บทที่ 2
จลนศาสตร์

เค้าโครงเรื่อง

2.1 การเคลื่อนที่หนึ่งมิติ

ความเร็วและอัตราเร็ว

2.2 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่สองมิติและสามมิติ

ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็วและความเร่ง

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์

2.3 ความเร็วสัมพัทธ์ กรอบอ้างอิง

พิจารณาความเร็วสัมพัทธ์

กรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่ง

กรอบอ้างอิงที่มีความเร็วสัมพัทธ์มีค่าคงที่

กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่สัมพัทธ์ด้วยความเร่ง

กรอบอ้างอิงเฉื่อย

สาระสำคัญ

1. ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาค คือ อัตราส่วนของการกระจัดต่อช่วงเวลา

$$\mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$$

ความเร็วบัดดล คือ ความเร็วในช่วงเวลานั้น ๆ หรือในขณะใดขณะหนึ่ง

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}} = d\mathbf{r}/dt$$

ความเร่งเฉลี่ยหรือความหน่วงเฉลี่ย ของอนุภาค คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงเวลาหนึ่ง

$$\mathbf{a}_{\text{เฉลี่ย}} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$$

ความเร่งบัดดล คือ ความเร่งในช่วงเวลาสั้น ๆ หรือในขณะใดขณะหนึ่ง

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta\mathbf{v}/\Delta t = d\mathbf{r}/dt$$

2. ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว การกระจัดและความเร่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงตัว

$$v = v_o + at$$

$$x = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_o^2 + 2ax$$

ในกรณีการเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก เช่น การตกอย่างอิสระ สมการทางจลนศาสตร์จะเขียนได้ดังนี้

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$$y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = v_o^2 - 2gy$$

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ตามแนวราบด้วยความเร็วคงตัวและตามแนวดิ่งโดยเสรีด้วยความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) ซึ่งคงตัวโดยมีสมการทางจลนศาสตร์เช่นเดียวกับการตกอย่างอิสระ และระยะตามแนวราบหรือพิสัย

$$R = [v_o^2 \sin 2\theta]/g$$

และระยะสูงสุด

$$y_m = [v_o^2 \sin^2\theta]/(2g)$$

และเวลาในอากาศ

$$T = [2v_o \sin\theta]/g$$

3. ความเร็วของวัตถุ A สัมพัทธ์กับวัตถุ B หรือ

$$v_A - v_B = v_{AB}$$

4. กรอบอ้างอิง หมายถึง เซตของระบบโคออร์ดิเนตที่อยู่นิ่งหรือติดอยู่กับระบบใดระบบหนึ่งหรืออาจมีความเร็วสัมพัทธ์คงตัวหรืออาจเคลื่อนที่สัมพัทธ์ด้วยความเร่ง

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาควรมีความสามารถต่อไปนี้

1. เขียนสมการทางจลนศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ได้
2. อธิบายความหมายของกรอบอ้างอิงแบบต่าง ๆ ได้
3. คำนวณหาค่าที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่โดยวิธีแคลคูลัสได้

วิชากลศาสตร์ (mechanics) เป็นวิชาที่กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุต่าง ๆ เช่น ยวดยานเคลื่อนที่ไปตามถนน คนและสัตว์วิ่งไปมา การยิงปืน การแกว่งของลวดสลิงและการหมุนของโลกรอบตัวเอง รวมทั้งสาเหตุและผลของการเคลื่อนที่เหล่านั้นด้วย

แขนงของวิชากลศาสตร์ในวิทยาศาสตร์กายภาพที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยไม่คำนึงถึงสาเหตุที่ทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ เรียกว่า จลนศาสตร์ (kenematics) ในบทนี้จะพิจารณาถึงสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ เช่น ความเร็ว ความเร่ง ระยะทางที่เกิดจากการย้ายตำแหน่งของวัตถุ เรียกว่า การกระจัด หรือ การขจัด (displacement) การเคลื่อนที่แบ่งได้เป็น 2 อย่าง คือ

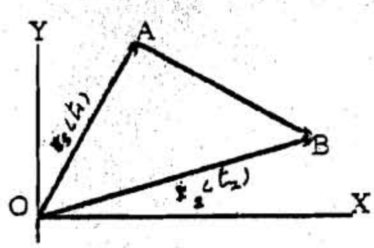
1. **การเลื่อนที่ (translation)** เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุ (ซึ่งอนุโลมเป็นอนุภาค) ในแนวเส้นตรง หรือเส้นโค้ง โดยทุก ๆ จุดของวัตถุที่เคลื่อนที่นั้นเมื่อเทียบกับแกนอ้างอิงแล้ว จะต้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆอนุภาคของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบการเลื่อนที่จึงมีสภาพเหมือนกันหมด

2. **การหมุน (rotation)** เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีการหมุนหรือสั่น

2.1 การเคลื่อนที่หนึ่งมิติ

ความเร็วและอัตราเร็ว (velocity and speed)

ความเร็วของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ คือ อัตราการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุ ความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์ แต่อัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์



รูปที่ 2.1 การเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุจาก A ไปยัง B ด้วยความเร็วคงตัว

ให้อนุภาคเริ่มอยู่ที่จุด A เมื่อเวลา t_1 มีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}_1$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ลากจากจุด 0 (origin) ไปยังจุด A เมื่ออนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งไปที่จุด B เมื่อเวลา t_2 จะมีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}_2$ ดังนั้นการกระจัดของอนุภาคในการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศ จาก A ไปยัง B ด้วยขนาดระยะเท่ากับ AB หรือ $|\Delta r|$ และในช่วงเวลา Δt จะได้ดังนี้

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

ความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ของอนุภาค ก็คือ **อัตราส่วนของการกระจัด** $\Delta \mathbf{r}$ ต่อช่วงเวลา Δt

$$\mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}} = \Delta \mathbf{r}/\Delta t = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(t_2 - t_1) \quad \text{........2.1}$$

ความเร็วเฉลี่ย $\mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}}$ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (ms^{-1})

ในกรณีที่พิจารณาเฉพาะขนาดของความเร็วเฉลี่ยซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ย (average speed) $\overline{v}$ จะได้ว่า

$$\overline{v} = |\mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}}| = |\Delta \mathbf{r}/\Delta t| = \Delta r/\Delta t \quad \text{........2.2}$$

ในการเคลื่อนที่ของอนุภาค **ถ้ามีทิศทางคงที่** ระยะทางที่เคลื่อนที่ต่อหน่วยเวลาก็คงที่ เรียกวัตถุนั้นว่า **มีความเร็วคงที่ หรือความเร็วคงตัว ดังนั้น**

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}/t$$

แต่ถ้าการเคลื่อนที่ไม่สม่ำเสมอ ไม่เป็นเส้นตรง ความเร็วเฉลี่ยในแต่ละช่วงเวลาก็จะไม่เท่ากัน การเคลื่อนที่ของอนุภาคจะวิ่งด้วยความเร็วไม่คงที่ เราต้องการรู้ว่าอนุภาคจะเคลื่อนที่ ณ ขณะนั้นด้วยความเร็วเท่าใด การหา**ความเร็วในช่วงเวลาสั้น ๆ จนเกือบเป็นศูนย์** เรียกความเร็วนั้นว่า **ความเร็วขัดดล** (instantaneous velocity) โดยปกติจะเรียกสั้น ๆ ว่า ความเร็ว แทนด้วย $\mathbf{v}$ เขียนในรูปของสมการว่า

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}})$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t$$
$$\therefore \quad \mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt \quad \text{........2.3}$$

ตัวอย่าง 2.1 การกระจัดของวัตถุแปรตามสมการ $s = 10t^3$ ซึ่งมี s เป็นเซนติเมตร และ t เป็นวินาที จงหาความเร็วขัดดลที่ $t = 2s$

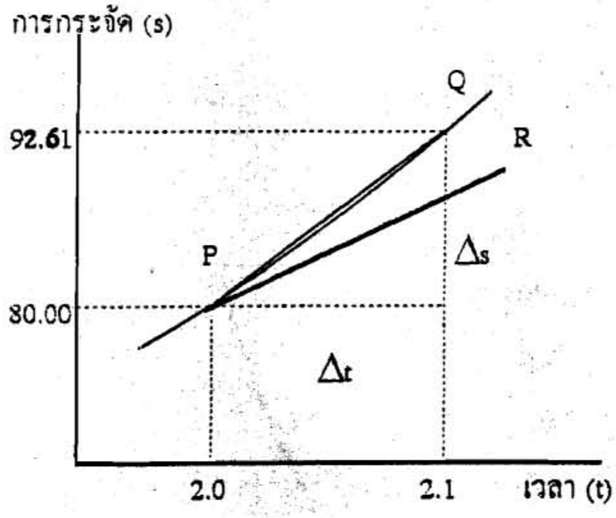
วิธีทำ 1. ให้ $\Delta t = 0.1$ วินาที จะได้ว่า

t	$s = 10t^3$
2.0	$10(2.0)^3 = 80.00$
2.1	$10(2.1)^3 = 92.61$

หา

$\overline{v}$ = $\Delta s/\Delta t$ = (92.61-80.00)/0.1

= 12.61/01 = 126.1 ซม/วินาที



รูปที่ 2.2 ตามตัวอย่าง 2.1

2. ให้ Δt = 0.01 วินาที จะได้ว่า

t	$s = 10t^3$
2.00	$10(2.00)^3$ = 80.0000
2.01	$10(2.01)^3$ = 81.20601

หา

$\overline{v}$ = (81.20601-80.0000)/0.01

= 1.20601/0.01

= 120.601 ซม/วินาที

3. ให้ Δt = 0.001 วินาที จะได้ว่า

t	$s = 10t^3$
2.000	$10(2.000)^3$ = 80.00000000
2.001	$10(2.001)^3$ = 80.12006001

