มัดที่ ๕
หน้า ๑๘๐ หาย

สาระสำคัญ

1. ความเร็วเชิงมุมบัดดลของอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง คือ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

โดย ω มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที

ความเร่งเชิงมุมบัดดลของอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง คือ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

โดย α มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที^{2}

ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัว จะแสดงสมการทางจลนศาสตร์ได้ในทำนองเดียวกันกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น ดังนี้

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมกับความเร็วเชิงเส้นและความเร่งในแนวสัมผัสวง

$$v = \omega r$$

$$a_T = \alpha r$$

2. กฎข้อสองของนิวตันสำหรับการเคลื่อนที่เป็นวงกลม คือ

$$F_c = ma_c = m\omega^2 r$$

โดย F_c คือ แรงสู่ศูนย์กลาง และ a_c คือ ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

แรงโน้มถ่วงระหว่างมวล

$$F_g = (Gm_1m_2)/r^2$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุซึ่งถูกโลกดึงดูด (ระดับอ้างอิงที่ระยะอนันต์)

$$E_p = -(Gm_em)/r$$

พลังงานรวมของระบบอิสระซึ่งประกอบด้วยมวล m เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ภายใต้แรงดึงดูดจากมวล M คือ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - (GMm)/r$$

ถ้าพิจารณาจากสมการพลังงานรวม จะได้ว่าความเร็วหลุดพ้นคือความเร็วต้นที่ผิวโลกเมื่อพลังงานรวมเป็นศูนย์

$$E = \frac{1}{2}mv^2_{escape} - (GM_cm)/R = 0$$

นั่นคือ $v_{escape} = [(2Gme)/R]^{1/2}$

พลังงานรวมของดาวเทียมที่ระยะสูง h จากผิวโลก คือ

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - (GM_em)/(R+h)$$

สำหรับการโคจรของดาวเคราะห์จะเป็นไปตามกฎข้อ 3 ของเคปเลอร์

$$T^2 = (4\pi^2/GM_e)r^3$$

ตามปกติรถแล่นผ่านทางโค้งจะเสียการทรงตัวจึงต้องสร้างถนนบริเวณทางโค้งให้เอียงลาดจากขอบถนนลงไป โดยค่าความเอียงของถนนหรือการยกขอบถนน คือ

$$\tan\alpha = v^2/(Rg)$$

3. โมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบอนุภาค

$$I = \Sigma m_ir_i^2$$

ในระบบเอสไอ มีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร^2

ค่า I ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแกนหมุนและรูปร่างของวัตถุ และการกระจายของเนื้อวัตถุ โดยระยะ r_i คือระยะทางในแนวตั้งจากอนุภาคลำดับที่ i^{th} ถึงแกนหมุน

พลังงานจลน์ของการหมุน

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็ง

$$I = \int r^2 dm$$

เมื่อ r คือระยะทางระหว่างมวลขนาดเล็ก dm ถึงแกนหมุน

โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาคที่มีโมเมนตัมเชิงเส้น **p** = mv คือ

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

ทอร์กเนื่องจากแรง **F** กระทำต่ออนุภาคซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง **r** ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย คือ

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

ทอร์กภายนอกสุทธิที่กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุแข็งเกร็ง คือ

$$\tau = dL/dt$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนสมมาตรด้วยความเร็วเชิงมุม ω คือ

$$L = I\omega$$

ทอร์กภายนอกลัพธ์กระทำต่อวัตถุแข็งเกร็งทำให้หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม α คือ

$$\tau = I\alpha$$

งานกระทำโดยแรงที่ทำให้เกิดการหมุนเป็นมุม $d\varnothing$ คือ

$$W = \tau d\varnothing$$

และกำลังบัดดล คือ $P = \tau W$

ถ้าไม่มีทอร์กจากภายนอก ($\tau_{ext} = 0$) โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{คงตัว}$$

พลังงานจลน์รวมของวัตถุแข็งเกร็ง ดังเช่น วัตถุทรงกระบอกขณะกลิ้งบนผิวขรุขระโดยไม่เลื่อนไถล จะเท่ากับพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลรวมกับพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนผ่านศูนย์กลางมวล

$$E_k = \frac{1}{2} Mv^2_{CM} + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$$

4. วัตถุแข็งเกร็งจะอยู่ในภาวะสมดุล ตามเงื่อนไขดังนี้

แรงภายนอกลัพธ์เป็นศูนย์

$$\Sigma F = 0$$

และ ทอร์กภายนอกลัพธ์เท่ากับศูนย์

$$\Sigma \tau = 0$$

โดยสมการทั้งสองนี้เรียกว่า "สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง"

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. เปรียบเทียบปริมาณเกี่ยวกับการหมุนกับการเลื่อนที่ รวมทั้งสมการทางจลนศาสตร์ของการเลื่อนที่กับการหมุนได้

2. อธิบายหลักการสำคัญเกี่ยวกับ แรงสู่ศูนย์กลาง แรงผ่านศูนย์กลาง แรงโน้มถ่วง ความเร็วหลุดพ้น กฎข้อ 3 ของเคปเลอร์ และการลาดเอียงของถนนโค้งได้

3. หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่ายได้ โดยทฤษฎีบทแกนขนานและแกนตั้งฉากได้

4. ชี้แจงหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม และความสัมพันธ์ระหว่างแรงผ่านศูนย์กลางกับโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งได้

5. เปรียบเทียบเงื่อนไขของสภาพสมดุลระหว่างสภาพสมดุลของอนุภาคหรือวัตถุภายใต้แรงจวบกันกับสภาพสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งโดยทั่วไปได้

6. แสดงวิธีคำนวณหาปริมาณเชิงมุมดังเช่นพลังงานจลน์ของการหมุน โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กตามตัวอย่างต่าง ๆ ในบทนี้ โดยพิจารณาจากโจทย์แบบฝึกหัดท้ายบทได้

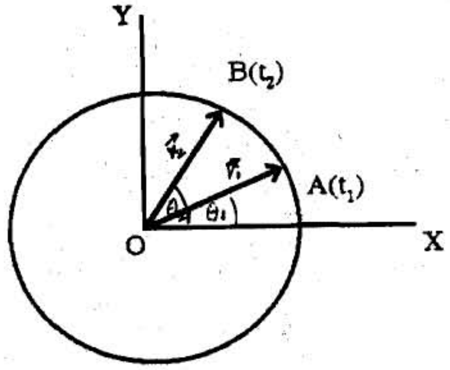
ในบทก่อนได้กล่าวถึงวัตถุหรืออนุภาคซึ่งมีการเคลื่อนที่ในแบบเส้นตรงแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงการหมุนและการเคลื่อนที่เป็นแบบวงโคจร และปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่เกี่ยวข้องรวมทั้งการนำไปประยุกต์

6.1 จลนศาสตร์ของการหมุน

พิจารณาวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) ซึ่งมีการเคลื่อนที่รอบแกนหมุน เป็นการเคลื่อนที่ที่เป็นวงกลมที่เกี่ยวกับความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

หาอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (average angular speed) อัตราเร็วเชิงมุมบัดดล (instantaneous angular speed) ก่อน แล้วจึงหาความเร็วเชิงมุม (angular velocity) และความเร่งเชิงมุม (angular acceleration)



รูปที่ 6.1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม

อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบระดับ ขณะเวลา t_1 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A มีตำแหน่งเชิงมุมเป็น θ_1 เมื่อเวลา t_2 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง B มีตำแหน่งเชิงมุมเป็น θ_2 และมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งจากจุดศูนย์กลาง O เป็น $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ ตามลำดับ ในช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ อนุภาคจะเคลื่อนที่เปลี่ยนตำแหน่งไปเทียบกับจุดศูนย์กลางเป็นมุม $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ และอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งได้ระยะทาง Δs **อัตราส่วนระหว่างมุมที่เปลี่ยนไปกับช่วงเวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่** เรียกว่า **ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค**

ถ้า ω_{av} = อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค มีหน่วยเรเดียน/วินาที (rad/s)

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{........6.1}$$

ถ้า ω = อัตราเร็วเชิงมุมบัดดลของอนุภาคหรืออัตราเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งของอนุภาคมีหน่วย เรเดียน/วินาที

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{........6.2}$$

ให้ r = รัศมีของวงกลมที่อนุภาคเคลื่อนที่

Δs = ความยาวของส่วนโค้ง AB ซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ในช่วงเวลา t

v = อัตราเร็วเชิงเส้นบัดดลของอนุภาค

เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราเร็วเชิงเส้นกับอัตราเร็วเชิงมุม จากความสัมพันธ์ระหว่าง มุม รัศมี และส่วนโค้ง จะได้ว่า

มุม θ ณ จุดศูนย์กลาง คิดเป็นเรเดียน คือ $\frac{\text{ความยาวของส่วนโค้ง}}{\text{รัศมี}}$

นั่นคือ $\Delta\theta = \Delta s/r$ 6.3

หรือ $ds = rd\theta$ 6.4

อัตราเร็วบัดดลของอนุภาค $v = ds/dt = rd\theta/dt$ 6.5

$v = \omega r$ 6.6

สมการ (6.6) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วเชิงเส้นกับอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาค

ถ้าอนุภาคมีความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนไปตามเวลา อนุภาคนั้นจะมีความเร่งเชิงมุมซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

$$\alpha_{av} = \Delta\omega/\Delta t$$

$$= [\omega_2(t_2) - \omega_1(t_1)]/(t_2 - t_1) \qquad \text{........6.7}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega/\Delta t = d\omega/dt \qquad \text{........6.8}$$

เมื่อ α_{av} = ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยของอนุภาค หน่วยเรเดียน/วินาที^{2}

α = ความเร่งเชิงมุมบัดดลของอนุภาค หน่วยเรเดียน/วินาที^{2}

ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบใด ω มีทิศตั้งฉากกับระนาบนั้นอยู่ตลอดเวลา การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมจึงเป็นผลจากการเปลี่ยนขนาดกับเครื่องหมายของทิศเท่านั้น เราจึงเขียนขนาดของความเร่งเชิงมุมจากสมการ (6.8) เป็น

$$\alpha = |\alpha| = d\omega/dt = d(d\theta/dt)/dt = d^2\theta/dt^2 \qquad ....6.9$$

เนื่องจาก ω มีค่าเท่ากันสำหรับทุกอนุภาคของวัตถุแข็งเกร็ง จากสมการ (6.9) จะได้ว่า α ก็มีค่าเท่ากันสำหรับทุกอนุภาค ดังนั้น α จึงมีลักษณะเฉพาะของอนุภาคทั้งก้อนด้วย

จากสมการ (6.6) จะหาความเร่งตามเส้นโค้งในแนวสัมผัสวงได้ดังนี้

$$a_T = r[d\omega/dt] = r\alpha \qquad ......6.10$$

สมมติอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในอวกาศที่ปราศจากแรงโน้มถ่วง เมื่อเวลา $t = 0$ และเวลา t ต่อมาอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง θ_1 และ θ_2 วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ดังรูปที่ 6.1 โดยมีขนาดความเร็วเชิงมุมเป็น ω_0 กับ ω ตามลำดับ และมีขนาดความเร่งเชิงมุมคงที่ α

จากสมการ (6.8) $\quad \alpha = d\omega/dt$

$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

$$\therefore \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad ......6.11$$

จากสมการ (6.2) $\quad \omega = d\theta/dt$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt$$

$$= \omega_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t dt$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$

ให้ $\theta = \theta_2 - \theta_1$ = การกระจัดเชิงมุม (angular displacement)

$$\therefore \quad \theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2 \qquad ......6.12$$

จากสมการ (6.8) $\quad \alpha = d\omega/dt$

$$= (d\theta/dt).(d\omega/dt)$$

$$= \omega(d\omega/d\theta)$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

$$\alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega$$

$$\alpha(\theta_2 - \theta_1) = (1/2)(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\alpha\theta = (1/2)(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad \text{......6.13}$$

สรุป อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ α เป็นสมการสเกลาร์ มีดังนี้

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

การหมุนที่ความเร่งเชิงมุมเท่ากับศูนย์ ($\alpha = 0$) จะได้ $\theta = \omega t$

ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ของความเร็ว ความเร่งตามเส้นโค้งในแนวสัมผัสวงกับความเร็ว ความเร่งเชิงมุมดังนี้

การกระจัดเชิงมุม $\theta = s/r$

ความเร็วเชิงมุม $\omega = v/r$

ความเร่งในแนวสัมผัสวง $a_T = r\alpha$

ความเร่งเชิงมุม $\alpha = d\omega/dt = a_T/r$

ตัวอย่าง 6.1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 1 เมตรในอวกาศที่ปราศจากแรงโน้มถ่วงด้วยอัตราเร็วตามแนวเส้นสัมผัส 1 เมตร/วินาที จงหา ก. อัตราเร็วเชิงมุม ข. ขนาดของความเร่งเชิงมุม ค. ขนาดของความเร่งสู่ศูนย์กลาง (ดูตอนที่ 6.2)

วิธีทำ แทนค่า รัศมีของวงกลม r = 1 เมตร

อัตราเร็วตามแนวเส้นสัมผัส v = 1 เมตร/วินาที

จะได้

ก. อัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาค $\omega = v/r = 1/1 = 1$ เรเดียน/วินาที

ข. ขนาดของความเร่งเชิงมุม $\alpha = d\omega/dt = 0$

ค. ขนาดของความเร่งสู่ศูนย์กลาง $a_c = v^2/r = 1$ เมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่าง 6.2 หินลับมีดแบบกลมมีรัศมี 0.50 เมตร มีความเร่งเชิงมุม α = 3.0 เรเดียน/วินาที^{2} เริ่มหมุนเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที จงหา ก. อัตราเร็วเชิงมุม ข. อัตราเร็วเชิงเส้น (หรืออัตราเร็วในแนวเส้นสัมผัส) ของอนุภาคที่ขอบนอก ค. ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสที่ขอบนอก และ ง. ความเร่งในแนวสู่ศูนย์กลางที่ขอบนอก

วิธีทำ แทนค่า r = 0.5 m $\quad \alpha = 3.0\ rad/s^2 \quad t = 2s$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$= 0 + (3)(2)$$

จะได้

ก. อัตราเร็วเชิงมุมของหินลับมีด $= 6$ rad/s

$$v = \omega r$$
$$= (6)(0.5)$$

ข. อัตราเร็วเชิงเส้น $= 3$ m/s **<u>ตอบ</u>**

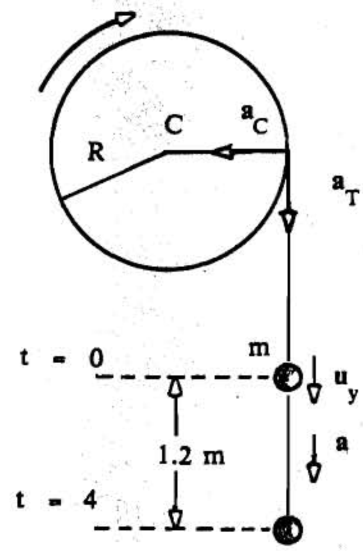
$$a_T = \alpha r$$
$$= (3)(0.5)$$

ค. ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส $= 1.5$ m/s^2 **<u>ตอบ</u>**

$$a_C = a_R = \omega^2 r = v^2 / r$$
$$= (6)^2(0.5)$$

ง. ความเร่งในแนวสู่ศูนย์กลาง $a_R = 18\ m/s^2\ (=a_C)$ **<u>ตอบ</u>**

ตัวอย่าง 6.3 แผ่นโลหะกลมรัศมี 0.1 เมตร หมุนได้คล่องรอบแกน และมีเชือกเบาพันรอบขอบโลหะ โดยปลายเชือกข้างหนึ่งผูกมวล m กิโลกรัม ดังรูป ขณะหนึ่งวัตถุเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว 0.1 เมตร/วินาที อีก 4 วินาทีต่อมาปรากฏว่าวัตถุ m เคลื่อนที่ได้ 1.2 เมตร จงหาขนาดความเร่งสู่ศูนย์กลาง และขนาดความเร่งตามแนวสัมผัสของจุดบนขอบโลหะขณะใด ๆ



วิธีทำ พิจารณารูปข้างบนนี้

มวล m ผูกเชือกเบาคล้องผ่านแผ่นโลหะรัศมี R เคลื่อนที่ลง 1.2 m ในเวลา 4 s

ให้	t	=	0	
	v_y	=	0.1	m/s
เมื่อ	t	=	4	s
	y	=	1.2	m
ให้	a	=	ขนาดความเร่งของมวล m	
จาก	y	=	$v_yt + (1/2)at^2$	
	1.2	=	$(0.1)(4) + (1/2)a(4)^2$	
$\therefore$	a	=	0.1	m/s^2

ขนาดของความเร่งของมวล m คือ 0.1 m/s^2

a = 0.1 m/s^2 มีค่าคงที่และเท่ากับขนาดความเร่งตามสันขอบล้อโลหะ = a_T นั่นคือ a_T = 0.1 m/s^2

จาก $a_c = v^2/R$

สมการการเคลื่อนที่ของมวล m คือ

$$y = v_yt + (1/2)a_yt^2$$
$$= (0.1)t + (1/2)(0.1)t^2$$
$$y = 0.1t + 0.05t^2$$
$$v_y = dy/dt$$
$$= 0.1 + 0.1t$$

$$= \quad 0.1(1+t)$$

$$a_C = v_y^2/R$$

$$= [0.1(1+t)]^2/0.1$$

$$= 0.1(1+t)^2 \quad m/s^2$$

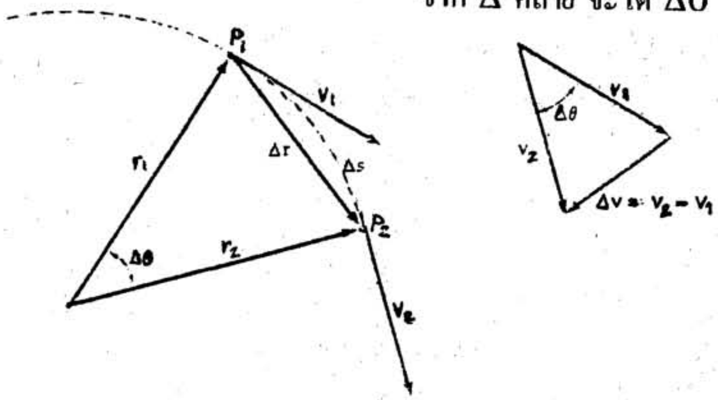
ขนาดความเร่งสู่ศูนย์กลาง = $0.1(1+t)^2$ m/s^2

ขนาดความเร่งตามแนวสัมผัส $a_T = dv_y/dt = 0.1\ m/s^2$

6.2 แรงสู่ศูนย์กลางและแรงฝ่านศูนย์กลาง

6.2.1 แรงสู่ศูนย์กลาง (centripetal force) เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนนิ่ง อนุภาคทุกอนุภาคที่ประกอบกันเป็นวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางซึ่งอยู่กึ่งกลางแกน

จาก Δ คล้าย จะได้ $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \simeq \frac{\Delta r}{r} \simeq \frac{\Delta v}{v}$



รูปที่ 6.2 การคำนวณความเร่งของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเป็นวงกลม

พิจารณาเมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A กับ B จะมีความเร็ว v_1 และ v_2 ตามลำดับ ถ้าอนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B ในช่วงหนึ่งหน่วยเวลา ความเร็วที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลานี้คือ $\Delta v = v_2 - v_1$ ก็จะแทนความเร่งเชิงเส้นเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลาที่พิจารณา จากรูปที่ 6.2 จะเห็นได้ว่า ความเร่งเชิงเส้นเฉลี่ยนี้มีทิศเข้าทางด้านโค้งเว้าของวงกลม หรือเข้าสู่ทางด้านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั่นเอง ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาในการย้ายตำแหน่งของอนุภาคจาก A ไปยัง B สั้นมาก ๆ คือ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ความเร่งบัดดลของอนุภาค ณ จุด A มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางตามรัศมีของวงกลม เรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) แทนด้วย a_c

ดังนั้น ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ ทุกขณะจะมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลมตามแนวรัศมีเสมอ แสดงว่าความเร่งนี้เป็นผลจากการเปลี่ยนทิศของความเร็วเท่านั้น

จากรูปที่ 6.2 จะได้สามเหลี่ยม 2 รูปที่คล้ายกัน จะได้ว่า

ผลต่างของความเร็ว $\Delta v = v_2 - v_1$ มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม

ผลต่างของเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ มีค่าน้อย Δv จะมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม $\Delta r \approx \Delta s$

$$AB/OA = (v_2 - v_1)/v_2 = \Delta v/v_2$$

$$\Delta v = (AB/OA).v_2$$

$$\Delta v/\Delta t = (AB/OA).(v_2/\Delta t)$$

$$AB = \Delta r \approx \Delta s = r\theta$$

$$\Delta v/\Delta t = (r\theta/r).(v_2/\Delta t)$$

$$= (\theta/\Delta t).v_2$$

$$a_c = \omega v \qquad ......6.14$$

เมื่อ v_2 คือ อัตราเร็วของอนุภาค , $OA = r$, $\theta/\Delta t = \omega$

$$\because \quad v = \omega r$$

$$\therefore \quad a_c = (v/r).v = v^2/r \qquad ......6.15$$

หรือ $$a_c = \omega(\omega r) = \omega^2 r \qquad ......6.16$$

ดังนั้น $$a_c = v^2/r = \omega^2 r = \omega v$$

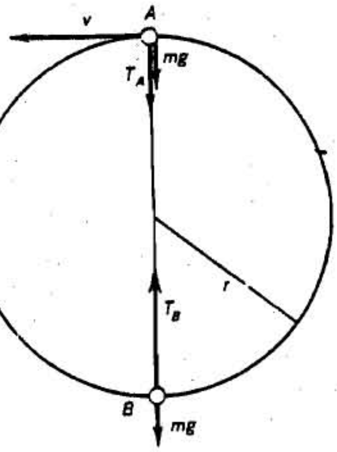
แรงที่เกิดจากความเร่งนี้ จึงเป็น **แรงสู่ศูนย์กลาง** ที่ทำให้วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีทิศชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่

$$F_c = ma_c = m(v^2/r) = m\omega^2 r \qquad ......6.17$$

แรงที่ทำให้อนุภาคหรือวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม อาจเป็นแรงตึงในเส้นเชือก แรงเสียดทาน แรงโน้มถ่วง หรือผลรวมของแรงหลายชนิด

ตัวอย่าง 6.4 ลูกบอลมวล m ผูกด้วยเชือก แกว่งให้หมุนเป็นวงกลมในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่ v รัศมีของวงกลมเท่ากับ r จงหาแรงตึงในเส้นเชือก

ก. ที่จุด A　　　　　ข. ที่จุด B



วิธีทำ

ก. ที่จุด A

$$\text{แรงลัพธ์} = T_A + mg$$

ทั้ง T_A และ mg มีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลาง

$$\therefore \quad T_A + mg = m(v^2/r)$$

$$T_A = m(v^2/r - g)$$

ข. ที่จุด B

$$\text{แรงลัพธ์} = T_B - mg$$

T_B มีทิศเข้าหา, mg มีทิศออกจากจุดศูนย์กลาง

$$\therefore \quad T_B - mg = m(v^2/r)$$

$$T_B = m(v^2/r + g)$$

ตัวอย่าง 6.5 แผ่นเสียงขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 12 นิ้ว หมุนด้วยอัตราเร็ว 33.3 รอบต่อนาที เหรียญบาทมวล 3 กรัม วางอยู่ที่ขอบของแผ่นเสียง จงหา

ก. แรงเสียดทานระหว่างแผ่นเสียงกับเหรียญบาท ถ้าเหรียญบาทไม่ลื่นไถล

ข. แรงเสียดทานเพิ่มขึ้นอีกกี่เท่า ถ้าหมุนแผ่นเสียงด้วยอัตรา 45 รอบต่อนาที

วิธีทำ แทนค่าดังต่อไปนี้

อัตราเร็วเชิงมุม	ω	=	$33.3 \times 2\pi/60$	rad/s
		=	3.49	rad/s
รัศมีแผ่นเสียง	r	=	12/2 = 6	in.
		=	6 x (2.54/100)	m
		=	0.1524	m

เหรียญบาทมีมวล $m = 3 \text{ g} = 0.003$ kg

แรงเสียดทาน $= ma_R = m(v^2/r) = m\omega^2 r$

$= (0.003)(3.49)^2(0.1524)$

$= 5.56 \times 10^{-3}$ N

ก. แรงเสียดทานระหว่างแผ่นเสียงกับเหรียญบาท $= 5.56 \times 10^{-3}$ N

ความเร็วเชิงมุม $\omega = 45 \times (2\pi/60)$ rad/s

$= 4.71$ rad/s

แรงเสียดทาน $= m(v^2/r) = m\omega^2 r$

$= (0.003)(4.71)^2(0.1524)$

$= 10.14 \times 10^{-3}$ N

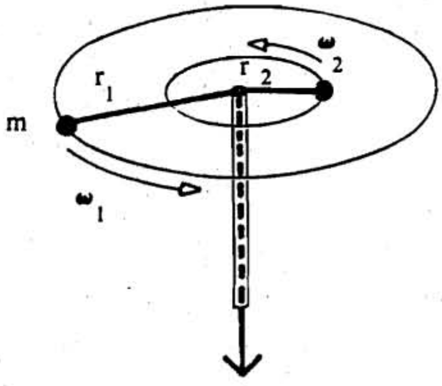
ข. แรงเสียดทานจะเพิ่มขึ้น = 1.82 เท่าของแรงในข้อ ก.

