บทที่ 4
การหาสายงานข่ายงานเหมาะที่สุดด้วยขั้นตอนวิธีเอาท์–ออฟ–คิลเตอร์
(Network-Flow Optimization with the Out-of-kilter Algorithm)

ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ เป็นขั้นตอนวิธีที่พัฒนาขึ้น สำหรับปัญหาสายข่ายงานที่มีความจุ ซึ่งเป็นปัญหาของการส่งสายงานจำนวนหนึ่ง ผ่านข่ายงานเพื่อให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ มาจากแนวคิดของกำหนดการเชิงเส้น ทฤษฎีภาวะคู่กัน (duality theory) และเงื่อนไขส่วนเติมเต็มสำรอง (complementary slackness conditions) ขั้นตอนวิธีดังกล่าวประกอบด้วย 5 ขั้นตอนพื้นฐาน โดยก่อนที่จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีนี้ ต้องกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีพื้นฐานเสียก่อน

4.1 <u>นิยามพื้นฐาน</u>

ข่ายงานความจุ (capacitated network) คือข่ายงานซึ่งแต่ละเส้นเชื่อม กำหนดขอบเขตบนและ/หรือขอบเขตล่างของความจุ โดยแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) จะใช้สัญกรณ์ต่อไปนี้ คือ

f_{ij} = สายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i,j)

l_{ij} = ขอบเขตล่างของความจุที่เส้นเชื่อม (i,j)

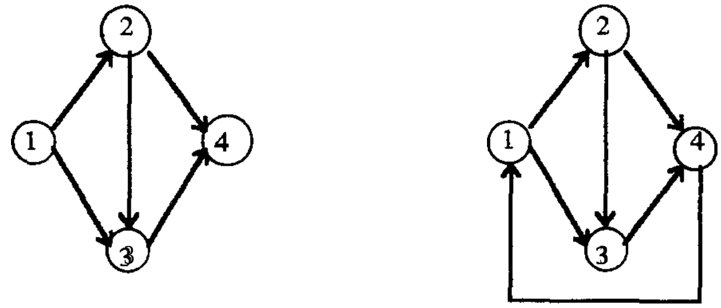
u_{ij} = ขอบเขตบนของความจุที่เส้นเชื่อม (i,j)

c_{ij} = ค่าใช้จ่ายในการส่งสายงาน 1 หน่วยจาก i ไป j

โดยที่ $l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$ เสมอ

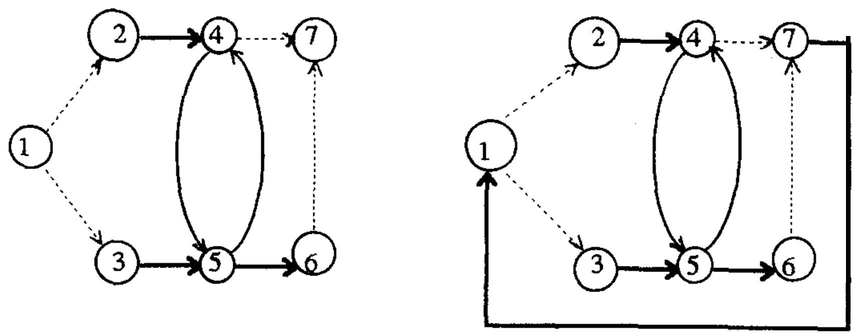
เส้นเชื่อมกลับ (return arc) คือเส้นเชื่อมที่กำหนดเพิ่มเติมจากเส้นเชื่อมเดิมของข่ายงาน เพื่อให้การอนุรักษ์สายงานที่แต่ละบัพเป็นจริง

จากรูป 4.1 (ก) การอนุรักษ์สายงานที่บัพ 1 และบัพ 4 ไม่เป็นจริง จึงกำหนดเส้นเชื่อมกลับจากบัพ 4 มา 1 ดังรูป 4.1 (ข) ส่วนรูป 4.2 (ก) เป็นข่ายงาน ซึ่งมีบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้นพิเศษ และบัพ 7 เป็นบัพสุดท้ายพิเศษ ซึ่งการอนุรักษ์สายงานไม่เป็นจริงที่สองบัพนี้ จึงเพิ่มเส้นเชื่อมจากบัพ 7 มา 1 ดังรูป 4.2 (ข)



(ก) (ข)

รูป 4.1 (ก) ข่ายงานระบุทิศทาง (ข) แสดงเส้นเชื่อมกลับ



(ก) (ข)

รูป 4.2 (ก) ข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นพิเศษและบัพสุดท้ายพิเศษ
(ข) แสดงการกำหนดเส้นเชื่อมกลับ

4.2 <u>ทฤษฎีบทพื้นฐาน</u>

สำหรับที่แต่ละเส้นเชื่อมระบุทิศทาง (i,j) กำหนดให้ f_{ij} คือปริมาณสายงานจากบัพ i ไป j โดยที่

1. ถ้า $f_{ij} = 0$ แล้ว ไม่มีสายงานที่เส้นเชื่อม (i,j)
2. ถ้า $f_{ij} > 0$ แล้ว มีสายงานถูกส่งผ่านจากบัพ i ไป j เมื่อ $l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$

แทนปัญหาสายงานข่ายงาน ด้วยกำหนดการเชิงเส้นดังนี้

หาค่าต่ำสุด $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด

$$f_{ij} \leq u_{ij} \qquad ; (i,j) \in A \tag{4.1}$$

$$f_{ij} \geq l_{ij} \qquad ; (i,j) \in A \tag{4.2}$$

$$\sum_{j\in N} f_{ji} - \sum_{j\in N} f_{ij} = 0 \qquad ; \forall i \in N, i \neq j \tag{4.3}$$

และ $\quad f_{ij} \geq 0 \qquad ; \forall\ (i,j) \in A$

จัดรูปแบบใหม่ โดยคูณฟังก์ชันเป้าหมายด้วย (-1) เพื่อให้มีค่าสูงสุด ดังนี้

หาค่าสูงสุด $\sum_{(i,j)\in A} (-c_{ij} f_{ij})$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j\in N} f_{ij} - \sum_{j\in N} f_{ji} = 0 \qquad ; \forall i \in N \tag{4.4}$$

$$f_{ij} \leq u_{ij} \tag{4.5}$$

$$-f_{ij} \leq -l_{ij} \tag{4.6}$$

และ $$f_{ij} \geq 0 \tag{4.7}$$

เรียกปัญหากำหนดการเชิงเส้นนี้ว่าปัญหาเดิม (primal problem) เนื่องจากทุกๆ ปัญหาเดิมของกำหนดการเชิงเส้น จะมีปัญหาซึ่งสอดคล้องกัน คือ ปัญหาคู่ (dual problem) ในกรณีนี้ปัญหาคู่คือ

หาค่าต่ำสุด $\sum_{(i,j)\in A} (u_{ij}\alpha_{ij} - l_{ij}\delta_{ij})$

โดยมีข้อจำกัด

$$\pi_i - \pi_j + \alpha_{ij} - \delta_{ij} \geq -c_{ij} \qquad ; \forall (i,j) \in A$$

π_i ไม่จำกัดค่าสำหรับทุกๆ $i \in N$

$\alpha_{ij} \geq 0 \quad ; \forall (i,j) \in A$

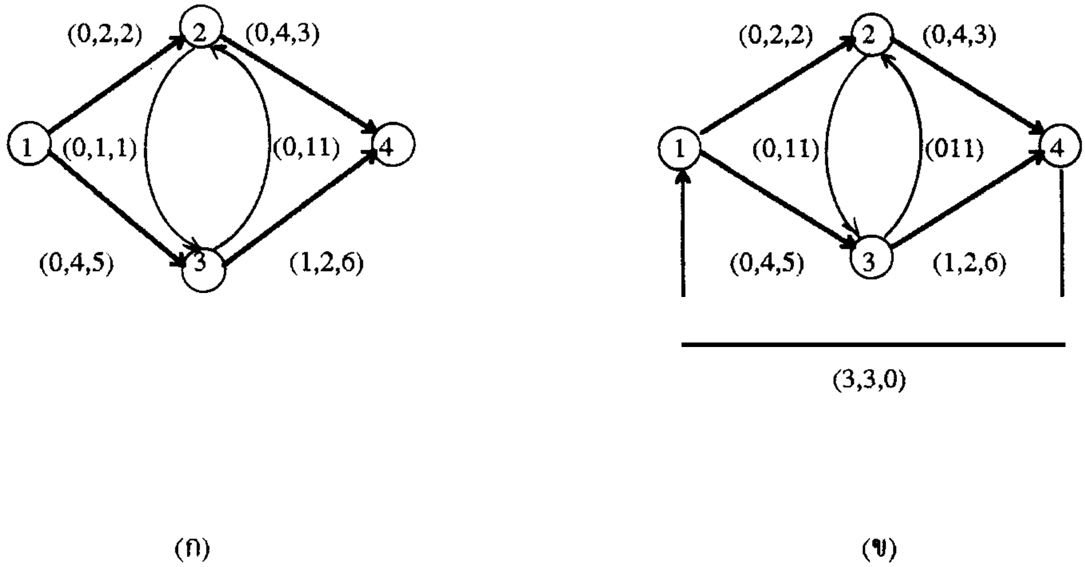
$\delta_{ij} \geq 0 \quad ; \forall (i,j) \in A$

ตัวแปร π เกี่ยวข้องกับข้อจำกัดของการอนุรักษ์สายงาน (4.4) ของปัญหาเดิม ซึ่งเป็นสมการ ตัวแปร π จึงไม่จำกัดค่า ตัวแปร α ของปัญหาคู่เกี่ยวข้องกับข้อจำกัดขอบเขตบนของ

ความจุ (4.5) ส่วนตัวแปร δ เกี่ยวข้องกับข้อจำกัดขอบเขตล่างของความจุ (4.6) สำหรับแต่ละตัวแปรตัดสินใจ f_{ij} ของปัญหาเดิม จะมีข้อจำกัดของปัญหาควบคู่

<u>**ตัวอย่าง 4.1**</u> กำหนดข่ายงานซึ่งต้องการส่งสายงาน 3 หน่วยจากบัพ 1 ไป 4 ผ่านข่ายงาน ดังรูป 4.3 (ก) เมื่อสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อม แทน (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) จงเขียนกำหนดการเชิงเส้นแทนปัญหา

เนื่องจากการอนุรักษ์สายงานไม่เป็นจริงที่บัพ 1 และ 4 จึงกำหนดเส้นเชื่อม (4,1) เพิ่ม โดยให้ f_{41} มีค่าเท่ากับปริมาณสายงานที่จะส่งจากบัพ 1 ไป 4 คือ 3 หน่วย และให้ $l_{41} = u_{41}$ คือ 3 หน่วย โดยไม่มีค่าใช้จ่ายมาเกี่ยวข้อง หรือ $c_{41} = 0$ ดังรูป 4.3 (ข)



รูป 4.3 (ก) ข่ายงานความจุ (ข) ข่ายงานที่เพิ่มเส้นเชื่อมกลับ

ปัญหาเดิม คือ

หาค่าสูงสุด $-2f_{12} - 5f_{13} - f_{23} - 3f_{24} - f_{32} - 6f_{34}$

บัพ
$$\begin{cases} f_{12} + f_{13} - f_{41} = 0 \\ -f_{12} + f_{23} + f_{24} - f_{32} = 0 \\ -f_{13} - f_{23} + f_{32} + f_{34} = 0 \\ -f_{24} - f_{34} + f_{41} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
 & \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & f_{12} & & & & & & & \leq & 2 \\
 & & & f_{13} & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & & f_{23} & & & & & \leq & 1 \\
\text{ขอบเขตบน} & & & & & f_{24} & & & & \leq & 4 \\
 & & & & & & f_{32} & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & f_{34} & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & f_{41} & \leq & 3 \\
\text{ขอบเขตล่าง} & \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. & & & & & & -f_{34} & & \leq & -1 \\
 & & & & & & & & -f_{41} & \leq & -3
\end{array}
$$

$$\text{และ } f_{ij} \geq 0 \ ; \ \forall (i,j) \in A$$

จากปัญหาเดิม ที่เส้นเชื่อม (1,2) ซึ่ง $i = 1$ และ $j = 2$ เนื่องจาก $l_{12} = 0$ นั่นคือ จากข้อจำกัด (4.6) $-f_{12} \leq -0$ หรือ $f_{12} \geq 0$ ซึ่งซ้ำกับข้อจำกัด (4.7) ดังนั้นจึงไม่มี δ_{12} ในข้อจำกัดแรกของปัญหาคู่ และ $c_{12} = 2$