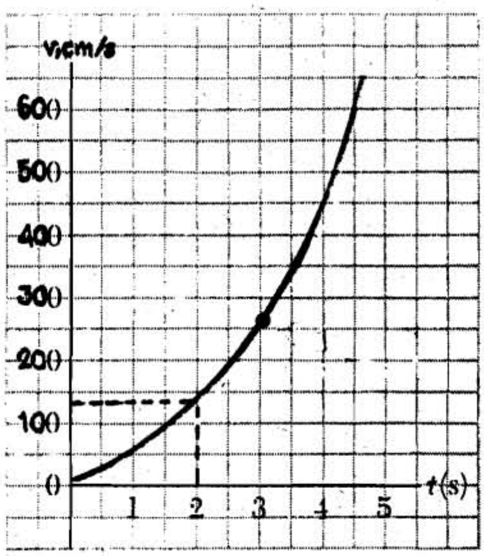
หา

$\overline{v}$ = (80.12006001-80.00000000)/0.001

= 0.12006001/0.001

= 120.06001 ซม/วินาที

จากการคำนวณ จะได้ว่า $\Delta s/\Delta t$ เข้าใกล้ลิมิต นั่นคือ เมื่อ t = 2 วินาที จะได้ความเร็ว 120 ซม/วินาที ดูจากกราฟในรูปที่ 2.3 ซึ่งแสดงว่า



รูปที่ 2.3 ตามตัวอย่าง 2.1

$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t$ เป็นความเร็วบัดดล และ v จะเป็นฟังก์ชันของ t

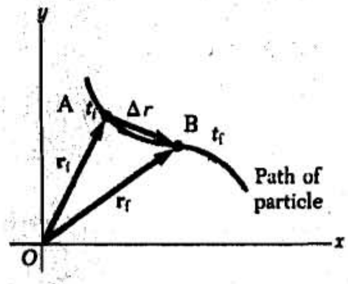
กิจกรรม 2.1

ให้นักศึกษาแสดงแผนภาพการกระจัดและระยะทางสำหรับอนุภาคเคลื่อนที่จาก a ไป b และไป c โดย a = -3 ซม., b = +4 ซม., และ c = -1 ซม. บนแกน x

2.2 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่สองมิติและสามมิติ

2.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่ง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคมากกว่าหนึ่งมิติ



รูปที่ 2.4 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในสองมิติ

ตามรูปที่ 2.4 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง A ในเวลา $t = t_1$ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง r_1 อนุภาคเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งอยู่ที่ B เมื่อเวลา $t = t_2$ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r}_2$ เคลื่อนที่ได้ระยะทาง Δs ดังนั้นการกระจัด คือ $\Delta \mathbf{r}$ หาได้ดังนี้

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad \text{........2.4}$$

ความเร็วเฉลี่ย $\quad \mathbf{v}_{\text{เฉลี่ย}} = \Delta \mathbf{r}/\Delta t \qquad$ 2.5

ความเร็วบัดดล $\quad \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t = d\mathbf{r}/dt \qquad$ 2.6

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathbf{v}$ กับ $\mathbf{r}$ ในรูปของการอินทิเกรต คือ

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt \qquad \text{........2.7}$$

อัตราเร็ว $\quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = ds/dt \qquad$ 2.8

การเคลื่อนที่ของอนุภาคจะมีความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปได้เสมอ อาจจะเปลี่ยนแปลงขนาดหรือทิศทาง หรือเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางด้วย

จากความรู้ในเรื่องเวกเตอร์ เราเขียนความเร็วใน 3 มิติได้ดังนี้

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad \text{........2.9}$$

โดยมี v_x, v_y และ v_z เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ v ตามแนวแกน $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ตามลำดับ

$$\therefore \quad v = (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k} \qquad ......2.10$$

โดยถือว่า $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง

ดังนั้น $\quad d\hat{i}/dt = d\hat{j}/dt = d\hat{k}/dt = 0$

สมการ (2.9) เท่ากับ สมการ (2.10) จะได้

$$v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k}$$

$$\therefore \quad v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$$

ความเร็ว v จะคงที่ต่อเมื่อส่วนประกอบ v_x, v_y และ v_z ทุกตัวคงที่

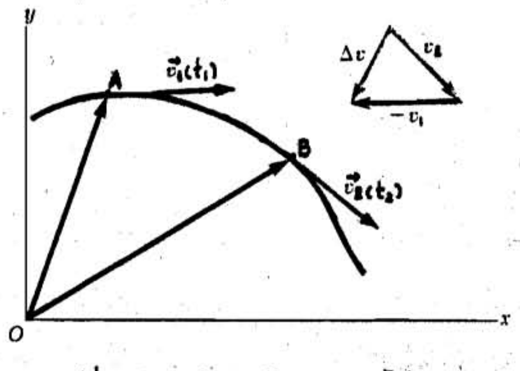
จากสมการ (2.9) อัตราเร็ว (speed) คือ ขนาดของความเร็ว

$$v = |v| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$$

$$= [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2]^{1/2} \qquad ......2.11$$

ในการบอกตำแหน่งของอนุภาคหรือกำหนดเวกเตอร์ใด ๆ เราจะต้องกำหนดแกนอ้างอิงเสมอ ซึ่งได้แก่ X Y Z ดังนั้น ความเร็วที่ได้จึงเป็นความเร็วที่วัดเทียบกับแกนอ้างอิงที่กำหนดขึ้นมาเป็นหลัก

ความเร่ง (acceleration) ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเพิ่มขึ้น แสดงว่าอนุภาคมีความเร่ง แต่ถ้าความเร็วของอนุภาคลดลง อนุภาคก็มีความหน่วง (retardation หรือ deceleration) ความเร่ง คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็ว



รูปที่ 2.5 การเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุจาก A ไป B ด้วยความเร่ง

อนุภาคหนึ่งที่เวลา t_1 อยู่ที่จุด A และมีความเร็ว v_1 เคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้งในระนาบ XYเมื่อเวลาผ่านไป t_2 จะอยู่ที่จุด B มีความเร็ว v_2 ดังนั้นในช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ ความเร็ว

ของอนุภาคเปลี่ยนไป $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ ดังรูปที่ 2.5 อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของอนุภาคในช่วงเวลานั้น คือ ความเร่งเฉลี่ย ($\mathbf{a}_{เฉลี่ย}$)

$$\mathbf{a}_{เฉลี่ย} = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(t_2 - t_1) = \Delta \mathbf{v}/\Delta t \qquad ......2.12$$

$\mathbf{a}_{เฉลี่ย}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศเดียวกันกับทิศของ $\Delta \mathbf{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $|\Delta \mathbf{v}/\Delta t|$ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที^{2} (ms^{-2})

ถ้าให้ a เป็นขนาดของความเร่งเฉลี่ยหรืออัตราเร่งเฉลี่ย จะได้

$$\underline{a} = |\mathbf{a}_{เฉลี่ย}| = |\Delta \mathbf{v}/\Delta t| \qquad ......2.13$$

เราจะหาความเร่งบัดดล ณ ตำแหน่งใด ๆ ของอนุภาคได้ โดยคิดจากความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้นที่สุดที่จะเป็นไปได้ แต่ไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือ Δt-0

$$\therefore \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{v}/\Delta t = d\mathbf{v}/dt \qquad ......2.14$$

a เรียกว่า ความเร่งบัดดลของอนุภาคซึ่งเป็นเวกเตอร์มีทิศเดียวกับทิศของ $\Delta \mathbf{v}$ และมีขนาด $a = |\mathbf{a}| = |d\mathbf{v}/dt|$

$$a = |\mathbf{a}| = |d\mathbf{v}/dt|$$

ในระบบ 3 มิติ จะได้ว่า

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \qquad ......2.15$$

$$= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad a = |\mathbf{a}|$$

$$= [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]^{1/2} \qquad ......2.16$$

$$= [(dv_x/dt)^2 + (dv_y/dt)^2 + (dv_z/dt)^2 \qquad ......2.17$$

$$= [(d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2 + (d^2z/dt)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad ......2.18$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง ในรูปของเวกเตอร์ มีดังนี้