6.2.2 แรงผ่านศูนย์กลาง (central force) ที่กระทำกับมวล m คือแรงที่มีทิศทางผ่านจุดศูนย์กลาง ซึ่งอาจจะชี้เข้าหาหรือชี้ออกจากจุดศูนย์กลาง และมีขนาดของแรงขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างมวล m กับจุดศูนย์กลาง แรงผ่านศูนย์กลางซึ่งเป็นแรงดึงดูดจะมีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางและที่เป็นแรงผลักจะชี้ออกจากจุดศูนย์กลาง

เมื่อเทหวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรงผ่านศูนย์กลาง โมเมนตัมเชิงมุมสัมพัทธ์กับศูนย์กลางของแรงจะมีค่าคงตัว และเมื่อโมเมนตัมเชิงมุมคงตัวย่อมมีแรงผ่านศูนย์กลาง

เมื่อ **r** ขนานกับ **F** นั่นคือ ขณะที่แรง **F** กระทำ จะมีทิศผ่านจุด O (จุดตรึง) ถ้าให้จุดศูนย์กลางแรงเป็นจุดตรึง แรงนี้จะมีทิศผ่านจุดตรึงเสมอไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม แรงนี้คือ แรงผ่านศูนย์กลาง ในธรรมชาติจะมีการเคลื่อนที่ในลักษณะที่แรงกระทำเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ เนื่องจากแรงที่ดวงอาทิตย์ดึงดูดโลกมีทิศผ่านศูนย์กลางของดวงอาทิตย์เสมอ โมเมนตัมเชิงมุมของโลกสัมพัทธ์กับดวงอาทิตย์จึงคงตัวเสมอ

ตัวอย่าง 6.6 วัตถุมวล m ผูกติดกับปลายเชือก ซึ่งสอดผ่านรูเล็ก ๆ ปลายเชือกอีกข้างหนึ่งดึงยึดไว้ด้วยแรงขนาดหนึ่ง แล้วเหวี่ยงให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม รัศมี r_1 ถ้าดึงเชือกให้รัศมีของวงกลมเปลี่ยนอย่างฉับพลัน จาก r_1 เป็น r_2 ดังรูป วัตถุจะเคลื่อนที่ช้าหรือเร็วกว่าเดิม ถ้า $r_1 = 0.2$ เมตร วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุม 3 เรเดียน-วินาที$^{-1}$ ถ้า $r_2 = 0.1$ เมตร วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมเท่าใด



แสดงการเหวี่ยงวัตถุเป็นวงกลม

วิธีทำ เนื่องจากแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นแรงผ่านศูนย์กลาง

ให้ v_1 และ v_2 เป็นอัตราเร็วของวัตถุในแนวเส้นรอบวงในครั้งแรกและครั้งหลังตามลำดับ

โมเมนตัมเชิงมุมในครั้งแรก $= mv_1r_1$

โมเมนตัมเชิงมุมในครั้งหลัง $= mv_2r_2$

$\therefore \quad mv_1r_1 = mv_2r_2$

$v_2 = (mv_1r_1)/(mr_2)$

$= v_1 \cdot (r_1/r_2)$

เนื่องจาก $\quad r_2 < r_1$

$v_2 > v_1$ เสมอ

นั่นคือ เมื่อรัศมีของวงกลมลดลง วัตถุจะเคลื่อนที่เร็วขึ้น

$\because \quad \omega = v/r$

$\therefore \quad mr_1^2\,\omega_1 = mr_2^2\,\omega_2$

$\omega_2 = (mr_1^2\,\omega_1)/(mr_2^2)$

$= \omega_1(r_1/r_2)^2$

$= 3(0.2/0.1)^2$

$= 12$ เรเดียน/วินาที

6.2.3 กฎความโน้มถ่วงเอกภพของนิวตัน (Newton's law of universal gravitation) เป็นกฎที่ว่าด้วยแรงดึงดูดระหว่างมวล นิวตันเป็นผู้คิดค้นกฎนี้ขึ้น ซึ่งมีใจความว่า **อนุภาคของสสารทุกอนุภาคในเอกภพย่อมดึงดูดอนุภาคอื่น ๆ ด้วยแรงซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของมวลของอนุภาคเหล่านั้น และเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะทางระหว่างมวล** เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F_g = (Gm_1m_2)/r^2 \qquad \text{......6.18}$$

เมื่อ F_g เป็นแรงโน้มถ่วงของแต่ละอนุภาค

m_1, m_2 เป็นมวลของอนุภาค

r เป็นระยะทางระหว่างมวลทั้งสอง

G เป็นค่าคงตัวโน้มถ่วง (graitational constant) ค่า G ขึ้นอยู่กับระบบหน่วยที่ใช้

แรงโน้มถ่วงกระทำต่ออนุภาคในแบบกิริยา-ปฏิกิริยา แม้ว่ามวลของอนุภาคจะต่างกัน แต่ก็มีแรงขนาดเท่ากันกระทำต่อกันและกัน และแนวกระทำอยู่ในแนวเส้นตรงที่ต่อโยงอนุภาคทั้งสอง

จากการทดลองของคาเวนดิช (Sir Henry Cavendish) ในปี ค.ศ. 1798 ได้ค่า G ดังนี้

$$G = 6.670 \times 10^{-11} \quad \text{N-m}^2/\text{kg}^2$$

$$= 6.670 \times 10^{-8} \quad \text{dynes-cm}^2/\text{g}^2$$

ตัวอย่าง 6.7 มวลของทรงกลมอันเล็กซึ่งชั่งจากเครื่องชั่งของคาเวนดิช เท่ากับ 1 กรัม และมวลของทรงกลมอันใหญ่เท่ากับ 500 กรัม ระยะทางระหว่างทรงกลมทั้งสองเท่ากับ 5 เซนติเมตร จงหาแรงโน้มถ่วงบนทรงกลมทั้งสอง

วิธีทำ จาก $F_g = (Gm_1\,m_2)/r^2$

แทนค่า $m_1 = 1$ g , $m_2 = 500$ g. $r = 5$ cm $G = 6.67 \times 10^{-8}$ dynes-cm²/g²

จะได้ $F_g = [6.67 \times 10^{-8})(1)(500)]/5^2$

$= 1.13 \times 10^{-6}$ dynes

$= 1.13 \times 10^{-11}$ N

มวลและน้ำหนัก

น้ำหนักของวัตถุ คือ แรงลัพธ์ของแรงโน้มถ่วงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุบริเวณผิวโลกและใกล้ๆ ผิวโลก แรงโน้มถ่วงของโลกมีค่ามากกว่าแรงโน้มถ่วงของวัตถุอื่นในเอกภพค่อนข้าง

มากทีเดียว ซึ่งในทางปฏิบัติจึงตัดแรงเหล่านั้นทิ้งได้ ดังนั้นน้ำหนักจึงเกิดจากแรงดึงดูดของโลกเท่านั้น ในทำนองเดียวกันบริเวณผิวดวงจันทร์หรือดาวเคราะห์ดวงอื่น ๆ น้ำหนักของวัตถุคิดแต่แรงดึงดูดของดวงจันทร์หรือดาวเคราะห์เท่านั้น ฉะนั้นถ้าโลกเป็นทรงกลมเอกพันธ์ที่มีมวล m_e รัศมี R น้ำหนัก W ของมวลเล็ก ๆ m ณ ผิวโลก จะเป็น

$$W = F_g = (Gm_em)/R^2 \qquad \text{......6.19}$$

ในที่นี้ถือว่าโลกเป็นระบบอ้างอิงเฉื่อยเพื่อที่จะตัดผลที่เกิดจากการหมุนรอบตัวเองของโลกออกไป ซึ่งมีค่าไม่มากนัก เราจึงคิดแต่น้ำหนักที่เกิดจากความโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว เมื่อให้วัตถุตกอย่างเสรี แรงที่เป็นตัวการที่ทำให้เกิดความเร่ง คือ น้ำหนัก W และ ความเร่งที่เกิดจากแรงนี้คือ g ดังนั้น ความสัมพันธ์ทั่วไปของ **F** = **ma** จึงกลายเป็น

$$W = mg \qquad \text{......6.20}$$

จากสมการ (6.19) และ (6.20) จะได้ว่า

$$W = mg = (Gmm_e)/R^2$$

$$\therefore \quad g = (Gm_e)/R^2 \qquad \text{......6.21}$$

สมการ (6.21) แสดงให้เห็นว่า ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงมีค่าเท่ากันหมด ไม่ว่าวัตถุจะมีมวลเท่าใด (ไม่ขึ้นกับมวล m) และ g มีค่าค่อนข้างคงตัว เนื่องจาก G และ m_e มีค่าคงตัว ส่วน R แปรค่าบ้างเล็กน้อยตามจุดต่าง ๆ บนผิวโลก

น้ำหนักของวัตถุเป็นแรง ต้องมีหน่วยเป็นแรงตามระบบที่ใช้ หน่วยของน้ำหนักในระบบเอสไอ คือ **นิวตัน** และในระบบซีจีเอส คือ **ไดน์** ค่า g ในระบบทั้งสองมีค่า 9.8 เมตร-วินาที$^{-2}$ และ 980 เซนติเมตร-วินาที$^{-2}$ ตามลำดับ ค่า g อาจหาได้จากการทดลอง ดังนั้นมวลของโลกอาจคำนวณได้จากสมการ (6.21) คือ

$$m_e = g(R^2/G) \qquad \text{......6.22}$$

เมื่อ R คือ รัศมีของโลก = 6370 กิโลเมตร = 6.37×10^6 เมตร

g = 9.8 เมตร-วินาที$^{-2}$ และ G = 6.67×10^{-11} นิวตัน-เมตร^2/กิโลกรัม^2

ดังนั้น $m_e = [(9.8)(6.37\times10^6)^2]/(6.67 \times 10^{-11})$

$= 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม

สำหรับค่า g ของดาวดวงอื่น ๆ สามารถคำนวณได้โดยใช้มวลและรัศมีของดาวเหล่านั้น ตาราง 6.1 จะแสดงค่า g ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ

ตาราง 6.1 ข้อมูลเกี่ยวกับระบบสุริยะ

Body	Mass,kg	Average radius,* Km	g at surface, m/s^2	Sidereal period, days	Radius of or bit,** km	Vescape km/s
Moon	7.35×10^{22}	1,738	1.62	27.3	3.8×10^{5}	2.3
Sun	1.97×10^{30}	695,000	274			-
Mercury	3.28×10^{23}	2,570	3.9	88	5.8×10^{7}	4.3
Venus	4.82×10^{24}	6,310	8.9	245	1.08×10^{8}	10.3
Earth	5.98×10^{24}	6,370	9.80	365.26	1.50×10^{8}	11.3
Mars	6.37×10^{23}	3,430	3.8	687	2.28×10^{8}	5.0
Jupiter	1.88×10^{27}	71,800	26	4,333	7.78×10^{8}	60
Saturn	5.62×10^{26}	60,300	11	1.08×10^{4}	1.43×10^{9}	36
Uranus	8.62×10^{25}	26,700	10	3.07×10^{4}	2.87×10^{9}	22
Neptune	1.0×10^{26}	24,900	14	6.02×10^{4}	4.5×10^{9}	24
Pluto				9.09×10^{4}	5.9×10^{9}	-

* Bodies are not exactly spheres.

** Orbits are actually elliptical; the values quoted are mean distances

6.2.4 พลังงานศักย์โน้มถ่วง ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงที่บริเวณใกล้ผิวโลกกำหนดให้มีค่าคงตัว และถือเอาผิวโลกเป็นระดับอ้างอิง (พลังงานศักย์ที่ผิวโลกเป็นศูนย์) อย่างเช่นในกรณีที่วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่ใกล้ผิวโลก ได้แก่ การตกของวัตถุที่ระยะความสูงจากผิวโลกไม่มากนัก เมื่อเปรียบเทียบกับรัศมีของโลก แต่ในกรณีของการเคลื่อนที่ของวัตถุไกลจากผิวโลก ได้แก่ ดวงจันทร์หรือดาวเทียม ระยะอ้างอิงที่มีพลังงานศักย์เป็นศูนย์ มักนิยามที่จุดห่างจากโลกเป็นอนันต์ การหาพลังงานศักย์ใด ๆ หาได้จากสมการ (4.56) โดยใช้ $\mathbf{F}_g$ จากสมการ (6.18) ซึ่งกำหนดให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโลก จะได้ว่า

$$W_{grav} = \int_{r_i}^{r_f} \mathbf{F}_g d\mathbf{r} = -[E_{p,f} - E_{p,i}]$$

$$-[E_{p,f} - E_{p,i}] = -Gm_e m \int_{r_i}^{r_f} dr/r^2$$

$$-[E_{p,f} - E_{p,i}] = (Gm_e m)/r_f - (Gm_e m)/r_i$$

เมื่อ $r_f \rightarrow \infty$, $E_{p,f} \rightarrow 0$ นั่นคือ

$$E_{p,i} = -(Gm_e m)/r_i$$

ฉะนั้นสูตรทั่วไปของพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุซึ่งถูกโลกดึงดูด (ระดับอ้างอิงที่มีระยะทางอนันต์) จะได้ว่า

$$E_p = -(Gm_e m)/r \qquad \text{......6.23}$$

พลังงานรวมของวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v คือ

$$E = (1/2)mv^2 - (Gm_e m)/r \qquad \text{......6.24}$$

ตัวอย่าง 6.8 ให้ใช้หลักการคงตัวของพลังงานเพื่อหาความเร็วต้นของวัตถุที่ถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง (ไม่คิดความต้านทานของอากาศ) ที่สามารถ

ก. ขึ้นไปสูงเหนือผิวโลกเท่ากับรัศมีของโลก

ข. หนีหลุดพ้นออกไปจากโลก

วิธีทำ

ก. $v_i = ?$, $r_i = R$, $v_f = 0$, $r_f = 2R$

หลักการคงตัวของพลังงาน $E_i = E_f$

$$(1/2)mv_i^2 - (Gm_e m)/r_i = (1/2)mv_f^2 - (Gm_e m)/r_f$$

$$\therefore \quad v_i = [v_f^2 + 2Gm_e(1/r_i - 1/r_f)]^{1/2}$$

$$= [v_f^2 + 2Gm_e(1/R - 1/2R)]^{1/2}$$

$$= [0 + 2Gm_e(1/R - 1/2R)]^{1/2}$$

ดังนั้น ความเร็วต้นของวัตถุ $v_i = (Gm_e/R)^{1/2}$

ข. $v_i = ?$, $r_i = R$, $v_f = 0$, $r_f = \infty$

$$v_i = [v_f^2 + 2Gm_e\{1/R - 1(2R)\}]^{1/2}$$

$$= [0 + 2Gm_e(1/R - 1/\infty)]^{1/2}$$

ดังนั้น ความเร็วต้นของวัตถุ $v_i = (2Gm_e/R)^{1/2}$

อัตราเร็วต้นในข้อ ข. จากตัวอย่างที่ 6.8 ซึ่งทำให้วัตถุหลุดออกไปจากโลกนั้นเรียกว่า **อัตราเร็วหลุดพ้น** (escape speed) แทนด้วย v_{escape} หรือในรูปของเวกเตอร์ เรียกว่า **ความเร็วหลุดพ้น** (escape velocity)

ถ้าพิจารณาสมการพลังงานรวม จะเห็นว่าความเร็วหลุดพ้น ก็คือความเร็วต้นที่ผิวโลกที่พลังงานรวมมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ

$$
\begin{aligned}
E &= (1/2)mv^2_{escape} - (Gm_em)/R \\
&= (1/2)m[v^2_{escape} - (2Gm_e)/R] \\
&= 0 \\
\therefore \quad v_{escape} &= [(2Gm_e)/R)]^{1/2} = 1.13 \times 10^4 \text{ m/s} \qquad \text{......6.25}
\end{aligned}
$$

เมื่อแทนค่า G, m_e และ R ลงในสมการ (6.25) จะได้ $v_{escape} = 11.3$ กิโลเมตร-วินาที$^{-1}$ หรือเท่ากับ 40,700 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สำหรับความเร็วหลุดพ้นของดาวเคราะห์ดวงอื่นๆ ก็คำนวณได้จากสมการ (6.25) โดยใช้ข้อมูลจากตารางที่ 6.1

เมื่อพิจารณาสมการ (6.25) แล้ว จะเห็นว่าความเร็วหลุดพ้นของวัตถุหรืออนุภาคไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุหรืออนุภาคนั้นๆ อย่างไรก็ดี แรงผลักดันที่ต้องการเพื่อเร่งวัตถุจนมีความเร็วเท่ากับความเร็วหลุดพ้น จะต้องขึ้นกับมวลของวัตถุด้วย ซึ่งเป็นเหตุผลที่อธิบายให้ทราบว่าเหตุใดจรวดหนัก ๆ และดาวเทียมดวงใหญ่ ๆ จึงต้องการเครื่องขับดันที่มีกำลังสูงมาก ๆ ค่าความเร็วหลุดพ้นนี้จึงเป็นค่าประมาณของความเร็วของพวกสะเก็ดดาวที่ตกกระทบผิวโลก

เมื่อยิงวัตถุออกไปจากผิวโลกด้วยความเร็วหลุดพ้น v_{escape} ตามสมการ (6.25) จะได้ค่าเป็นศูนย์เมื่อระยะทางเป็นอนันต์ ถ้าความเร็วได้มากกว่าความเร็วหลุดพ้น (พลังงานรวม $E > 0$) วัตถุจะยังคงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วค่าหนึ่งที่ระยะทางอนันต์ ถ้าความเร็วที่ผิวโลกน้อยกว่าความเร็วหลุดพ้น (พลังงานรวม $E < 0$) วัตถุจะตกกลับมายังพื้นโลกอีก นอกจากว่าวัตถุนั้นจะถูกส่งเข้าสู่วงโคจรโดยจรวดท่อนถัดไป และทิศทางความเร็วเปลี่ยนแปลง

ค่าความเร็วหลุดพ้นของดาวพุธ (Mercury) น้อยกว่าของโลกมาก อาจสันนิษฐานได้ว่า ดาวพุธไม่มีบรรยากาศเหลือห่อหุ้มอยู่เลย เช่นเดียวกับดวงจันทร์ ส่วนดาวศุกร์ (Venus) มีความเร็วหลุดพ้นเกือบเท่า ๆ กับของโลก ของดาวอังคาร (Mars) เป็น 1/6 เท่าของโลก ดังนั้นบรรยากาศจึงยังคงมีเหลืออยู่บ้างแต่เป็นเพียงส่วนน้อย ความจริงความกดดันบรรยากาศบนดาวอังคารน้อยกว่าบนโลกมาก ส่วนดาวเคราะห์ดวงอื่น ๆ ความเร็วหลุดพ้นมากกว่าของโลก จึงยังเหลือบรรยากาศดั้งเดิมอยู่ แต่อย่างไรก็ตาม ส่วนประกอบของบรรยากาศบนดาวเคราะห์ก็แตกต่างจากโลกด้วย

จากความรู้เรื่องความเร็วหลุดพ้น ซึ่งจะมีประโยชน์ในการพิจารณาก๊าซที่หลุดพ้นจากบรรยากาศของโลก ถ้าเราคิดว่าก๊าซที่ประกอบเป็นบรรยากาศนั้นอยู่ในสภาพสมดุลความร้อน อัตราเร็วรากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย (root mean square speed) คือ v_{rms} ของโมเลกุลของก๊าซหาได้จากสมการ

$$v_{rms} = \sqrt{(3kT)/m} \qquad \text{......6.26}$$

เมื่อ k = ค่าคงตัวของโบลท์ซมาน (Boltzmann's constant)

T = อุณหภูมิสัมบูรณ์

m = มวลของโมเลกุลของก๊าซ

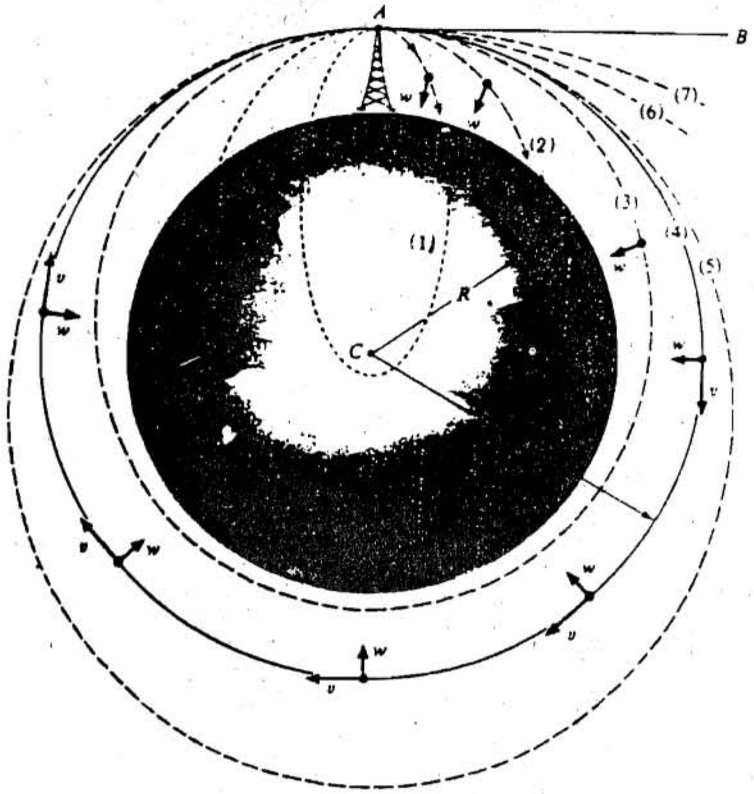
v_{rms} ของก๊าซที่พบในบรรยากาศและที่อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก มีค่าดังแสดงในตาราง 6.2

ตาราง 6.2 ค่า v_{rms} ของก๊าซที่อุณหภูมิเฉลี่ยของโลก

ก๊าซ	v_{rms}, เมตร/วินาที
ไฮโดรเจน	1,908
ฮีเลียม	1,350
คาร์บอนไดออกไซด์	407
ออกซิเจน	477
ไนโตรเจน	510

เมื่อเปรียบเทียบ v_{rms} ของก๊าซจากตารางที่ 6.2 จะเห็นว่ามีค่าน้อยกว่า v_{escape} จากสมการ (6.25) มาก ทำให้โลกของเรามีบรรยากาศห่อหุ้มอยู่ เพราะโมเลกุลของก๊าซที่มีความเร็วน้อยกว่า v_{escape} ไม่สามารถเอาชนะแรงดึงดูดของโลกและหนีออกไปพ้นโลกได้ เนื่องจาก v_{rms} เป็นค่าเฉลี่ยของความเร็ว หมายความว่ายังมีก๊าซจำนวนหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงกว่า v_{rms} และอาจมากกว่า v_{escape} ซึ่งโมเลกุลนี้อาจจะหนีไปจากโลก โดยเฉพาะถ้าโมเลกุลเหล่านี้อยู่ในชั้นบรรยากาศส่วนบน ในตารางที่ 6.2 จะเห็นว่ามีผลต่อก๊าซเบามากกว่าก๊าซหนัก และเป็นเหตุผลที่ว่าทำไมในบรรยากาศของเราจึงมีก๊าซไฮโดรเจนและฮีเลียมน้อย จากการคาดคะเนโดยอาศัยแรงโน้มถ่วงว่าไฮโดรเจนหนีออกไปพ้นโลกด้วยอัตราประมาณ 1.3×10^{22} อะตอมต่อวินาที ซึ่งเทียบเป็นค่าประมาณ 600 กิโลกรัมต่อปี ตัวเลขนี้ไม่ใช่จำนวนแท้จริงที่โลกสูญเสียไฮโดรเจนจำนวนที่เสียไปทั้งหมดอาจจะแตกต่างกันไป ซึ่งแล้วแต่กระบวนการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