ข้อจำกัดแรกของปัญหาคู่คือ

$$\pi_1 - \pi_2 + \alpha_{12} \quad \geq \quad -2$$

ที่เส้นเชื่อม (1,3) ในที่นี้ $i = 1$ และ $j = 3$ เนื่องจาก $l_{13} = 0$ จากข้อจำกัด (4.6) $-f_{13} \leq -0$ หรือ $f_{13} \geq 0$ ซ้ำกับข้อจำกัด (4.7) จึงไม่มี δ_{13} ในข้อจำกัดที่สองของปัญหาคู่ และ $c_{13} = 5$

ข้อจำกัดที่สองของปัญหาคู่คือ

$$\pi_1 - \pi_3 + \alpha_{13} \quad \geq \quad -5$$

สำหรับข้อจำกัดที่ 3 ถึงข้อจำกัดที่ 5 ก็ให้พิจารณาในทำนองเดียวกับ ข้อจำกัดที่ 1 และ 2

ที่เส้นเชื่อม (3,4) ซึ่ง $i = 3$ และ $j = 4$ มี $l_{34} = 1$ จากข้อจำกัด (4.6) $-f_{34} \leq -1$ และ $c_{34} = 6$

ข้อจำกัดที่ 6 ของปัญหาคู่คือ

$$\pi_3 - \pi_4 + \alpha_{34} - \delta_{34} \ \geq \ -6$$

ในทำนองเดียวกัน ข้อจำกัดที่ 7 ของปัญหาคู่ คือ

$$\pi_1 - \pi_4 + \alpha_{41} - \delta_{41} \ \geq \ 0$$

หรือสรุปเป็น

ปัญหาคู่คือ

หาค่าต่ำสุด $2\alpha_{12} + 4\alpha_{13} + 1\alpha_{23} + 4\alpha_{24} + 1\alpha_{32} + 2\alpha_{34} + 3\alpha_{41} - \delta_{34} - 3\delta_{41}$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{array}{lr}
\pi_1 - \pi_2 + \alpha_{12} & \geq -2 \\
\pi_1 - \pi_3 + \alpha_{13} & \geq -5 \\
\pi_2 - \pi_3 + \alpha_{23} & \geq -1 \\
\pi_2 - \pi_4 + \alpha_{24} & \geq -3 \\
-\pi_2 + \pi_3 + \alpha_{32} & \geq -1 \\
\pi_3 - \pi_4 + \alpha_{34} - \delta_{34} & \geq -6 \\
-\pi_1 + \pi_4 + \alpha_{41} - \delta_{41} & \geq 0
\end{array}
$$

โดยที่ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ ไม่จำกัดค่า

$\alpha_{ij} \geq 0 \quad ; \forall (i,j) \in A$

$\delta_{ij} \geq 0 \quad ; \forall (i,j) \in A$

ถ้าหาผลเฉลยของปัญหาเดิมและปัญหาคู่ได้ ผลเฉลยนี้จะเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุด เมื่อและต่อเมื่อ

1. ผลเฉลยของปัญหาเดิมและปัญหาคู่ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้

2. สำหรับทุกๆ ตัวแปรของปัญหาคู่ที่เป็นบวก ($\alpha_{ij} > 0$ และ $\delta_{ij} > 0$) ข้อจำกัดที่สอดคล้องกันของปัญหาเดิมจะเป็นสมการ

3. สำหรับทุกๆ ข้อจำกัดของปัญหาคู่ที่เป็นอสมการ ตัวแปรของปัญหาเดิมที่สอดคล้องกัน (f_{ij}) จะมีค่าเป็น 0

เงื่อนไขสองเงื่อนไขสุดท้ายคือเงื่อนไขส่วนเติมเต็มสำรอง เมื่อรวมเข้ากับข้อจำกัดของความเป็นไปได้ จะให้ผลของเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่สภาวะค่าเหมาะที่สุด ดังนี้

<u>**ความเป็นไปได้ของปัญหาเดิม**</u>

$P_1 : \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0$ (การอนุรักษ์สายงาน) $; \forall i \in N$

$P_2 : l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$ (ข้อจำกัดความจุ) $; \forall (i,j) \in A$

ความเป็นไปได้ของปัญหาคู่

D_1 : $\pi_i - \pi_j + \alpha_{ij} - \delta_{ij} \geq -c_{ij}$

D_2 : $\alpha_{ij} \geq 0$ $\qquad \forall (i,j) \in A$

D_3 : $\delta_{ij} \geq 0$

ส่วนเติมเต็มคงเหลือ

C_1 : ถ้า $\pi_i - \pi_j +$ a,, $- \delta_{ij} \geq -c_{ij}$ แล้ว $f_{ij} = 0$

C_2 : ถ้า a,, ≥ 0 แล้ว $f_{ij} = u_{ij}$

C_3 : ถ้า $\delta_{ij} > 0$ แล้ว $f_{ij} = l_{ij}$

เงื่อนไขส่วนเติมเต็มสำรอง มาจากทฤษฎีของส่วนเติมเต็มสำรอง ซึ่งกล่าวว่า ที่สภาวะค่าเหมาะที่สุด ผลคูณของตัวแปรของปัญหาเดิม กับตัวแปรสำรองในปัญหาคู่ มีค่าเป็น 0 และในทำนองเดียวกัน ผลคูณของตัวแปรของปัญหาคู่กับตัวแปรสำรองของปัญหาเดิม มีค่าเป็น 0

จากเงื่อนไขทั้งสามส่วนข้างต้น เขียนเป็นเงื่อนไขที่สมมูลกัน คือ

1. ถ้า $\pi_j - \pi_i > c_{ij}$ แล้ว $\alpha_{ij} > 0$ และ $f_{ij} = u_{ij}$
2. ถ้า $\pi_j - \pi_i < c_{ij}$ แล้ว $\delta_{ij} > 0$ และ $f_{ij} = l_{ij}$
3. ถ้า $\pi_j - \pi_i = c_{ij}$ แล้ว $l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$

ทำให้เราเลือกค่า α_{ij} และ δ_{ij} ได้ดังนี้

4. α_{ij} = ค่าสูงสุด $[0, \pi_j - \pi_i - c_{ij}]$
5. δ_{ij} = ค่าสูงสุด $[0, -\pi_j + \pi_i + c_{ij}]$

และ 6. $\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0 \quad \forall i \in N$

เงื่อนไขสำคัญที่ทำให้ได้ผลเฉลยค่าเหมาะที่สุด คือเงื่อนไข 1, 2, 3 และ 6

ถ้าให้ $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ แล้วจะเขียนเงื่อนไข 1-3 และ 6 ได้ใหม่เป็น

k_1 : ถ้า $\bar{c}_{ij} < 0$ แล้ว $f_{ij} = u_{ij}$

k_2 : ถ้า $\bar{c}_{ij} > 0$ แล้ว $f_{ij} = l_{ij}$

k_3 : ถ้า $\bar{c}_{ij} = 0$ แล้ว $l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$

k_4 : การอนุรักษ์สายงานที่แต่ละบัพเป็นจริง

ถ้าบัพ i บัพ j และเส้นเชื่อม (i,j) สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเหมาะที่สุด คือ k_1, k_2 หรือ k_3 แล้ว จะเรียกเส้นเชื่อมนั้นว่าเป็น**อิน-คิลเตอร์** (in0kilter) แต่ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) ไม่สอดคล้องกับ k_1, k_2 หรือ k_3 จะเรียกเส้นเชื่อมนั้นว่าเป็น **เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์** (out-of-kilter) ผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาจะเกิดขึ้นเมื่อทุกๆ เส้นเชื่อมเป็นอิน-คิลเตอร์ และการอนุรักษ์สายงานเป็นจริง มิฉะนั้นปัญหาก็จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

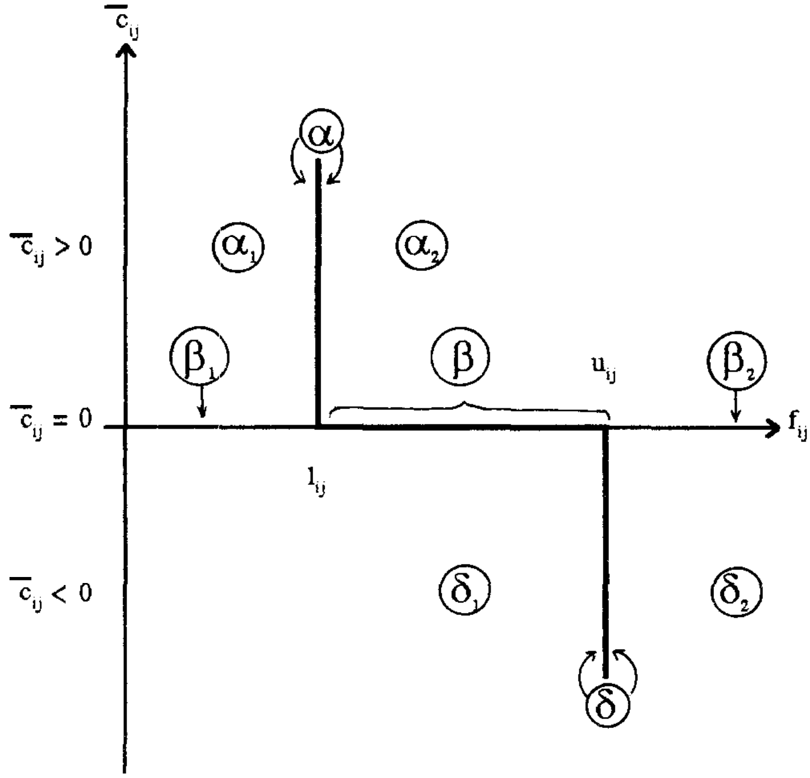
จาก k_1 - k_3 แต่ละเส้นเชื่อม มีสถานะที่เป็นไปได้ 9 สถานะ คือ

1. ถ้า $\bar{c}_{ij} > 0$ และ $f_{ij} = l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α ซึ่งเป็น อิน-คิลเตอร์
2. ถ้า $\bar{c}_{ij} > 0$ และ $f_{ij} < l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_1 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์
3. ถ้า $\bar{c}_{ij} > 0$ และ $f_{ij} > l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_2 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์
4. ถ้า $\bar{c}_{ij} = 0$ และ $l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β ซึ่งเป็น อิน-คิลเตอร์
5. ถ้า $\bar{c}_{ij} = 0$ และ $f_{ij} < l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β_1 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์
6. ถ้า $\bar{c}_{ij} = 0$ และ $f_{ij} > u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β_2 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์
7. ถ้า $\bar{c}_{ij} < 0$ และ $f_{ij} = u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ ซึ่งเป็น อิน-คิลเตอร์
8. ถ้า $\bar{c}_{ij} < 0$ และ $f_{ij} < u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ_1 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์
9. ถ้า $\bar{c}_{ij} < 0$ และ $f_{ij} > u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ_2 ซึ่งเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์