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t = d\mathbf{r}/dt$$

$$\mathbf{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{v}/\Delta t = d\mathbf{v}/dt$$

$$a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

ตัวอย่าง 2.2 อนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ในระบบ 3 มิติ โดยมีค่าความเร็วเทียบกับแกนอ้างอิงต่างๆ ดังนี้ $v_x = 10$ เมตรต่อวินาที $v_y = 5$ เมตรต่อวินาที และ $v_z = 10$ เมตรต่อวินาที จงหาอัตราเร็วของอนุภาคนี้

วิธีทำ อัตราความเร็ว

$$v = |v| = [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]^{1/2}$$
$$= [10^2 + 5^2 + 10^2]^{1/2}$$
$$= 15 \quad \text{เมตรต่อวินาที}$$

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในหนึ่งมิติ และเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ แสดงว่าเวกเตอร์ความเร็วและเวกเตอร์ความเร่งจะเปลี่ยนเฉพาะขนาดเท่านั้น เพื่อความสะดวกเราจึงสามารถเลี่ยงการใช้เวกเตอร์โดยตรงได้ โดยเขียนขนาดและเครื่องหมายบวกลบ ซึ่งเครื่องหมายลบแทนทิศทางของเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเดียวกันแต่ทิศตรงกันข้าม เช่น การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง ในทิศหนึ่งใช้เครื่องหมายเป็นบวก ในทิศตรงข้ามก็ใช้เครื่องหมายเป็นลบ

กำหนดให้เริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง x_1 และมีความเร็วต้น v_0 ต่อมาเวลา t อนุภาคอยู่ที่ x_2 มีความเร็ว v โดยมีความเร่งคงที่ a เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านี้ได้ดังนี้

จากนิยามของความเร่ง $\quad a = dv/dt$

ในที่นี้จะเขียนแต่ขนาดโดยใช้เครื่องหมายบวกและลบแทนทิศ จะได้ว่า

$$a = dv/dt$$
$$\therefore \quad dv = adt$$
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$
$$v - v_0 = a(t - 0)$$
$$= at$$
$$\therefore \quad v = v_0 + at \qquad \text{......2.19}$$

จากนิยามของความเร็ว $\quad v = dx/dt$

$$\therefore \quad v = dx/dt$$
$$= v_0 + at$$
$$\therefore \quad dx = v_0dt + atdt$$

โดยการอินทิเกรชัน

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{dx} = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t tdt$$
$$x_2 - x_1 = v_0t + (1/2)at^2$$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = x$ เป็นการกระจัดของอนุภาคในเวลา 1 วินาที จะได้การกระจัดเป็น

$$x = v_0t + (1/2)at^2 \qquad \text{......2.20}$$

จาก $v = v_0 + at$

$\therefore \quad t = (v - v_0)/a$

แทนค่าลงในสมการ (2.20) จะได้

$$x = v_0[(v - v_0)/a] + [(1/2)a][(v - v_0)/a]^2$$

$$\begin{aligned} 2ax &= 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 \\ &= (v - v_0)(2v_0 + v - v_0) \\ &= (v - v_0)(v + v_0) \\ &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad \text{......2.21}$$

จาก

$$\begin{aligned} a &= dv/dt \\ &= (dv/dx).(dx/dt) \\ &= v.(dv/dx) \\ adx &= v.dv \\ \int_{x_1}^{x_2} adx &= \int_{v_0}^{v} vdv \\ a(x_2 - x_1) &= (1/2)(v^2 - v_0^2) \end{aligned}$$

ให้ $x = x_2 - x_1$ = การกระจัด

$$\therefore \quad 2ax = v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (2.21)

ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= v_0t + (1/2)at^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2ax \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว การกระจัด และความเร่ง ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงตัว

กิจกรรม 2.2

ให้นักศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่งในกรณีการเคลื่อนที่ 1 มิติ ตามรูปแบบอินทิกรัล และแสดงด้วยกราฟระหว่างความเร็วกับเวลาด้วยว่าพื้นที่ใต้กราฟจะเท่ากับการกระจัด และระหว่างความเร่งกับเวลาว่าพื้นที่ใต้กราฟจะเท่ากับความเร็ว

ตัวอย่าง 2.3 รถจักรยานยนต์คันหนึ่งวิ่งด้วยความเร็ว 50 เมตรต่อวินาที แล้วลดความเร็วลงเหลือ 35 เมตรต่อวินาทีในช่วงวิ่ง 250 เมตร

(ก) จงหาขนาดและทิศทางของความเร่ง

(ข) จงหาช่วงเวลาที่เสียไปในช่วงวิ่ง 250 เมตร

วิธีทำ ก) จากสูตร $v^2 = v_0^2 + 2ax$

$\therefore a = (v^2 - v_0^2)/(2x)$

โดยมี $v = 35$ เมตรต่อวินาที

$v_0 = 50$ เมตรต่อวินาที

$x = 250$ เมตร

$= 0.25$ กิโลเมตร

แทนค่า จะได้ $a = [(35)^2 - (50)^2]/[2(250)]$

$= -2.55$ เมตรต่อ (วินาที)^2

ดังนั้น ความเร่งมีขนาดเท่ากับ 2.55 เมตรต่อ (วินาที)^2 ซึ่งมีทิศตรงข้ามกับทิศของความเร็ว

ข) $t = (v - v_0)/a$

$= (35 - 50)/-2.55$

$= 5.8$ วินาที

นั่นคือ การเปลี่ยนความเร็วในระยะทาง 250 เมตร ใช้เวลาเท่ากับ 5.8 วินาที

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่จะพบมากที่สุด คือความเร่งในวัตถุที่หล่นลงสู่พื้นโลก เป็นการตกอย่างอิสระ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งอันเนื่องจากแรงโน้มถ่วงหรือแรงดึงดูดของโลก ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่ไกลจากผิวโลกเมื่อเปรียบเทียบกับรัศมีของโลก และไม่คิดแรงเสียดทานของอากาศ ความเร่งจะมีค่าคงที่ซึ่งเรียกว่า **ความเร่งแห่งความโน้มถ่วง** (acceleration of gravity) แทนด้วย g ซึ่งมีค่าเท่ากับ 9.8 เมตรต่อ (วินาที)^2

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งเป็นการเคลื่อนที่ในแนวแกน y แต่แรงดึงดูดของโลกมีทิศทางลงสู่พื้นโลก ค่าความเร่งจะมีค่า $a = -g$

เราจะได้สมการของการตกอย่างอิสระ ดังนี้

$$v = v_0 - gt \qquad ......2.22$$

$$y = v_0t - (1/2)gt^2 \qquad ......2.23$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \qquad ......2.24$$

ตัวอย่าง 2.4 ถ้าโยนลูกบิลเลียดขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 เมตรต่อวินาที จงหาว่า

ก. ลูกบิลเลียดจะอยู่ในอากาศนานเท่าใด จึงจะกลับมาอยู่ในระดับเดิม

ข. ลูกบิลเลียดถูกโยนให้ขึ้นไปสูงสุดเท่าใด

ค. ที่เวลา 2 วินาที ลูกบิลเลียดจะมีความเร็วเท่าใด

วิธีทำ ก) เวลาที่ลูกบิลเลียดวิ่งขึ้นไปจนถึงจุดสูงสุด จะมีค่าเท่ากับเวลาที่ลูกบิลเลียดหล่นจากจุดสูงสุดลงมาถึงจุดเริ่มต้น ดังนั้น $T = 2t$ ซึ่ง t จะเป็นเวลาที่ลูกบิลเลียดวิ่งไปจนถึงจุดสูงสุด