6.2.5 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม ในหัวข้อ 6.2.4 ซึ่งได้กล่าวว่าความเร็วต้นน้อยกว่าความเร็วหลุดพ้น (v_{escape}) หรือพลังงานรวมน้อยกว่าศูนย์ ($E < 0$) แล้ว วัตถุจะตกกลับมายังโลกนอกจากจะใช้จรวดขับดันส่งให้วัตถุเข้าวงโคจรอีกครั้งหนึ่ง



รูปที่ 6.3 เส้นทางโคจรของดาวเทียมที่มีพลังงานต่าง ๆ

สมมติว่าส่งดาวเทียมขึ้นไปยังผิวโลกในแนวดิ่ง หลังจากขึ้นไปถึงระยะสูงสุด h ซึ่งสมมติว่าเป็นความสูงของยอดหอคอย คือ จุด A ดังรูปที่ 6.3 แล้ว ยิงจรวดขับดันที่จุด A ทำให้เกิดความเร็ว v_0 ในแนวระดับ AB

พลังงานรวมของดาวเทียมที่จุด A คือ

$$E = (1/2)mv_0^2 - (Gm_em)/(R + h) \qquad ......6.27$$

ตามรูปจะเห็นว่าดาวเทียมเคลื่อนที่ตามวิถีโค้ง ถ้าความเร็วต้นไม่มากนัก วิถีเคลื่อนที่จะคล้ายกับหมายเลข (1) ซึ่งเป็นวงรี (ellipse) มีศูนย์กลางของโลกเป็นโฟกัสจุดหนึ่ง W คือน้ำหนักของวัตถุมีทิศพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก และขนาดเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสอง

ของระยะทางจากศูนย์กลางของโลก [ถ้าเป็นวิถีเคลื่อนที่สั้น ๆ อาจไม่ต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางของ W วิถีโค้งนั้นก็จะเป็นพาราโบลา (parabola)] วิถีเคลื่อนที่ตามหมายเลข (2), (3), (4) และ (5) ยังเป็นกรณีที่ความเร็ว v_0 ไม่มากนัก คือ พลังงานรวมในสมการ (6.27) ยังมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ($E < 0$) วิถีเคลื่อนที่ยังเป็นรูปวงรี โดยที่วิถีเคลื่อนที่หมายเลข (3) เริ่มโคจรรอบโลกพอดี วิถีเคลื่อนที่หมายเลข (4) เป็นกรณีพิเศษซึ่งจะเป็นวงกลม และวิถีเคลื่อนที่หมายเลข (5) กลับมาเป็นวงรีอีก

เมื่อความเร็วต้นของดาวเทียมมีค่ามากขึ้น จนทำให้พลังงานรวม E มีค่าเป็นศูนย์ ($E = 0$) จะได้วิถีเคลื่อนที่โคจรเป็นหมายเลข (6) ซึ่งเป็นพาราโบลา และเมื่อพลังงานรวม E มีค่ามากกว่าศูนย์ ($E > 0$) จะได้วิถีโคจรหมายเลข (7) เป็นไฮเปอร์โบลา (hyperbola) วงโคจรหมายเลข (6) และ (7) เป็นวงโคจรไม่ปิด (คือดาวเทียมจะไม่กลับมาที่จุดเริ่มต้นอีกแล้ว)

ดาวเทียมทั้งหลายซึ่งเป็นประดิษฐกรรมของมนุษย์มีวิถีโคจรคล้ายหมายเลข (3) หรือหมายเลข (4) แต่บางดวงก็มีวิถีโคจรใกล้เป็นวงกลมมาก ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเฉพาะวิถีโคจรที่เป็นวงกลมเท่านั้น โดยคำนวณหาความเร็วเพื่อให้วิถีโคจรรอบโลกมีเฉพาะแรงโน้มถ่วงระหว่างโลกกับดาวเทียม จากสมการของแรงที่กระทำกับดาวเทียมที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก r เคลื่อนที่เป็นวงกลม

$$\text{แรงลัพธ์} = ma_R$$

$$\text{แรงลัพธ์} = -(Gm_e m)/r^2$$

$$ma_R = -m(v^2/r)$$

$$m(v^2/r) = (Gm_e m)/r^2$$

$$v^2 = (Gm_e)/r$$

$$v = \sqrt{(Gm_e)/r} \qquad \text{......628}$$

ถ้า r ยิ่งยาว ความเร็วโคจรจะน้อยลง

ให้ T = คาบของการโคจร (period)

$$v = (2\pi r)/T$$

$$T = (2\pi r)/v \qquad \text{......6.29}$$

$$T^2 = (4\pi^2 r^2)/v^2$$

$$= (4\pi^2 r^2)/(Gm_e/r)$$

$$= (4\pi^2 r^3) / (Gm_e)$$

$$T^2 = Kr^3 \qquad \text{......6.30}$$

ให้ $K = (4\pi^2)/(Gm_e)$ = ค่าคงตัว

สมการ (6.30) เป็นไปตามกฎข้อ 3 ของเคปเลอร์ (Kepler) ซึ่งกล่าวไว้ว่า **กำลังสองของคาบการโคจรจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสามของรัศมีโคจร**

ดาวเทียมคล้ายโปรเจกไทล์ที่ต่างก็เป็นวัตถุตกอย่างเสรี คงมีแต่เพียงน้ำหนัก W ของตัวเองเท่านั้นที่เป็นแรงกระทำ ดังนั้นแรงสู่ศูนย์กลาง v^2/r จึงเท่ากับความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรี g ณ วงโคจรนั้น นั่นคือ

$$W = mg = (Gm_e m)/r^2$$

$$\therefore \quad g = (Gm_e)/r^2$$

$$rg = (Gm_e)/r$$

$$\because \quad v^2 = (Gm_e)/r$$

$$\therefore \quad v^2 = rg$$

$$v = \sqrt{rg} \qquad ......6.31$$

ความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรีเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของระยะทางจากศูนย์กลางของโลก ถ้า g_R เป็นความเร่งของวัตถุตกอย่างเสรี ณ ผิวโลก คือ ตรงที่ $r = R$ เราจะได้

$$g/g_R = R^2/r^2$$

$$rg = g_R(R^2/r)$$

$$\therefore \quad v^2 = g_R(R^2/r)$$

$$v = R\sqrt{g_R/r} \qquad ......6.32$$

จากสมการ (6.29) คาบเวลา T

$$T = (2\pi r)/v = (2\pi r)/[R\sqrt{g_R/r}]$$

$$= [(2\pi)/R\sqrt{g_R}].r^{3/2} \qquad ......6.33$$

ถ้า r มากขึ้น คาบเวลา T ก็มากตามด้วย

ตัวอย่าง 6.9 ดาวเทียมที่โคจรเป็นวงกลมในระนาบที่ผ่านเส้นศูนย์สูตรของโลก และมีศูนย์กลางวงโคจรร่วมกับศูนย์กลางของโลก จงหารัศมี r ของวงโคจรที่ทำให้ดาวเทียมลอยนิ่งเมื่อเทียบกับคนที่อยู่นิ่งบนโลก กำหนดให้ $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม

วิธีทำ ดาวเทียมชนิดนี้เรียกว่า Geostationary Satellite ซึ่งโคจรรอบโลกในเวลา 24 ชั่วโมง เท่ากับเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเอง 1 รอบ

$\therefore$ T = 24 ชั่วโมง = 24 x 60 x 60 = 86,400 วินาที

$m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม , $G = 6.67 \times 10^{-11}$ นิวตัน-เมตร²/กิโลกรัม²

จาก $T^2 = Kr^3$

$= [4\pi^2)/Gm_e)]r^3$

$r^3 = (Gm_eT^2)/(4\pi^2)$

$r = [(Gm_eT^2)/(4\pi^2)^{1/3}$

$= [(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(86,400)^2/(4\pi^2)]^{1/3}$

∴ รัศมีของวงโคจรของดาวเทียม $r = 4.2 \times 10^7$ เมตร

เนื่องจากรัศมีของโลก = 6.4×10^6 เมตร ดังนั้นดาวเทียมจะต้องโคจรสูงจากผิวโลก = $(4.2 \times 10^7)-(6.4 \times 10^6)$ เมตร จะได้ 3.56×10^7 เมตร = 35,600 กิโลเมตร ซึ่งประมาณ 1/10 เท่าของระยะทางระหว่างโลกกับดวงจันทร์ และประมาณ 6 เท่าของรัศมีของโลก ดาวเทียมที่โคจรสูง 35,600 กิโลเมตร จะเดินทางรอบโลกในเวลา 24 ชั่วโมง ซึ่งเท่ากับเวลาที่โลกหมุนรอบตัวเอง ดังนั้น ถ้าดาวเทียมเคลื่อนที่อยู่ในวงโคจรนี้ คนบนโลกจะเห็นดาวเทียมดวงนี้ลอยนิ่งอยู่บนฟ้าก ฟ้า ในทางปฏิบัติถ้าไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ ที่จะทำให้ความสูงเปลี่ยนไป ดาวเทียมดวงนี้ก็ควรจะอยู่นิ่ง ๆ เช่นนั้นไปเรื่อย ๆ

ตัวอย่าง 6.10 จงหาเวลาคาบของดาวเทียมที่โคจรเป็นวงกลมรัศมี 8,000 กิโลเมตร ($m_e = 5.98 \times 10^{24}$ กิโลกรัม)

วิธีทำ แทนค่า $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $r = 8{,}000$ km $= 8 \times 10^6$ m ในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$T = (2\pi r)/v$

$v = \sqrt{Gm_e/r}$

จะได้

ความเร็วของการโคจร $v = \sqrt{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})/(8 \times 10^6)}$

$= 7.07 \times 10^3$ m/s

คาบของการโคจร $T = (2\pi \times 8 \times 10^6)/(7.07 \times 10^3)$ s

$= (2\pi \times 8 \times 10^6)/(7.07 \times 10^3 \times 60 \times 60)$ hr

$= 1.97$ hr

ตัวอย่าง 6.11 ดาวเทียมโคจรเป็นวงกลมที่ระยะสูง 300 กิโลเมตรจากผิวโลก รัศมีของโลกเท่ากับ 6,400 กิโลเมตร และ $g = 9.80$ เมตร/วินาที^{2} จงหา

ก. ความเร็วของดาวเทียม ข. คาบเวลา T ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง a_c

วิธีทำ แทนค่า $R = 6.4 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s^2

$r = (6{,}400 + 300) \times 10^3 = 6.70 \times 10^6$ m ในความ

สัมพันธ์ต่อไปนี้ จะได้

ก. $v = R\sqrt{g/r}$

$= (6.40 \times 10^6)\sqrt{9.8/(6.70 \times 10^6)}$

$= 7{,}740$ m/s

ดังนั้น ความเร็วของดาวเทียม $v = 27{,}900$ Km/hr

ข. $T = (2\pi r)/v$

$= [2\pi \times (6.70 \times 10^6)]/7{,}740$

$= 5.46 \times 10^3$ s

ดังนั้น คาบเวลา $T = 1.51$ hr

ค. $a_c = v^2/r$

$= (7{,}740)^2/(6.70 \times 10^6)$

ดังนั้น ความเร่งสู่ศูนย์กลาง $a_c = 8.94$ m/s²

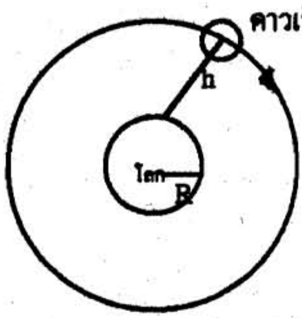
ตัวอย่าง 6.12 ดาวเทียมดวงหนึ่งมวล 150 กิโลกรัม โคจรเป็นวงกลมรอบโลก อยู่ห่างจากโลก 1,000 กิโลเมตร จงหา

ก. แรงความโน้มถ่วงที่กระทำบนดาวเทียม

ข. ความเร็วของดาวเทียมที่โคจร

ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

ง. เวลาที่ดาวเทียมโคจรครบรอบ



กำหนดให้ รัศมีของโลก $R = 6{,}370$ กิโลเมตร

ระยะทางจากดาวเทียมเหนือโลก $h = 1{,}000$ กิโลเมตร

$g = 9.8$ เมตร/วินาที²

วิธีทำ แทนค่าลงในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$g_h = g[R^2/(R + h)^2]$

$= [(9.8)(6{,}370)^2]/(6{,}370 + 1{,}000)^2$

$= 7.3$ เมตร/วินาที²

$F_g = mg_h$

จะได้ $= (150)(7.3)$

ก. แรงความโน้มถ่วง	F_g	=	1.1×10^3 นิวตัน	
	mg_h	=	$m(v^2/r)$ =	$(mv^2)/(R + h)$
∴	v	=	$\sqrt{gh(R + h)}$	
		=	$\sqrt{(7.3)(7.37 \times 10^6)}$	
ข. ความเร็วของดาวเทียม	v	=	7.3×10^3	เมตร/วินาที
	F_c	=	ma_c	
∴	a_c	=	F_c/m	
		=	$(1.1 \times 10^3)/150$	
ค. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง	a_c	=	7.3	เมตร/วินาที^{2}
	T	=	$[2\pi(R + h)]/v$	
		=	$[2\pi(7.37 \times 10^6)]/(7.3 \times 10^3)$	
		=	6.3×10^3	วินาที
ง. เวลาที่ดาวเทียมโคจรครบรอบ	T	=	1.75	ชั่วโมง

ดาวเทียมที่มนุษย์สร้างขึ้นแล้วส่งขึ้นไปโคจรรอบโลกนั้น มีประโยชน์อย่างมากมาย ดาวเทียมจะมีประโยชน์อย่างไรย่อมขึ้นอยู่กับการสร้างและวัตถุประสงค์ในการสร้างดาวเทียมนั้น ๆ ซึ่งจะกล่าวโดยสังเขปดังนี้

นับตั้งแต่สหภาพโซเวียตประสบความสำเร็จในการส่งดาวเทียม ชื่อ **สปุตนิก** ขึ้นไปโคจรรอบโลกได้สำเร็จเมื่อวันที่ 4 ตุลาคม 2500 และต่อมาสหรัฐอเมริกาก็ประสบความสำเร็จในการส่งดาวเทียม ชื่อ **เอกซ์พลอเรอ** ขึ้นไปโคจรรอบโลกได้สำเร็จในปีต่อมา จนถึงปัจจุบันนี้มีดาวเทียมโคจรรอบโลกหลายพันดวง ซึ่งดาวเทียมแต่ละดวงที่ส่งขึ้นไปนั้นด้วยวัตถุประสงค์ที่แตกต่างกัน อาจมีส่วนประกอบ โครงสร้าง ขนาด วงโคจรและระดับโคจรแตกต่างกัน จะกล่าวโดยย่อดังนี้

1. **ดาวเทียมอุตุนิยมวิทยา** เราสามารถใช้ดาวเทียมตรวจสภาพดินฟ้าอากาศที่เกิดขึ้นบนโลกได้ เพราะดาวเทียมโคจรอยู่ระดับสูงย่อมสามารถถ่ายภาพเมฆบนท้องฟ้าส่งมายังสถานีรับบนโลก จากสภาพต่าง ๆ ของเมฆก็นำมาวินิจฉัยทางอุตุนิยมวิทยา ดาวเทียมชนิดนี้สามารถบอกการเกิดพายุ ณ ตำบลต่าง ๆ บนโลกได้อย่างดี เมื่อเราทราบว่าจะเกิดพายุเมื่อใด ฝนตกหนักที่ใดก็ทำให้สามารถป้องกันสิ่งต่าง ๆ ให้พ้นภัยพิบัติได้ก่อน และยังหวังด้วยว่าวันหนึ่งจะสามารถทำลายพายุขณะที่เริ่มก่อตัวโดยใช้ดาวเทียมชนิดนี้เป็นเครื่องมือได้อีกด้วย ตัวอย่างของดาวเทียมชนิดนี้ได้แก่ ดาวเทียมไทรอส (TIROS) ดาวเทียมนิมบัส (NIMBUS) กรมอุตุนิยม

วิทยามีสถานีภาคพื้นดิน รับสัญญาณดาวเทียมเอง ปัจจุบันรับข้อมูลจากดาวเทียม 3 ดวง คือ โนอา 2 ดวง (NOAA = The National Oceanic and Atomsphere Administration) มี NOAA-6 และ NOAA-7 และอีกดวงหนึ่งเป็นดาวเทียมของญี่ปุ่น ชื่อ จีเอ็มเอส (GMS=Geostationary Meterological Satellite)

2. **ดาวเทียมโทรคมนาคม** ในปัจจุบันเราสามารถทราบข่าวและเหตุการณ์ต่าง ๆ ของโลกได้อย่างรวดเร็วมาก โดยการใช้การสื่อสารด้วยดาวเทียมโดยการส่งสัญญาณไปสู่ดาวเทียมที่โคจรอยู่ แล้วให้ดาวเทียมเป็นสถานีส่งอีกต่อหนึ่ง จะเห็นได้ว่าขณะที่เราอยู่ในประเทศไทย เราสามารถชมการถ่ายทอดสดจากโทรทัศน์ในรายการการชกมวยชิงชนะเลิศคู่สำคัญ ๆ จากสหรัฐอเมริกา หรือฟุตบอลโลกจากยุโรป กีฬาโอลิมปิก การประกวดนางงามจักรวาลได้ในเวลาเดียวกันกับประเทศนั้น ๆ ได้ ทั้ง ๆ ที่ประเทศไทยอยู่ห่างจากประเทศดังกล่าวหลายพันกิโลเมตร ประเทศไทยริเริ่มการใช้การสื่อสารผ่านดาวเทียมและเข้าร่วมเป็น**สมาชิกสหพันธ์ดาวเทียมโทรคมนาคมระหว่างชาติ** (International Telecommunication Satellite Consortium) หรือเรียกกันว่า **INTELSAT** ในปี พ.ศ. 2509 จึงนับเป็นการตัดสินใจขั้นสำคัญในการพยายามปรับปรุงวิธีการสื่อสารกับต่างประเทศให้ทันสมัย ทันโลก ทันเหตุการณ์ ซึ่งบังเกิดผลมากมายกับระบบการสื่อสารของไทยจนถึงปัจจุบันนี้ นอกจากนั้นยังเช่าสัญญาณดาวเทียม**ปาลาปา** (PALAPA) ของประเทศอินโดนีเซีย มาใช้ในการติดต่อถ่ายทอดรายการโทรทัศน์ เพื่อให้มีรัศมีการส่งครอบคลุมไปทั่วประเทศไทย

3. **ดาวเทียมสำรวจทรัพยากรธรรมชาติ** โดยใช้ดาวเทียมถ่ายภาพจากส่วนต่าง ๆ ของโลก แล้วนำมาวิเคราะห์ผลจากภาพถ่ายและสัญญาณอื่นๆ ของบริเวณที่เราต้องการสำรวจแหล่งแร่ แล้วนำมาเปรียบเทียบและวิเคราะห์ว่า บริเวณที่ดินนั้นมีแร่อะไรบ้าง ประเทศไทยเริ่มโครงการสำรวจทรัพยากรธรรมชาติด้วยดาวเทียม เมื่อวันที่ 14 กันยายน พ.ศ. 2514 ได้เข้าร่วมในโครงการดาวเทียมสำรวจทรัพยากรพิภพของสหรัฐอเมริกา โดยมีสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติเป็นผู้ประสานงานกับ NASA และเป็นศูนย์ประสานการให้บริการข้อมูลจากดาวเทียมระหว่างองค์การนาสากับผู้ใช้ภายในประเทศ ดาวเทียมที่ให้บริการนี้คือ **แลนด์แซท** (LANDSAT) หน่วยงานที่ได้รับบริการ ได้แก่ กรมพัฒนาที่ดิน กรมป่าไม้ กรมชลประทาน กรมวิชาการเกษตร กรมทรัพยากรธรณี สำนักงานเศรษฐกิจการเกษตร สำนักงานพลังงานแห่งชาติ กรมอุทกศาสตร์ ฯลฯ

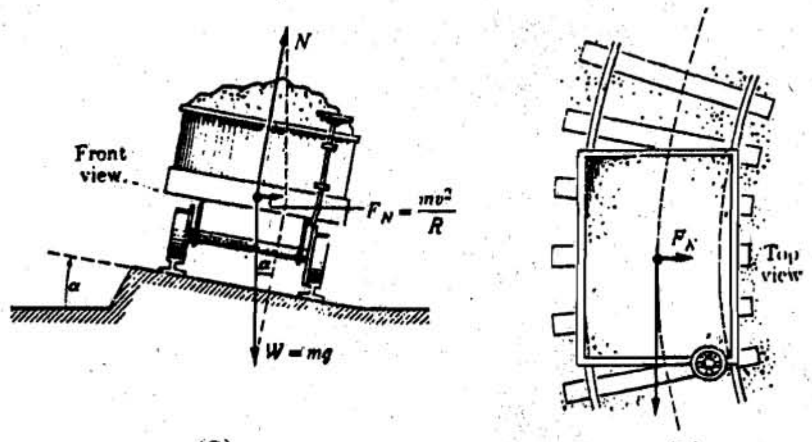
4. **ดาวเทียมยุทธศาสตร์** ชาติมหาอำนาจในปัจจุบันนี้ ได้แก่ สหรัฐอเมริกา รัสเซีย ต่างก็ใช้ดาวเทียมถ่ายภาพการเคลื่อนไหวทางยุทธศาสตร์ต่าง ๆ เช่น กำลังทหาร ฐานจรวด ท่าเรือ ฯลฯ เพื่อหาทางทำลายหรือป้องกันประเทศชาติได้ดีขึ้น ตัวอย่างของดาวเทียมชนิดนี้ได้แก่

ดาวเทียมคอสมอสของรัสเซีย ดาวเทียมสแนป (SNAP) ของสหรัฐอเมริกา

5. **ดาวเทียมเพื่อการศึกษา** เรามีความรู้เกี่ยวกับดาราศาสตร์ บรรยากาศ และอวกาศรอบ ๆ โลกมากกว่าเมื่อก่อนที่จะมีการส่งดาวเทียมขึ้นไปที่สูง ๆ เราสามารถทำการตรวจวัดรังสีต่าง ๆ ที่มาจากเอกภพได้ และเนื่องจากดาวเทียมไม่ถูกบังด้วยบรรยากาศ ดาวเทียมจึงสามารถถ่ายภาพดวงดาวต่าง ๆ ได้ชัดเจนกว่าบนโลก นอกจากนี้ ดาวเทียมยังเป็นแหล่งทดลองพิสูจน์ทฤษฎีเก่า ๆ อีกมากมาย ทั้งในวิทยาศาสตร์กายภาพและวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ตัวอย่างของดาวเทียมเพื่อการศึกษา ได้แก่ ดาวเทียมคอส-บี ดาวเทียมอิไอ ดาวเทียมเอกซ์พลอเรอ เป็นต้น

นอกจากดาวเทียมที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ ยังมีดาวเทียมที่จะทำประโยชน์อื่น ๆ ได้อีกมาก

6.2.6 การยกขอบทางโค้ง (Banking of curve) การประยุกต์เรื่องแรงสู่ศูนย์กลางอีกอย่างหนึ่ง คือ การสร้างถนนเอียงลาด หรือรางรถไฟตรงทางโค้ง ถนนและรางรถไฟจะต้องสร้างให้เอียงลาดเข้าสู่ศูนย์กลางของความโค้งตรงบริเวณทางโค้งเพื่อให้เกิดแรงสู่ศูนย์กลางซึ่งยวดยานพาหนะต้องใช้แล่นเลี้ยวตามทางโค้งนั้น ถ้าไม่สร้างให้เอียงลาดดังกล่าว แรงสู่ศูนย์กลางจะต้องได้มาจากแรงที่ล้อรถหรือรางรถไฟ เป็นผลให้เกิดความเสียดทานสูงและสึกหรอมาก รูปที่ 6.4 แสดงการเอียงและรางรถไฟ (รูป ก) แรงที่กระทำต่อรถ คือ น้ำหนัก W = mg และแรง