สรุปสถานะที่เป็นไปได้ของ (i,j) ได้ดังตาราง 4.1 หรือแผนภาพในรูป 4.4

ตาราง 4.1 แสดงสถานะที่เป็นไปได้ของเส้นเชื่อม (i,j)

สถานะ	$\bar{c}$	f_{ij}	เป็นหรือไม่เป็นอิน-คิลเตอร์
a	มากกว่า 0	เท่ากับ l_{ij}	เป็น
β	เท่ากับ 0	$l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$	
δ	น้อยกว่า 0	เท่ากับ u_{ij}	
α_1	ulnnil 0	น้อยกว่า l_{ij}	ไม่เป็น
β_1	เท่ากับ 0	น้อยกว่า l_{ij}	
δ_1	น้อยกว่า 0	น้อยกว่า u_{ij}	
α_2	ulnnil 0	มากกว่า l_{ij}	
β_2	เท่ากับ 0	มากกว่า u_{ij}	
δ_2	น้อยกว่า 0	uinnil u_{ij}	



รูป 4.4 แผนภาพแสดงสถานะที่เป็นไปได้ของเส้นเชื่อม (i,j)

จากแผนภาพแสดงสถานะที่เป็นไปได้ของเส้นเชื่อม (i,j) การตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) เริ่มจากการคำนวณค่า $\overline{c_{ij}}$ จาก

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$$

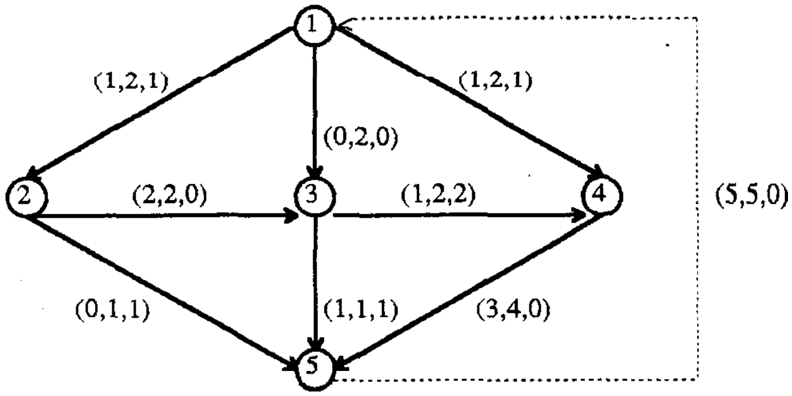
จากแผนภาพรูป 4.4 ถ้า $\overline{c}_{ij} > 0$ แล้วสถานะของเส้นเชื่อม (i,j) อาจเป็น α_1 หรือ α หรือ α_2 โดยให้พิจารณาสายงานของเส้นเชื่อม (i,j) หรือ f_{ij} เปรียบเทียบกับขอบเขตล่าง (l_{ij}) ของเส้นเชื่อม (i,j) นั่นคือ ถ้า $f_{ij} < l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_1 ถ้า $f_{ij} = l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α ถ้า $f_{ij} > l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_2

ถ้า $\overline{c}_{ij} = 0$ แล้วสถานะเส้นเชื่อม (i,j) อาจเป็น β_1 หรือ β หรือ β_2 โดยพิจารณาสายงานของเส้นเชื่อม (i,j) หรือ f_{ij} เปรียบเทียบกับช่วงตั้งแต่ขอบเขตล่าง (l_{ij}) ถึงขอบเขตบน (u_{ij}) ของเส้นเชื่อม (i,j) กล่าวคือ ถ้า $f_{ij} < l_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β_1 ถ้า $l_{ij} \le f_{ij} \le u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β และถ้า $f_{ij} > u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β_2

ถ้า $\overline{c}_{ij} < 0$ แล้วสถานะเส้นเชื่อม (i,j) อาจเป็น δ_1 หรือ δ หรือ δ_2 โดยพิจารณาสายงานของเส้นเชื่อม (i,j) หรือ f_{ij} เปรียบเทียบกับขอบเขตบน (u_{ij}) ของเส้นเชื่อม (i,j) ถ้า $f_{ij} < u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ_1 ถ้า $f_{ij} = u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ ถ้า $f_{ij} > u_{ij}$ แล้วเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ_2

การตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) โดยอาศัยแผนภาพ จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดข่ายงานซึ่งสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อม คือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) และ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$, $\pi_4 = \pi_5 = 1$ สายงานเริ่มต้น คือ $f_{12} = f_{14} = f_{34} = 2$, $f_{13} = f_{23} = f_{25} = 1$, $f_{35} = 0$ และ $f_{45} = 4$ และ $f_{51} = 5$ จงตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อม



จาก $\overline{c}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$

ที่เส้นเชื่อม (1,2), $\overline{c}_{12} = c_{12} + \pi_1 - \pi_2 = 1 + 0 - 0 = 1$ ซึ่ง $c_{12} > 0$

เนื่องจาก $f_{12} = 2$ และ $l_{12} = 1$ ดังนั้น $f_{12} > l_{12}$ เส้นเชื่อม (1,2) จึงมีสถานะเป็น α_2 เพราะ $\overline{c}_{12} > 0$ และ $f_{12} > l_{12}$

ที่เส้นเชื่อม (1,3), $\overline{c}_{13} = c_{13} + \pi_1 - \pi_3 = 0 + 0 - 0 = 0$

เนื่องจาก $f_{13} = 1$ และ $l_{13} = 0$, $u_{13} = 2$ ดังนั้น $l_{13} \leq f_{13} \leq u_{13}$ เส้นเชื่อม (1,3) จึงมีสถานะเป็น β เพราะ $\overline{c}_{13} = 0$ และ $l_{13} \leq f_{13} \leq u_{13}$

ที่เส้นเชื่อม (1,4), $\overline{c}_{14} = c_{14} + \pi_1 - \pi_4 = 1 + 0 - 1 = 0$

เนื่องจาก $f_{14} = 2$ และ $l_{14} = 1$, $u_{14} = 2$ ดังนั้น $l_{14} \leq f_{14} \leq u_{14}$ สถานะของเส้นเชื่อม (1,4) จึงเป็น β เพราะ $\overline{c}_{14} = 0$ และ $l_{14} \leq f_{14} \leq u_{14}$

ที่เส้นเชื่อม (2,3), $\overline{c}_{23} = c_{23} + \pi_2 - \pi_3 = 0 + 0 - 0 = 0$ และ $f_{23} = 1$ โดยที่ $l_{23} = u_{23} = 2$ สถานะของเส้นเชื่อม (2,3) จึงเป็น β_1 เพราะ $\overline{c}_{23} = 0$ และ $f_{23} < l_{23}$

ที่เส้นเชื่อม (2,5), $\overline{c}_{25} = c_{25} + \pi_2 - \pi_5 = 1 + 0 - 1 = 0$ และ $f_{25} = 1$ เมื่อ $l_{25} = 0$, $u_{25} = 1$ สถานะของเส้นเชื่อม (2,5) จึงเป็น β เพราะ $\overline{c}_{25} = 0$ และ $l_{25} \leq f_{25} \leq u_{25}$

ที่เส้นเชื่อม (3,4), $\overline{c}_{34} = c_{34} + \pi_3 - \pi_4 = 2 + 0 - 1 = 1$ และ $f_{34} = 2$ โดยที่ $l_{34} = 1$, $u_{34} = 2$ เส้นเชื่อม (3,4) มีสถานะเป็น α_2 เพราะ $\overline{c}_{34} > 0$ และ $f_{34} < l_{34}$

ที่เส้นเชื่อม (3,5), $\overline{c}_{35} = c_{35} + \pi_3 - \pi_5 = 1 + 0 - 1 = 0$ และ $f_{35} = 0$ โดยที่ $l_{35} = u_{35} = 1$ เส้นเชื่อม (3,5) มีสถานะเป็น β_1 เพราะ $\overline{c}_{35} = 0$ และ $f_{35} < l_{35}$

ที่เส้นเชื่อม (4,5), $\overline{c}_{45} = c_{45} + \pi_4 - \pi_5 = 0 + 1 - 1 = 0$ และ $f_{45} = 4$ เนื่องจาก $l_{45} = 3$ และ $u_{45} = 4$ เส้นเชื่อม (4,5) มีสถานะเป็น β เพราะ $\overline{c}_{45} = 0$ และ $l_{45} \leq f_{45} \leq u_{45}$

ที่เส้นเชื่อมกลับ (5,1), $\overline{c}_{51} = c_{51} + \pi_5 - \pi_1 = 0 + 1 - 0 = 1$ และ $f_{51} = 5$ เนื่องจาก $l_{51} = 5$ เส้นเชื่อม (5,1) มีสถานะเป็น α เพราะ $\overline{c}_{51} > 0$ และ $f_{51} = l_{51}$

4.3 <u>ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์</u>

ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จะหาค่า π_i และ f_{ij} เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเหมาะที่สุด จาก k_1 - k_4 เริ่มด้วยการกำหนดสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม ให้สอดคล้องกับการอนุรักษ์สายงานที่แต่ละบัพ และกำหนด π_i ที่แต่ละบัพให้มีค่าใดๆ หรือเพื่อความสะดวก เริ่มต้นมักให้ $\pi_i = 0$ จากนั้นคำนวณค่า c_{ij} เพื่อตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อม ถ้ามีบางเส้นเชื่อมที่มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ให้เลือกเส้นเชื่อมใดๆ ที่มีสถานะดังกล่าวมา 1 เส้นเชื่อม แล้วคำนวณวิถีจากบัพ j ไป i เมื่อต้องการเพิ่มสายงานในเส้นเชื่อม (i,j) หรือคำนวณวิถีจากบัพ i ไป j เมื่อต้องการลดสายงานในเส้นเชื่อม (i,j) การคำนวณวิถีเช่นนี้ ทำให้การปรับสายงานในเส้นเชื่อม (i,j) ไม่มีผลกระทบต่อการอนุรักษ์สายงาน จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะของเส้นเชื่อมอีกครั้งหนึ่ง ถ้ายังมีบางเส้นเชื่อม มีสถานะเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ อีก ก็ให้ใช้วิธีการเดิมจนกว่าทุกๆ *เส้นเชื่อม มีสถานะเป็น อิน-คิลเตอร์ ก็จะได้ผลเฉลยค่าเหมาะที่สุดของข่ายงาน* แต่ถ้าในการปรับสายงานที่เส้นเชื่อม ไม่อาจคำนวณวิถีได้ตามต้องการ ก็จะปรับค่า π เพื่อคำนวณสถานะของบางเส้นเชื่อมใหม่ หากปรับค่า π ไม่ได้ แสดงว่าข่ายงานไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้ หรือสรุปเป็นขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเส้นเชื่อม (i,j) ใดๆ ที่มีสถานะเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ถ้าไม่มีเส้นเชื่อม (i,j) ใดๆ ที่เป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ให้หยุดการคำนวณ

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาเพิ่มหรือลดสายงาน เพื่อให้เส้นเชื่อมจากขั้นตอนที่ 1 เป็น อิน-คิลเตอร์

- ถ้าเพิ่มสายงาน ให้ไปขั้นตอนที่ 3
- ถ้าลดสายงาน ให้ไปขั้นตอนที่ 4

ขั้นตอนที่ 3 ใช้กระบวนการกำหนดป้าย คำนวณวิถีจากบัพ j ไปบัพ i ซึ่งจะเพิ่มสายงานได้โดยไม่ทำให้เส้นเชื่อมนี้เป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ เมื่อคำนวณวิถีได้และเพิ่มสายงานให้เส้นเชื่อม (i,j) แล้ว ถ้า (i,j) เป็นอิน-คิลเตอร์ ให้กลับไปขั้นตอนที่ 1 แต่ถ้า (i,j) ยังคงเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 หรือเมื่อคำนวณวิถีจากบัพ j ไป i ไม่ได้ ให้ไปขั้นตอนที่ 5