จากสมการ $v = v_0 - gt$

$\therefore \quad t = (v_0 - v)/g$

เมื่อ $v_0 = 80$ เมตรต่อวินาที

$v = 0$

$g = 9.8$ เมตรต่อวินาที^{2}

$\therefore \quad t = (80 - 0)/9.8$

$= 8.16$ วินาที

ดังนั้นเวลาที่ลูกบิลเลียดอยู่ในอากาศทั้งหมดมีค่า

$T = 2t$

$= 2 \times 8.16$

$= 16.3$ วินาที

ข) จาก $y = (v_0^2 - v^2)/2g$

$= [(80)^2 - (0)^2]/(2 \times 9.8)$

นั่นคือลูกบิลเลียดขึ้นไปสูงสุดได้ระยะทาง $= 327$ เมตร

ค. จาก $v = v_0 - gt$

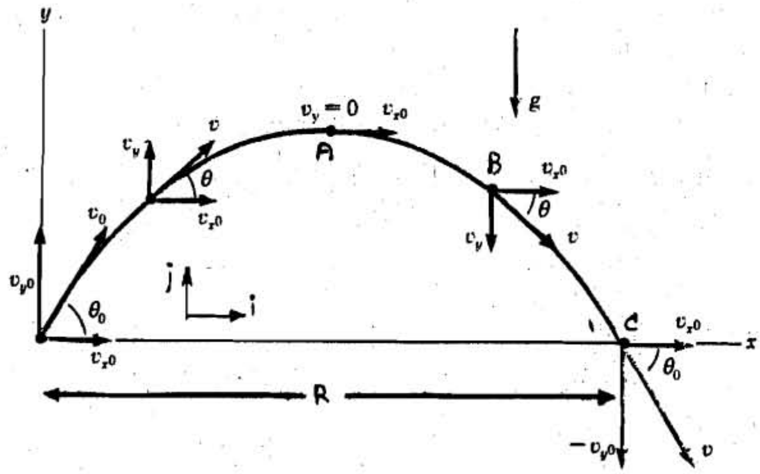
$= (80)-(9.8)(2)$

$= 60.4$ เมตรต่อวินาที

จะได้ว่าความเร็วที่เวลา 2 วินาที $= 60.4$ เมตรต่อวินาที

2.2.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ (Projectile Motion)

เมื่อขว้างก้อนหินออกไปตามแนวระดับ ก้อนหินจะเคลื่อนที่เป็นแนวโค้งจนกระทั่งตกกระทบพื้นดิน เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ (g) การที่ลูกขนไก่ ลูกเทนนิส เตะลูกบอล ยิงกระสุน ฯลฯ ล้วนแต่มีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นแนวโค้งทั้งนั้น การเคลื่อนที่ในลักษณะดังกล่าว คือ การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์



รูปที่ 2.6 การเคลื่อนที่ตามเส้น A B C ด้วยความเร็วต้น v_0 ทำมุม θ กับแนวราบ

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์เป็นการเคลื่อนที่ตามแนวราบด้วยความเร็วคงตัว และการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งโดยเสรีด้วยความเร่งคงตัว

ให้เราพิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ทุกชนิดจากการเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวดิ่งประกอบกัน ดังต่อไปนี้

สมมติ อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ในระนาบดิ่งใด ๆ ตามแกน x และแกน y ดังรูปที่ 2.6 กล่าวคือ อนุภาคเคลื่อนที่ตามแนวราบ x ด้วยความเร็ว v_x คงที่ และเคลื่อนที่ตามแนวดิ่ง y ภายใต้อิทธิพลแรงโน้มถ่วงของโลกซึ่งมีอัตราเร่ง g

เริ่มต้นอนุภาคอยู่ที่ o มีความเร็ว v_0 ทำมุม θ กับแนวระดับ

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= v_{0x}i + v_{oy}j \\ v_0 &= \left(v_{ox}^2 + v_{oy}^2\right) \\ \theta &= \tan^{-1} v_{oy}/v_{ox} \end{aligned}\right\} \quad \text{......2.25}$$

และ

$$\left.\begin{aligned} v_{ox} &= v_0\cos\theta \\ v_{oy} &= v_0\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{......2.26}$$

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จาก o ไปถึง A ใช้เวลา t จะเห็นได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จาก A ไปยัง C ในเวลา t เหมือนกัน ดังนั้น เวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่จาก o ถึง C จึงเป็น 2t ซึ่งจะได้ระยะทางตามราบ OC = R = $v_{ox}(2t)$ เรียกว่า**พิสัย (range)**

หาค่า t ได้จากการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่ง เมื่ออนุภาคอยู่ที่ A ความเร็วตามแนวดิ่ง = o ดังนั้น

จาก $v_y = u_y + at$

$$v_y = v_{oy} + (-g)t$$

$$0 = v_{oy} - gt$$

$$t = v_{oy}/g$$

$$\therefore \quad t = [v_0 \sin\theta]/g \qquad ......2.27$$

ระยะตามแนวราบ OC = R

$$R = v_{ox}(2t)$$

$$= v_0\cos\theta\,[(2v_0 \sin\theta)/g]$$

$$= [v_0^2 \sin 2\theta]/g \qquad ......2.28$$

สมการ (2.28) สำหรับ v_0 ค่าหนึ่ง ระยะทางตามราบ OC จะมีค่าสูงสุด คือ x_m เมื่อ $\sin 2\theta = 1$ นั่นคือ $\theta = 45^\circ$

$$\therefore \quad x_m = v_0^2/g \qquad ......2.29$$

ถ้าต้องการทราบระยะตามดิ่งสูงสุด คือ y_m จากรูป 2.6

จาก $y = u_y t + (1/2)a_y t^2$

จะได้ $y_m = (v_0\sin\theta)[v_0\sin\theta\ /g] + (1/2)(-g)[v_0\sin\theta\ /g]^2$

$$y_m = [v_0^2 \sin^2\theta]/(2g) \qquad ......2.30$$

เนื่องจากความเร่งมีเฉพาะในแนวดิ่ง ส่วน $a_x = 0$ ดังนั้น ความเร็วในแนวราบ จะคงที่ตลอดไป

$$v_{ox} = v_0\cos\theta = \text{ค่าคงที่}$$

ความเร็วในแนวดิ่งจะเปลี่ยนไปตามเวลา ซึ่งการเปลี่ยนแปลงความเร็วนี้เนื่องจากความเร่งของความโน้มถ่วงของโลกที่มีทิศทางลงตลอดเวลา คือ $a_y = -g$

$$v_{oy} = v_0\sin\theta$$

ดังนั้น $v_y = v_0\sin\theta - gt$ 2.31

สมการ (2.31) เป็นความเร็วในกรณีวัตถุตกอย่างอิสระ

ตามรูปที่ 2.6 จะได้ความเร็วทั้ง 2 แกน ดังนี้

ความเร็วในแกน x จะเป็น $v_x = v_0\cos\theta$ 2.32

ความเร็วในแกน y จะเป็น $v_y = v_0\sin\theta - gt$

จากความเร็วทั้ง 2 แกน นำมาหาขนาดของเวกเตอร์ความเร็วของวัตถุได้ดังนี้

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} \qquad ......2.33$$

และทิศทางของเวกเตอร์ความเร็ว หาได้จากความสัมพันธ์

$$\tan\theta = v_y/v_x \qquad ......2.34$$

การหาการกระจัด หรือหาตำแหน่งของวัตถุในเวลา t ใด ๆ สามารถหาได้จากสมการ ดังนี้

ในแนวระดับบนแกน x

$$x_0 = 0$$

$$v_x = v_0\cos\theta$$

$$x = (v_0\cos\theta)t \qquad ......2.35$$

ในแนวดิ่งบนแกน y

$$y_0 = 0$$

$$v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$y = (v_0\sin\theta)t - (1/2)gt^2 \qquad ......2.36$$

แต่การเคลื่อนที่ในแกน x และแกน y ต่างก็เคลื่อนที่ด้วยเวลาที่เท่ากันหรือเวลาเดียวกัน เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ได้โดยการแทนค่า t ในสมการ (2.35) และ (2.36) จะได้สมการ

$$y = (\tan\theta)x - (gx^2)/[2(v_0\cos\theta)^2] \qquad ......2.37$$

สมการ (2.37) เป็นสมการของพาราโบล่า ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$y = Ax^2 + Bx^2$$

ดังนั้น การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ จึงเป็นการเคลื่อนที่แบบเดียวกับพาราโบล่าเช่นกัน

ตัวอย่าง 2.5 ระเบิดลูกหนึ่งเกิดการระเบิดออกเป็นเสี่ยง ๆ ขณะที่อยู่ใกล้พื้นดินมาก ด้วยอัตราเร็วเท่ากันทุกทิศทุกทางเท่ากับ 19.6 เมตรต่อวินาที ชิ้นส่วนของระเบิดนี้จะขึ้นสูงสุดเท่าใด และชิ้นส่วนกระเด็นไปไกลสุดตามแนวระดับเท่าใด

วิธีทำ ชิ้นส่วนทุกชิ้นมีอัตราเร็วเท่ากัน ชิ้นส่วนที่จะขึ้นสูงสุดจะเป็นชิ้นส่วนที่มีความเร็วเริ่มต้นตามแนวดิ่ง ให้มีระยะสูงสุดเป็น y_m ค่า $g = 9.8$ เมตร-วินาที^{2}