(ก) (ข)

รูปที่ 6.4 การยกขอบถนนและรางรถไฟ

ตั้งฉาก N อันเนื่องมาจากการเอียง สำหรับรางรถไฟ (รูป ข) แรงลัพธ์ F_N จะต้องมากพอที่จะทำให้เกิดแรงสู่ศูนย์กลาง $F_N = (mv^2/R)$ เมื่อ R เป็นรัศมีความโค้ง จะได้

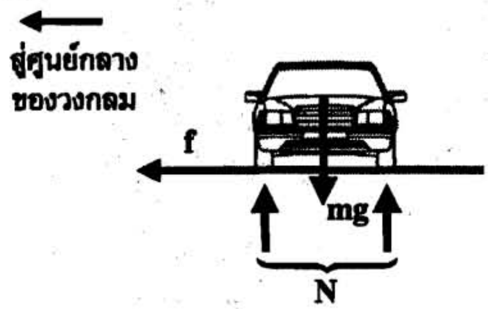
$$\tan\alpha = F_N/W = v^2/(Rg) \qquad \text{......6.34}$$

จะเห็นว่าผลลัพธ์นี้ไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุ เมื่อสร้างถนนหรือทางรถไฟให้เอียงเป็นมุม α ตามที่คำนวณไว้ และใช้ความเร็วไม่เกินที่กำหนด ยวดยานพาหนะที่แล่นผ่านทางโค้งก็ไม่มีแรงข้าง ๆ มากระทำต่อยวดยานพาหนะ สำหรับอัตราที่มากกว่าหรือน้อยกว่าที่กำหนดไว้ไม่มากนักก็จะไม่ทำให้เกิดปัญหาอะไร เพราะว่าความเสียดทานของล้อรถกับถนนจะช่วยต้านแรงข้าง ๆ ให้ในกรณีจำเป็นเช่นนี้ อย่างไรก็ดี **ถ้าใช้อัตราเร็วสูงกว่าที่กำหนดไว้มาก ๆ ยวดยานพาหนะจะมีแนวโน้มที่จะพุ่งตรงไปตกถนนได้**

ตามปกติเมื่อถนนลื่นเนื่องจากมีน้ำเจิ่งหรือมีหิมะ ความเสียดทานระหว่างล้อกับถนนจะน้อย ทำให้รถแล่นผ่านทางโค้งเสียการทรงตัว ซึ่งไม่เหมือนกับรถจักรยานยนต์หรือเครื่องบิน วิศวกรจึงต้องสร้างถนนบริเวณทางโค้งให้เอียง ค่าความเอียงของถนนขึ้นอยู่กับความเร็วของรถกับความโค้งของถนน โดยปกติ ตามทางโค้งจะมีป้ายบอกความเร็วที่จะผ่านทางโค้งได้โดยปลอดภัย

ตัวอย่าง 6.13 จงหาอัตราเร็วสูงสุดซึ่งรถยนต์มวล m สามารถวิ่งผ่านทางโค้งราบ รัศมีทางโค้งเป็น 40 เมตร และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างล้อกับถนนเท่ากับ 0.7

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



แรงสู่ศูนย์กลางจากแรงเสียดทาน

รถยนต์มีมวล = m , รัศมี r = 40 เมตร , μ = 0.7

แรงเสียดทาน = μmg

การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง

แรงลัพธ์ = แรงเสียดทาน (มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง)

$mv^2/r = \mu mg$

ดังนั้น $v = \sqrt{\mu gr}$

$= \sqrt{(0.7)(9.80)(40)}$

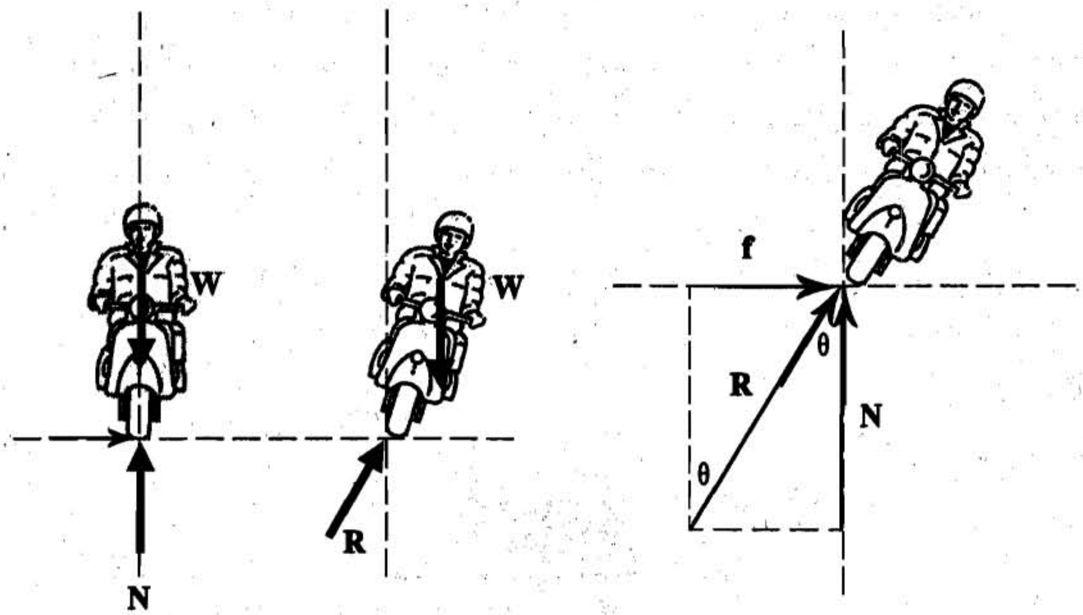
$= 16.6$ เมตร/วินาที

ตัวอย่าง 6.14 รถจักรยานยนต์และผู้ขี่มีมวลรวมกัน 100 กิโลกรัม กำหนดให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 0.6

ก. จงหาแรงเสียดทานที่ทำให้รถจักรยานยนต์แล่นด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาทีผ่านทางโค้งซึ่งมีรัศมีทางโค้งเท่ากับ 80 เมตร โดยไม่ลื่นไถล

ข. ผู้ขับขี่จะต้องเอนตัวเป็นมุมเท่าใด

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



$v = 20$ m/s , $r = 80$ m , $m = 100$ kg , $\mu = 0.6$

แรงสู่ศูนย์กลาง	f	=	$(mv^2)/r$	
		=	$[(100)(20)^2]/(80)$	
		=	500	N
น้ำหนักของผู้ขี่จักรยานยนต์		=	mg = $(100)(9.8)$	
		=	980	N
		=	F_n	
แรงเสียดทานสูงสุด		=	$\mu_s F_n$	
		=	$(0.6)(980)$	
		=	588	N

ก. จะเห็นว่า แรงเสียดทานสูงสุดมีค่ามากกว่าแรงสู่ศูนย์กลาง ดังนั้นแรงเสียดทานจะทำกับรถเพียง 500 N

ข. จากรูป จะได้ว่า

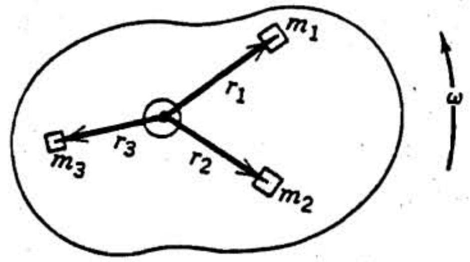
$$\tan\theta = f/F_n = 500/980$$
$$= 0.510 = 27^\circ$$

ข. ผู้ที่จะต้องเอนตัวทำมุม 27°

กิจกรรม 6.1 ให้นักศึกษาสังเกตดูแข่งจักรยานในสนามกีฬาหัวหมากว่าลาดเอียงหรือไม่ ในลักษณะอย่างไรและสอดคล้องกับสมการ $\tan\theta = v^2/rg$ หรือไม่

6.3 พลศาสตร์ของการหมุน

6.3.1 พลังงานจลน์ของการหมุนและโมเมนต์ของความเฉื่อย



รูปที่ 6.5 วัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนซึ่งอยู่นิ่ง ด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังรูปที่ 6.5 อนุภาคมีมวล m_1 เคลื่อนที่ห่างจากจุดหมุน r_1 มีความเร็วเชิงเส้น $v_1 = \omega r_1$ พลังงานจลน์ของอนุภาคมวล m_1 จะได้

$$(1/2)m_1v_1^2 = (1/2)m\omega^2r_1^2$$

เมื่ออนุภาค m_2, m_3 ที่รวมกันอยู่ ต่างก็หมุนไปด้วยและมีพลังงานจลน์ของตัวเองแล้ว ผลบวกของพลังงานจลน์ของอนุภาคแต่ละชิ้นจะเป็นพลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อนนั่นเอง อนุภาคแต่ละชิ้นอาจมีมวลและระยะห่างจากจุดหมุนต่างกัน แต่ความเร็วเชิงมุมจะเท่ากันเสมอ ให้ E_k เป็นพลังงานจลน์รวมของอนุภาคทั้งหมด

$$E_k = (1/2)\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^3 + \ldots)$$
$$= (1/2)\omega^2 (\sum_i m_ir_i^2) \qquad \ldots\ldots 6.35$$

ปริมาณ $\sum_i m_i r_i^2$ **เรียกว่า โมเมนต์ของความเฉื่อย** (moment of inertia) ซึ่งเป็นผลรวมของผลคูณระหว่างมวลของอนุภาคกับกำลังสองของระยะทางที่มวลนั้นห่างจากแกนหมุนซึ่ง**จะแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า I ในระบบเอสไอ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม-เมตร^2** ค่า I ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแกนหมุนและรูปร่างของวัตถุ และการกระจายของเนื้อวัตถุด้วย ระยะ r_i คือระยะทางในแนวตั้งฉากจากอนุภาค i^{th} ถึงแกนหมุน

นั่นคือ
$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad ......6.36$$

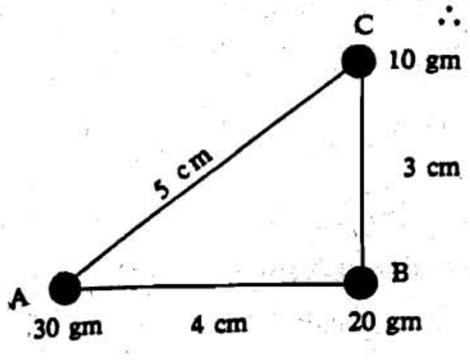
ฉะนั้น พลังงานจลน์ของการหมุน เขียนได้ว่า

$$E_k = (1/2)I\omega^2 \qquad ......6.37$$

สมการ (6.37) สามารถเปรียบเทียบกับพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น $E_k = (1/2)mv^2$ จะเห็นได้ว่า สำหรับการเคลื่อนที่แบบการหมุนนั้น เทียบโมเมนต์ของความเฉื่อย I กับมวล m ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น และความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับความเร็วเชิงเส้น v พลังงานจลน์ของการหมุนจะมีหน่วยเป็นจูลเช่นเดียวกับพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น

ตัวอย่าง 6.15 วัตถุเล็ก ๆ 3 อัน ซึ่งอนุโลมเป็นอนุภาค ถูกเชื่อมโยงด้วยคานเบาดังรูป จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อย (ก) รอบแกนที่ผ่านจุด A ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ ABC และ (ข) รอบแกนที่ซ้อนกับคาน BC

วิธีทำ ก. อนุภาคที่จุด A อยู่บนแกนพอดี ระยะทางระหว่างอนุภาคกับแกนจึงเท่ากับศูนย์ จึงไม่มีโมเมนต์ของความเฉื่อยในกรณีนี้



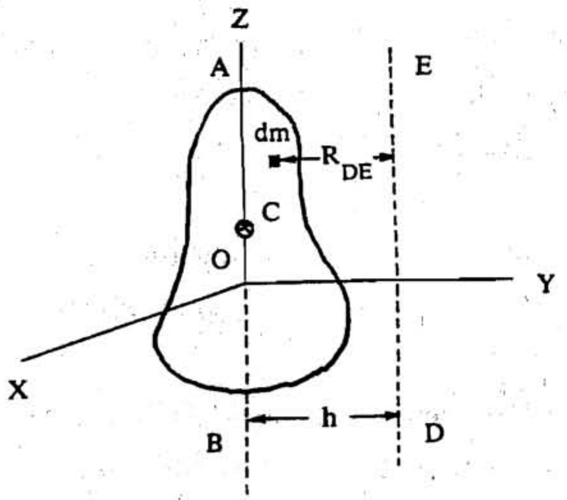
$$\therefore I = \sum_i m_i r_i^2$$
$$= (0.01\ \text{kg})(0.05\text{m})^2 + (0.02\ \text{kg})(0.04\text{m})^2 + (0.03\ \text{kg})(0)^2$$
$$= 5.7 \times 10^{-5}\ \text{kg.m}^2$$

ข. อนุภาคที่ B และ C อยู่บนแกน ดังนั้นโมเมนต์ของความเฉื่อย คือ

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$
$$= (0.03\ \text{kg})(0.04\text{m})^2 + (0.02\text{kg})(0)^2 + (0.01\ \text{kg})(0)^2$$
$$= 4.8 \times 10^{-5}\ \text{kg.m}^2$$

6.3.2 การหาโมเมนต์ของความเฉื่อย

ทฤษฎีแกนขนาน (The Parallel Axis Theorem) เป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุนสองแกนซึ่งขนานกัน โดยที่แกนหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของมวลของวัตถุ



รูปที่ 6.6 แสดงแกนหมุน AB และ DE ซึ่งขนานกันและห่างกัน h

วัตถุซึ่งมีมวล M และ C เป็นศูนย์กลางมวล AB เป็นแกนหมุนผ่านจุด C DE เป็นแกนหมุนซึ่งขนานกับ AB และห่างเป็นระยะทางเท่ากับ h

ให้ I_{CM} เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน AB เพื่อให้ง่ายเราให้แกน AB ทับแกน Z แกน DE อยู่บนระนาบ YZ ดังรูปที่ 6.6 เราได้

$$I_Z = \int (x^2 + y^2)dm$$

ถ้าให้ I_{DE} เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน DE ดังนั้น

$$I_{DE} = \int R^2_{DE}dm \qquad \text{......6.38}$$

โดยที่ R_{DE} = ระยะตั้งฉากจาก dm ถึงแกน DE เราทราบว่า

$$R^2_{DE} = x^2 + (h - y)^2$$
$$= x^2 + h^2 - 2hy + y^2$$

แทนค่า R^2_{DE} ลงในสมการ (6.38) จะได้

$$I_{DE} = \int (x^2 + y^2)dm - 2h\int ydm + h^2\int dm$$

แต่ $\int ydm$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่งศูนย์กลางมวล (R_{CM}) ตามแนวแกน Y ซึ่งในกรณีนี้คือ OC จะได้ $\int ydm = 0$

ดังนั้น
$$I_{DE} = \int (x^2 + y^2)dm + h^2 \int dm$$
$$I_{DE} = I_{CM} + Mh^2$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad ......6.39$$

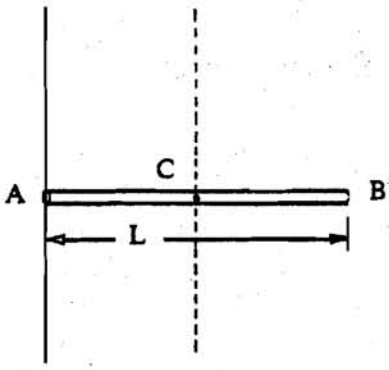
นั่นคือ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนใด ๆ จะเท่ากับโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกนนั้นผ่านศูนย์กลางมวล บวกกับผลคูณของมวลทั้งหมดของวัตถุกับกำลังสองของระยะทางระหว่างแกนทั้งสองนั้น ซึ่งสมการ (6.39) เรียกว่า **ทฤษฎีแกนขนาน**

พลังงานจลน์ของการหมุนในเรื่องนี้ คือ

$$E_k = (1/2)I\omega^2$$
$$= (1/2)(I_{CM} + Mh^2)\omega^2$$
$$= (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)Mh^2\omega^2 \qquad ......6.40$$

ตัวอย่าง 6.16 ไม้คานขนาดสม่ำเสมอยาว L มีมวล M และมีโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับไม้คาน เท่ากับ $(ML^2)/12$ ให้หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของคานนี้รอบแกนผ่านปลายข้างหนึ่ง และตั้งได้ฉากกับไม้คาน

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



ไม้คานมีขนาดสม่ำเสมอ จุดศูนย์กลางแกนหมุนผ่าน C มวลจึงอยู่ที่จุดกึ่งกลางไม้คาน คือที่จุด C

$\therefore \quad I_{CM} = (1/2)ML^2$

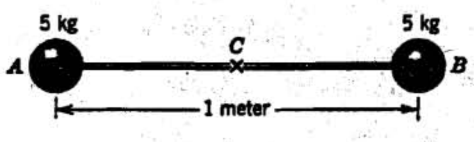
จากสมการ $\quad I = I_{CM} + Mh^2$

$$= (1/12)ML^2 + M(L/2)^2$$
$$= (1/12)ML^2 + (1/4)ML^2$$
$$I = (1/3)ML^2$$

ตัวอย่าง 6.17 ทรงกลม 5 กิโลกรัม 2 ลูก เชื่อมกันด้วยคานยาว 1 เมตร ถ้าพิจารณาว่าทรงกลมเหมือนเป็นอนุภาคเล็ก ๆ และคานเบามาก จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของทรงกลมชุดนี้

ก. รอบแกนที่ตั้งฉากกับคานและผ่านจุด C

ข. รอบแกนที่ผ่านจุด A หรือ B และตั้งฉากกับคาน



วิธีทำ

ก. แกนหมุนตั้งฉากกับคานและผ่านจุด C จะได้

$$
\begin{aligned}
I_C &= \sum_i m_i r_i^2 \\
&= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(0.5)^2 + (5.0)(0.5)^2 \\
&= 2.5 \qquad \text{kg.m}^2
\end{aligned}
$$

ข. แกนหมุนตั้งฉากกับคานและผ่าน A หรือ B

$$
\begin{aligned}
I_A &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(0)^2 + (5.0)(1.0)^2 \\
&= 5 \qquad \text{kg.m}^2 \\
I_B &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \\
&= (5.0)(1.0)^2 + (5.0)(0)^2 \\
&= 5 \qquad \text{kg.m}^2
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า **ถ้าหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านปลายข้างหนึ่งของลูกทรงกลมแล้วโมเมนต์ของความเฉื่อยจะมีค่าเป็น2เท่าของเมื่อหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมนั้น**

จากตัวอย่าง 6.17 เราคิดว่าทรงกลมเป็นจุดที่ไม่มีขนาด แล้วหาผลแบบธรรมดาโดยเอามาบวกกัน เมื่อใดที่วัตถุมีขนาดใหญ่ มวลกระจายอยู่ทุกส่วน ผลบวกของ $I = \sum_i m_i r_i^2$ จะต้องเปลี่ยนไป หาได้โดยการอินทิเกรตโดยถือว่าวัตถุนั้นแบ่งเป็นชิ้นเล็ก ๆ จำนวนมากมายนับไม่ถ้วน โดยแต่ละชิ้นมีมวล dm โดยมี dV เป็นปริมาตรเล็ก ๆ อยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งซึ่งมีระยะตั้งฉากจากแกนหมุนเป็น r และที่ตำแหน่งนั้นมีความหนาแน่น ρ ดังนั้น $dm = \rho dV$ ให้ r เป็นระยะห่างของมวลย่อยจากแกนหมุน โมเมนต์ของความเฉื่อยหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i r_i^2 \\
&= \int r^2 dm \qquad \text{......6.41}
\end{aligned}
$$

สำหรับวัตถุที่ไม่มีรูปทรงทางเรขาคณิต การอินทิเกรตหาค่า I ทำได้ยาก แต่ถ้ามีรูปทรงเรขาคณิตแบบง่าย ๆ การอินทิเกรตทำได้ง่าย โดยเลือกแกนสมมาตร (axis of symmetry) ของวัตถุเป็นแกนหมุน

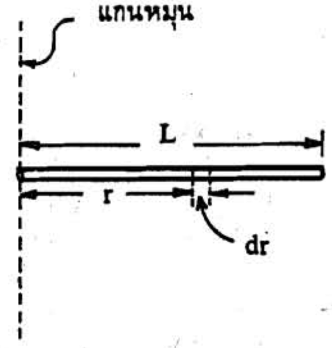
สำหรับวัตถุที่มีรูปทรงทางเรขาคณิตและมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ หรือทราบค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่งต่าง ๆ จะหาโมเมนต์ของความเฉื่อยได้จากสมการ

$$
I = \int r^2 \rho dV \qquad \text{......6.42}
$$

ตัวอย่าง 6.18 แท่งวัตถุเล็ก ๆ มีมวล M และยาว L มีพื้นที่หน้าตัดและความหนาแน่นสม่ำเสมอ จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อย ถ้าหมุน

ก. รอบแกนซึ่งผ่านปลายข้างหนึ่ง และตั้งฉากกับวัตถุนั้น

ข. รอบแกนซึ่งผ่านจุดกึ่งกลาง และตั้งฉากกับวัตถุนั้น



แท่งวัตถุหมุนรอบแกนผ่านปลายวัตถุและตั้งฉากกับวัตถุ

วิธีทำ

ก. เนื่องจากแท่งวัตถุมีขนาดเล็กและยาว เมื่อคิดแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งวัตถุ อาจถือได้ว่าขนาดหน้าตัดของแท่งวัตถุไม่มีผลต่อโมเมนต์ของความเฉื่อย จึงสามารถคำนวณหา dm ได้โดยใช้มวลต่อความยาว คือ λ (แทนที่จะเป็นความหนาแน่น ρ)

$$\therefore \quad dm = \lambda dr$$

$$\because \quad I = \int r^2 dm$$

$$= \int_0^L r^2 \lambda dr$$

เนื่องจากพื้นที่หน้าตัดและความหนาแน่นสม่ำเสมอ λ จึงคงตัวไม่ขึ้นกับ r

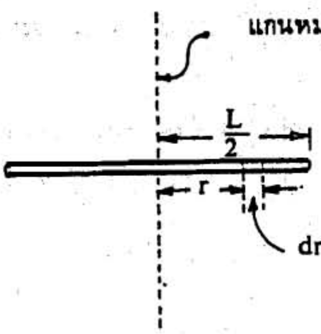
$$\therefore \quad I = \lambda \int_0^L r^2 dr$$

$$= \lambda [r^3/3]_0^L$$

$$= \lambda L.(L^2/3)$$

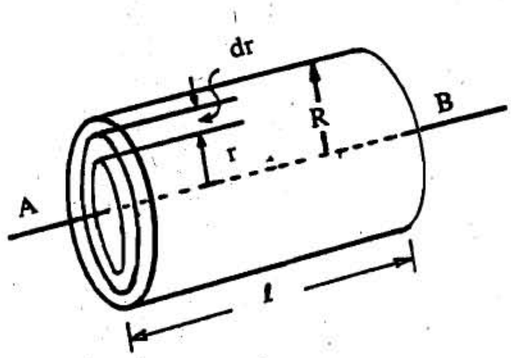
$$I = (1/3)ML^2$$

ข. ถ้าหมุนแท่งวัตถุรอบแกน ซึ่งผ่านจุดกึ่งกลางแท่ง จะได้ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยดังนี้



$$I = 2\int_0^{L/2} r^2\lambda dr$$
$$= 2\lambda[r^3/3]_0^{L/2}$$
$$= 2\lambda.[L^3/(3 \times 8)]$$
$$= \lambda L.(L^2/12)$$
$$I = (1/12)ML^2$$

ตัวอย่าง 6.19 จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสมมาตร AB ของล้อตัน ล้อมีรัศมี R มวล m ความยาว l และมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ ρ



ล้อตันหมุนรอบแกน AB

วิธีทำ เนื่องจากวัตถุมีสมมาตรรอบแกนหมุน ดังนั้นจึงสามารถหา dV ซึ่งเป็นปริมาตรวงแหวนรัศมี r มีความหนา dr และยาว l นั่นคือ