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณวิถีจากบัพ i ไป j ถ้าหาได้ให้ลดสายงานในเส้นเชื่อม (i,j) ถ้า (i,j) เป็น อิน-คิลเตอร์ ให้กลับไปทำขั้นตอนที่ 1 แต่ถ้า (i,j) เป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 4 หรือถ้าคำนวณวิถีจากบัพ i ไป j ไม่ได้ ให้ไปขั้นตอนที่ 5

ขั้นตอนที่ 5 ปรับค่า π ใหม่ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 2 โดยคงป้ายเดิม สำหรับบัพที่กำหนดป้ายแล้ว ถ้า $\pi = \infty$ ให้หยุดการคำนวณ เนื่องจากไม่มีสายงานที่เป็นไปได้ของข่ายงาน

ในขั้นตอนที่ 3 และ 4 เป็นขั้นตอนของการใช้กระบวนการกำหนดป้าย เพื่อคำนวณวิถีจากบัพ j ไป i หรือจากบัพ i ไป j โดยมีรายละเอียดของกระบวนการ ดังนี้

1. ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_1 หรือ β_1 หรือ δ_1 หมายถึงเพิ่มสายงานให้ (i,j) ได้ โดยการทำให้ (i,j) มีสถานะเป็นอิน-คิลเตอร์ ด้วยการกำหนดป้ายให้บัพ j เป็น $[q_j, i^+]$ นั่นคือ บัพ j ได้รับสายงานเพิ่ม q_j หน่วย จากบัพ i เมื่อบัพ i มีสายงานอยู่ q_i หน่วย

   - ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_1 แล้ว q_j = ค่าต่ำสุด $[q_i, l_{ij} - f_{ij}]$
   - ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น β_1 หรือ δ_1 แล้ว q_j = ค่าต่ำสุด $[q_i, u_{ij} - l_{ij}]$

2. ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_2 หรือ β_2 หรือ δ_2 หมายถึงจะลดสายงานให้ (i,j) ได้ โดยการทำให้ (i,j) มีสถานะเป็นอิน-คิลเตอร์ ด้วยการกำหนดป้ายให้บัพ i เป็น $[q_i, j^-]$ นั่นคือ สามารถลดสายงานจากบัพ i ไป j ได้ q_i หน่วย เมื่อบัพ j มีสายงาย q_j หน่วย

   - ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α_2 หรือ β_2 แล้ว q_i = ค่าต่ำสุด $[q_j, f_{ij} - l_{ij}]$
   - ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น δ_2 แล้ว q_i = ค่าต่ำสุด $[q_j, f_{ij} - u_{ij}]$

3. ถ้าเส้นเชื่อม (i,j) มีสถานะเป็น α หรือ β หรือ δ หมายถึงไม่ต้องเปลี่ยนแปลงสายงานที่ (i,j) ยกเว้นสถานะ β ซึ่ งอาจเพิ่มสายงานได้ ถ้า $f_{ij} < u_{ij}$ หรืออาจลดสายงานลงได้ถ้า

$f_{ij} > l_{ij}$ แต่ต้องไม่ทำให้กระทบกระเทือนเงื่อนไขใดๆ

ในขั้นตอนที่ 5 เป็นขั้นตอนของการปรับค่า π เมื่อไม่อาจคำนวณวิถีจากบัพ j ไป i ได้หรือบัพ i ไป j ได้ โดยกำหนดให้

A เป็นเซตของบัพที่กำหนดป้ายแล้ว

$\bar{A}$ เป็นเซตของบัพที่ยังไม่ถูกกำหนดป้าย

สมมติว่าขณะนี้เรากำลังอยู่ที่บัพ x ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว และกำลังพิจารณาบัพ y ซึ่งยังไม่ถูกกำหนดป้าย

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า B เป็นเซตของเส้นเชื่อมจากหน้า ซึ่งมีบัพเริ่มต้นอยู่ใน A และบัพสุดท้ายอยู่ใน $\bar{A}$ เมื่อ $\bar{c} > 0$ และสายงานที่มีอยู่ไม่เกินขอบเขตบนของความจุ

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $\bar{B}$ เป็นเซตของเส้นเชื่อมผันกลับ ซึ่งมีบัพเริ่มต้นอยู่ใน $\bar{A}$ และบัพปลายอยู่ใน A เมื่อ $\bar{c} < 0$ และสายงานที่มีอยู่ไม่น้อยกว่าขอบเขตล่างของความจุ

ขั้นตอนของการปรับค่า π ประกอบด้วย

1. จากกรณีที่ 1 สำหรับ $\bar{c} > 0$ ใดๆ

$$\text{ให้ } z_1 = \begin{cases} \text{ค่าต่ำสุด}_B\ [\bar{c}_{xy}] & ;\ \text{ถ้า } B \neq \phi \\ \infty & ;\ \text{ถ้า } B = \phi \end{cases}$$

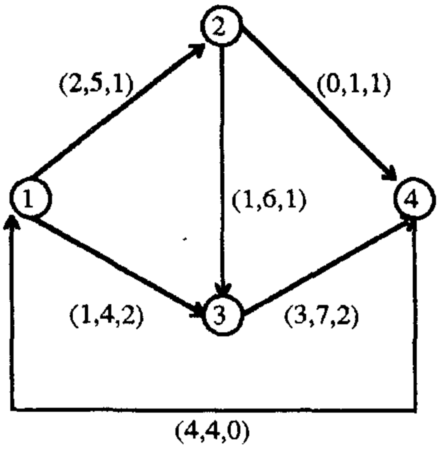
2. จากกรณีที่ 2 สำหรับ $\bar{c} < 0$ ใดๆ

$$\text{ให้ } z_2 = \begin{cases} \text{ค่าต่ำสุด}_{\bar{B}}\ [-\bar{c}_{yx}] & ;\ \text{ถ้า } \bar{B} \neq \phi \\ \infty & ;\ \text{ถ้า } \bar{B} = \phi \end{cases}$$

3. กำหนดให้ z = ค่าต่ำสุด $[z_1, z_2]$
4. เพิ่มค่า z ให้กับ π ของทุกๆ บัพใน $\bar{A}$

แล้วกลับไปทำตามกระบวนการกำหนดป้ายต่อไป

<u>ตัวอย่าง 4.3</u> กำหนดข่ายงาน ซึ่งสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อม คือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) และ $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = \pi_3 = 2$, $\pi_4 = 4$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{12} = 2$, $f_{13} = 2$, $f_{23} = 1$, $f_{24} = 1$, $f_{34} = 3$ และ $f_{41} = 4$ จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ด้วยขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์



จาก $\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} + \pi_i - \pi_j$

$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{12} + \pi_1 - \pi_2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$\bar{c}_{13} = \bar{c}_{13} + \pi_1 - \pi_3 = 1 + 2 - 2 = 1$

$\bar{c}_{23} = \bar{c}_{23} + \pi_2 - \pi_3 = 1 + 2 - 2 = 1$

$c_{24} = \bar{c}_{24} + \pi_2 - \pi_4 = 1 + 2 - 4 = -1$

$\bar{c}_{34} = \bar{c}_{34} + \pi_3 - \pi_4 = 2 + 2 - 4 = 0$

$\bar{c}_{41} = \bar{c}_{41} + \pi_4 - \pi_1 = 0 + 4 - 1 = 3$

เส้นเชื่อม (1,2) มีค่า $\bar{c}_{12} = 0$ และ $f_{12} = 2$ ซึ่ง $l_{12} \le f_{12} \le u_{12}$ ดังนั้นเส้นเชื่อม (1,2) มีสถานะเป็น β

เส้นเชื่อม (1,3) มีค่า $\bar{c}_{13} = 1$ และ $f_{13} = 2.$ ซึ่ง $f_{13} > l_{13}$ เส้นเชื่อม (1,3) มีสถานะเป็น a,

เส้นเชื่อม (2,3) มีค่า $\bar{c}_{23} = 1$ และ $f_{23} = 1$ ซึ่ง $f_{23} = l_{23}$ เส้นเชื่อม (2,3) มีสถานะเป็น α

เส้นเชื่อม (2,4) มีค่า $\bar{c}_{24} = -1$ และ $f_{24} = 1$ ซึ่ง $f_{24} = l_{24}$ เส้นเชื่อม (2,4) มีสถานะเป็น δ

เส้นเชื่อม (3,4) มีค่า $\bar{c}_{34} = 0$ และ $f_{34} = 3$ ซึ่ง $l_{34} \le f_{34} \le u_{34}$ เส้นเชื่อม (3,4) มีสถานะเป็น β

เส้นเชื่อม (4,1) มีค่า $\bar{c}_{41} = 3$ และ $f_{41} = 3$ ซึ่ง $f_{41} = l_{41}$ เส้นเชื่อม (4,1) มีสถานะเป็น α

เนื่องจากยังมีเส้นเชื่อม (1,3) มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงใช้ขั้นตอนวิธีดังนี้

<u>รอบที่ 1</u> เลือกเส้นเชื่อม (1,3) ซึ่งมีสถานะเป็น α_2 และ $f_{13} = 2$, $l_{13} = 1$ จึงลดสายงานในเส้นเชื่อมนี้ได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{13} = l_{13}$ และเส้นเชื่อมนี้จะได้เปลี่ยนสถานะเป็น α ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์ จึงกำหนดป้ายให้บัพ 1 เป็น $[q_1, 3]$ โดยที่ $q_3 = 1$ หน่วย

และ q_1 = ค่าต่ำสุด $[q_3, f_{13} - l_{13}]$

= ค่าต่ำสุด [1, 2-1]

= 1

หรือกำหนดป้ายให้บัพ 1 เป็น $[1,3^-]$ แล้วคำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 3

จากบัพ 1 ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว พิจารณาเส้นเชื่อม (1,2) มีสถานะเป็น β ที่ $f_{12} = 2$, $u_{12} = 5$ ดังนั้น $f_{12} < u_{12}$ จึงเพิ่มสายงานได้อีก กำหนดป้ายให้บัพ 2 เป็น $[q_2,1^+]$ โดยที่

q_2 = ค่าต่ำสุด $[q_1, u_{12} - f_{12}]$

= ค่าต่ำสุด [1, 5-2]

= 1

กำหนดป้ายให้บัพ 2 เป็น $[1,1^+]$

ส่วนเส้นเชื่อม (4,1) ไม่อาจเพิ่มหรือลดสายงานได้ เพราะมีสถานะเป็น α

ที่บัพ 2 ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว พิจารณาเส้นเชื่อม (2,3) หรือเส้นเชื่อม (2,4)

เส้นเชื่อม (2,3) มีสถานะเป็น α ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์ จึงเพิ่มสายงานอีกไม่ได้

เส้นเชื่อม (2,4) มีสถานะเป็น δ ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์ จึงเพิ่มสายงานอีกไม่ได้

นั่นคือไม่สามารถคำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 3 ได้

จึงต้องปรับค่า π

ในที่นี้ บัพ 1 และ 2 กำหนดป้ายแล้ว

บัพ 3 และ 4 ยังไม่ถูกกำหนดป้าย

ดังนั้น $A = \{1, 2\}$

$\overline{A} = \{3, 4\}$

เส้นเชื่อม (1,3) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า ซึ่งมีบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A บัพ 3 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน $\overline{A}$, $\overline{c}_{13} > 0$ และ $f_{13} \leq u_{13}$ ดังนั้น เส้นเชื่อม (1,3) อยู่ใน B

เส้นเชื่อม (2,3) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า ซึ่งบัพ 2 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A บัพ 3 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน $\overline{A}$, $\overline{c}_{23} > 0$ และ $f_{23} \leq u_{23}$ ดังนั้น เส้นเชื่อม (2,3) อยู่ใน B