จาก $v_y^2 = u_y^2 + 2ay$

$$0 = (19.6)^2 + 2(-9.8)y_m$$

$$\therefore \quad y_m = 19.6 \text{ เมตร}$$

ชิ้นส่วนที่ไปไกลสุดตามแนวราบ คือ ชิ้นที่ทำมุม 45° กับพื้นดิน จะได้ระยะไกลสุดจากสมการ

$$x_m = v_0^2/g$$
$$= (19.6)^2/9.8$$
$$= 39.2 \quad \text{เมตร}$$

ตัวอย่าง 2.6 ให้จุดที่เครื่องบินปล่อยลูกระเบิดเป็นจุดศูนย์กลางของแกน x และ y เครื่องบินบินไปในแนวแกน x ดังนั้น ลูกระเบิดจะมีความเร็วต้นตามแนวแกน x v_{ox} = 500 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และความเร็วตามแนวแกน y $v_{oy} = 0$ ระยะทางทั้งหมดที่ลูกระเบิดต้องเดินทางในแนวแกน y เท่ากับ 14000 เมตร หรือ y = -14000 เมตร จงหาระยะเวลา t ที่ลูกระเบิดหล่นถึงพื้นดินพอดี

วิธีทำ จาก
$$y = v_{oy}t - (1/2)gt^2$$
$$t = \sqrt{-2y/g}$$
แทนค่า จะได้
$$t = \sqrt{-2(14000)/9.8}$$
$$= 53.4 \quad \text{วินาที}$$

ในช่วงเวลา 53.4 วินาทีนี้ เครื่องบินจะบินจากจุดปล่อยลูกระเบิดในแนวแกน x ถึงจุดแนวเป้าหมายพอดี

ตัวอย่าง 2.7 ในการตีลูกกอล์ฟด้วยมุมเงยเท่ากับ 27° ถ้าหลุมกอล์ฟอยู่ห่างจากจุดตีเท่ากับ 300 เมตร จงหาว่าจะต้องตีลูกกอล์ฟให้มีความเร็วต้นเท่ากับเท่าใด และลูกกอล์ฟจะอยู่ในอากาศได้นานเท่าใด

ลูกกอล์ฟเคลื่อนที่โค้งขึ้นด้วยมุม 27° และกำหนดให้ความเร็วต้น = v_0

∴ ความเร็วต้นตามแกน x $v_{ox} = v_0\cos 27^\circ$

ความเร็วต้นตามแกน y $v_{oy} = v_0\sin 27^\circ$

ในแนวดิ่ง ลูกกอล์ฟจะขึ้นไปจนสูงสุด $v_y = 0$

จะใช้เวลา $t = v_{oy}/g$

$t = v_0\sin 27^\circ/g$

∴ เวลาทั้งหมดที่ลูกกอล์ฟเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นจนถึงหลุมกอล์ฟเท่ากับ

$$T = 2t = 2[v_0\sin 27^\circ/g] \quad \text{วินาที}$$

ด้วยความเร็วตามแนวระดับและเวลาทั้งหมด เราสามารถหาระยะทางจากจุดตีหลุมกอล์ฟได้จาก

$$x = v_{ox}t$$
$$= (v_0\cos 27^\circ)t$$

ระยะทาง x นี้มีค่าเท่ากับ 300 เมตร แทนค่าเวลา จะหาความเร็วต้นได้ดังนี้

$$300 = (v_0 \cos 27^\circ)[2v_0 \sin 27^\circ)/g]$$
$$= [v_0^2(2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ)]/g$$
$$v_0^2 = (300g)/\sin 54^\circ$$
$$v_0 = \sqrt{(300 \times 9.8)/0.809}$$

ลูกกอล์ฟจะมีความเร็วต้น = 60.32 เมตรต่อวินาที

เวลาที่ลูกกอล์ฟอยู่ในอากาศได้นาน $T = 2t = [2(v_0 \sin 27^\circ)/g]$

$$= (2 \times 60.32 \times 0.454)/9.8$$
$$= 5.6 \text{ วินาที}$$

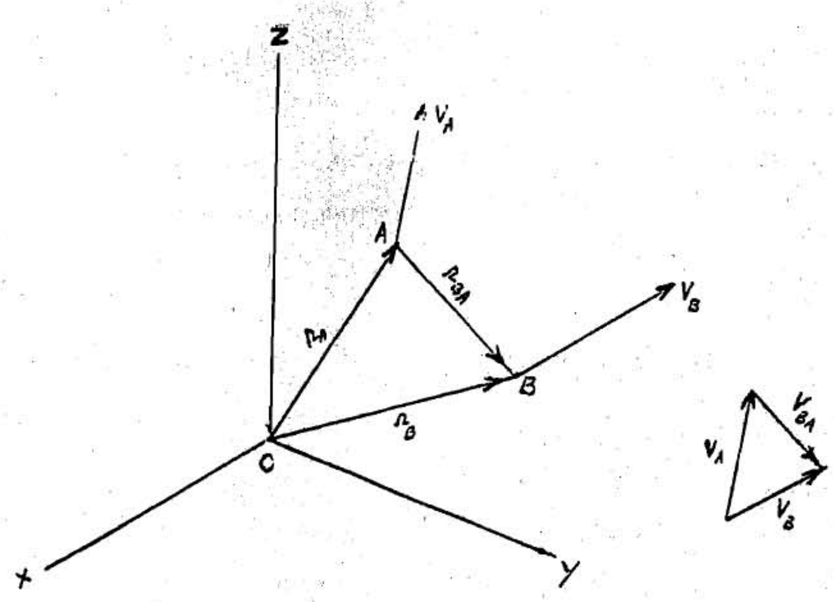
กิจกรรม 2.3

ให้นักศึกษาแสดงแผนภาพประกอบในตัวอย่าง 2.5, 2.6 และ 2.7

2.3 ความเร็วสัมพัทธ์ กรอบอ้างอิง กรอบอ้างอิงเฉื่อย

2.3.1 นิยามความเร็วสัมพัทธ์ (relative velocity) ผู้สังเกตทุกคนจะบอกได้ว่าสิ่งใดเคลื่อนที่หรือไม่นั้น จำเป็นจะต้องเปรียบเทียบกับสิ่งหนึ่ง การเคลื่อนที่จึงเป็นสัมพัทธภาพโดยอาศัยแกนอ้างอิง (frame of reference) อันหนึ่งเป็นหลัก **ความเร็วสัมพัทธ์หมายถึงความเร็วที่ปรากฏแก่ผู้สังเกต เมื่อผู้สังเกตเคลื่อนที่หรือในทางที่กลับกัน**

พิจารณาวัตถุ 2 อัน คือ A และ B กับผู้สังเกต O โดยใช้แกน x y z เป็นแกนอ้างอิง ตามรูปที่ 2.7 ความเร็วของ A และ B จะสัมพัทธ์กับ O ดังนี้



รูปที่ 2.7 นิยามความเร็วสัมพัทธ์

$$\mathbf{V}_A = d\mathbf{r}_A/dt$$
$$\mathbf{V}_B = d\mathbf{r}_B/dt$$

ความเร็วของ B สัมพัทธ์กับ A และของ A สัมพัทธ์กับ B มีนิยามว่า

$$\mathbf{V}_{BA} = d\mathbf{r}_{BA}/dt$$
$$\mathbf{V}_{AB} = d\mathbf{r}_{AB}/dt$$

เมื่อ $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$

$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$

เนื่องจาก $\mathbf{r}_{BA} = -\mathbf{r}_{AB}$ เราย่อมได้

$$\mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB}$$

กล่าวเป็นคำพูดได้ว่า ความเร็วของ B สัมพัทธ์กับ A มีขนาดเท่ากัน และทิศตรงกันข้ามกับความเร็วของ A สัมพัทธ์กับ B หาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งเทียบกับเวลา จะได้ว่า

$$d\mathbf{r}_{BA}/dt = d\mathbf{r}_B/dt - d\mathbf{r}_A/dt$$
$$d\mathbf{r}_{AB}/dt = d\mathbf{r}_A/dt - d\mathbf{r}_B/dt$$

$$\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$$
$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B \qquad ......2.38$$

ดังนั้น ในการหาความเร็วสัมพัทธ์ของเทหวัตถุ 2 อัน ให้เอาความเร็วของผู้สังเกตไปลบออกจากความเร็วของเทหวัตถุอันที่ต้องการจะหาความเร็วสัมพัทธ์(ลบกันอย่างเวกเตอร์)จำง่ายๆ ก็คือ ความเร็วสัมพัทธ์กับวัตถุอะไร ความเร็วของวัตถุนั้นจะเป็นตัวไปลบ ดังสมการ (2.38)

$$V_{BA} = V_B - V_A = \text{ความเร็วของ B สัมพัทธ์กับ A}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = \text{ความเร็วของ A สัมพัทธ์กับ B}$$

ตัวอย่าง 2.8 ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รู้สึกว่ามีลมพัดมาจากทิศเหนือด้วยความเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าชายคนนั้นขี่จักรยานกลับทางเดิมด้วยความเร็ว 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาจะรู้สึกว่าลมพัดมาจากทิศไหน ด้วยความเร็วเท่าใด

วิธีทำ ให้แกน (+x) ชี้ทิศตะวันออก, แกน (+y) ชี้ในทางทิศเหนือ

V_1 = ความเร็วของชายคนนั้นเมื่อเดินทางไปทิศตะวันออก

$= 3\hat{i}$ กิโลเมตร/ ชั่วโมง

V_2 = ความเร็วของชายคนนั้นเมื่อขี่จักรยานกลับ

$= 10(-\hat{i})$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

V_w = ความเร็วของลม = ?