ปริมาตรวงแหวน $dv = (2\pi rl)dr$

มวลของล้อ $M = \pi R^2 l\rho$

จาก $I = \int r^2\rho dV$

$$= \int_0^R r^2\rho(2\pi rl)dr$$
$$= 2\pi l\rho \int_0^R r^3 dr$$
$$= \pi l\rho(R^4/2)$$
$$= (1/2)(\pi R^2 l\rho)R^2$$
$$= (1/2)MR^2$$

ล้อตันในตัวอย่างนี้ก็คือ ทรงกระบอกตันที่ l มีค่าน้อย

ตาราง 6.3 สูตรการหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่าง ๆ ที่มีความหนาคงที่และหมุนรอบแกนที่กำหนดในรูป

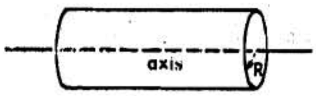
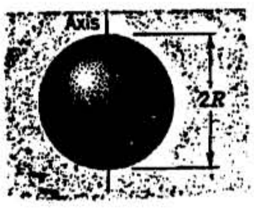
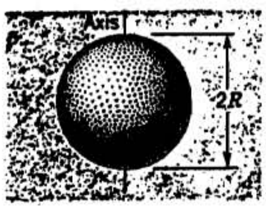
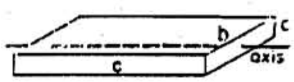
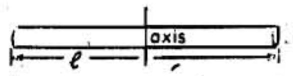
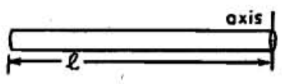
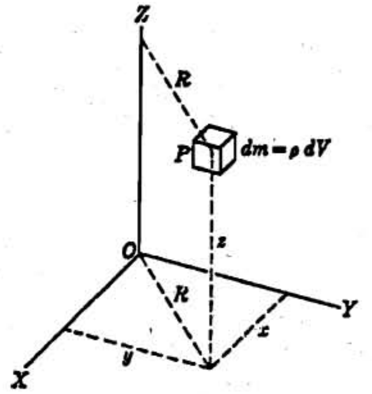
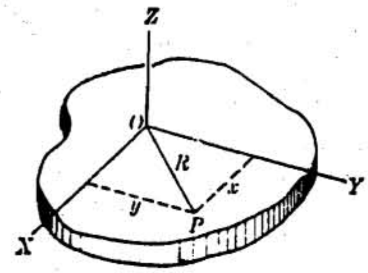
Diagram of System	Solid and Axis	I
	Cylinder about the axis of figure	$(1/2)MR^2$
	Cylinder about a central diameter	$(1/4)MR^2 + (1/12)ML^2$
	Solid Sphere about any diameter	$(2/5)MR^2$
	Thin Spherical Shell about any dismeter	$(2/3)MR^2$
	Block about a central axis	$M[a^2 + b^2)/12]$

Diagram of System	Solid and Axis	I
	Thin bar, about axis at center ⊥ to length	$(1/12)ML^2$
	Thin bar, about axis at one end	$(1/3)ML^2$
	Hoop about a diameter	$(1/2)MR^2$
	Hoop about a tangent line	$(3/2)MR^2$
	Ring about axis through its center ⊥ to the plane of the ring	$(M/2)(R_1^2 + R_2^2)$

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก เป็นทฤษฎีหนึ่งที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของความเฉื่อย



รูปที่ 6.7



รูปที่ 6.8 วัตถุเป็นแผ่นหมุนรอบแกน Z

ใช้สำหรับวัตถุแบนราบ ดังรูปที่ 6.8 ให้แกน X และ Y อยู่บนระนาบของวัตถุ จะได้

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad \text{......6.43}$$

โดยที่ I_X, I_Y และ I_Z เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุเป็นแผ่น รอบแกนที่ตั้งฉากกัน มวลเล็กๆ dm ณ ตำแหน่ง P (ดังรูปที่ 6.7) บนวัตถุซึ่งมีความหนาแน่น ρ

$$I = \int r^2 dm$$
$$= \int \rho r^2\, dV$$

จากรูป จะได้ $\qquad r^2 = x^2 + y^2$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน Z คือ

$$I_Z = \int \rho(x^2 + y^2)dV$$
$$= \int \rho x^2 dV + \int \rho y^2 dV$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน X และแกน Y จะได้

$$I_X = \int \rho y^2 dV$$
$$I_Y = \int \rho x^2 dV$$
$$\therefore \quad I_Z = I_Y + I_X$$

โดยที่ x และ y คือระยะจาก dm (คือจุด P) คือแกน Y และแกน X ตามลำดับ และเนื่องจากวัตถุแบนมาก จึงได้ $I_Z = I_X + I_Y$

สมการ (6.43) จึงเรียกว่า **ทฤษฎีแกนตั้งฉาก** เป็นทฤษฎีที่ใช้ได้กับวัตถุแบบราบที่บางมากๆ เท่านั้น ประโยชน์ของสมการนี้ คือ ถ้าทราบค่า I รอบแกน 2 แกนซึ่งตั้งฉากกันและอยู่บนระนาบของวัตถุ เช่น I_X กับ I_Y ก็สามารถหา I รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวัตถุที่จุดตัดของ 2 แกนแรก เช่น I_Z ได้

กิจกรรม 6.2

ให้นักศึกษาพิจารณาตัวอย่างที่แสดงการหาโมเมนต์ความเฉื่อยในบทนี้ว่ากรณีใดใช้ทฤษฎีแกนขนานและกรณีใดใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉาก และหากจะเปลี่ยนแปลงทฤษฎีจะได้หรือไม่โดยการสลับกัน

ตัวอย่าง 6.20 ลวดวงกลมมวล M มีรัศมี R และโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลาง และตั้งฉากกับระนาบของวงลวดเท่ากับ MR^2 ให้หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของวงลวดนี้รอบแกนที่ทับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงลวด

วิธีทำ ลักษณะรูปจะเหมือนกับรูปที่ 6.8 ให้ระนาบของลวดวงกลมอยู่ในระนาบ XY และจุดศูนย์กลางทับจุด O จะได้

$$I_Z = MR^2$$

และ $$I_X = I_Y$$

จาก $$I_Z = I_X + I_Y$$

$$MR^2 = 2I_X$$

$$\therefore \quad I_X = (1/2)MR^2 = I_Y$$

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่าวัตถุที่มีรูปร่างต่างกัน ย่อมมีโมเมนต์ของความเฉื่อยต่างๆ กัน เพื่อความสะดวกเราอาจคิดเสมือนว่ามวลของวัตถุนั้นทั้งก้อนรวมกันอยู่ ณ ตำแหน่งหนึ่งโดยมีระยะห่างระยะหนึ่งจากจุดนั้นไปยังแกนหมุน ซึ่งเรียกว่า **รัศมีไจเรชัน** (radius of gyration), k จะใช้ระยะนี้แทนโดยที่โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุนั้น คือ

$$I = Mk^2 \qquad ......6.44$$

$$k = \sqrt{I/M} \qquad ......6.45$$

เช่น วัตถุทรงกระบอก จะได้ $Mk^2 = (1/2)MR^2$

หรือ $k = R/\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 6.21 จงหารัศมีไจเรชันของแท่งกลม มวล M ยาว L คำนวณรอบแกนที่ตั้งฉากกับแท่งกลมและผ่านจุดศูนย์กลางของแท่งกลมนี้

วิธีทำ โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของแท่งกลม คือ

$$I_{CM} = (1/12)ML^2 = Mk^2$$

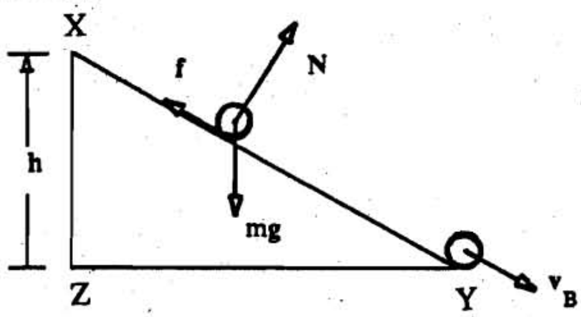
$$\therefore \quad k = \sqrt{L^2/12}$$

$$= L/[2\sqrt{3}]$$

$$= 0.289\ L$$

ตัวอย่าง 6.22 วัตถุกลมมีมวล M และรัศมีไจเรชัน k กลิ้งลงตามพื้นเอียง XY เริ่มต้นจากจุดหยุดนิ่งที่จุด X เมื่อถึงจุด Y วัตถุจะมีอัตราเร็วเชิงเส้นเป็นเท่าใด

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



XZ เป็นความสูงของพื้นเอียง = h

R เป็นรัศมีของวัตถุกลม

v_y เป็นอัตราเร็วเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลของวัตถุที่จุด Y

ขณะใด ๆ จะมีแรงกระทำ ดังรูป ดังนี้

mg = น้ำหนักของวัตถุกลม

N = แรงตั้งฉากที่พื้นเอียงกระทำต่อวัตถุกลม

f = แรงเสียดทานสถิตกระทำที่จุดสัมผัส

จะเห็นว่างานของ N และ f เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงใช้หลักการคงตัวของพลังงานกล

$$mgh = (1/2)mv_y^2 + (1/2)I\omega^2$$

$$= (1/2)mv_y^2 + (1/2)I(v_y/R)^2$$

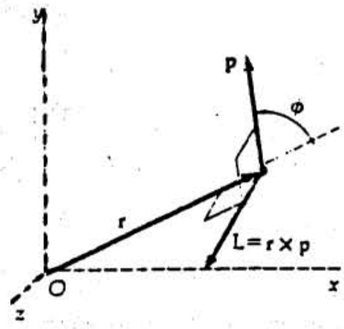
และ $I = mk^2$

$$\therefore \quad v_y = \sqrt{(2gh)/[1 + (k/R)^2]}$$

6.3.3 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของอนุภาค

โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้น **v** (มีโมเมนตัมเชิงเส้น **p** = m**v**) โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาครอบจุด O คือ ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งกับโมเมนตัมเชิงเส้น ดังรูปที่ 6.9 เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \end{aligned} \qquad \text{......6.46}$$



รูปที่ 6.9 อนุภาคมีโมเมนตัม **p** และเวกเตอร์บอกตำแหน่ง **r** มีโมเมนตัมเชิงมุม **L** = **r** x **p** ซึ่งตั้งได้ฉากกับทั้ง **r** และ **p**

โมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบด้วย **r** และ **v** ขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่โมเมนตัมเชิงมุมจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ (**r** และ **v** อยู่ในระนาบ) และจุด O อยู่ในระนาบด้วย ดังนั้นทิศทางของโมเมนตัมเชิงมุมย่อมตั้งฉากกับระนาบนั้นเช่นกัน

ในกรณีที่อนุภาคมวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลม ซึ่งอยู่ในระนาบ XY ด้วยความเร็วเชิงมุม ω โมเมนตัมเชิงมุม **L** ของอนุภาคมวล m เทียบกับจุดศูนย์กลางของวงกลม คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= rmv \sin 90^\circ \,\hat{k} \\ &= mvr\hat{k} \\ \mathbf{L} &= m\omega r^2\hat{k} \end{aligned} \qquad \text{......6.47}$$

จากสมการจะเห็นว่า โมเมนตัมเชิงมุมมีทิศทางเดียวกับทิศทางของความเร็วเชิงมุม เพราะว่าปริมาณ mr^2 คือ โมเมนตัมของความเฉื่อย I รอบแกน Z ของอนุภาคมวล m (อนุภาคเดียว) ดังนั้นจะได้

$$L = mr^2\omega$$

$$\therefore \quad L = I\omega \qquad \text{......6.48}$$

ตัวอย่าง 6.23 ชายคนหนึ่งผูกมวล 200 กรัมด้วยเชือกยาว 1 เมตร แล้วเหวี่ยงไปรอบ ๆ เหนือศีรษะด้วยความเร็ว 2 รอบต่อวินาที จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของมวลก้อนนี้

วิธีทำ แทนค่า

$m = 200\ g = 0.2\ kg$, $r = 1\ m$

$\omega = 2 \times 2\pi = 12.56\ rad/s$ ในสูตรต่อไปนี้

$$\therefore \quad L = mr^2\omega$$

$$= (0.2)(1)^2(12.56)$$

จะได้ค่าโมเมนตัมเชิงมุม $= 2.512$ j.s

ทอร์ก (Torque)

สำหรับอนุภาคเดี่ยว โมเมนตัมเชิงมุม มีนิยามว่า

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

เมื่อ **r** และ **p** เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งและโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/dt$$

$$= (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt)$$

$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\ (d\mathbf{p}/dt)$$

เทอมแรกมีค่าเป็นศูนย์ และเทอมหลัง อาจเขียนในเทอมของแรง ได้ดังนี้

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

และ $\mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

ดังนั้น $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt)$

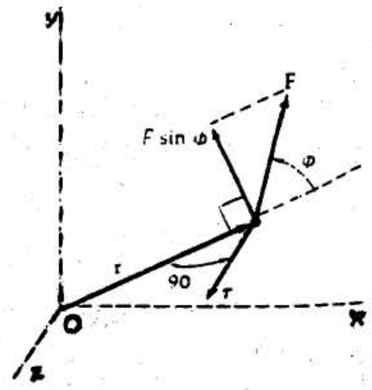
$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \text{..... 6.49}$$

ปริมาณทางขวามือของสมการ (6.49) คือ **ทอร์ก** แทนด้วยสัญลักษณ์ τ เขียนได้ว่า

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad ......6.50$$

$$\tau = dL/dt \qquad ......6.51$$

สมการ (6.51) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันในกรณีที่มีการหมุน ซึ่งกล่าวว่า **ทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค**



รูปที่ 6.10 แรง F กระทำกับอนุภาคซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง r และทอร์ก τ ตั้งได้ฉากกับ F และ r

ทอร์กเป็นปริมาณเวกเตอร์ หาค่าหรือขนาดได้จาก

$$\tau = rF \sin \phi \qquad ......6.52$$

ϕ เป็นมุมแหลมที่อยู่ระหว่าง **r** กับ **F** ทิศของ τ จะตั้งฉากกับระนาบ **F** และ **r**

หน่วยของทอร์ก คือ หน่วยของแรง x ระยะทาง คือ นิวตัน-เมตร

จากสมการ (6.50) จะเห็นว่าทอร์กไม่ใช่เพียงแต่ขึ้นกับขนาดและทิศทางของแรงที่กระทำเท่านั้น ยังขึ้นกับตำแหน่งที่แรงกระทำด้วย คือ **r** ถ้าอนุภาคอยู่ที่จุด O แรง **F** กระทำต่ออนุภาคโดยมีทิศผ่านจุดกำเนิด O จะได้ว่า $r = 0$ ดังนั้น ทอร์กรอบจุดกำเนิด O เท่ากับศูนย์ ด้วยสมการ (6.52) อาจเขียนขนาดของทอร์กได้อีกหลายแบบ ดังนี้

$$\tau = (r\sin\phi)F = Fr_\perp$$

หรือ $$\tau = r(F\sin\phi) = rF_\perp$$

$r_\perp$ (= $r\sin\phi$) คือ องค์ประกอบของ **r** ในทิศตั้งฉากกับ **F**

$F_\perp$ (= $F\sin\phi$) คือ องค์ประกอบของ **F** ในแนวตั้งฉากกับ **r**

จากสมการ (6.48) $L = I\omega$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$dL/dt = I(d\omega/dt)$$

$$\tau = I\alpha \qquad ......6.53$$

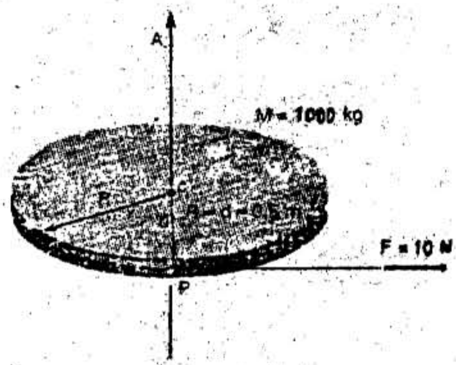
สมการ (6.53) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของนิวตันในกรณีที่มีการหมุน เช่นเดียวกับสมการ (6.51)

งานที่ทำโดยแรงที่ทำให้เกิดการหมุนเป็นมุม $d\phi$ คือ $W = \tau d\phi$ และกำลังบัดดล คือ $P = \tau\omega$

ตัวอย่าง 6.24 แผ่นเหล็กกลมมีมวล 1,000 กิโลกรัม มีรัศมี 0.5 เมตร สามารถหมุนรอบแกนกลางในแนวดิ่งได้อย่างอิสระที่ขอบของแผ่นเหล็กกลมมีเชือกรัดไว้ และถูกดึงที่จุด P ด้วยแรง 10 นิวตัน

ก. จงหาทอร์กที่เกิดขึ้น ข. จงหาความเร่งที่เกิดจากแรงดึง

ค. ถ้าเริ่มจากหยุดนิ่ง อยากทราบว่าแผ่นเหล็กกลมจะหมุนไปได้กี่รอบใน 10 วินาที



วิธีทำ

แทนค่า M = 1,000 kg , F = 10 N , r = 0.5 m ในสมการต่อไปนี้

$$\tau = r \times F$$
$$= rF \sin\theta$$
$$= (0.5)(10) \sin 90^\circ$$

$\therefore$ ก. ทอร์กที่เกิดขึ้น $= 5$ N.m

$\because \quad \tau = I\alpha$

$\therefore \quad \alpha = \tau/I$

I ของแผ่นเหล็กกลม $= (1/2)MR^2$

$\therefore \quad \alpha = 2\tau/(MR^2)$

$$= [2 \times (5)]/[1,000(0.5)^2]$$

$\therefore$ ข. ความเร่งที่เกิดจากแรงดึง $= 0.04$ rad/s²

ค. หาจำนวนรอบที่หมุนไปใน 10 วินาที โดยหามุม θ

$$\theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$
$$= (1/2)\alpha t^2$$

เมื่อ $\omega_0 = 0 = \theta_0$

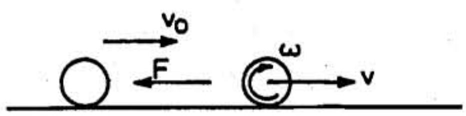
$$\therefore \quad \theta = (1/2)(0.04)(10)^2$$
$$= 2 \quad \text{rad}$$

ในเวลา 10 วินาที จะหมุนไปได้ $= \theta/(2\pi)$

$$= 2/(2\pi)$$
$$= 1/\pi \quad \text{รอบ}$$

ตัวอย่าง 6.25 โยนลูกโบว์ลิ่งออกไปบนพื้นราบด้วยอัตราเร็วต้น v_0 โดยยังไม่มีการกลิ้ง จงแสดงว่าลูกโบว์ลิ่งจะเริ่มกลิ้งโดยไม่มีการไถลเมื่อมีอัตราเร็วลดลงไป $(5/7)v_0$

วิธีทำ พิจารณารูปข้างล่างนี้



ให้ F เป็นแรงที่พื้นกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง

แรงดลที่พื้นกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง คือ

$$F.t = M(v_0 - v) \qquad \text{........(1)}$$

การกลิ้งของลูกโบว์ลิ่งโดยไม่มีการไถล จะได้ว่า

$$\tau = I\alpha$$
$$F.R = [(2/5)MR^2](\omega/t)$$
$$= [(2/5)MR^2](v/Rt)$$
$$\therefore \quad F = (2/5)[(Mv)/t]$$

แทนค่า F ลงในสมการ (1) จะได้

$$(2/5)[(Mv)/t].t = M(v_0 - v)$$
$$(2/5)v = v_0 - v$$
$$v + (2/5)v = v_0$$

นั่นคือ $\quad v = (5/7)v_0$

6.3.4 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์กของระบบอนุภาค สำหรับกรณีของระบบอนุภาค เรามีนิยามของโมเมนตัมเชิงมุมรวมของทั้งระบบ ว่าเป็นผลบวกทางเวกเตอร์ของแต่ละอนุภาค

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i$$

$$= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad \text{......6.54}$$

เมื่อ **L** เป็นโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบ

$\mathbf{L}_i$ และ $\mathbf{r}_i$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมและตำแหน่งของอนุภาคที่ i

$\mathbf{P}_i$ เป็นโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคที่ i ในระบบ

n เป็นจำนวนอนุภาคในระบบ

$$\because \quad \tau = d\mathbf{L}/dt$$

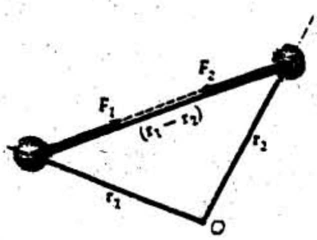
$$= \sum_{i=1}^{n} d\mathbf{L}_i/dt$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \qquad \text{......6.55}$$

เมื่อ τ_i เป็นทอร์กที่กระทำบนอนุภาคที่ i ของระบบ

เนื่องจากทอร์ก τ_i นี้เกิดจากแรงกระทำบนอนุภาค จึงแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือทอร์กเนื่องจากแรงภายในและเนื่องจากแรงภายนอก ทอร์กที่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยน จึงเป็นทอร์กของแรงภายนอก คือ τ_{ext} เท่านั้น

จะแสดงให้เห็นว่า ถ้าแรงภายในระหว่างอนุภาค 2 อนุภาคคู่ใด ๆ กระทำในแนวเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างอนุภาคคู่นั้น ผลรวมของทอร์กภายในของระบบจะเท่ากับศูนย์



รูปที่ 6.11 แรงภายใน $\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ ทำให้ทอร์กสุทธิรอบจุด O เป็นศูนย์

จากรูปที่ 6.11 เราได้ $F_1 = -F_2$ ตามกฎข้อ 3 ของนิวตัน ผลรวมของทอร์ก 2 ทอร์ก มีดังนี้

$$\begin{aligned}\tau_1 + \tau_2 &= (r_1 \times F_1) + (r_2 \times F_2) \\ &= (r_1 \times F_1) + r_2 \times (-F_1) \\ &= (r_1 - r_2) \times F_1\end{aligned}$$

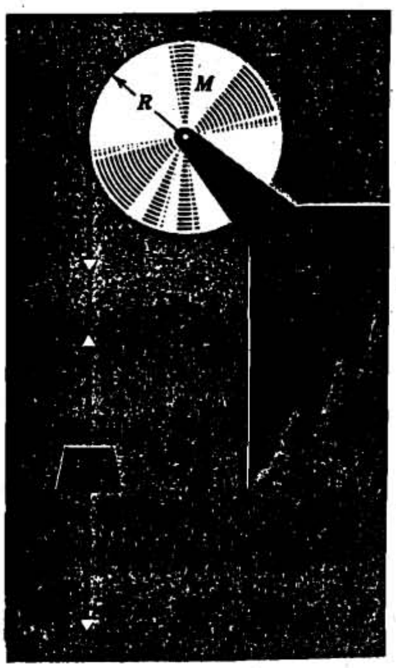
เวกเตอร์ $(r_1 - r_2)$ มีทิศตามแนวเส้นเชื่อมระหว่างอนุภาคทั้งสอง ดังนั้นถ้า F_1 กระทำในแนวขนานกับเส้นเชื่อมต่อระหว่างมวล m_1 และ m_2 [F_1 และ $(r_1 - r_2)$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกันหรือขนานสวนกัน] แล้ว จะได้

$$(r_1 - r_2) \times F_1 = 0$$

นั่นคือ แรงภายในและทอร์กภายในของระบบอนุภาค จะหักล้างกันเป็นคู่ และทอร์กที่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเปลี่ยนในสมการ (6.55) จึงเป็นทอร์กภายนอกเท่านั้น เขียนได้ว่า

$$dL/dt = \tau_{ext} \qquad \text{......6.56}$$

ถ้าไม่มีทอร์กจากภายนอก ($\tau_{ext} = 0$) โมเมนตัมเชิงมุมของระบบคงที่ จึงกล่าวได้ว่า โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง ถ้าระบบนั้นเป็นอิสระ ($F_{ext} = 0$) หรือทอร์กจากภายนอกเป็นศูนย์ ($\tau_{ext} = 0$) แต่ F_{ext} อาจไม่เท่ากับศูนย์