เส้นเชื่อม (2,4) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า ซึ่งบัพ 2 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A บัพ 4 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน $\overline{A}$ แต่ $\overline{c}_{24} = -1$ ซึ่ง $\overline{c}_{24} < 0$ นั่นคือเส้นเชื่อม (2,4) ไม่อยู่ใน B

หรือ B = {(1,3), (2,3)}

z_1 = ค่าต่ำสุด $[\overline{c}_{13}\ \overline{c}_{23}]$

= ค่าต่ำสุด [1,1]

= 1

เส้นเชื่อม (4,1) เป็นเส้นเชื่อมผันกลับ เพราะบัพ 4 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน $\overline{A}$ และบัพ 1 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน A แต่ $\overline{c}_{41} = 3 < 0$ นั่นคือเส้นเชื่อม (4,1) ไม่อยู่ใน $\overline{B}$ หรือ $\overline{B} = \phi$

$z_2 = \infty$

ดังนั้น z = ค่าต่ำสุด$[z_1, z_2]$

= ค่าต่ำสุด$[1, \infty]$

= 1

ปรับค่า π ของบัพ 3 และ 4 เป็น $\pi_3 = 2 + 1 = 3$

$\pi_4 = 3 + 1 = 4$

ส่วนค่า π_1 และ π_2 คงเดิม

เนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงค่า π ของบัพ 3 และ 4 จึงต้องคำนวณ $\overline{c}_{ij}$ ของเส้นเชื่อมที่เกี่ยวข้องกับบัพ 3 และ 4 ดังนี้

$\overline{c}_{13} = 2 + 1 - 3 = 0$

$\overline{c}_{23} = 1 + 2 - 3 = 0$

$\overline{c}_{24} = 1 + 2 - 5 = -2$

เส้นเชื่อม (1,3) มีค่า $\overline{c}_{13} = 0$ และ $f_{13} = 2$ ซึ่ง $l_{13} \leq f_{13} \leq u_{13}$ จึงมีสถานะเป็น β

เส้นเชื่อม (2,3) มีค่า $\overline{c}_{23} = 0$ และ $f_{23} = 2$ ซึ่ง $l_{23} \leq f_{23} \leq u_{23}$ มีสถานะเป็น β

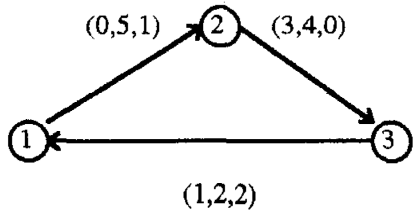
เส้นเชื่อม (2,4) มีค่า $\overline{c}_{24} = -2$ และ $f_{24} = 1$ ซึ่ง $f_{24} = u_{24}$ มีสถานะเป็น δ

ส่วนเส้นเชื่อมอื่นๆ ยังคงมีสถานะเช่นเดิม นั่นคือขณะนี้ทุกๆ เส้นเชื่อมมีสถานะเป็นอิน-คิลเตอร์ หรือได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด โดยที่

$f_{12} = 2,\ f_{13} = 2,\ f_{23} = 1,\ f_{24} = 1,\ f_{34} = 3,\ f_{41} = 4$

ค่าใช้จ่าย = $f_{12}c_{12} + f_{13}c_{13} + f_{23}c_{23} + f_{24}c_{24} + f_{34}c_{34} + f_{41}c_{41}$ = 14 หน่วย

__ตัวอย่าง 4.4__ กำหนดข่ายงาน ซึ่งสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) และ $\pi_1 = \pi_3 = 0$ $\pi_2 = 1$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{12} = f_{23} = f_{31} = 2$ จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ด้วยขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์



จาก $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ ได้ค่า $\bar{c}_{12} = 0$, $\bar{c}_{23} = 1$ และ $\bar{c}_{31} = 2$

เส้นเชื่อม (1,2) มีค่า $\bar{c}_{12} = 0$ และ $f_{12} = 2$ ซึ่ง $l_{12} < f_{12} < u_{12}$ จึงมีสถานะเป็น β

เส้นเชื่อม (2,3) มีค่า $\bar{c}_{23} = 1$ และ $f_{23} = 2$ หน่วย ซึ่ง $f_{23} < l_{23}$ จึงมีสถานะเป็น α_1

เส้นเชื่อม (3,1) มีค่า $\bar{c}_{31} = 2$ และ $f_{31} = 2$ หน่วย ซึ่ง $f_{31} > l_{31}$ จึงมีสถานะเป็น α_2

เนื่องจากมีเส้นเชื่อม (2,3) และ (3,1) ที่มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงใช้ขั้นตอนวิธีดังนี้

<u>รอบที่ 1</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (2,3)
2. เส้นเชื่อม (2,3) มีสถานะเป็น α_1 เพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{23} = l_{23}$
3. คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 2 โดยกระบวนการกำหนดป้าย

เนื่องจากเส้นเชื่อม (2,3) มีสถานะเป็น α_1 และเพิ่มสายงานได้อีก 1 หน่วย จึงกำหนดป้ายให้บัพ 3 เป็น $[q_3,2^+]$ โดยที่ $q_2 = 1$ และ q_3 = ค่าต่ำสุด$[q_2, l_{12} - f_{12}]$

= ค่าต่ำสุด[1, 3-2]

= 1

หรือกำหนดป้ายให้บัพ 3 เป็น $[1,2^+]$

จากบัพ 3 ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว พิจารณาเส้นเชื่อม (3,1) มีสถานะเป็น α_2 ซึ่งไม่สามารถเพิ่มสายงานให้เส้นเชื่อม (3,1) ได้อีก จึงไม่อาจกำหนดป้ายที่บัพ 1 ได้

หรือสรุปเป็น

<u>บัพ</u>	<u>ป้าย</u>
3	$[1,2^+]$
1	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (3,2) มีสถานะเป็น α_2 เพิ่มสายงานไม่ได้

คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 1 ไม่ได้ จึงต้องปรับค่า π

ในขั้นตอนของการปรับค่า π จะแบ่งกลุ่มของบัพที่กำหนดป้ายแล้วไว้ใน A และกลุ่มของบัพที่ยังไม่ถูกกำหนดป้ายไว้ใน $\bar{A}$ ในที่นี้มีบัพ 3 ที่กำหนดป้ายแล้ว ส่วนบัพ 1 และ 2 ยังไม่ถูกกำหนดป้าย

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อม (3,1) ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า ที่มี 3 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A และ 1 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน $\bar{A}$ โดยที่ $\bar{c}_{31} = 2$ ซึ่งมากกว่า 0 และ $f_{31} \le u_{31}$ ดังนั้นเส้นเชื่อมจากหน้า (3,1) จึงเป็นเส้นเชื่อมที่อยู่ใน B หรือ $B \neq \phi$

z_1 = ค่าต่ำสุด $[\overline{c_{31}}]$

= ค่าต่ำสุด [2]

= 2

ในที่นี้เส้นเชื่อม (2,3) ไม่อาจพิจารณาเป็นเส้นเชื่อมผันกลับที่อยู่ใน $\overline{B}$ ได้ แม้ว่าเส้นเชื่อม (2,3) จะมีบัพ 2 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A และบัพ 3 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน A แต่ $\overline{c_{23}} = 1$ ซึ่ง $\overline{c_{23}} < 0$ ดังนั้น $\overline{B}$ จึงเป็นเซตว่าง หรือ $\overline{B} = \phi$ นั่นคือ $z_2 = \infty$

หรือสรุปเป็น

$A = \{3\}$ $\quad\quad$ $\bar{A} = \{1,2\}$

$B = \{(3,1)\}$ $\quad\quad$ $\bar{B} = \phi$

z_1 = ค่าต่ำสุด$_B$ [2] = 2 $\quad\quad$ $z_2 = \infty$

$\therefore\ z = 2$

ปรับค่า z ให้กับค่า π ของบัพ 1 และบัพ 2 เป็น $\pi_1 = 2, \pi_2 = 3$ ส่วน $\pi_3 = 0$ แล้วตรวจสอบสถานะใหม่ คำนวณ $c_{12} = 0, c_{23} = 3$ และ $c_{31} = 0$ เส้นเชื่อม (1, 2) และ (2, 3) ยังคงมีสถานะเป็น β และ α_1 ตามลำดับ ส่วนเส้นเชื่อม (3, 1) มีสถานะเป็น β

<u>รอบที่ 2</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (2, 3)
2. เส้นเชื่อม (2, 3) มีสถานะเป็น α_1 เพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย
3. คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 2 โดยกระบวนการกำหนดป้าย

เนื่องจากเส้นเชื่อม (2,3) ยังคงมีสถานะเป็น α_1 จึงเพิ่มสายงานได้อีก 1 หน่วย จึงกำหนดป้ายให้บัพ 3 เป็น $[q_3, 2^+]$ โดยที่ $q_2 = 1$

และ q_3 = ค่าต่ำสุด $[q_2, l_{12} - f_{12}]$

= ค่าต่ำสุด [1, 3-2]

= 1

หรือกำหนดป้ายให้บัพ 3 เป็น $[1, 2^+]$

จากบัพ 3 ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว พิจารณาเส้นเชื่อม (3,1) มีสถานะเป็น β และ $f_{31} = u_{31}$ จึงเพิ่มสายงานให้เส้นเชื่อม (3,1) อีกไม่ได้ นั่นคือ ไม่อาจกำหนดป้ายให้บัพ 1 ได้

หรือสรุปเป็น

บัพ	**ป้าย**
3	$[1,2^{+}]$
1	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (3,1) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{31} = u_{31}$ เพิ่มสายงานไม่ได้

คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 2 ไม่ได้ จึงต้องปรับค่า π

ขั้นตอนของการปรับค่า π ในขณะนี้ บัพ 3 อยู่ใน A ส่วนบัพ 1 และ 2 อยู่ใน $\overline{A}$

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อมจากหน้า (3,1) ที่มีบัพ 3 เป็นบัพเริ่มต้นอยู่ใน A และ 1 เป็นบัพสุดท้ายอยู่ใน $\overline{A}$ แต่ $\overline{c}_{31} = 0$ หรือ $\overline{c}_{31} > 0$ ดังนั้นเส้นเชื่อม (3,1) จึงไม่อยู่ใน B หรือ $B = \phi$ นั่นคือ $z_2 = \infty$

หรือสรุปดังนี้

$A = \{3\}$ $\qquad\qquad \overline{A} = \{1,2\}$

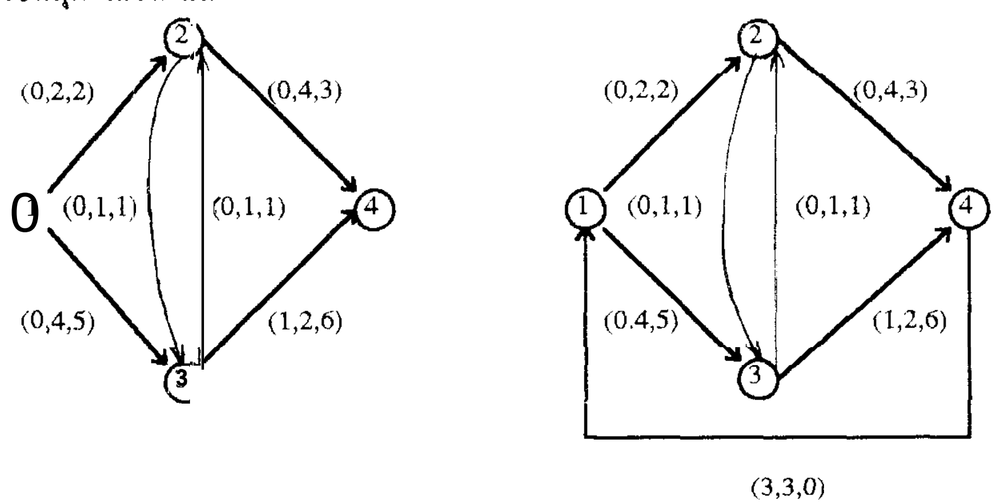
$B = \phi$ $\qquad\qquad \overline{B} = \phi$