$V_{w1} = 4(-\hat{j})$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

V_{w2} = ?

จากสมการความเร็วสัมพัทธ์

$$V_{BA} = V_B - V_A$$

แทนค่า $V_{w1} = V_w - V_1$

$\therefore$ $V_w = V_{w1} + V_1$

$V_{w2} = V_w - V_2$

แทนค่า $V_w = 4(-\hat{j}) + 3\hat{i}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

$V_{w2} = 4(-\hat{j}) + 3\hat{i} - 10(-\hat{i})$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

$= 4(-\hat{j}) + 13\hat{i}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

$V_{w2} = |4^2 + 13^2|^{1/2}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

$= 13.6$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

หามุม : $\tan\theta = -4/13$

$\theta = -17^\circ$

นั่นคือ เมื่อขี่จักรยาน เขาจะรู้สึกว่าลมพัดจากทิศตะวันตกเฉียง 17° ไปทางเหนือ ด้วยความเร็ว 13.6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ตัวอย่าง 2.9 เครื่องบิน A บินมุ่งสู่ทิศเหนือด้วยความเร็ว 300 กิโลเมตร/ชั่วโมง เปรียบเทียบกับพื้นดิน ในขณะที่เครื่องบิน B บินในทิศทางทำมุม 60° กับทิศเหนือ เฉียงไปทางทิศตะวันตก ด้วยอัตราเร็ว 200 กิโลเมตร/ชั่วโมง เปรียบเทียบกับพื้นดิน จงหาความเร็วของ A สัมพัทธ์กับ B และความเร็วของ B สัมพัทธ์กับ A

วิธีทำ	V_A	=	$300\hat{j}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
	V_B	=	$200\cos 60^\circ\hat{j} + 200\sin 60^\circ(-\hat{i})$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
จาก	V_{AB}	=	$V_A - V_B,\ V_{BA} = V_B - V_A = -V_{AB}$	
แทนค่า	V_{AB}	=	$300\hat{j} - 200\cos 60^\circ\hat{j} + 200\sin 60^\circ\hat{i}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
		=	$300\hat{j} - 200(1/2)\hat{j} + 200(\sqrt{3/2})\hat{i}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
		=	$200\hat{j} + 100\sqrt{3}\hat{i}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
	V_{AB}	=	$\|200^2 + (100\sqrt{3})^2\|^{1/2}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
		=	$10^2\,\|4 + 3\|^{1/2}$	กิโลเมตร/ชั่วโมง
		=	264.6	กิโลเมตร/ชั่วโมง
	θ	=	$\tan^{-1}[200/(100\sqrt{3})]$	
		=	$\tan^{-1}(2/\sqrt{3})$	
		=	49°	

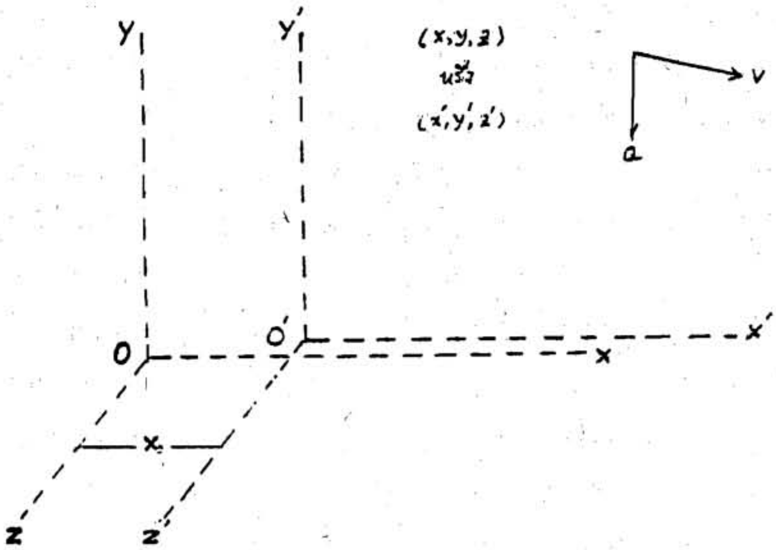
ความเร็ว A สัมพัทธ์กับ B มีทิศทำมุม 49° กับทิศตะวันออกไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว 264.6 กิโลเมตร/ชั่วโมง และ $V_{BA} = -V_{AB}$ ดังนั้น ความเร็ว B สัมพัทธ์กับ A มีทิศทำมุม $(90-49) = 41^\circ$ กับทิศตะวันตกไปทางทิศใต้ด้วยอัตราเร็ว 264.6 กิโลเมตร/ชั่วโมง

> **กิจกรรม 2.4**
>
> ให้นักศึกษาแสดงแผนภาพประกอบตัวอย่าง 2.8 และ 2.9

2.3.2 กรอบอ้างอิง (reference frame) กรอบอ้างอิง หมายถึง เซตของระบบโคออร์ดิเนตที่อยู่นิ่งหรือติดอยู่กับระบบใดระบบหนึ่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่งของวัตถุหรืออนุภาคที่กล่าวมาแล้วเป็นการวัดความสัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงของผิวโลก เพื่อให้เห็นภาพพจน์ คือ ถ่ายภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคนั้นด้วยกล้องที่อยู่นิ่งบนโลก ต่อไปนี้จะพิจารณา

กรอบอ้างอิงต่าง ๆ ที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน เพื่อให้ง่ายในการศึกษาฟิสิกส์ระดับนี้ เราจะพิจารณาเฉพาะกรอบอ้างอิงอันหนึ่งที่เคลื่อนที่โดยการย้ายที่ตามแนวแกนใดแนวแกนหนึ่งของกรอบอ้างอิงอีกอันหนึ่งเท่านั้น

1. กรอบอ้างอิง 2 กรอบที่อยู่นิ่งเมื่อเปรียบเทียบซึ่งกันและกัน



รูปที่ 2.8 กรอบอ้างอิง S และ S' อยู่นิ่ง

จากรูปที่ 2.8 ระบบโคออร์ดิเนต xyz ซึ่งเรียกว่ากรอบอ้างอิง S ซึ่งอยู่นิ่งในระบบใดระบบหนึ่ง สมมติว่าเป็นผิวโลก และระบบโคออร์ดิเนต x'y'z' ซึ่งจะเรียกว่า กรอบอ้างอิง S' ซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเปรียบเทียบกับ S กรอบอ้างอิง S' อาจจะเป็นกรอบอ้างอิงในตัวอาคาร หรือกรอบอ้างอิงบนรถไฟซึ่งจอดนิ่ง เพื่อความสะดวก เราจะให้แกนในระบบโคออร์ดิเนตทั้งสองที่สอดคล้องกันขนานกันและให้จุดกำเนิดของ S' คือ O' อยู่ห่างจากจุดกำเนิดของ S คือ O ไปตามแนวแกน x เป็นระยะ x_0 ซึ่งมีค่าคงที่

พิจารณาปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคหนึ่งในปริภูมิ โดยสมมติว่า ณ เวลาบัดดล วัตถุก้อนนี้หรืออนุภาคอันนี้ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r}(x, y, z)$ เมื่อเปรียบเทียบกับกรอบ S และ $\mathbf{r}'(x', y', z')$ เมื่อเปรียบเทียบกับ S' ดังรูปที่ 2.8

เมื่อ x', y', z' มีความสัมพันธ์กับ x, y, z ดังนี้

$$x' = x - x_0,\ y' = y,\ z' = z \qquad \text{......2.39}$$

ค่าความเร็วบัดดล $\mathbf{v}$ เปรียบเทียบกับกรอบ S คือ

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k}$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

ค่าความเร็วบัดดล **v′** เปรียบเทียบกับกรอบ S′ คือ

$$\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt = (dx'/dt)\hat{i} + (dy'/dt)\hat{j} + (dz'/dt)\hat{k}$$

ใช้ความสัมพันธ์ สมการ (2.38) และ $dx_0/dt = 0$ เราจะได้

$$\mathbf{v}' = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \mathbf{v}$$

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งบัดดลของทั้งกรอบ S และ S′ จะมีค่าเท่ากัน คือ

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}'/dt = \mathbf{a}'$$

จะเห็นว่าแตกต่างกันเฉพาะการกระจัดเท่านั้น ส่วนความเร็วและความเร่งเหมือนกัน นั่นคือ กรอบอ้างอิง S และ S′ ก็คือกรอบอ้างอิงเดียวกันนั่นเอง