ตัวอย่าง 6.26 จานกลมสม่ำเสมอรัศมี R มวล M หมุนรอบแกนหมุนซึ่งไม่มีความเสียดทาน มีเชือกพันรอบขอบจาน แล้วเอามวล m แขวนกับเชือก จงหาความเร่งเชิงมุมของงาน และความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน

วิธีทำ พิจารณารูปนี้

ให้ T = แรงดึงในเส้นเชือก วัตถุมวล m เคลื่อนลงด้วยความเร่ง แรงดึงลง mg มีค่ามากกว่า T และความเร่งของมวล m คือ ความเร่งของจุดริมขอบจาน จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$mg - T = ma \qquad \text{......(1)}$$

ทอร์กกระทำต่อจานคือ TR และโมเมนต์ของความเฉื่อยของจาน คือ $(1/2)MR^2$

$$\because \quad \tau = I\alpha$$
$$TR = [(1/2)MR^2]\alpha$$
$$2T = (MR)\alpha = M(\alpha R)$$

ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน หาจาก

$$a = \alpha R$$
$$\therefore \quad 2T = Ma$$
$$a = (2T)/M$$

แทนค่า a ลงในสมการ (1) จะได้

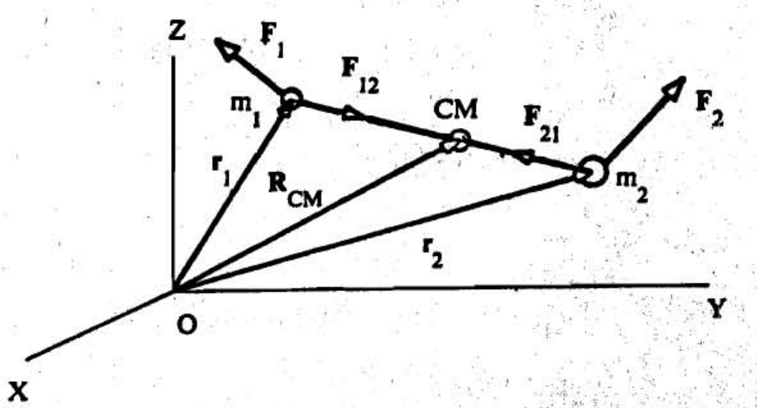
$$T = mg - ma$$
$$= mg - m[(2T)/M]$$
$$T + (2mT)/M = mg$$
$$T[(M + 2m)/M] = mg$$
$$T = [(mM)/(2m + M)].g$$

$\therefore$ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสของจุดริมจาน $a = [(2m)/(2m + M)].g$

$\therefore$ ความเร่งเชิงมุมของจาน $\alpha = a/R$

$$= [(2m)/(2m + M)].(9g/R)$$

ตัวอย่าง 6.27 จงหาทอร์กเนื่องจากแรงภายในและแรงภายนอกของระบบที่มี 2 อนุภาค



ระบบ 2 อนุภาค

วิธีทำ

$$\because \quad d(L_1 + L_2)/dt = \tau_1 + \tau_2$$

ตามรูป $\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ เป็นแรงภายนอกกระทำต่อ m_1 และ m_2 ตามลำดับ ส่วน $\mathbf{F}_{12}$ และ $\mathbf{F}_{21}$ เป็นแรงภายในกระทำต่อ m_1 และ m_2 ตามลำดับเช่นกัน

แรงรวมที่ m_1 คือ $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$ และ

แรงรวมที่ m_2 คือ $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$

ให้ τ_1 และ τ_2 เป็นทอร์กรวมกระทำบน m_1 และ m_2

$$\therefore \quad \tau_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$$

$$\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$$

แต่ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

จากสมการข้างบน จะเห็นว่าข้างขวาของสมการได้แบ่งทอร์กออกเป็น 2 ส่วน คือ $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$ ซึ่งเป็นผลรวมของทอร์กเนื่องมาจากแรงภายนอก และ $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21})$ เป็นผลรวมของทอร์กเนื่องจากแรงภายใน

$$\therefore \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}$$

$$= \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12}$$

$$= 0$$

เพราะว่า $\mathbf{r}_{12}$ กับ $\mathbf{F}_{12}$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน หมายความว่า ผลรวมของทอร์กเนื่องจากแรงภายในของระบบจะเป็นศูนย์เสมอ ไม่ว่าสองอนุภาคจะอยู่อย่างไรในระบบ

ดังนั้นทอร์กรวมทั้งหมดของระบบ คือ $\tau_1 + \tau_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ ซึ่งเป็นทอร์กของแรงภายนอกเท่านั้น

ให้ $\tau_1 + \tau_2 = \tau_{ext}$

นั่นคือ $d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)/dt = \tau_{ext}$

เพราะฉะนั้น อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของระบบจึงเท่ากับทอร์กรวมจากภายนอก

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีค่ามากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดอ้างอิง เราสามารถหาโมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิงใดๆ ได้ โดยการรวมโมเมนตัมเชิงมุมของทุกอนุภาคในระบบเทียบกับจุดอ้างอิงนั้นดังกล่าวมาแล้ว แต่ในกรณีที่อนุภาคในระบบจัดเรียงเป็นระเบียบ มีรูปทางเรขาคณิต เช่น ทรงกระบอก ทรงกลม และสี่เหลี่ยม มีวิธีที่สะดวกกว่า คือ ใช้สมการ

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}_{orb} \qquad \text{......6.57}$$

โดยที่ $\mathbf{L}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิง

$\mathbf{L}_{CM}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

$\mathbf{L}_{orb}$ = โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเทียบกับจุดอ้างอิงเดียวกับ $\mathbf{L}$ ซึ่งคำนวณได้โดย

ถือเสมือนว่ามวลทั้งหมดของระบบรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

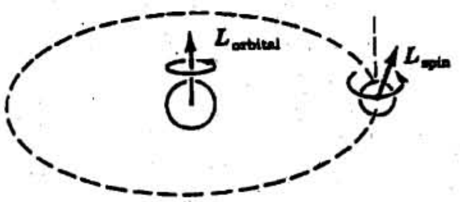
$$L_{orb} = r_{CM} \times P = r_{CM} \times Mv_{CM} \qquad ......6.58$$

$$L = L_{CM} + r_{CM} \times Mv_{CM} \qquad ......6.59$$

ความหมายของสมการ (6.59) คือ โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดใดๆ คือ ผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ กับโมเมนตัมเชิงมุมที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลรอบจุดนั้น

ผลที่ได้จากสมการ (6.59) ก็คือ ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุมีเฉพาะการหมุนรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุใด ๆ ก็คือ L_{CM} เพราะในกรณีนี้ $v_{CM} = 0$ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบจุดศูนย์กลางมวล จึงเรียกว่า สปิน (spin) ของวัตถุนั้น ตัวอย่างในเรื่องนี้ได้แก่ การเคลื่อนที่ของไจโรสโคป โมเมนตัมเชิงมุมประกอบด้วย 2 ส่วนคือ L_{CM} เนื่องจากการหมุนของวงล้อ และ $r_{CM} \times Mv_{CM}$ เนื่องจากการหมุนควง (precession) ของไจโรสโคป สมการ (6.59) จึงใช้สำหรับหาโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในอะตอมด้วย

ตัวอย่าง 6.28 จงหาโมเมนตัมเชิงมุมรวมของโลกเทียบกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ แกนหมุนรอบตัวเองของโลกชี้ไปยังดาวเหนือ ทำมุม 23.5° กับระนาบที่ตั้งได้ฉากกับวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ตามรูป



โมเมนตัมเชิงมุมของโลก

วิธีทำ แทนค่า $m_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg , $R_e = 6.4 \times 10^6$ m ในความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ระยะทางระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ $r_{e-g} = 1.5 \times 10^{11}$ m

$\omega_{spin} = 2\pi$ rad/day

$= 2\pi/(24 \times 60 \times 60)$ rad/s

พิจารณาว่าโลกเป็นทรงกลมตัน ดังนั้น $I_{CM} = (2/5)m_eR_e^2 = I_{spin}$

และโลกโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงกลม $M = m_e$, $r_{CM} = r_{e-s}$ และ $v_{CM} = r_{e-s}\omega_{orb}$

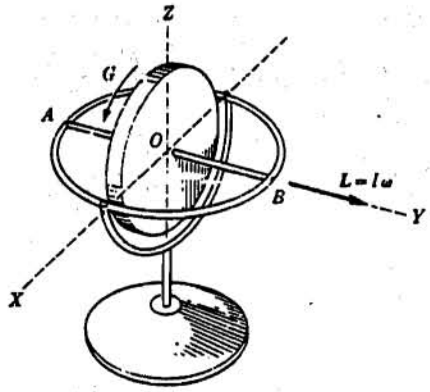
$|r_{CM} \times Mv_{CM}| = m_e r_{e-s}^2 \omega_{orb}$

จากสมการ $L = L_{CM} + r_{CM} \times Mv_{CM}$

$$L_{spin} = L_{CM} = I_{spin}\omega_{spin}$$
$$= [(2/5)m_eR_e^2]\omega_{spin}$$
$$= (2/5)(6 \times 10^{24})(6.4 \times 10^6)^2 \times [(2\pi)/(24 \times 60 \times 60)]$$
$$= 6.9 \times 10^{33} \quad kg.m^2.s^{-1}$$
$$L_{orb} = I_{orb}\omega_{orb}$$
$$= |r_{CM} \times m_ev_{CM}|$$
$$= m_er^2_{e-s}\omega_{orb}$$
$$= (6 \times 10^{24})(1.5 \times 10^{11})^2 \times [(2\pi)/(365 \times 24 \times 60 \times 60)]$$
$$= 2.7 \times 10^{40} \quad kg.m^2.s^{-1}$$
$$L_{total} = L_{spin} + L_{orb}$$

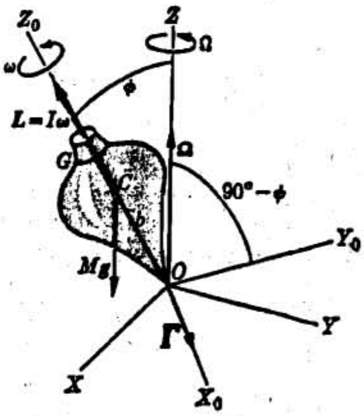
จะเห็นว่า L_{spin} มีค่าน้อยกว่า L_{orb} มากจึงตัดทิ้งไป ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของโลกรอบดวงอาทิตย์ มีค่าประมาณ 2.7×10^{40} $kg.m^2.s^{-1}$ ตั้งได้ฉากกับระนาบของวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์

6.3.5 การเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป ไจโรสโคป (gyroscope) ประกอบด้วยล้อหมุนซึ่งติดตั้งไว้บนแกนในลักษณะที่แกนจะหมุนเปลี่ยนทิศทางได้อย่างอิสระ วงล้อ G หมุนรอบแกน AB โดยที่แกน AB นี้สามารถหมุนได้รอบทั้งแกน X และแกน Z ไจโรสโคป ติดตั้งไว้ในตำแหน่งที่ไม่มีทอร์กกระทำ ดังนั้นไจโรสโคปจึงมีคุณสมบัติที่พยายามรักษาทิศทางของแกนไว้ในแนวเดิมอยู่เสมอ ไม่ว่าจะเคลื่อนย้ายไจโรสโคปไปตามที่ต่าง ๆ ดังรูปที่ 6.12

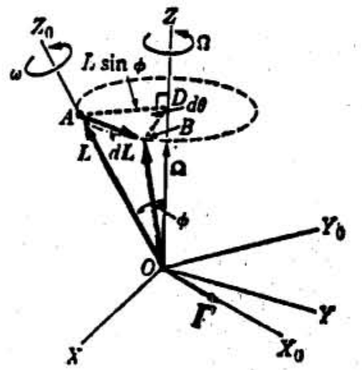


รูปที่ 6.12 ไจโรสโคป AB เป็นแกนหมุน

ในกรณีที่มีทอร์กมากระทำต่อไจโรสโคป จะมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม คือ $dL = \tau dt$ ซึ่งจะมีผลทำให้โมเมนตัมลัพธ์เปลี่ยนทิศไปจากเดิม (แต่ขนาดยังคงเดิม) หมายความว่า แกนของไจโรสโคปจะมีการเคลื่อนที่ไปรอบแกนคงที่อันหนึ่ง การเคลื่อนที่ของแกนหมุนในลักษณะเช่นนี้ เรียกว่า **พรีเซสชัน** (precession) ตัวอย่างง่าย ๆ ของพรีเซสชัน คือ การเคลื่อนที่ของลูกข่าง ดังรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 ไจโรสโคปที่ถูกทอร์กภายนอกกระทำ



รูปที่ 6.14 การหมุนควงของแกนไจโรสโคป

ลูกข่างมีความเร็วเชิงมุม ω และโมเมนตัมเชิงมุม L รอบแกนหมุนซึ่งทำมุม ϕ กับแนวดิ่ง มีแรง 2 แรง กระทำต่อลูกข่าง ดังนี้ น้ำหนักของลูกข่างมีทิศพุ่งลงจากศูนย์กลางของมวล และแรงปฏิกิริยาที่มีต่อลูกข่างมีทิศผ่านจุด O พุ่งขึ้นในแนวดิ่ง ทอร์กรอบจุด O ที่เกิดจากแรงปฏิกิริยามีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากแขนของโมเมนต์ของมันเป็นศูนย์ ดังนั้น น้ำหนัก Mg เท่านั้นที่ทำให้เกิดทอร์กรอบจุด O

$$\tau = OC \times F = b \times Mg$$

b เป็นตัวบอกระยะห่างของจุดศูนย์กลางมวลจากปลายเข็มของลูกข่าง O และ τ มีทิศตั้งฉากกับระนาบของ b และ Mg และเช่นเดียวกับ L และ b ทอร์กนี้หมุนรอบแกนดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω_p ขณะที่ลูกข่างหมุนควงไปรอบ ๆ

เมื่อมีทอร์กกระทำต่อวัตถุ โมเมนตัมเชิงของวัตถุจะเปลี่ยนไปตามสูตร คือ

$$\tau = dL/dt$$

ในช่วงเวลา Δt มีการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุม

$$\Delta L = \tau \Delta t$$

ΔL จะตั้งฉากกับ L เหมือนกับ τ ดังรูปที่ 6.14 หลังจากผ่านไป Δt ลูกข่างจะมีโมเมนตัมเชิง

มุมลัพธ์เท่ากับผลรวมของเวกเตอร์ ($L + \Delta L$) เนื่องจาก ΔL ตั้งฉากกับ L และมีขนาดเล็กมาก จึงอาจถือได้ว่าขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์มีขนาดเท่าเดิม แต่ทิศเปลี่ยนไป ดังนั้นลูกข่างจะเคลื่อนที่ไปในแบบพรีเซสชันรอบแกนดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω_p

$$\omega_p = \Delta\theta/\Delta t$$

โดยที่ $\Delta\theta \sim \Delta L/(L \sin\phi) = (\tau\Delta t)/(L \sin\phi)$

$$\therefore \quad \omega_p = \tau/(L \sin\phi)$$

$$= (Mgb \sin\phi)/(L \sin\phi)$$

$$\omega_p = (Mgb)/L \qquad \text{......6.60}$$

ข้อสังเกต : ความเร็วเชิงมุมของพรีเซสชันของลูกข่างจะไม่ขึ้นกับมุม ϕ แต่แปรผกผันกับโมเมนตัมเชิงมุม ถ้าโมเมนตัมเชิงมุมมีค่ามาก ความเร็วเชิงมุมของพรีเซสชัน จะมีค่าน้อย คือ ถ้าลูกข่างหมุนเร็ว มันจะควงได้ช้านั่นเอง

การเคลื่อนที่แบบพรีเซสชัน อาจเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\tau = \omega_p \times L$$

นั่นคือ $\tau = Mgb \sin\phi$

ตัวอย่าง 6.29 ลูกข่างลูกหนึ่งมีมวล 100 กรัม รัศมีของการส่ายเท่ากับ 2 เซนติเมตร (R_0) และจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุดห่างจากปลายแหลมเท่ากับ 3 เซนติเมตร จงหาอัตราการส่ายเมื่อให้ลูกข่างหมุน 50 รอบต่อวินาที ให้ $I = MR_0^2$

วิธีทำ จาก $\omega_p = (Mgb)/L$

$$= (Mgb)/(I\omega)$$

$$= (Mgb)/(MR_0^2\omega)$$

จะได้ $\omega_p = (gb)/(R_0^2\omega)$

เมื่อ

$M = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$

$b = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$

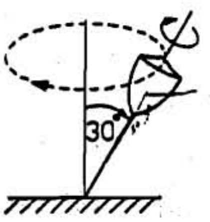
$R_0 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$

$\omega = 2\pi f = 6.28 \times 50 \text{ rad/s}$

$$\therefore \quad \omega_p = [(9.8)(0.03)]/[(0.02)^2(6.28 \times 50)]$$

$$= 2.34 \text{ rad/s}$$

ตัวอย่าง 6.30 ลูกข่างหมุนด้วยอัตราเร็ว 30 รอบต่อวินาที แกนหมุนทำมุม 30° กับแนวดิ่ง ลูกข่างมีมวล 0.5 กิโลกรัม มีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย 5×10^{-4} กิโลกรัม.ตารางเมตร มีจุดศูนย์กลางมวลห่างจากจุดหมุนของลูกข่าง 4 เซนติเมตร ถ้าลูกข่างหมุนในทิศตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านบน จงคำนวณอัตราเร็วของพรีเซสชัน และจะมีทิศอย่างไร



วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}\omega_p &= \tau/(L \sin \phi) \\ &= (Mgb \sin \phi)/(L \sin \phi) \\ &= (Mgb)/L \\ &= (0.5)(9.8)(4 \times 10^{-2})/(5 \times 10^{-4})(6.28 \times 30) \\ &= 2 \quad \text{rad/s}\end{aligned}$$

จะได้ อัตราเร็วเชิงมุมของพรีเซสชัน = 2 rab/s มีทิศทางของพรีเซสชันในทิศตามเข็มนาฬิกา

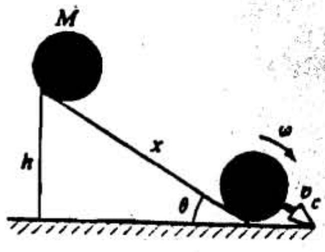
6.3.6 การกลิ้งของวัตถุ (การหมุนและการเลื่อนที่) การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งแกร็งสามารถแยกได้เป็น 2 อย่าง คือ การเลื่อนที่ (translation) และการหมุน (rotation) วัตถุที่กลิ้งจะมีทั้งการหมุนรอบตัวเองและเคลื่อนที่ด้วย เราจะพิจารณาเฉพาะการกลิ้งของวัตถุที่มีรูปเรขาคณิตง่าย ๆ และมีลักษณะสมมาตร เช่น การกลิ้งของทรงกระบอกกลม ทรงกรม วงแหวน พลังงานจลน์ของวัตถุที่กำลังกลิ้งสามารถแยกออกเป็นพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล (ซึ่งเป็นแกนสมมาตร) กับพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล เขียนเป็นสมการได้ว่า

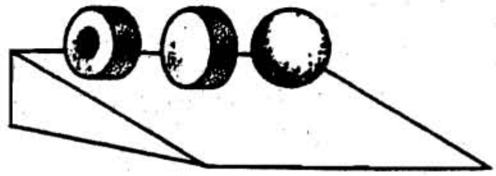
$$E_k = (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)Mv^2_{CM} \qquad \text{......6.61}$$

ถ้าวัตถุกลมมีรัศมี R กลิ้งไปตามพื้นโดยไม่มีการไถล (sliding) จะได้ $\omega = v_{CM}/R$

$$\begin{aligned}\therefore \quad E_k &= (1/2)I_{CM}(v^2_{CM}/R^2)+(1/2)Mv^2_{CM} \\ &= (1/2)(I_{CM}/R^2 + M)v^2_{CM}\end{aligned}$$

นอกจากนี้ควรจะสังเกตว่า วัตถุสามารถจะกลิ้งอย่างเดียวโดยไม่มีการเลื่อนไถลบนผิวพื้นใด ๆ โดยมีความเร่งได้ ต่อเมื่อผิวพื้นนั้นจะต้องมีความเสียดทานพอที่จะทำให้วัตถุหมุนได้





รูปที่ 6.15 ก. วัตถุกลมกลิ้งลงตามระนาบเอียง พลังงานมีค่าคงตัว ถ้าไม่มีการลื่นไถล
ข. วัตถุกลมกลิ้งตามระนาบเอียง ได้แก่ วงแหวน ทรงกระบอก และทรงกลม

ตามรูปที่ 6.15 (ก) วัตถุกลมปล่อยให้กลิ้งลงมาตามระนาบเอียงจากระดับความสูง h โดยไม่มีการลื่นไถล โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงาน

$$E_{k,\,bottom} = E_{p,\,top}$$

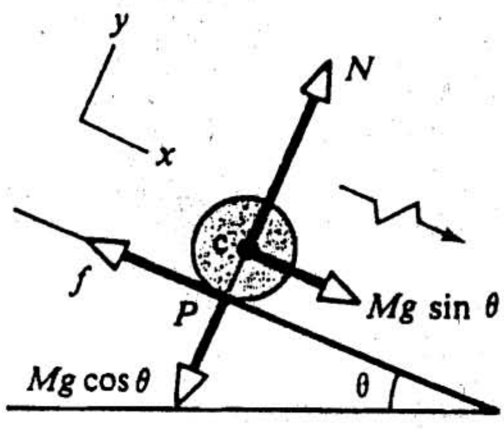
$$(1/2)(I_{CM}/R^2 + M)v^2_{CM} = Mgh$$

$$\therefore \quad v_{CM} = [(2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2} \qquad ......6.62$$

ส่วนรูปที่ 6.15 (ข) เป็นวัตถุกลม ซึ่งหมายถึง ทรงกลม ทรงกระบอกกลม และวงแหวน

ตัวอย่าง 6.31 ทรงกลมตันกลิ้งลงตามพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ กับพื้นราบ โดยไม่ลื่นไถล (ตามรูป) ให้หาความเร็วและความเร่งเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลที่ปลายล่างของระนาบเอียง โดย ก. วิธีของพลังงาน ข. วิธีทางพลศาสตร์

วิธีทำ



ก. โดยวิธีของพลังงาน

จากรูป I_{CM} (ทรงกลม) $= (2/5)MR^2$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ h จะได้

$$h = x \sin\theta$$

$$v^2_{CM} = 2a_{CM}x$$

$$\therefore \quad a_{CM} = v^2_{CM}/2x$$

$$\because \quad v_{CM} = [(2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2}$$

แทนค่า h จะได้ $v_{CM} = [(2gx\sin\theta)/\{1 + (2/5)(MR^2/MR^2)\}]^{1/2}$

$$= [(10/7)gx\sin\theta]^{1/2}$$

$$a_{CM} = [(10/7)gx\sin\theta]/(2x)$$

$$= (5/7)g\sin\theta$$

ข. โดยวิธีทางพลศาสตร์

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_{CM} \qquad \text{........(1)}$$

$$\Sigma F_y = N - Mg\cos\theta = 0 \qquad \text{........(2)}$$

สมการของทอร์ก $\tau = fR = I_{CM}\alpha$

$$\alpha = a_{CM}/R$$

$$fR = I_{CM}\alpha$$

$$f = (I_{CM}/R).(a_{CM}/R)$$

$$= [\{(2/5)MR^2\}/R^2].a_{CM}$$

$$f = (2/5)Ma_{CM}$$

แทนค่า f ใน (1) จะได้

$$Mg\sin\theta - (2/5)Ma_{CM} = Ma_{CM}$$

$$Mg\sin\theta = (7/5)Ma_{CM}$$

$$\therefore \quad a_{CM} = (5/7)g\sin\theta$$

ตัวอย่าง 6.32 ทรงกระบอกตันและวงแหวน มีมวลและรัศมีเท่ากัน คือ M และ R ตามลำดับ กลิ้งลงตามระนาบเอียงไม่มีการลื่นไถล จงหาความเร็วเชิงเส้นและความเร่งเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสองนี้ที่ปลายล่างของระนาบเอียง

