

บทที่ 3

ปัญหาสายงานสูงสุด (MAXIMUM-FLOW PROBLEMS)

พิจารณาข่ายงาน ซึ่งแต่ละเส้นเชื่อม (i,j) สามารถรับสายงานได้สูงสุดคือ u_{ij} หรือ u_{ji} คือความจุของเส้นเชื่อม (i,j) เมื่อ $G = (N,A)$ เป็นข่ายงานระบุทิศทาง ซึ่งมีบัพเริ่มต้น (s) 1 บัพ และบัพสุดท้าย (t) 1 บัพ โดยที่ $s \in N$ และ $t \in N$ เซตของเส้นเชื่อมคือ A ปัญหาสายงานสูงสุด อธิบายได้ในรูปของการหารูปแบบของสายงาน ที่จะผ่านเส้นเชื่อมในเซต A ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นสายงานสูงสุด ที่จะถูกส่งจาก s ไป t ทั้งนี้มีข้อสมมติว่าที่บัพเริ่มต้นมีปริมาณสายงานไม่จำกัด และการอนุรักษ์สายงานเป็นจริงที่แต่ละบัพระหว่างกลาง (intermediate node) ในที่นี้จะขอกล่าวถึงกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาสายงานสูงสุดเสียก่อน จากนั้นจึงจะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีการหาสายงานสูงสุดของข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายอย่างละ 1 บัพ

3.1 กำหนดการเชิงเส้นของปัญหาสายงานสูงสุด

จากรูปแบบกำหนดการเชิงเส้นในหัวข้อ 2.1 เมื่อข่ายงาน $G = (N,A)$ มีบัพเริ่มต้น 1 บัพ คือ $i = 1$ และบัพสุดท้าย 1 บัพ คือ $i = n$ บัพเริ่มต้น คือบัพ 1 มีปริมาณสายงานไม่จำกัด หรือ $a_1 = \infty$

บัพสุดท้ายคือบัพ n ไม่มีความต้องการสายงานใดๆ เพิ่มเติม นอกจากสายงานที่ส่งผ่านจากบัพเริ่มต้น ผ่านบัพระหว่างกลาง หรือ $b_n = 0$

ข้อจำกัดเกิดจากความจุที่แต่ละเส้นเชื่อม แทนด้วย u_{ij}

และค่าใช้จ่ายต่อหน่วยของสายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i,n) แทนด้วย c_{in} โดยที่

$$c_{in} = \begin{cases} -1 & ; i \neq n \\ 0 & ; \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

ปัญหาดังกล่าวแทนได้ด้วยกำหนดการเชิงเส้น ซึ่งต้องการหาค่าสูงสุดของปริมาณสายงานทั้งหมด ที่จะส่งไปยังบัพสุดท้าย หรือ เขียนเป็น

หาค่าสูงสุด $Z = \sum_{i \neq n} f_{in}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0 \quad ; i \neq 1; i \neq n$$

$$0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} \quad ; \quad \forall (i,j) \in A$$

แล้วหาผลเฉลยได้โดยตรงด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ แต่ในที่นี้จะเสนอวิธีหาผลเฉลย จากเทคนิคของการวิเคราะห์ข่ายงานโดยตรง นั่นคือ ขั้นตอนวิธีของการกำหนดป้าย ซึ่งจะบอกปริมาณสายงานสูงสุด โดยอาศัยทฤษฎีสายงานสูงสุดและสายงานต่ำสุด

จากข่ายงานรูป 3.1 (ก) เป็นข่ายงาน ซึ่งมีบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้น บัพ 4 เป็นบัพสุดท้าย ตัวเลขที่แต่ละเส้นเชื่อมคือความจุของเส้นเชื่อม

เขียนกำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาสายงานสูงสุดของข่ายงาน ได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด $Z = f_{24} + f_{34}$

โดยมีข้อจำกัด

$$f_{23} + f_{24} - f_{12} = 0$$

$$f_{34} - f_{13} - f_{23} = 0$$

$$f_{12} \leq 2$$

$$f_{13} \leq 8$$

$$f_{23} \leq 1$$

$$f_{24} \leq 6$$

$$f_{34} \leq 1$$

และ $f_{12} \geq 0$

$$f_{13} \geq 0$$

$$f_{23} \geq 0$$

$$f_{24} \geq 0$$

$$f_{34} \geq 0$$

3.2 ทฤษฎีสายงานสูงสุดและส่วนตัดต่ำสุด

(Maximum-Flow Minimum-Cut Theorem)

ส่วนตัด (cut) คือเซตของเส้นเชื่อม ซึ่งเมื่อย้ายออกไปแล้ว ทำให้บัพกลุ่มหนึ่งของข่ายงาน