2. กรอบอ้างอิงที่มีความเร็วสัมพัทธ์มีค่าคงที่ คือ $\mathbf{v}_0$

จากรูป กรอบ S′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{i}$ เช่น S′ เป็นกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งบนรถไฟที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ $\mathbf{v}_0$ ในรูปที่ 2.9 เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุก้อนหนึ่งหรืออนุภาคอันหนึ่ง เมื่อเปรียบเทียบกับ S และ S′ เขียนได้ดังลำดับดังนี้

$$\mathbf{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

ซึ่งมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

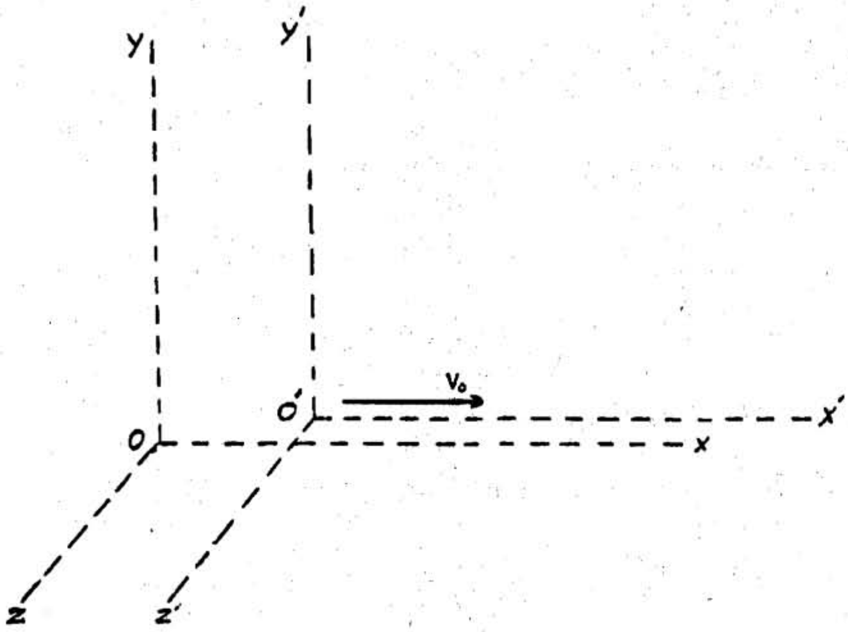
$$x' = x - x_0$$

ในที่นี้ x_0 ไม่ใช่ค่าคงที่ แต่ $x_0 = v_0t$

เมื่อ $x' = x - v_0t$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



รูปที่ ๒.๙ กรอบ S' เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v_0 สัมพัทธ์กับ S

และค่าความเร็ว **v** และ **v'** เปรียบเทียบกับ S และ S'

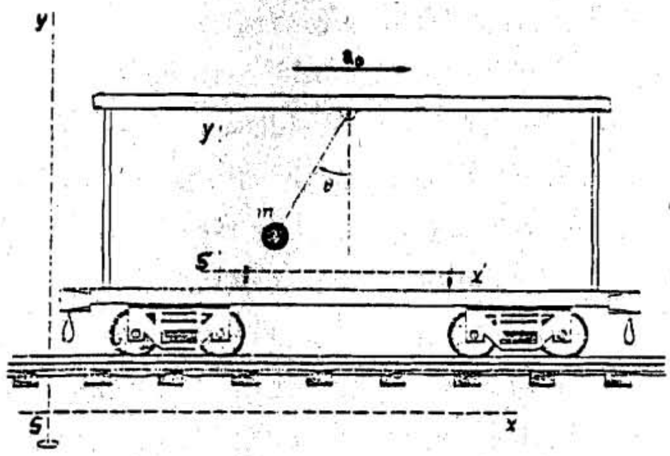
$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (dx/dt)\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k} \\
&= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\
\mathbf{v}' &= (dx'/dt)\hat{i} + (dy'/dt)\hat{j} + (dz'/dt)\hat{k} \\
&= [d(x-v_0t)/dt]\hat{i} + (dy/dt)\hat{j} + (dz/dt)\hat{k} \\
&= (v_x - v_0)\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\
&= \mathbf{v} - v_0\hat{i} \\
&= \mathbf{v} - \mathbf{v}_0
\end{aligned}
$$

เมื่อหาอนุพันธ์อีกครั้ง จะได้ความเร่งในแต่ละกรอบ ดังนี้ (v_0 = ค่าคงที่)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= d\mathbf{v}/dt \\
\mathbf{a}' &= d\mathbf{v}/dt \\
&= d(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)/dt \\
&= d\mathbf{v}/dt \\
&= \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าปริมาณทางฟิสิกส์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของ 2 กรอบนี้ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งและความเร็วต่างกัน แต่ความเร่งของวัตถุหรืออนุภาคเหมือนกัน

3. กรอบอ้างอิงเคลื่อนที่สัมพัทธ์ด้วยความเร่ง ถ้าให้ $t = 0$ O′ ซ้อน O และ S′ เคลื่อนที่ไปตามแกน x ด้วยความเร่ง $a_0 = a_0\hat{i}$ เช่น S เป็นกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งเทียบกับผิวโลก และ S′ เป็นกรอบนิ่งที่ติดกับรถยนต์ซึ่งแล่นด้วยความเร่ง a_0 เมื่อเทียบกับผิวโลก ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 กรอบ S′ เคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว a_0 สัมพัทธ์กับ S

จากรูปที่ 2.10 จะเห็นมวลแขวนจากเพดานของรถรางซึ่งทำมุม θ กับแนวดิ่งโดย $\tan\theta = a_0/g$ แม้ว่ามวล m จะอยู่นิ่งใน S′ แต่มวล m จะเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร่ง a_0 เมื่อเทียบกับกรอบ S

2.3.3 กรอบอ้างอิงเฉื่อย (inertia reference frame) กรอบอ้างอิงในข้อ 1 และข้อ 2 เป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย ซึ่งหมายถึง กรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่ง หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิงอีกอันหนึ่ง เพื่อให้เข้าใจในเรื่องกรอบอ้างอิงเฉื่อย ลองสมมติว่าท่านอยู่ในสถานการณ์ดังต่อไปนี้

"สมมติว่าท่านเป็นผู้ที่มีอันจะกินคนหนึ่ง ชวนพรรคพวก 2-3 คน เช่าเคบินใต้ท้องเรือโดยสารขนาดใหญ่ลำหนึ่ง ภายในเคบินพอจะมีแมลงปีกอยู่บ้าง เช่น แมลงวัน มีตู้ปลาขนาดใหญ่มีปลาอยู่ 4-5 ตัว นอกนั้นจะมีกระป๋องซึ่งมีน้ำอยู่เต็มแขวนอยู่ และมีรูรั่วทำให้มีน้ำหยดตลอดเวลามายังภาชนะที่รองรับอยู่ที่พื้น ขณะที่เรือลำนี้ทอดสมอ ลองสังเกตสิ่งรอบตัวท่านดังนี้

- การบินของพวกแมลงในทุกทิศทุกทางในเคบินนั้น
- การว่ายน้ำของปลาในตู้ในทุกทิศทุกทาง
- การหยดของน้ำ
- ลองโยนสิ่งของอะไรก็ได้ระหว่างเพื่อน
- การกระโดดโดยใช้เท้าชิดกันในทุกทิศทุกทางภายในเคบิน

ท่านจะพบว่าขณะที่เรือทอดสมอ คลื่นสงบนั้น การบินของแมลง การว่ายน้ำของปลา การโยนของ

ระหว่างเพื่อน ระยะทางที่ท่านกระโดดได้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับทิศทางเลย หยดน้ำก็หยดในแนวดิ่ง

ถ้าเรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ มีค่าเท่าใดก็ตาม คลื่นสงบ ท่านจะพบว่าการบินของแมลง การว่ายของปลา การหยดของน้ำ การโยนของ หรือการกระโดดของท่าน ไม่มีอะไรเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเลย หมายความว่าแมลงไม่ได้ใช้เวลาบินไปทางหัวเรือมากกว่าบินไปทางท้ายเรือเพื่อให้ได้ระยะทางเท่ากัน ทั้ง ๆ ที่มันอยู่ในอากาศ ปลาไม่ได้ใช้ความพยายามมากขึ้นเมื่อว่ายไปทางหัวเรือมากกว่าไปทางท้ายเรือ การว่ายน้ำเพื่อกินเหยื่อในอ่างเลี้ยงปลายังมีลักษณะเหมือนตอนเรือทอดสมอ หยดน้ำยังหยดในแนวดิ่ง ไม่ได้เอียงไปทางท้ายเรือ ทั้ง ๆ ที่หยดน้ำใช้เวลาส่วนหนึ่งอยู่ในอากาศขณะที่เรือเคลื่อนที่ การโยนของระหว่างเพื่อนของท่านก็ไม่ได้ใช้แรงเพิ่มขึ้นเมื่อเพื่อนอยู่ทางหัวเรือ และใช้แรงน้อยลงเมื่อเพื่อนอยู่ทางท้ายเรือ สภาพยังเหมือนเรือหยุดนิ่ง ระยะทางที่ท่านกระโดดเมื่อเรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ก็ยังเหมือนสภาพตอนเรือหยุดนิ่ง หรือควันบุหรี่ก็ยังลอยขึ้นตรง ๆ ไม่ได้เอียงไปทางไหน เหตุการณ์แบบนี้ท่านอาจจะพบเห็นเมื่อท่านอยู่บนเครื่องบินโดยสารจัมโบเจ็ต ขณะบินด้วยความเร็วคงที่ ลมสงบ ทั้งเรือโดยสารที่แล่นด้วยความเร็วคงที่และเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วคงที่เป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย”