วิธีทำ ให้ C แทนทรงกระบอกตัน และ r แทนวงแหวน

$$I_{CM,C} = I_C = (1/2)MR^2$$

$$I_{CM,r} = I_r = MR^2$$

$$v_{CM,C} = v_C \quad , \quad v_{CM,r} = v_r$$

$$a_{CM,C} = a_C \quad , \quad a_{CM,r} = a_r$$

x = ระยะทางเคลื่อนที่ตามระนาบ

θ = มุมที่ระนาบทำกับพื้นราบ

$$h = x\sin\theta$$

จากสมการ $v_{CM} = [2gh)/(1 + I_{CM}/MR^2]^{1/2}$

และ $a_{CM} = v^2{}_{CM}/2x$

แทนค่า : ทรงกระบอก จะได้

$$v_c = [(2gx\sin\theta)/\{(1 + (1/2)(MR^2/MR^2)\}]^{1/2}$$

$$= [(4/3)gx\sin\theta\}^{1/2}$$

$$a_c = [(4/3)gx\sin\theta]/(2x)$$

$$= (2/3)g\sin\theta$$

วงแหวน จะได้

$$v_r = [2gx\sin\theta)(1 + MR^2/MR^2)]^{1/2}$$

$$= (gx\sin\theta)^{1/2}$$

$$a_c = (gx\sin\theta)/(2x)$$

$$= (1/2)g\sin\theta$$

จากตัวอย่างที่ 6.31 และ 6.32 จะเห็นว่า ค่าของความเร็วและความเร่งของศูนย์กลางมวล ไม่ได้ขึ้นกับรัศมีและมวล หมายความว่าถ้าวัตถุมีรูปทรงเหมือนกัน ไม่ว่ารัศมีหรือมวลจะเท่ากันหรือไม่ก็ตาม ถ้าปล่อยให้กลิ้งลงมาตามระนาบเอียงจากระดับที่เท่ากัน ต่างก็จะกลิ้งลงถึงปลายของระนาบพร้อมกัน

ในการเปรียบเทียบวัตถุรูปทรงเรขาคณิต 3 อย่าง คือ ทรงกระบอกกลม ทรงกลม และวงแหวน ดังรูปที่ 6.14 (ข) จะพบว่า ทรงกลมเคลื่อนที่ได้เร็วที่สุด (I_{CM} มีค่าน้อยที่สุด) และวงแหวนกลิ้งได้ช้าที่สุด (I_{CM} มีค่ามากที่สุด)

6.3.7 หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม จากนิยามของทอร์ก

$$\tau = r \times F = dL/dt$$

ซึ่ง τ คือ ทอร์กภายนอกที่กระทำกับอนุภาคของระบบ

ถ้า $\tau = 0$ เราได้ $dL/dt = 0$ ด้วย ดังนั้น **L** มีค่าคงตัว เราได้หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม ซึ่งกล่าวว่า เมื่อทอร์กภายนอกกระทำกับระบบอนุภาคเป็นศูนย์ เวกเตอร์รวมของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบต้องมีค่าคงตัว

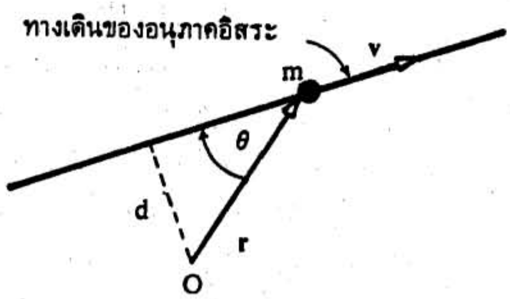
$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I_i\omega_i &= I_f\omega_f \end{aligned}\right\} \quad ......6.63$$

เมื่อ L_i คือ โมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น และ L_f คือ โมเมนตัมเชิงมุมสุดท้าย

$$dL/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

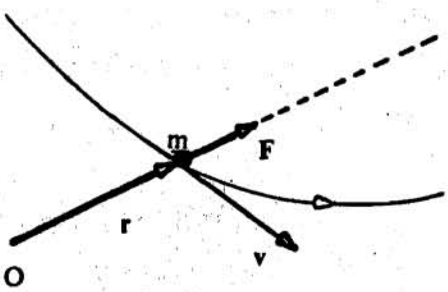
L จะมีค่าคงตัวเมื่อทางขวามือของสมการเป็นศูนย์ จะเป็นไปได้ใน 2 กรณีคือ เมื่อ $\mathbf{F} = 0$ และเมื่อ **r** ขนานกับ **F**

ในกรณีแรก เมื่อ $\mathbf{F} = 0$ คือไม่มีแรงกระทำหรือแรงลัพธ์ที่กระทำกับอนุภาคมวล m เป็นศูนย์ อนุภาคนี้จะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ v ตามกฎข้อ 1 ของนิวตัน ตามรูปที่ 6.16 และ $L = mvd$ เป็นปริมาณคงที่



รูปที่ 6.16 โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่เคลื่อนที่โดยอิสระ

ในกรณีที่สอง เมื่อ **r** ขนานกับ **F** นั่นคือ ขณะที่แรง **F** กระทำ จะมีทิศผ่านจุดตรึง ตัวอย่างอันหนึ่งคือ แรงผ่านศูนย์กลาง ถ้าให้จุดศูนย์กลางแรงเป็นจุดตรึง แรงนี้จะมีทิศผ่านจุดตรึงเสมอ ไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม ดังรูปที่ 6.17



รูปที่ 6.17 การเคลื่อนที่ของอนุภาคเนื่องจากแรงผ่านศูนย์กลาง

หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมมีความสำคัญมาก เพราะในธรรมชาติเราจะพบการเคลื่อนที่ในลักษณะที่แรงกระทำเป็นแรงผ่านศูนย์กลาง เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์เนื่องจากแรงที่ดวงอาทิตย์ดึงดูดโลกมีทิศสู่ศูนย์กลางของดวงอาทิตย์ ในกรณีนี้ถ้าให้ดวงอาทิตย์เป็นจุดอ้างอิง โมเมนตัมเชิงมุมของโลกที่โคจรรอบดวงอาทิตย์จะคงที่ หรืออะตอมของไฮโดรเจนซึ่งมีอิเล็กตรอนวิ่งรอบนิวเคลียส โดยมีแรงที่โปรตอนในนิวเคลียสดึงดูดอิเล็กตรอน และแรงนี้มีทิศผ่านนิวเคลียส ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนซึ่งวิ่งรอบนิวเคลียสก็จะคงที่เสมอ

นักกายกรรม นักกระโดดน้ำ นักเต้นระบำ และนักสเกตน้ำแข็งได้นำหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุมมาใช้ เราจะเห็นว่าตัวเขาหมุนเร็วขึ้นเมื่อเขางอแขนขาเข้าหาตัว และตัวเขาหมุนช้าลงเวลายืดแขนออก ที่เป็นเช่นนี้เพราะ I ขึ้นกับกำลังสองของระยะห่างจากส่วนต่าง ๆ ของร่างกายไปยังแกนหมุน การยืดหรืองอแขนขาจะทำให้ค่า I เปลี่ยนไปมากหรือน้อยได้

กิจกรรม 6.3

ให้นักศึกษาสังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง I กับ ω ในการเปลี่ยนแปลงท่าทางการเต้นระบำของผู้เล่นสเกตน้ำแข็งบนลานสเกตในย่านมหาวิทยาลัยรามคำแหง

ตัวอย่าง 6.33 เด็ก 2 คน ซึ่งมีมวล 25 กิโลกรัม นั่งอยู่คนละข้างของปลายคานหมุน ซึ่งมีความยาว 2.6 เมตร และมีมวล 10 กิโลกรัม ถ้าคานนี้หมุนด้วยความเร็ว 5 รอบต่อนาทีรอบแกนดิ่ง ซึ่งผ่านกึ่งกลางของคาน

ก. ถ้าเด็กทั้งสองคนเคลื่อนที่ขยับใกล้ศูนย์กลางเข้ามา 60 เซนติเมตร อัตราเร็วเชิงมุมของคานหมุนตอนนั้นจะเป็นเท่าใด

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบหมุนนี้ จะเปลี่ยนไปเท่าใด

วิธีทำ

ก. โมเมนต์ของความเฉื่อยของระนาบ $I = I_{\text{เด็ก}} + I_{\text{คาน}}$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2(25\,\mathrm{kg})(2.6/2\mathrm{m})^2 + (1/12)(10\,\mathrm{kg})(2.6\mathrm{m})^2 \\
&= 84.5 + 5.6 \quad \mathrm{kg.m^2} \\
&= 90.1 \quad \mathrm{kg.m^2} \\
I_2 &= 2(25\,\mathrm{kg})(1.3 - 0.6\mathrm{m})^2 + 5.6\,\mathrm{kg.m^2} \\
&= 24.5 + 5.6 \quad \mathrm{kg.m^2} \\
&= 30.1 \quad \mathrm{kg.m^2}
\end{aligned}
$$

จากหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$(90.1\ \text{kg.m}^2)[2\pi \times 5)/60\ \text{rad/s}) = (30.1\ \text{kg.m}^2)(\omega_2)$$

$$\therefore \omega_2 = (90.1 \times 2\pi \times 5)/(30.1 \times 60)$$

$$= \pi/2 \quad \text{rad/s}$$

$\because$ 2π rad = 1 รอบ

$\pi/2$ rad = $\pi/2 \cdot 1/(2\pi)$

= 1/4 รอบ/วินาที

= $(1/4) \times 60$

= 15 รอบ/นาที

นั่นคือ อัตราเร็วเชิงมุมของคานหมุน = 15 รอบ/นาที

ข. พลังงานจลน์ของการหมุน คือ $E_k = (1/2)I_1\omega_1^2$

$$E_k = (1/2)I_2\omega_2^2$$

$$E_{k_1} = (1/2)(90.1\ \text{kg.m}^2)[2\pi \times 15)/60\ \text{rad/s}]^2$$

$$= 1.25\pi^2 \quad \text{J}$$

$$E_{k_2} = (1/2)(30.1\ \text{kg.m}^2)(\pi/2\ \text{rad/s})^2$$

$$= 3.77\,\pi \quad \text{J}$$

$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_f}$$

$$= (3.77 - 1.25)\pi^2$$

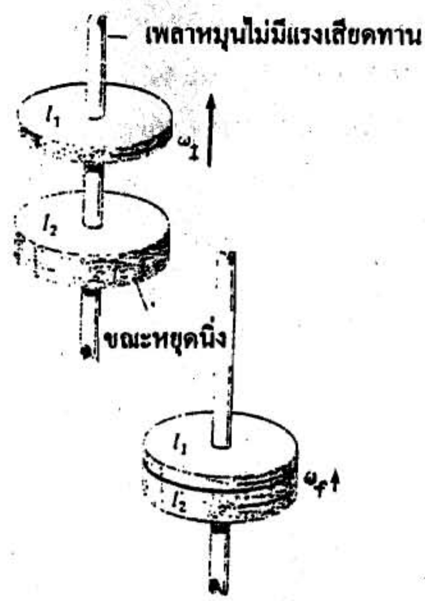
$$= 2.52\pi^2 \quad \text{J}$$

$\therefore$ พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบที่เปลี่ยนไป = 24.8 J

ตัวอย่าง 6.34 จานกลมมีโมเมนต์ของความเฉื่อย I_1 กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_i รอบเพลาที่ไม่มีความเสียดทาน แล้วปล่อยให้ตกลงไปซ้อนกับจานกลมอีกอันหนึ่งที่มีโมเมนต์ของความเฉื่อย I_2 ซึ่งเดิมอยู่นิ่ง ต่อจากนั้นจานกลมทั้งสองหมุนไปด้วยกัน ดังรูป จงหา

ก. โมเมนตัมเชิงมุมภายหลังปล่อยให้จานซ้อนกันเทียบกับโมเมนตัมเชิงมุมก่อนปล่อย

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนภายหลังปล่อยให้จานซ้อนกันเทียบกับพลังงานจลน์ของการหมุนก่อนปล่อย



วิธีทำ

ก. จากสมการ

$$L_i = L_f$$
$$L = I\omega$$
$$E_k = (1/2)I\omega^2$$
$$I_1\omega_i = I_1\omega_f + I_2\omega_f$$
$$= (I_1 + I_2)\omega_f$$
$$\omega_r = [I_1/(I_1 + I_2)]\omega_i$$

ข. พลังงานจลน์ของการหมุนก่อนปล่อยให้จานทั้งสองซ้อนกัน คือ

$$E_{k,i} = (1/2)I_1\omega_i^2$$

พลังงานจลน์หลังปล่อยให้จานทั้งสองซ้อนกัน คือ

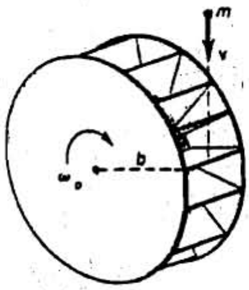
$$E_{k,f} = (1/2)(I_1 + I_2)\omega_f^2$$

จะเห็นว่า $E_{k,i} \neq E_{k,f}$

จาก $\omega_f^2 = [I_1^2/(I_1 + I_2)^2].\omega_i^2$

$$\therefore \quad (E_{k,i} - E_{k,f})\, E_{k,i} = [(1/2)I_1.\omega_i^2 - (1/2)(I_1 + I_2)\omega_f^2]/[(1/2)I_1\omega_i^2]$$
$$= \frac{[(1/2)i_1.\omega_i^2 - (1/2)(I_1 + I_2)\{I_1^2/(I_1 + I_2)^2\}.\omega_i^2]}{(1/2)I_1\omega_i^2}$$
$$= I_1/(I_1 + I_2)$$

ตัวอย่าง 6.35 หยดน้ำมวล m อัตราเร็ว v ตกลงสู่ใบของกังหันน้ำ ซึ่งมีโมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากับ I หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_0 จงหาความเร็วเชิงมุมหลังจากหยดน้ำกระทบใบกังหัน สมมติว่าติดกับใบกังหันหลังจากกระทบ ดังรูป



วิธีทำ

จากสมการ
$$L_i = L_f$$
$$v' = \omega b$$
$$L_i = I\omega_0 \text{ (กังหัน)} + mvb \text{ (หยดน้ำ)}$$
$$L_f = I\omega \text{ (กังหัน)} + mvb \text{ (หยดน้ำ)}$$
$$\therefore \quad I\omega_0 + mvb = I\omega + mv'b$$
$$= I\omega + m\omega b^2 = (I + mb^2)\omega$$
$$\omega = (I\omega_0 + mvb)/(I + mb^2)$$

ถ้าอัตราเร็วเชิงเส้นที่ขอบของกังหัน $\omega_0 b$ มีค่าเท่ากับอัตราเร็วเชิงเส้น v อัตราเร็วของกังหัน จะมีค่าคงเดิม

$$\omega = [I\omega_0 + mb(\omega_0 b)]/(I + mb^2)$$
$$= \frac{(I\omega_0 + m\omega_0 b^2)}{I + mb^2}$$
$$= \frac{[(I + mb^2)\omega_0]}{I + mb^2}$$
$$= \omega_0$$

6.4 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

เมื่อแรงหลายแรงกระทำต่อวัตถุแข็งเกร็ง เราต้องพิจารณาการสมดุลทั้งในแง่การเคลื่อนที่เชิงเส้นและการเคลื่อนที่เชิงมุม วัตถุนั้นจะอยู่ในสมดุลได้ อาจนิยามว่า 1. ความเร่ง (a_{CM}) ของการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นต้องเป็นศูนย์ 2. ความเร่งเชิงมุม (α) รอบ

แกนหนึ่งแกนใดของวัตถุนั้นต้องเป็นศูนย์ ในกรณีเช่นนี้ วัตถุอาจไม่อยู่นิ่งก็ได้ แต่วัตถุนั้นอาจมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (v_{CM}) และวัตถุนั้นอาจหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ (ω)

สำหรับกรณีที่วัตถุหยุดนิ่ง $v_{CM} = 0$ และไม่มีการหมุน $\omega = 0$ เรียกว่า วัตถุอยู่ในสมดุลสถิต (static equilibrium)

ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็ง มีเงื่อนไขของการสมดุลอยู่ 2 ประการ คือ

1. ผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุต้องเท่ากับศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F &= 0 \\ F_1 + F_1 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.64$$

สำหรับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งของวัตถุซึ่งมีมวล m จะเป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ $F = ma$ เมื่อ F เป็นผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุนั้น และ a คือความเร่งของการเคลื่อนที่ในสภาพที่เรียกว่าสมดุลนั้น $a = 0$ ดังนั้นเงื่อนไขประการแรกของสมดุลก็คือผลรวมของเวกเตอร์ของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุที่อยู่ในสมดุล จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ (6.64)

2. ผลรวมของเวกเตอร์ของทอร์กทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุเทียบกับแกนใด ๆ ต้องเท่ากับศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \tau &= 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.65$$

สำหรับการหมุนของวัตถุที่มีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย I จะเป็นไปตามสมการของการหมุน $\tau = I\alpha$ เมื่อ τ เป็นผลรวมของเวกเตอร์ของทอร์กทั้งหลายที่กระทำต่อวัตถุและ α คือความเร่งเชิงมุม $=0$

เงื่อนไขทั้ง 2 ประการของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง เขียนในรูปของสมการ จะได้ว่า

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma \tau_x = 0 & \Sigma \tau_y = 0 & \Sigma \tau_z = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots 6.66$$

สมการ (6.66) เรียกว่า **สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง**

ในกรณีของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งเนื่องจากแรงทั้งหลายที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน หรือในแบบ 2 มิติ สมการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง อาจจะเขียนได้เพียงว่า

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \quad \text{และ} \quad \Sigma \tau_z = 0 \qquad \ldots\ldots 6.67$$

หรือเขียนเป็นเงื่อนไขรวมเป็น 3 เงื่อนไข ดังนี้

1. ผลรวมของแรงขึ้นทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของแรงลงทั้งหลาย เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\Sigma F_{up} = \Sigma F_{down} \qquad ......6.68$$

2. ผลรวมของแรงทางขวาทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของแรงทางซ้ายทั้งหลาย เขียนได้เป็น

$$\Sigma F_{right} = \Sigma F_{left} \qquad ......6.69$$

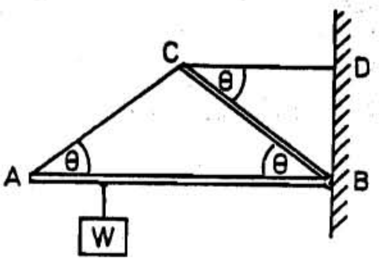
3. ผลรวมของทอร์กตามเข็มนาฬิกาทั้งหลายต้องเท่ากับผลรวมของทอร์กทวนเข็มนาฬิกาทั้งหลาย

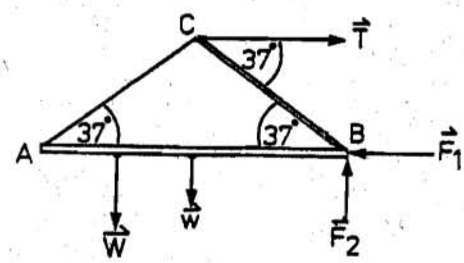
$$\Sigma \tau_{CW} = \Sigma \tau_{CCW} \qquad ......6.70$$

(CW = clockwise = ตามเข็มนาฬิกา, CCW = counter clockwise = ทวนเข็มนาฬิกา)

ตัวอย่าง 6.36 โครงสร้างรับน้ำหนักซึ่งประกอบด้วยคาน AB ขนาดสม่ำเสมอ ยาว 4 เมตร มีมวล 15 กิโลกรัม มีเชือก AC, CD และไม้ค้ำยัน BC ซึ่งมีน้ำหนักเบาประกอบกันเป็นโครงสร้างโดยตรึงไว้กับกำแพงด้วยบานพับที่ปลายคาน B และโยงไว้ด้วยเส้นเชือก CD ในลักษณะทำมุม θ เท่ากับ 37° ดังรูป ถ้ามีหีบน้ำหนักซึ่งมีมวล 90 กิโลกรัม แขวนไว้ ห่างจากปลายคาน A เป็นระยะ 1 เมตร จงหา

ก. ความตึงในเส้นเชือก CD ข. แรงที่บานพับกระทำต่อปลายคาน B (ใช้ g = 10 เมตร/วินาที²)





วิธีทำ

ก. โครงสร้างรับน้ำหนักนี้ซึ่งเป็นวัตถุแข็งเกร็งอยู่ในสมดุล โดยมีแรงต่าง ๆ กระทำต่อโครงสร้าง ดังนี้

น้ำหนักคาน w หีบน้ำหนัก W แรงดึงในเส้นเชือก CD คือ T

แรง F_1 และ F_2 เป็นองค์ประกอบของแรงในแนวระดับและแนวดิ่งของแรงที่บานพับกระทำต่อปลายคาน B

จากสมการของสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

$$\Sigma\tau_B = 0$$

$$T(DB)-W(3m)-w(2m) = 0$$

แทนค่า DB = 2 tan 37° = 1.5 m จะได้

$$(1.5\text{ m})T = W(3\text{ m}) + w(2\text{ m})$$

$$= (90 \times 10\text{ N})(3\text{ m}) + (15 \times 10\text{ N})(2\text{ m})$$

$$= 2700 + 300$$

∴ แรงดึงในเส้นเชือก CD $T = (3000\text{ N.m})1.5\text{ m}$

$$= 2000\text{ N}$$

ข. เนื่องจาก $\Sigma F_x = 0$

$$T - F_1 = 0$$

$$\therefore \quad F_1 = T = 2000 \quad \text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_2 - W - w = 0$$

$$F_2 = W + w$$

$$= 900 + 1\ 50$$

$$= 1050 \quad \text{N}$$

ขนาดของแรงลัพธ์ที่บานพับกระทำต่อปลายคาน คือ F

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$= \sqrt{(2000)^2 + (1050)^2}$$

$$= 2259 \quad \text{N}$$

กระทำในทิศทางที่ $\tan\theta = F_2/F_1$

$$= 1050/2000$$

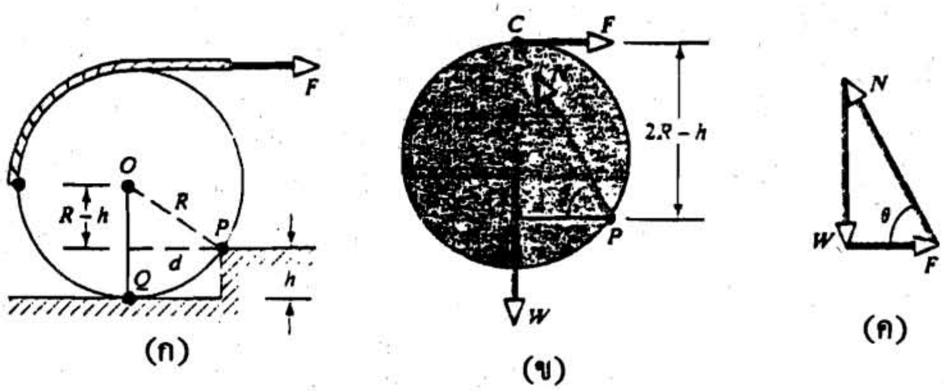
$$= 0.5$$

หรือทำมุมประมาณ 27° กับแนวแกน AB

ตัวอย่าง 6.37 ทรงกระบอกกลมท่อนหนึ่งหนัก W = 500 นิวตัน รัศมี R = 80 เซนติเมตร ถูกดึงขึ้นบันไดซึ่งสูง h = 30 เซนติเมตร โดยมีเชือกพันรอบทรงกระบอกแล้วดึงในแนวระดับตามรูป (a) สมมติว่าทรงกระบอกไม่ลื่นไถลในการเคลื่อนที่ขึ้นบันได จงหา

ก. แรงน้อยที่สุดที่จะดึงทรงกระบอกขึ้นบันไดได้

ข. แรงปฏิกิริยา N (ทั้งขนาดและทิศทาง) ที่ขอบบันไดทำกับทรงกระบอก



วิธีทำ เมื่อทรงกระบอกพร้อมที่จะเคลื่อนที่ขึ้น แรงปฏิกิริยาที่ Q จะเป็นศูนย์ จึงเหลือเพียง 3 แรงที่กระทำกับทรงกระบอก คือ F, W และ N ตามรูป (ข) เขียนเป็นแผนภาพของแรงได้ตามรูป (ค)

เลือกจุด P เป็นจุดหมุน จากรูป (ก)

ระยะทางในแนวตั้งฉากจากจุดหมุนถึงแนวที่แรงกระทำ หาได้ดังนี้

$$r_w = d$$

$$= \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$$

$$= \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$r_f = 2R - h$$

สมมติให้ θ เป็นมุมที่ N ทำกับแนวระดับ จากรูป (ข)