$z_1 = \infty$ $\qquad\qquad z_2 = \infty$

$\therefore\ z = \infty$

ไม่มีสายงานที่เป็นไปได้ของข่ายงาน

ตัวอย่าง 4.5 ใช้ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ หาสายงานที่จะส่งผ่านแต่ละเส้นเชื่อม โดยต้องการส่งสายงาน 3 หน่วยผ่านข่ายงาน ให้สอดคล้องกับข้อจำกัดของแต่ละเส้นเชื่อมและเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เมื่อสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อมแทน (u, l, c) ดังรูป 4.5 (ก)



รูป 4.6 (ก) ตัวอย่างข่ายงาน **(ข) เพิ่มเส้นเชื่อมกลับ (4,1)**

ก่อนที่จะใช้ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ต้องกำหนดเส้นเชื่อมกลับ (4,1) เพื่อให้การอนุรักษ์สายงานเป็นจริง โดยมี $l_{41} = u_{41} = 3$ หน่วย และ $c_{41} = 0$ ดังรูป 4.5 (ข)

กำหนดค่าเริ่มต้น ให้ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ และ $f_{12} = 0, f_{13} = 2, f_{23} = 0, f_{32} = 2$ $f_{24} = 2, f_{34} = 0$ และ $f_{41} = 2$

จากนั้นคำนวณค่า $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ สำหรับแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) แล้วตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อมดังตาราง 4.2 เนื่องจากมีบางเส้นเชื่อมที่มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟขคิลเตอร์ จึงต้องใช้ขั้นตอนวิธีดังนี้

<u>รอบที่ 1</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (4,1) (หรืออาจเลือกเส้นเชื่อมอื่นๆ ที่มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์)

2. เส้นเชื่อม (4,1) มีสถานะเป็น β_1 จึงเพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{41} = l_{41} = 3$ หน่วย (ในที่นี้ $q_4 = 1$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 4 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

<u>บัพ</u>	**<u>ป้าย</u>**
1	$[1, 4^+]$
2	กำหนดป้ายไม่ได้ $\because$ (1, 2) เป็นอิน-คิลเตอร์
3	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะการเพิ่มสายงาน จะทำให้ (1, 3) ยิ่งมีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์

คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 4 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{1\}$ $\qquad \bar{A} = \{2, 3, 4\}$

$B = \{(1, 2), (1,3)\}$ $\qquad \bar{B} = \phi$

$z_1 =$ ค่าต่ำสุด $[2, 5] = 2$ $\qquad z_2 = \infty$

$\therefore z = 2$

ดังนั้นจึงปรับค่า $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 2$ ส่วน $\pi_1 = 0$ จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะของเส้นเชื่อมใหม่ ดังตาราง 4.3

<u>รอบที่ 2</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (4,1)

2. สถานะของเส้นเชื่อม (4, 1) เป็น α_1 จึงเพิ่มสายงานได้ 1 หน่วยเพื่อให้ $f_{41} = l_{41}$ ($q_4 = 1$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 4 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

บัพ	**ป้าย**
1	$[1, 4^+]$
2	$[1, 1^+]$
3	$[1, 2^-]$
4	$[1, 3^+]$

วิถีคือ 1-2-3-4 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีเป็น $f_{41} = 3$, $f_{12} = 1$, $f_{23} = 0$ และ $f_{34} = 1$ ส่วนสายงานในเส้นเชื่อมอื่นๆ คงเดิม แล้วตรวจสอบสถานะใหม่ ดังตาราง 4.4

<u>รอบที่ 3</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (1, 3)

2. สถานะของเส้นเชื่อม (1, 3) เป็น α_2 จึงลดสายงานลงได้ 2 หน่วย เพื่อให้ $f_{13} = l_{13}$ ($q_3 = 2$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 3 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

บัพ	**ป้าย**
1	$[1, 3^-]$
2	$[1, 1^+]$ เพราะเส้นเชื่อม (1, 2) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{12} < u_{12}$
3	$[1, 2^-]$

วิถีคือ 1-2-3 ปรับสายงานที่แตะละเส้นเชื่อมในวิถีเป็น $f_{13} = 1$, $f_{12} = 2$ และ $f_{32} = 0$ ส่วนสายงานในเส้นเชื่อมอื่นๆ คงเดิม แล้วตรวจสอบสถานะใหม่ ดังตาราง 4.5

<u>รอบที่ 4</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (1, 3)

2. สถานะของเส้นเชื่อม (1, 3) เป็น α_2 จึงลดสายงานลงได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{13} = l_{13}$ ($q_3 = 1$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 3 โดยกระบวนการกำหนดป้าย

บัพ	**ป้าย**
1	$[1, 3^-]$
2	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (1, 2) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{12} = u_{12}$ จึงไม่อาจเพิ่มสายงานได้อีก
4	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (4, 1) มีสถานะเป็น α ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์แล้ว

คำนวณวิถีจากบัพ 1 ไป 3 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{1\}$ $\bar{A} = \{2, 3, 4\}$

$B = \{(1, 3)\}$ $\bar{B} = \phi$

$z_1 = \underset{B}{\text{ค่าต่ำสุด}} [3] = 3$ $z_2 = \infty$

$\therefore z = 3$

ปรับค่า $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 5$ ส่วน $\pi_1 = 0$ จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะใหม่ ดังตาราง 4.6

รอบที่ 5

1. เลือกเส้นเชื่อม (2, 4)
2. สถานะของเส้นเชื่อม (2, 4) เป็น α_2 จึงลดสายงานได้ 2 หน่วย เพื่อให้ $f_{24} = l_{24}$ ($q_4 = 2$ หน่วย)
3. คำนวณวิถีจากบัพ 2 ไป 4 โดยกระบวนการกำหนดป้าย

บัพ	**ป้าย**
2	[2, 4]
3	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (2, 3) และ (3, 2) ต่างก็มีสถานะเป็น α ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์
1	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (1, 2) มีสถานะเป็น δ ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์

คำนวณวิถีจากบัพ 2 ไป 4 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{2\}$ $\bar{A} = \{1, 3, 4\}$

$B = \{(2, 3), (2, 4)\}$ $\bar{B} = \{(1, 2)\}$

$z_1 = \underset{B}{\text{ค่าต่ำสุด}} [1, 3] = 1$ $z_2 = \underset{\bar{B}}{\text{ค่าต่ำสุด}} [-(-3)] = 3$

$\therefore z = 1$

ปรับค่า $\pi_1 = 1, \pi_3 = 6, \pi_4 = 6$ ส่วน $\pi_2 = 5$ จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะใหม่ ดังตาราง 4.7

รอบที่ 6

1. เลือกเส้นเชื่อม (2, 4)
2. เส้นเชื่อม (2, 4) มีสถานะเป็น α_2 ลดสายงานได้ 2 หน่วย ($q_4 = 2$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 2 ไป 4 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

บัพ	**ป้าย**
2	$[2, 4^-]$
3	$[1, 2^+]$
1	$[1, 3^-]$
4	กำหนดป้ายไม่ได้ เพราะเส้นเชื่อม (2, 4) มีสถานะเป็น α_2 จึงเพิ่มสายงานไม่ได้ ส่วนเส้นเชื่อม (3, 4) มีสถานะเป็น α ซึ่งเป็นอิน-คิลเตอร์

คำนวณวิถีจากบัพ 2 ไป 4 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad \bar{A} = \{4\}$

$B = \{(2, 4), (3, 4)\}$ $\qquad \bar{B} = \phi$

$z_1 = \underset{B}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ [2, 6] = 2$ $\qquad z_2 = \infty$

$\therefore\ z = 2$

ปรับค่า $\pi_4 = 8$ ส่วน $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 5$ และ $\pi_3 = 6$ จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะใหม่ ซึ่งให้ผลว่าทุกๆ เส้นเชื่อมมีสถานะเป็นอิน-คิลเตอร์ คล้ายกับตาราง 4.7 ยกเว้นเส้นเชื่อม (2, 4) ซึ่งมีสถานะเป็น β และสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ

$f_{12} = f_{24} = 2$, $f_{13} = f_{34} = 1$, $f_{23} = f_{32} = 0$ และ $f_{41} = 3$ ค่าใช้จ่ายทั้งหมด = 21 หน่วย

ตาราง 4.2 สถานะเริ่มต้นของเส้นเชื่อม (i,j)

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	2	0	a
(1, 3)	5	2	α_2
(2, 3)	1	0	*a*
(2, 4)	3	2	α_2
(3, 2)	1	2	α_2
(3, 4)	6	0	α_1
(4, 1)	0	2	β_1

ตารางที่ 4.3 สถานะหลังจากรอบที่ 1 ของการคำนวณ

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	0	0	β
(1, 3)	3	2	α_2
(2, 3)	1	0	*a*
(2, 4)	3	2	α_2
(3, 2)	1	2	α_2
(3, 4)	6	0	α_1
(4, 1)	2	2	α_1

ตาราง 4.4 สถานะหลังจากรอบที่ 2 ของการคำนวณ

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	0	1	β
(1, 3)	3	2	α_2
(2, 3)	1	0	a
(2, 4)	3	2	α_2
(3, 2)	1	1	α_2
(3, 4)	6	1	a
(4, 1)	2	3	a

ตารางที่ 4.5 สถานะหลังจากรอบที่ 3 ของการคำนวณ

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	0	2	β
(1, 3)	3	1	α_2
(2, 3)	1	0	a
(2, 4)	3	2	α_2
(3, 2)	1	0	a
(3, 4)	6	1	a
(4, 1)	2	3	a

ตาราง 4.6 สถานะหลังจากรอบที่ 4 ของการคำนวณ

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	-3	2	δ
(1, 3)	0	1	β
(2, 3)	1	0	a
(2, 4)	3	2	α_2
(3, 2)	1	0	a
(3, 4)	6	1	a
(4, 1)	5	3	a

ตารางที่ 4.7 สถานะหลังจากรอบที่ 5 ของการคำนวณ

เส้นเชื่อม (i,j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	-2	2	δ
(1, 3)	0	1	β
(2, 3)	0	0	β
(2, 4)	2	2	α_2
(3, 2)	2	0	a
(3, 4)	6	1	a
(4, 1)	5	3	a

ตัวอย่าง 4.6 จากข่ายงานในตัวอย่าง 4.2 จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ด้วยขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์

จากตัวอย่าง 4.2 ตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อม ดังตาราง 4.8

เส้นเชื่อม (2, 3), (3, 4) และ (3, 5) มีสถานะเป็น เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงใช้ขั้นวิธีในการคำนวณดังนี้

<u>รอบที่ 1</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (2, 3)

2. เส้นเชื่อม (2, 3) มีสถานะเป็น β_1 จึงเพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{23} = l_{23} = 1$ หน่วย (ในที่นี้ $q_2 = 1$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 2 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

<u>บัพ</u>	**<u>ป้าย</u>**
3	$[1, 2^+]$
5	$[1, 3^+]$
2	$[1, 5^-]$

วิถีคือ 3-5-2 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีเป็น $f_{23} = 1$, $f_{35} = 1$ และ $f_{25} = 0$

ตรวจสอบสถานะใหม่ ดังตาราง 4.9 ยังคงมีเส้นเชื่อม (3, 4) และ (1, 2) มีสถานะเป็น α_2 ซึ่งเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงต้องคำนวณต่อไปรอบที่ 2

<u>รอบที่ 2</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (3, 4)