กิจกรรม 2.5

ให้นักศึกษาอธิบายความแตกต่างระหว่างกรอบอ้างอิงแบบต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วข้างต้น และระบุประเภทของกรอบอ้างอิงสำหรับสิ่งต่าง ๆ ที่กล่าวไว้ในสถานการณ์สมมติข้างต้น

โดยปกติ กรอบอ้างอิงเฉื่อยแท้จริงเกือบไม่มีเลย เพราะทุก ๆ ระบบในเอกภพมีการเคลื่อนที่และเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งมีความเร่งด้วย เช่น กรอบที่ติดกับผิวโลก จะหมุนรอบแกนแกนหนึ่งเพราะโลกหมุนรอบตัวเอง และยังหมุนรอบดวงอาทิตย์ด้วย กรอบที่ติดอยู่กับดวงอาทิตย์ก็เคลื่อนที่ไปในกาแลกซี อย่างไรก็ดี ในการอธิบายปรากฏการณ์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ในชีวิตประจำวันนั้น เราอาจถือว่าโลกของเราเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยได้

สรุป

ปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุเช่นการกระจัดความเร็วและความเร่งพิจารณาได้ทั้งในหนึ่งมิติ สองและสามมิติ โดยในบทนี้ศึกษาเฉพาะการเคลื่อนที่ซึ่งเกิดขึ้นในธรรมชาติภายใต้ความโน้มถ่วง และโดยเครื่องยนต์

แบบฝึกหัดที่ 2

2.1 ความเร็วของอนุภาคในหน่วย เมตรต่อวินาที เขียนได้เป็น $v = 7t + 5$ เมื่อ t เป็นวินาที จงหาฟังก์ชันของตำแหน่ง $x(t)$

ตอบ $x(t) = 3.5t^2 + 5t + x_0$

2.2 ตำแหน่งของอนุภาคขึ้นอยู่กับเวลา คือ $x = at^2 + bt + c$ เมื่อ $a = 1$ เมตรต่อวินาที², $b = -5$ เมตรต่อวินาที และ $c = 1$ เมตร

(ก) จงหาการกระจัดและความเร็วเฉลี่ยในอันตรภาคเวลา $t=3$ วินาที ถึง $t=4$ วินาที

(ข) จงหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ณ เวลา t ใด ๆ

ตอบ (ก) 2 เมตร, 2 เมตรต่อวินาที (ข) $v = 2t - 5$ เมตรต่อวินาที

2.3 เทหวัตถุอันหนึ่งเริ่มต้นเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งด้วยความเร่ง 4 เมตรต่อวินาที² นาน 10 วินาที จึงแล่นด้วยความเร็วคงที่เป็นเวลา 20 วินาที ต่อจากนั้นจึงลดความเร็วลงด้วยอัตราหน่วง 5 เมตรต่อวินาที² จนหยุด จงหา

(ก) ระยะทางทั้งหมด (ข) เวลาที่ใช้ทั้งหมดที่วัตถุนั้นแล่นไปได้

ตอบ (ก) 1,160 เมตร (ข) 38 วินาที

2.4 เครื่องบินลำหนึ่งเริ่มออกวิ่งจากหยุดนิ่งไปตามทางวิ่งด้วยความเร่งคงที่ เมื่อวิ่งไปได้ทางทั้งหมด 400 เมตร และใช้เวลา 30 วินาทีก็ร่อนขึ้นสู่อากาศ จงหาความเร็วของเครื่องบินนั้นขณะพ้นทางวิ่ง

ตอบ 26.7 เมตรต่อวินาที

2.5 เมื่อไฟเขียวเปิด รถยนต์คันหนึ่งออกวิ่งจากหยุดนิ่งด้วยความเร่ง 4 เมตรต่อวินาที² พร้อมกันนั้นรถบรรทุกคันหนึ่งก็วิ่งผ่านจุดในแนวเดียวกัน (คนละช่องทางวิ่ง) ด้วยความเร็วคงตัว 10 เมตรต่อวินาที พุ่งนำหน้ารถยนต์ไปก่อน

(ก) รถยนต์จะวิ่งไปทันรถบรรทุกในระยะทางเท่าใด

(ข) ขณะที่ทันกันนั้นรถยนต์มีความเร็วเท่าใด

ตอบ (ก) 50 เมตร (ข) 20 เมตรต่อวินาที

2.6 ขว้างเทหวัตถุขึ้นไปในแนวดิ่ง เมื่อขึ้นไปสูง 5 เมตร เทหวัตถุนั้นมีความเร็ว $7\sqrt{2}$ เมตรต่อวินาที จงหา

(ก) ความเร็วต้น

(ข) เทหวัตถุนั้นขึ้นไปได้ทางสูงสุดเท่าใด

(ค) เทหวัตถุนั้นอยู่ในอากาศนานเท่าใด

(ง) ขว้างไปแล้ว 2 วินาที เทหวัตถุนั้นอยู่ที่ไหนและวิ่งอย่างไร

(จ) ที่ความสูง 8.4 เมตร เทหวัตถุวิ่งอย่างไรและเร็วเท่าไร

ตอบ (ก) 14 เมตรต่อวินาที (ข) 10 เมตร (ค) 2.9 วินาที

(ง) 8.4 เมตร วิ่งลง 5.6 เมตรต่อวินาที (จ) ขึ้นหรือลง 5.6 เมตรต่อวินาที

2.7 ปืนใหญ่ทำมุม 45 องศากับแนวนอน ยิงลูกปืนด้วยอัตราเร็ว 300 เมตรต่อวินาที จงหา

(ก) ลูกปืนขึ้นสูงสุดเท่าใด

(ข) ลูกปืนอยู่ในอากาศนานเท่าใด

(ค) พิสัยการเคลื่อนที่เท่ากับเท่าใด

ตอบ (ก) 2.3×10^3 เมตร (ข) 43.3 วินาที (ค) 9.18×10^3 เมตร

2.8 เด็กคนหนึ่งเตะลูกบอลจากพื้นหญ้าด้วยความเร็ว 18 เมตรต่อวินาที ทำมุม 53.1 องศากับแนวนอน จงหา

(ก) เวลาในอากาศ

(ข) ความสูงของลูกบอล

(ค) ระยะทางในแนวนอนที่ลูกบอลตก

ตอบ (ก) 2.94 วินาที (ข) 10.6 เมตร (ค) 31.7 เมตร

2.9 ชายคนหนึ่งขับรถฝ่าพายุฝนด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สังเกตเห็นหยดน้ำฝนที่หน้าต่างรถไหลเป็นทางในแนวทำมุม 80° กับแนวดิ่ง เมื่อเขาหยุดรถ เขาสังเกตเห็นว่าฝนตกในแนวดิ่ง จงคำนวณหาความเร็วสัมพัทธ์ของฝนเทียบกับรถ

(ก) เมื่อจอดนิ่ง และ

(ข) เมื่อกำลังแล่นด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ตอบ (ก) 14.1 กิโลเมตรต่อชั่วโมงในแนวดิ่ง

(ข) 81.2 กิโลเมตรต่อชั่วโมง 80° กับแนวดิ่ง

2.10 จุด P และ Q ตั้งอยู่ริมแม่น้ำแนวเส้นตรงฝั่งเดียวกันและอยู่ห่างกัน 1 กิโลเมตร ชายคนหนึ่งเดินจาก P ไป Q แล้วย้อนกลับมา P ด้วยความเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ชายอีกคนหนึ่งพายเรือในน้ำนิ่งได้ 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าเขาพายเรือจาก P ไป Q แล้วย้อนกลับมายัง P อีก ถามว่าชายทั้งสองคนนั้นเสียเวลาในการเดินทางคนละเท่าใด ถ้ากระแสน้ำไหลจาก P ไป Q ด้วยความเร็ว 2 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ตอบ คนเดิน 30 นาที คนพาย 40 นาที