สมการที่ใช้ $\Sigma\tau_{ccw} = \Sigma\tau_{cw}$

$$Wr_w = Fr_f \quad \text{........(1)}$$

$$\Sigma F_{right} = \Sigma F_{left}$$

$$F = N\cos\theta \quad \text{........(2)}$$

$$\Sigma F_{up} = \Sigma F_{down}$$

$$N\sin\theta = W \quad \text{........(3)}$$

จาก (1) $F = W(r_w/r_f)$

$$= [W\sqrt{2Rh - h^2}]/(2R - h)$$

จาก (3) และ (2)

$$\tan\theta = W/F$$

$$\theta = \tan(W/F)$$

$$N = (F^2 + W^2)^{1/2}$$

$$= W/\sin\theta$$

$$= F/\cos\theta$$

แทนค่าต่าง ๆ จะได้

$$F = \frac{(500\ N)\sqrt{2(0.8m \times 0.3\ m) - (0.3\ m)^2}}{2(0.8\ m) - (0.3\ m)}$$

ก.

$$F = 385\ N$$

$$\theta = \tan(500/385)$$

$$= 52.4^\circ$$

ข.

$$N = (385^2 + 500^2)^{1/2}$$

$$= 631\ N$$

กิจกรรม 6.4

ให้นักศึกษาพิจารณาตัวอย่าง 6.36 และ 6.37 ว่าเป็นไปตามเงื่อนไขการสมดุลของวัตถุทั้ง 3 ประการหรือไม่

สรุป

ปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการหมุน เช่น มุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม โมเมนต์ความเฉื่อย ทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมมีความสัมพันธ์กันเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น โดยแรงสู่ศูนย์กลางและแรงผ่านศูนย์กลางเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบเส้นโค้งและแบบวงโคจร ซึ่งเป็นไปตามหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

แบบฝึกหัดที่ 6

6.1 ก. ทรงกระบอกอันหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.5 เมตร หมุนในอัตรา 750 รอบต่อนาที จงหาความเร็วเชิงเส้นของจุดที่ผิวทรงกระบอก

ข. ถ้าทรงกระบอกอันหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1/6 เมตร หมุนโดยมีความเร็วเชิงเส้นที่ผิว 2 เมตรต่อวินาที ทรงกระบอกนั้นหมุนในอัตรากี่รอบต่อนาที

ตอบ ก. 19.6 เมตรต่อวินาที ข. 229 รอบต่อนาที

6.2 ล้ออันหนึ่งใช้เวลา 3 วินาที ในการหมุนไปเป็นมุมทั้งหมด 234 เรเดียน ความเร็วเชิงมุมในตอนท้ายเท่ากับ 108 เรเดียนต่อวินาที ให้หาค่าของความเร่งเชิงมุม

ตอบ 20 เรเดียนต่อวินาที^{2}

6.3 ความเร็วเชิงมุมของล้ออันหนึ่งลดลงในอัตราคงตัวจาก 1,000 รอบต่อนาที ลงมาเป็น 400 รอบต่อนาที ในเวลา 5 วินาที

ก. จงหาความเร่งเชิงมุมและจำนวนรอบที่หมุนได้ในช่วงเวลา 5 วินาทีดังกล่าวนั้น

ข. ล้อนั้นจะต้องใช้เวลาต่อไปอีกนานเท่าใด จึงจะหยุด

ตอบ ก. -12.6 เรเดียนต่อวินาที^{2} ข. 58.3 รอบ, 3.3 วินาที

6.4 รถนั่งมวล 1,000 กิโลกรัมเริ่มลื่นไถลเมื่อขับด้วยความเร็ว 108 กิโลเมตรต่อชั่วโมงบริเวณทางโค้งซึ่งมีรัศมีแห่งความโค้ง 150 เมตร จงหาแรงสู่ศูนย์กลาง ความเร่งสู่ศูนย์กลาง สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างยางกับถนน

ตอบ 6,000 นิวตัน , 6 เมตรต่อวินาที^{2} , 0.61

6.5 ทางโค้งซึ่งมีรัศมีแห่งความโค้ง 220 เมตร สร้างลาดเททำมุม 18 องศา รถยนต์จะต้องวิ่งผ่านทางโค้งนี้ด้วยอัตราเร็วเท่าใด จึงจะปลอดภัยในวันที่ถนนลื่นมากจนไม่มีความเสียดทาน

ตอบ 26.5 เมตรต่อวินาที

6.6 มวลของลูกตุ้มเท่ากับ 0.6 กิโลกรัมแขวนจากเพดานของรถตู้ ถ้ารถตู้วิ่งด้วยอัตราเร็ว 35 เมตรต่อวินาที ผ่านทางโค้งซึ่งมีรัศมี 245 เมตร จงหามุมที่สายลูกตุ้มทำกับแนวดิ่ง ถ้าลูกตุ้มอยู่นิ่งสัมพัทธ์กับรถตู้ แรงตึงในสายลูกตุ้มเป็นเท่าใด

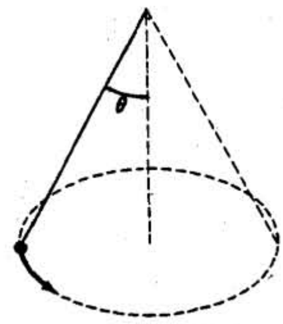
ตอบ 27 องศา , 6.6 นิวตัน

6.7 จงหาความเร่งสู่ศูนย์กลางของวัตถุที่อยู่ที่เส้นศูนย์สูตรอันเนื่องมาจากการหมุนของโลก ถ้าคิดการหมุนของโลกด้วย น้ำหนักของชายคนหนึ่งมวล 70 กิโลกรัม จะเปลี่ยนไปเท่าไร

ตอบ 0.0339 m/s^2 ; 2.37 N

6.8 จงหาอัตราเร็วของลูกตุ้มในรูป ซึ่งมีมวล 2 กิโลกรัมจะแกว่งเป็นวงกลมเมื่อสายลูกตุ้มยาว 1.5 เมตร และมุม θ เท่ากับ 30° จงหาแรงตึงในสายลูกตุ้ม

ตอบ 2.06 m/s ; 22.6 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.8

6.9 มีโครงการส่งสถานีอวกาศลอยฟ้าขึ้นโคจรรอบโลกเป็นวงกลม ด้วยความสูงเท่ากับ 1/3 ของรัศมีของโลก โดยวัดความสูงจากผิวโลก

ก. ที่ความสูงนี้ความเร่งแห่งความโน้มถ่วงมีค่าเท่าไร

ข. จงหาอัตราเร็วของสถานีอวกาศ

ค. จงหาคาบของการโคจร

ตอบ ก. 5.51 m/s^2 ; ข. 6,840 m/s ; ค. 7,800 s

6.10 จงหารัศมีวงโคจรของดาวเทียม ซึ่งโคจรรอบโลกหนึ่งรอบเป็นเวลา 1 วัน (sidereal day) ซึ่งเท่ากับ 86,164 วินาที อัตราเร็วของดาวเทียมเท่ากับเท่าไร

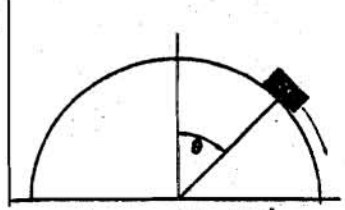
ตอบ 4.22×10^7 m ; 3.08 km/s

6.11 ก. จงหาความเร็วต่ำสุดของลูกปืนที่นักบินอวกาศยิงที่ผิวของดวงจันทร์ แล้วหลุดพ้นจากดวงจันทร์ได้

ข. ถ้าความเร็วของลูกปืนเท่ากับ 3/4 ของความเร็วหลุดพ้น ลูกปืนจะขึ้นได้สูงเท่าใด

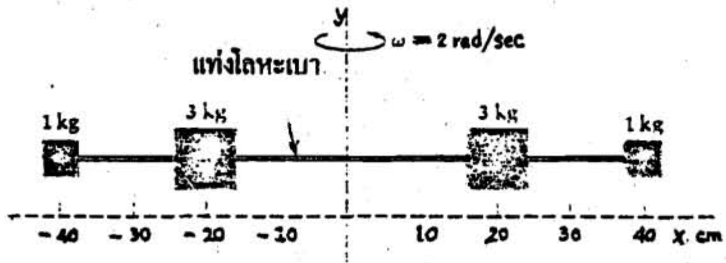
ตอบ ก. 2,380 m/s ; ข. 2,230 km

6.12 มวล 100 กรัม ในรูป ลื่นไถลตามส่วนโค้งของครึ่งทรงกลมซึ่งเรียบ มีรัศมี 0.25 เมตร โดยเริ่มเคลื่อนที่จากจุดสูงสุดด้วยความเร็วมีค่าน้อย ๆ จงหาแรงที่กระทำกับมวลในพจน์ของมุม θ และหามุมที่มวลนี้หลุดจากผิวทรงกลม
ตอบ 0.98 (3 cos θ -2) N ; 48.2°



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.12

6.13 มวล 4 มวล ในรูป ถูกต่อด้วยแท่งโลหะเบามาก จนไม่ต้องนำโมเมนต์ความเฉื่อยของมันมาคิด ระบบหมุนรอบแกน y ด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียนต่อวินาที



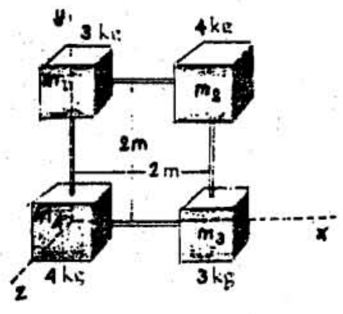
รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.13

ก. จงหาอัตราเร็วของแต่ละมวล และใช้ค่านั้นหาพลังงานจลน์ $E_k = (1/2)\sum_i m_i v_i^2$

ข. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกน y และคำนวณพลังงานจลน์จาก $E_k = (1/2)I\omega^2$
ตอบ ก. 40 cm/s สำหรับมวล 3 kg; 80 cm/s สำหรับมวล 1 kg; 1.12 J;
ข. I = 0.56 kg-m², 1.12 J

6.14 ใช้ทฤษฎีบทแกนขนานหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของมวล 4 มวล ในรูป รอบแกนที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของมวลผ่านศูนย์กลางมวล และตรวจสอบคำตอบโดยวิธีคำนวณโดยตรง
ตอบ 28 kg-m²

รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.14

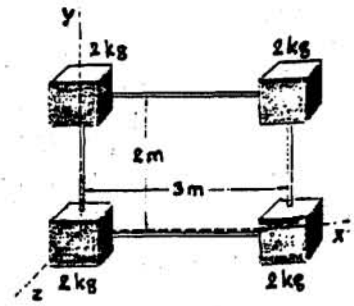


6.15 มวล 2 กิโลกรัม 4 ก้อน อยู่ที่มุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป

ก. จงหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของระบบรอบแกนที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของมวลผ่านมวลใดมวลหนึ่ง

ข. ถ้าระบบหมุนรอบแกนนี้มีพลังงานจลน์ 184 J จงหาจำนวนรอบของการหมุนต่อนาที

ตอบ ก. 52 kg-m² ข. 25.4 rev/min



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.15 และ 6.16

6.16 จากข้อ 15

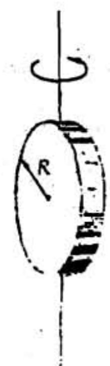
ก. ใช้ทฤษฎีบทแกนขนานหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกน Z ผ่านศูนย์กลางมวล

ข. ให้ x′ และ y′ เป็นแกนในระนาบของรูป ผ่านศูนย์กลางมวลและขนานกับด้านของสี่เหลี่ยม จงหา $I_{x'}$ และ $I_{y'}$ ใช้สมการ 6.5 ตรวจคำตอบในข้อ ก.

ตอบ ก. 26 kg-m² ; ข. $I_{x'}$ = 18 kg-m², $I_{y'}$ = 8 kg-m²

6.17 ใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉากและตาราง หาโมเมนต์ของความเฉื่อยของจานกลมรอบแกนที่กำหนดให้ ดังรูป

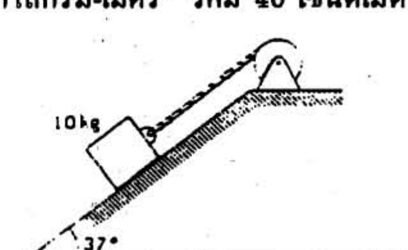
ตอบ (1/4)MR²



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.17

6.18 โมเมนต์ของความเฉื่อยของล้อในรูป มีค่าเท่ากับ 8 กิโลกรัม-เมตร² รัศมี 40 เซนติเมตร จงหาอัตราเร่งเชิงมุมของล้อที่เกิดจากมวล 10 กิโลกรัม ถ้าแรงเสียดทานระหว่างระนาบเอียงกับมวลเท่ากับ 30 นิวตัน

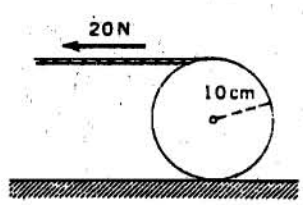
ตอบ 1.20 rad/s²



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.18

6.19 เชือกพันรอบทรงกระบอกซึ่งมีมวล 4 กิโลกรัม และโมเมนต์ของความเฉื่อย 0.50 กิโลกรัม-เมตร² เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางทรงกระบอก ดังรูป ถ้าการกลิ้งของทรงกระบอกไม่ลื่นไถล จงหาความเร่งของศูนย์กลางมวล

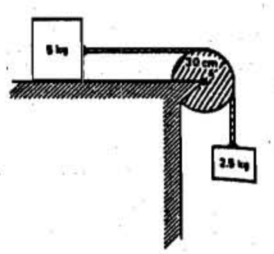
ตอบ 0.74 m/s^2



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.19

6.20 แรงเสียดทานระหว่างแท่งสี่เหลี่ยมกับโต๊ะเท่ากับ 20 นิวตัน และโมเมนต์ความเฉื่อยของรอกเท่ากับ 4 กิโลกรัม-เมตร² ดังรูป จงหาเวลาที่มวล 2.5 กิโลกรัมเคลื่อนที่ลงได้ 60 เซนติเมตร หลังปล่อย

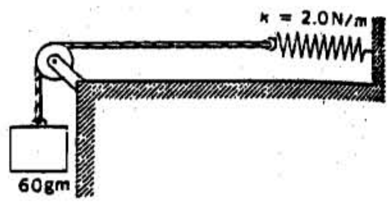
ตอบ 3.71 s



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.20

6.21 มวล 60 กรัม แขวนจากเชือกเบาคล้องผ่านรอกไปต่อกับสปริง ซึ่งมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 0.20 นิวตัน/เมตร ดังรูป โมเมนต์ของความเฉื่อยของรอกเท่ากับ 0.50 กิโลกรัม-เมตร² รัศมีของรอกเท่ากับ 30 เซนติเมตร จงหาอัตราเร็วของมวล 60 กรัม หลังจากตกลงมา 40 เซนติเมตร โดยเริ่มจากหยุดนิ่ง สปริงไม่ยืด

ตอบ 16 cm/s



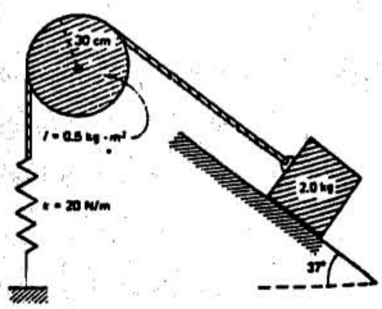
รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.21

6.22 จากรูป แรงเสียดทานเท่ากับศูนย์ มวล 2.0 กิโลกรัม ถูกปล่อยจากตำแหน่งที่สปริงไม่ยืด

ก. มวล 2 กิโลกรัมจะเคลื่อนตามระนาบเอียงไกลที่สุดได้ระยะทางเท่าไร

ขณะที่มวล 2 กิโลกรัม มีอัตราเร็วสูงสุดมวลเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร และอัตราเร็วสูงสุดนั้นเท่ากับเท่าใด

ตอบ ก. 1.18 m; ข. 0.588 m, 0.96 m/s



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.22

6.23 อนุภาคมวล m มีความเร็ว $-v_0\hat{j}$ มีตำแหน่ง (-d, 0) และเคลื่อนที่ต่อไปด้วยความเร่งแห่งความโน้มถ่วงของโลก ดังรูป

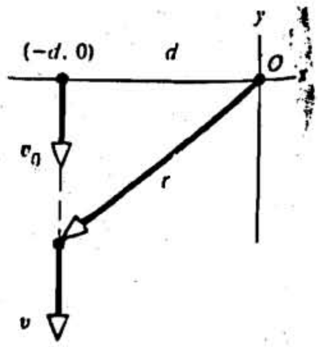
ก. จงหาโมเมนตัมเชิงมุม L เป็นฟังก์ชันของเวลาเทียบกับจุดกำเนิด

ข. จงหาทอร์กที่เวลาใด ๆ สัมพัทธ์กับจุดกำเนิด

ค. ใช้คำตอบข้อ ก และ ข พิสูจน์ว่า

$$\tau = dL/dt$$

ตอบ ก. $md(v_0 + gt)\hat{k}$ ข. $mgd\hat{k}$



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.23

6.24 มวล 3 กิโลกรัม ผูกติดกับเชือกเบา พันรอบรอกซึ่งเป็นทรงกระบอกตัน รัศมี 8 เซนติเมตร มวล 1 กิโลกรัม ดังรูป

ก. ทอร์กรอบจุดศูนย์กลางมวลของรอกเท่ากับเท่าไร

ข. ถ้า m = 3 กิโลกรัม มีอัตราเร็ว v และรอกมีอัตราเร็วเชิงมุม ω = vR จงหาโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบรอบจุดศูนย์กลางมวลของรอก

ค. ใช้ $\tau = dL/dt$ และคำตอบข้อ ข. คำนวณความเร่งของมวล 3 กิโลกรัม

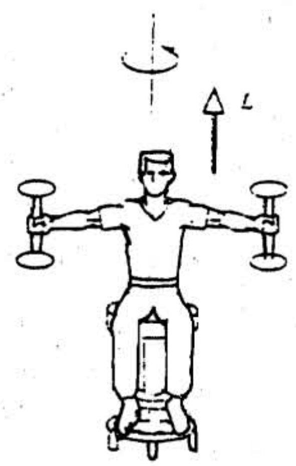
ตอบ ก. 0.336 N-m ข. L = 0.28 v ค. 8.4 m/s^2

6.25 เด็กนักเรียนคนหนึ่งถือน้ำหนักไว้ 2 มือ ดังรูป มวลแต่ละชิ้นเท่ากับ 10 กิโลกรัม ถ้าแขนของเขาเหยียดตรง มวลจะอยู่ห่างจากแกนหมุน 1 เมตร และความเร็วเชิงมุมของการหมุนเท่ากับ 3 เรเดียน/วินาที โมเมนต์ความเฉื่อยของนักเรียนรวมกับของแป้นที่นั่งเท่ากับ 8 กิโลกรัม-เมตร^2 และสมมติว่าคงที่ ถ้าเด็กนักเรียนคนนี้ดึงน้ำหนักเข้าตามแนวนอนจนเหลือระยะทาง 30 เซนติเมตร ห่างจากแกนหมุน

ก. จงหาความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของระบบ

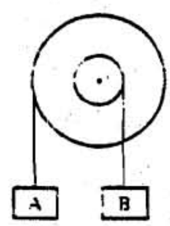
ข. จงหาการเปลี่ยนแปลงพลังงานกล

ตอบ ก. 8.57 rad/s; ข. เพิ่มขึ้น 234 J



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.25

6.26 ระบบล้อและเพลาซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อย 0.26 กิโลกรัม เมตร^2 ประกอบด้วยล้อหมุนขนาดรัศมี 20 เซนติเมตร และเพลาหมุนขนาดรัศมี 10 เซนติเมตร มีมวลถ่วง A 2 กิโลกรัม และมวลถ่วง B 6 กิโลกรัม ผูกเชือกพันไว้รอบล้อและเพลา ดังรูป ถ้าปล่อยให้มีการเคลื่อนที่ ระบบล้อและเพลานี้จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งเชิงมุมเท่าใด และความตึงในเส้นเชือกแต่ละเส้นจะเป็นเท่าใด (g = 10 เมตร/วินาที^{2})

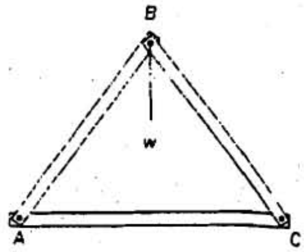


รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.26

ตอบ α = 5 เรเดียน/วินาที^{2} , T_1 = 22 นิวตัน , T_2 = 57 นิวตัน

6.27 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านยาว 1.6 เมตร ดังรูป ถ้า w = 250 นิวตัน จงหาแรงดึงใน AC และแรงกดจาก AB

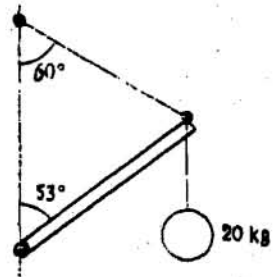
ตอบ 72 N ; 144 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.27

6.28 คานยาว 4 เมตร มวล 10 กิโลกรัม มีมวล 20 กิโลกรัม แขวนอยู่ดังรูป จงหาแรงดึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่บานพับ

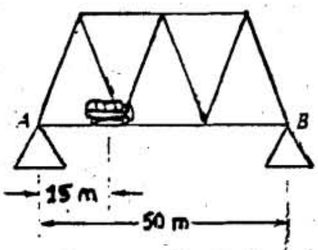
ตอบ T = 213 N, R_x = 184N, R_y = 188 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.28

6.29 สะพานยาว 50 เมตร มีมวล 8 x 10^4 กิโลกรัม รถบรรทุกมวล 3 x 10^4 กิโลกรัม อยู่ที่ตำแหน่ง 15 เมตรจากปลายหนึ่ง ดังรูป จงหาแรงที่หัวเสาสะพานทั้งสองข้าง

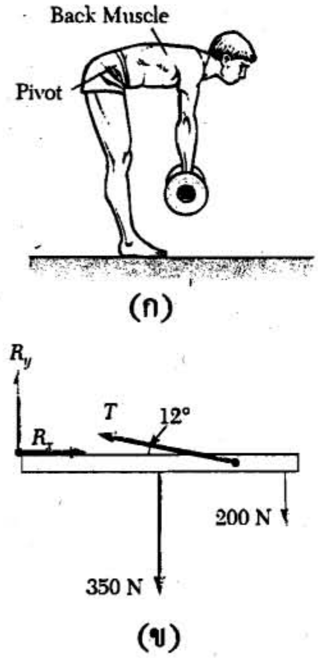
ตอบ 6.0 x 10^5 N, 4.8 x 10^5 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.29

6.30 ชายคนหนึ่งกำลังยกน้ำหนัก 200 นิวตัน หลังอยู่ในแนวนอน ดังรูป (ก) กล้ามเนื้อหลังยึดติดที่ตำแหน่ง 2/3 ของกระดูกสันหลัง มุมระหว่างกระดูกสันหลังและกล้ามเนื้อเท่ากับ 120 องศา ใช้รูป (ข) และให้ร่างกายส่วนบนมีมวล 350 นิวตัน จงหาแรงดึงในกล้ามเนื้อหลังและแรงกดในกระดูกสันหลัง

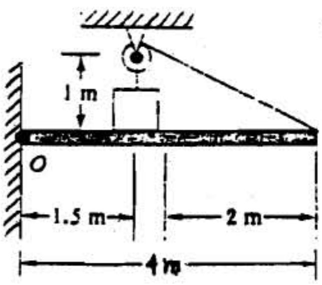
ตอบ T=2,710 N, R = 2,650 N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.30

6.31 มวล 50 กิโลกรัม วางอยู่บนคานและผูกติดกับเชือกเบาคล้องผ่านรอกไปยังปลายคานอีกข้างหนึ่ง ดังรูป ถ้าระบบอยู่ในสมดุล และมวลของคานเท่ากับ 150 กิโลกรัม จงหาแรงดึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่ O

ตอบ $T = 1.07 \times 10^3$ N, $R_x = 991$ N, $R_y = 497$ N



รูปตามแบบฝึกหัดที่ 6.31