2. เส้นเชื่อม (3, 4) มีสถานะเป็น α_2 จึงลดสายงานได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{34} = l_{34} = 1$ หน่วย (ในที่นี้ $q_4 = 1$ หน่วย)

3. คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไป 4 โดยใช้กระบวนการกำหนดป้าย

<u>บัพ</u>	**<u>ป้าย</u>**
3	$[1, 4^-]$
1	$[1, 3^-]$
2	กำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้เพราะเส้นเชื่อม (2, 3) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{23} = l_{23}$ ลดสายงานอีกไม่ได้ และกำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้เพราะเส้นเชื่อม (1, 2) มีสถานะเป็น α_2 จึงเพิ่มสายงานไม่ได้
4	กำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้เพราะเส้นเชื่อม (1, 4) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{14} = u_{14}$ จึงเพิ่มสายงานไม่ได้
5	กำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้เพราะเส้นเชื่อม (3, 5) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{35} = u_{35}$ เพิ่มสายงานอีกไม่ได้

คำนวณวิถีจากบัพ 3 ไปบัพ 4 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = (1, 3)$ $\quad\quad$ $\overline{A} = \{2, 4, 5\}$

$B = \{(1, 2), (3, 4)\}$ $\quad\quad$ $\overline{B} = \phi$

$z_1 = \underset{B}{\text{ค่าต่ำสุด}} [1, 1] = 1$ $\quad\quad$ $z_2 = \infty$

$\therefore \quad z = \text{ค่าต่ำสุด}[z_1, z_2] = 1$

ปรับค่า π ของบัพ 2, 4 และ 5 เป็น $\pi_2 = 1$, $\pi_4 = \pi_5 = 2$ แล้วตรวจสอบสถานะ ดังตาราง 4.10 ซึ่งทุกๆ เส้นเชื่อมมีสถานะเป็น อิน-คิลเตอร์ นั่นคือ ได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด โดยที่

$f_{12} = 2$, $f_{13} = 1$, $f_{14} = 2$, $f_{23} = 2$, $f_{25} = 0$, $f_{34} = 2$, $f_{35} = 1$, $f_{45} = 4$ และ $f_{51} = 5$ หน่วย

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด = 9 หน่วย

ตาราง 4.8 สถานะของเส้นเชื่อมสำหรับ
การคำนวณในรอบที่ 1

เส้นเชื่อม (i, j)	$\overline{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	1	2	α_2
(1, 3)	0	1	β
(1, 4)	0	2	β
(2, 3)	Q	1	β_1
(2, 5)	0	1	β
(3, 4)	1	2	α_2
(3, 5)	cl	0	β_1
(4, 5)	0	4	β
(5, 1)	1	5	*a*

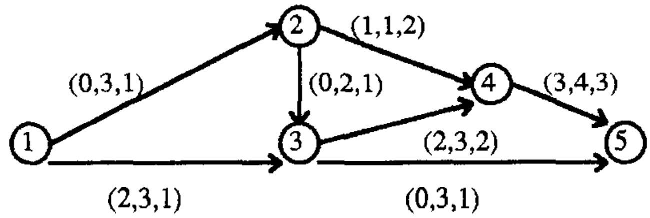
ตาราง 4.9 สถานะของเส้นเชื่อมสำหรับ
การคำนวณในรอบที่ 2

เส้นเชื่อม (i, j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	1	2	α_2
(1, 3)	0	1	β
(1, 4)	0	2	β
(2, 3)	0	2	β
(2, 5)	0	0	β
(3, 4)	1	2	α_2
(3, 5)	0	1	β
(4, 5)	0	4	β
(5, 1)	1	5	α

ตาราง 4.10 สถานะของเส้นเชื่อมหลัง
การคำนวณในรอบที่ 2

เส้นเชื่อม (i, j)	T_{ij}	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	0	2	β
(1, 3)	0	1	β
(1, 4)	-1	2	δ
(2, 3)	1	2	α
(2, 5)	0	0	β
(3, 4)	0	2	β
(3, 5)	-1	1	δ
(4, 5)	0	4	β
(5, 1)	2	5	α

<u>ตัวอย่าง 4.7</u> กำหนดข่ายงาน ซึ่งสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อม คือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) และ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = 0, \pi_3 = 1, \pi_5 = 2$ สายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ $f_{12} = 0, f_{13} = 2, f_{23} = 0, f_{24} = 0, f_{34} = 2, f_{35} = 0$ และ $f_{45} = 2$ จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ด้วยขั้นตอนวิธี เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์



รูป 4.6 ข่ายงานตัวอย่าง 4.7

ก่อนที่จะใช้ขั้นตอนวิธี เอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ต้องกำหนดเส้นเชื่อมกลับ (5,1) เพิ่มเติมจากข่ายงานในรูป 4.6 เพื่อให้การอนุรักษ์สายงานที่บัพ 1 และบัพ 5 เป็นจริง โดยให้ $l_{51} = u_{51} = 2$ และ $c_{51} = 0$

จากนั้นคำนวณค่า $\overline{c_{ij}} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ สำหรับแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) แล้วตรวจสอบสถานะของแต่ละเส้นเชื่อมดังตาราง 4.11 เนื่องจากมีเส้นเชื่อม (2,4) และ (4,5) มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงต้องคำนวณดังนี้

<u>รอบที่ 1</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (2,4)
2. เส้นเชื่อม (2,4) เพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย เพราะ (2,4) มีสถานะเป็น α_1 จึงเพิ่มสายงานเพื่อให้ $f_{24} = l_{24}$ [ในที่นี้ $q_2 = 1$]
3. คำนวณวิถีจากบัพ 4 ไปบัพ 2

<u>บัพ</u>	<u>ป้าย</u>
4	$[1, 2^{+}]$
5	$[1, 4^{+}]$
3	$[2, 2^{+}]$
1	กำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้เพราะ (1,3) มีสถานะเป็น β ซึ่ง $f_{13} = l_{13}$ จึงลดสายงานไม่ได้

2	กำหนดป้ายจากบัพ 4 ไม่ได้เพราะ (2,4) มีสถานะเป็น α_1 จึงลดสายงานไม่ได้

คำนวณวิถีจากบัพ 4 ไปบัพ 2 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{3, 4, 5\}$ $\qquad\qquad$ $\overline{A} = \{1, 2\}$

$B = \{(5, 1)\}$ $\qquad\qquad$ $\overline{B} = \phi$

$z_1 = \text{ค่าต่ำสุด}_{B}\ [2] = 2$ $\qquad\qquad$ $z_2 = \infty$

$\therefore\ z = \text{ค่าต่ำสุด}\ [z_1, z_2] = 2$

ปรับค่า π ให้กับบัพ 1 และ 2 เป็น $\pi_1 = 2, \pi_2 = 2$ ส่วนค่า π ของบัพอื่นๆ คงเดิม จากนั้นจึงตรวจสอบสถานะของเส้นเชื่อม ดังตาราง 4.12 ซึ่งยังคงมีเส้นเชื่อม (2,4) และ (4,5) มีสถานะเป็นเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ จึงคำนวณต่อไปในรอบที่ 2

<u>รอบที่ 2</u>

1. เลือกเส้นเชื่อม (2, 4)

2. เส้นเชื่อม (2, 4) มีสถานะเป็น α, จึงเพิ่มสายงานได้ 1 หน่วย เพื่อให้ $f_{24} = l_{24}$ [ในที่นี้ $q_2 = 1$]

3. คำนวณวิถีจากบัพ 4 ไปบัพ 2

<u>บัพ</u>	**<u>ป้าย</u>**
4	$[1, 2^{+}]$
5	$[1, 4^{+}]$
3	$[2, 2^{+}]$
1	กำหนดป้ายจากบัพ 3 ไม่ได้ เพราะ (2,3) มีสถานะเป็น α จึงลดสายงานไม่ได้
2	กำหนดป้ายจากบัพ 4 ไม่ได้ เพราะ (2,4) มีสถานะเป็น α_1 จึงลดสายงานไม่ได้

คำนวณวิถีจากบัพ 4 ไปบัพ 2 ไม่ได้ ต้องปรับค่า π

$A = \{3, 4, 5\}$ $\qquad\qquad$ $\overline{A} = \{1, 2\}$

$B = \phi$ $\qquad\qquad$ $\overline{B} = \phi$

$z_1 = \infty$ $\qquad\qquad$ $z_2 = \infty$

$\therefore\ z = \infty$ จึงไม่มีสายงานที่เป็นไปได้ของข่ายงาน

ตาราง 4.11 สถานะของเส้นเชื่อมสำหรับ
การคำนวณในรอบที่ 1

เส้นเชื่อม (i, j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	1	0	α
(1, 3)	0	2	β
(2, 3)	0	0	β
(2, 4)	2	0	α_1
(3, 4)	3	2	*a*
(3, 5)	0	0	β
(3, 5)	0	1	β
(4, 5)	1	2	α_1
(5, 1)	2	2	*a*

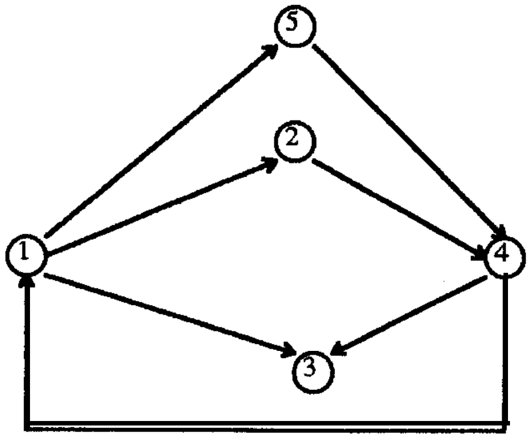
ตาราง 4.12 สถานะของเส้นเชื่อมหลัง
การคำนวณในรอบที่ 1

ส้นเชื่อม (i, j)	$\bar{c}_{ij}$	f_{ij}	สถานะ
(1, 2)	1	0	α
(1, 3)	2	2	α
(2, 3)	2	0	α
(2, 4)	4	0	α_1
(3, 4)	3	2	α
(3, 5)	0	0	β
(4, 5)	1	2	α_1
(5, 1)	0	2	β

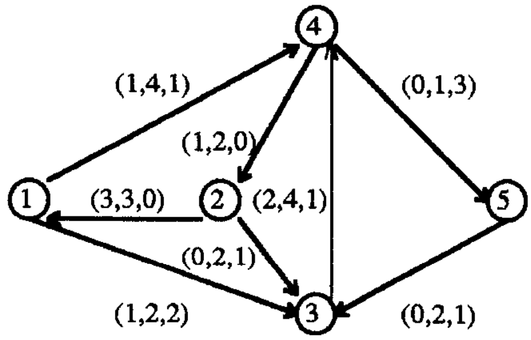
ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ เป็นขั้นตอนวิธีที่มีประสิทธิภาพและใช้กับปัญหาสายงานข่ายงานหลายประเภท เช่น ปัญหาสายงานสูงสุด ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด ปัญหาการขนส่ง เป็นต้น อีกประการหนึ่งขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ ต้องการผลเฉลยที่เป็นไปได้ ตามเงื่อนไขประการเดียว คือการอนุรักษ์สายงาน จึงลดความยุ่งยากในการตรวจสอบความเป็นไปได้ของผลเฉลย เมื่อเทียบกับกำหนดการเชิงเส้นของปัญหา แม้ว่าการใช้ขั้นตอนวิธีเอาท์-ออฟ-คิลเตอร์ กับข่ายงานขนาดใหญ่ จะเสียเวลาในการคำนวณ เพราะอาจต้องคำนวณหลายรอบ แต่ก็แก้ไขได้โดยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์แทนขั้นตอนวิธี

