0$ ข. $\varnothing = \frac{\pi}{2}$ ค. $\varnothing = \pi$

ตอบ ก. $x = \frac{4}{3}y$, ข. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ค. $x = -\frac{4}{3}y$

7.18 มวล 2 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง $k = 400$ นิวตัน/เมตร มีแอมปลิจูดเริ่มต้น 3 เซนติเมตร

ก. จงหาคาบและพลังงานรวมเริ่มต้น

ข. ถ้าพลังงานลดลงร้อยละ 1 ในแต่ละคาบ จงหาค่าคงตัวการหน่วง b

ตอบ ก. 0.44 s, 0.18 J ข. 0.045 kg/s

7.19 มวล 2 กิโลกรัม ติดกับสปริง $k = 400$ นิวตัน/เมตร $b = 2.0$ กิโลกรัม/วินาที แรงขับเป็นฟังก์ชันไซน์ มีค่าสูงสุด 10 นิวตัน และความถี่เชิงมุม 10 เรเดียนต่อวินาที

ก. จงหาแอมปลิจูดของการออสซิลเลต

ข. ถ้าความถี่ของแรงขับแปรค่าได้ ความถี่นี้จะมีค่าเท่าใด เมื่อเกิดการสั่นพ้อง

ค. หาแอมปลิจูดของการออสซิลเลตเมื่อเกิดการสั่นพ้อง

ตอบ ก. 4.98 cm ข. 14.1 rad/s ค. 35.4 cm

7.20 มวล 0.5 กิโลกรัม ติดอยู่กับสปริง $k = 300$ นิวตันต่อเมตร ในช่วง 10 วินาทีของการออสซิลเลต ระบบสูญเสียพลังงานให้กับความเสียดทาน 0.5 จูล ถ้ากำหนดให้แอมปลิจูดเริ่มต้นเท่ากับ 15 เซนติเมตร

ก. จงหาเวลาที่พลังงานจะลดลงเหลือ 1 จูล

ข. ความถี่ของการออสซิลเลต

ตอบ ก. 219 s ข. $\omega = 24.5$ rad/s, $f = 3.90$ Hz