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จากข่ายงานที่กำหนดให้ ถ้า c_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการส่งสายงาน 1 หน่วย ผ่านเส้นเชื่อม (i,j) f_{ij} คือปริมาณสายงานที่มีอยู่ของเส้นเชื่อม (i,j) l_{ij} คือขอบเขตล่างของความจุ และ u_{ij} คือขอบเขตบนของความจุ ถ้ากำหนดให้ $f_{ij} \geq 0$ จงเขียนปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ของข่ายงาน และเขียนเงื่อนไขส่วนเติมเต็มสำรอง



2. จงหาสายงานสูงสุดจากบัพ 1 ไป 5 ของข่ายงาน เมื่อกำหนดให้ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ และ $\pi_5 = 3$ ส่วน $f_{13} = f_{45} = f_{53} = 1$, $f_{14} = f_{34} = 2$, $f_{23} = 0$ และ $f_{21} = f_{42} = 3$ สามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

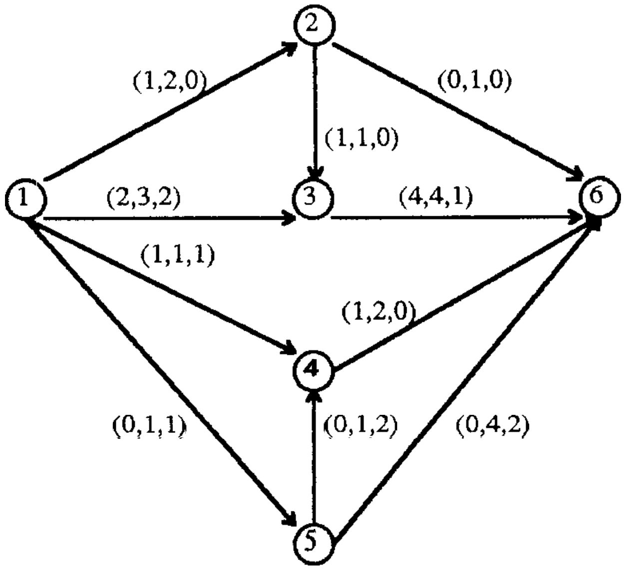


(**<u>ตอบ</u>** ไม่มีสายงานที่เป็นไปได้)

3. จากข้อ 2. ถ้าให้เส้นเชื่อม (2, 1) เปลี่ยนค่า (l_{21}, u_{21}, c_{21}) เป็น (2, 4, 0) จงหาสายงานสูงสุด จาก 1 ไป 5 พร้อมทั้งคำนวณค่าใช้จ่าย

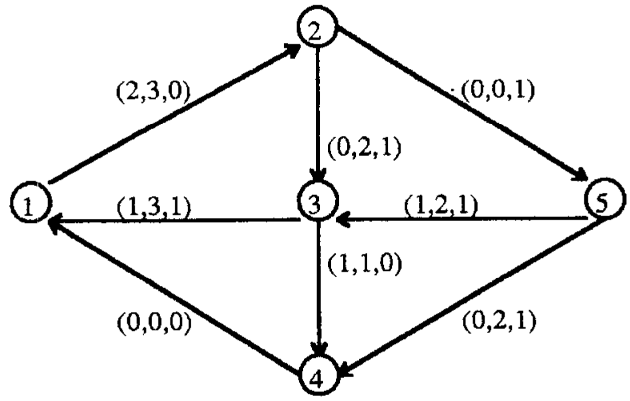
(**<u>ตอบ</u>** $f_{13} = 1$, $f_{14} = 1$, $f_{21} = 2$, $f_{23} = 0$, $f_{34} = f_{42} = 2$, $f_{45} = f_{53} = 1$ ค่าใช้จ่าย = 9 หน่วย)

4. ถ้าต้องการส่งข่ายงาน 6 หน่วย ผ่านข่ายงานจากบัพ 1 ไป 6 เมื่อ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_5 = 1$, $\pi_2 = \pi_4 = \pi_6 = 2$ และ $f_{12} = f_{13} = f_{46} = 2$, $f_{14} = f_{15} = f_{23} = f_{26} = f_{54} = 1$, $f_{36} = 3$ และ $f_{56} = 0$ สามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด



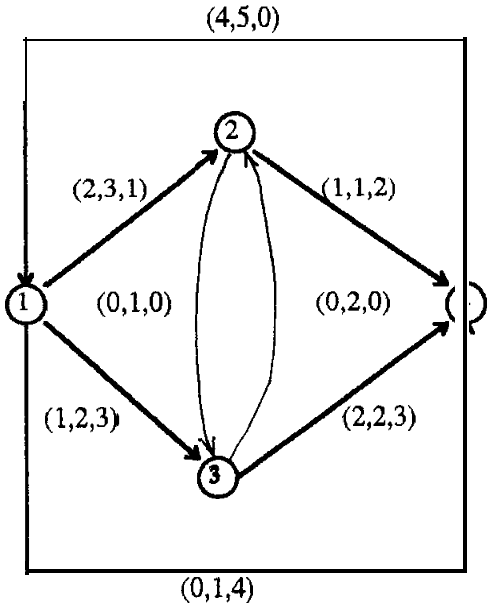
(**ตอบ** $f_{12} = 2$, $f_{13} = 3$, $f_{14} = 1$, $f_{15} = 0$, $f_{23} = 1$, $f_{26} = 1$, $f_{36} = 4$, $f_{46} = 1$, $f_{54} = 0$, $f_{56} = 0$, $f_{61} = 6$ ค่าใช้จ่าย = 11 หน่วย)

5. จงหาสายงานสูงสุดและค่าใช้จ่ายต่ำสุด ของข่ายงานซึ่งกำหนดให้ $\pi_1 = \pi_2 = 0$, $\pi_3 = \pi_4 = 1$ และ $\pi_5 = 2$, $f_{12} = 2$, $f_{23} = f_{25} = f_{31} = f_{34} = f_{41} = f_{53} = 1$ และ $f_{54} = 0$ และสามสิ่งอันดับที่แต่ละเส้นเชื่อม คือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) ดังรูป



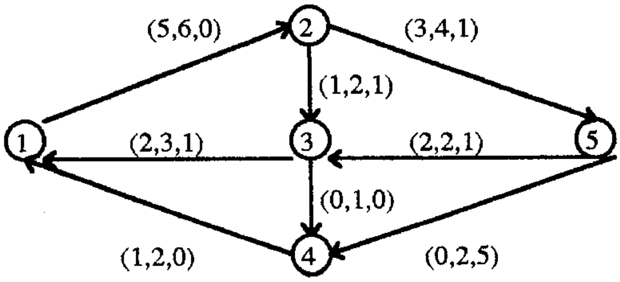
(**ตอบ** ไม่มีสายงานที่เป็นไปได้)

6. ต้องการส่งสายงาน 4 หน่วยผ่านข่ายงาน ซึ่งสามสิ่งอันดับ คือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) กำหนดให้ $\pi_1 = 1$ $\pi_2 = \pi_3 = 2$ และ $\pi_4 = 4$ ปริมาณสายงานเริ่มต้น คือ $f_{12} = f_{24} = 2, f_{13} = f_{14} = f_{34} = 1,$ $f_{23} = f_{32} = 0$ และ $f_{41} = 4$ จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด



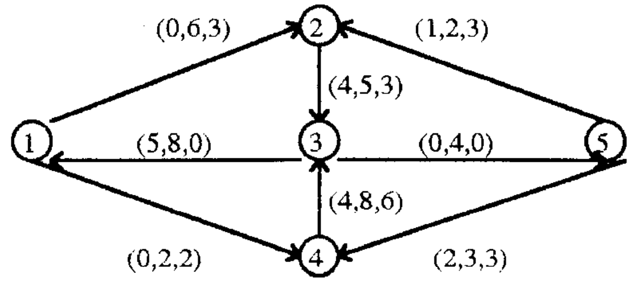
(**<u>ตอบ</u>** $f_{12} = f_{34} = 2, f_{13} = f_{14} = f_{23} = f_{24} = 1, f_{32} = 0$ และ $f_{41} = 4$ ค่าใช้จ่าย 11 หน่วย)

7. จากข่ายงานซึ่งสามสิ่งอันดับคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) กำหนดให้ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0, \pi_5 = 3$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{12} = 4, f_{23} = 1, f_{25} = 3, f_{31} = 2, f_{34} = 1, f_{41} = 2, f_{53} = 2$ และ $f_{54} = 1$



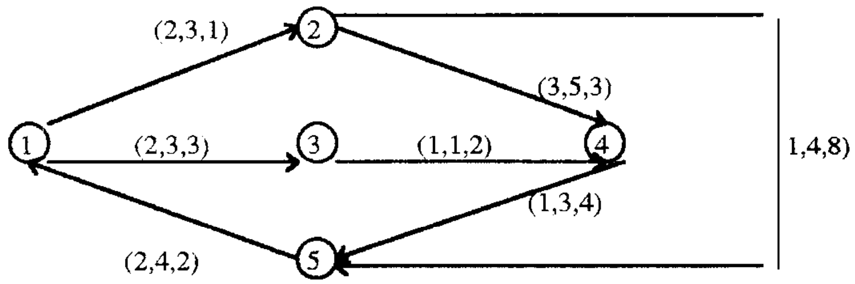
(**<u>ตอบ</u>** $f_{12} = 5, f_{23} = 2, f_{25} = 3, f_{31} = 3, f_{34} = 1, f_{41} = 2, f_{53} = 2, f_{54} = 1,$ ค่าใช้จ่าย = 15 หน่วย)

8. กำหนดข่ายงานซึ่งสามสิ่งอันดับคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) $\pi_1 = 0, \pi_2 = 3, \pi_3 = 1, \pi_4 = 5, \pi_5 = 1$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{12} = 3, f_{14} = 3, f_{23} = 4, f_{31} = 6, f_{35} = 2, f_{43} = 4, f_{52} = 1, f_{54} = 1$ จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด



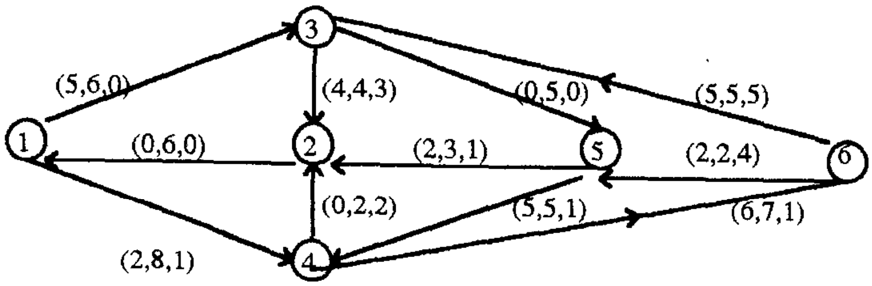
(**ตอบ** $f_{12} = f_{35} = 3, f_{14} = f_{54} = 2, f_{23} = f_{43} = 4, f_{31} = 5, f_{52} = 1$, ค่าใช้จ่าย = 57)

9. ถ้า $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{12} = f_{13} = f_{24} = f_{25} = f_{34} = f_{45} = f_{51} = 0$ และสามสิ่งอันดับคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) จงหาผลเฉลยเหมาะที่สุด



(**ตอบ** ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้)

10. กำหนดข่ายงาน ซึ่งสามสิ่งอันดับคือ (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = 1, \pi_3 = 4, \pi_5 = 6$ $\pi_6 = 2$ สายงานเริ่มต้นคือ $f_{13} = 4, f_{14} = 2, f_{21} = 6, f_{32} = 3, f_{35} = 5, f_{42} = 1, f_{46} = 6,$ $f_{52} = 2, f_{54} = 5, f_{65} = 2, f_{63} = 4$ จงหาผลเฉลยเหมาะที่สุด



(**<u>ตอบ</u>** ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้)