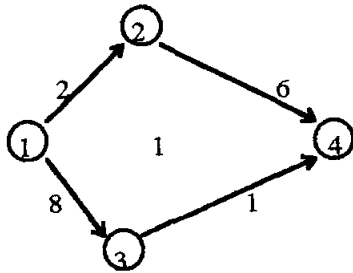
ถูกแยกออกจากกลุ่มที่เหลือจากข่ายงานในรูป 3.1 (ก) $N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

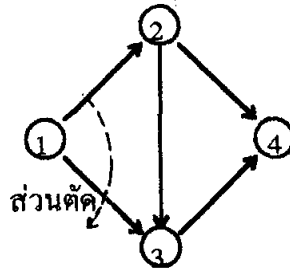
และตัวเลขที่แสดงไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม คือความจุ

รูป 3.1 (ข) แสดงส่วนตัดที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อม (1,2) และ (1,3) ซึ่งแยกบัพ 1 ออกจากกลุ่มของบัพ 2 3 และ 4 ดังรูป ง

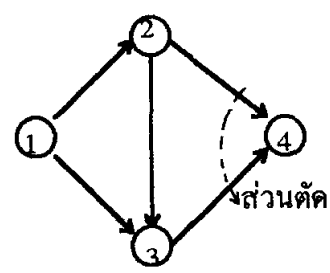
รูป 3.1 (ค) แสดงส่วนตัดที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อม (2,4) และ (3,4) ซึ่งแยกบัพ 1, 2 และ 3 ออกจากบัพ 4 ดังรูป จ



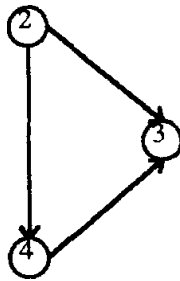
(ก)



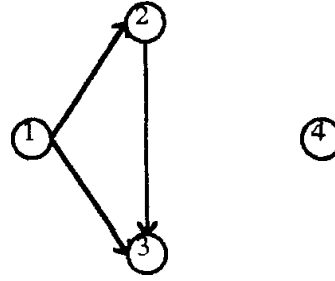
(ข)



(ค)



(ง)



(จ)

รูป 3.1 แสดงส่วนตัดของข่ายงาน

พิจารณาข่ายงาน $G = (N, A)$ ถ้าแบ่ง N ออกเป็นสองสับเซต ซึ่งไม่เกิดร่วมกัน (two mutually exclusive subsets) N_c และ $\overline{N_c}$ โดยที่ $s \in N_c$ และ $t \in \overline{N_c}$ ถ้า A_c คือสับเซตของเส้นเชื่อม ซึ่งเชื่อมบัพของ N_c และ $\overline{N_c}$ ส่วนเส้นเชื่อมอื่นๆ ของข่ายงานอยู่ในสับเซต $\overline{A_c}$ จากนิยามของส่วนตัด สับเซต A_c ก็คือส่วนตัดของข่ายงานซึ่งแยกสับเซตของบัพ N_c ออกจาก $\overline{N_c}$ แทนส่วนตัดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $(N_c, \overline{N_c})$ จากข่ายงานรูป 3.1 (ก) ถ้า s คือบัพ 1 และ t คือบัพ 4

ส่วนตัดรูป 3.1 (ข) มี $N_c = \{1\}$ และ $\bar{N}_c = \{2, 3, 4\}$ $A_c = \{(1, 2), (1, 3)\}$ ส่วนตัดรูป 3.1 (ค) มี $N_c = \{1, 2, 3\}$ และ $\bar{N}_c = \{4\}$ $A_c = \{(2, 4), (3, 4)\}$

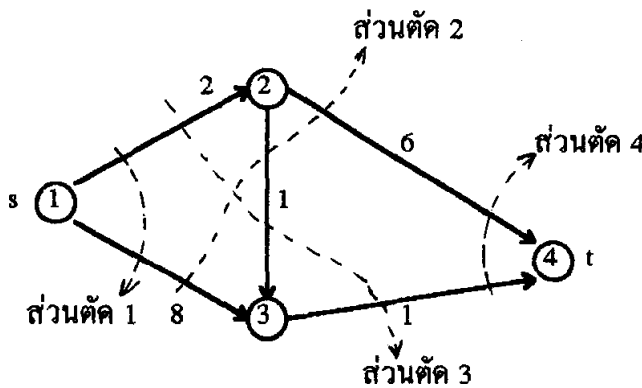
ความจุของส่วนตัด (N_c, \bar{N}_c) คือผลรวมของความจุของเส้นเชื่อมทั้งหมดในสับเซต A_c ซึ่งสามารถส่งสายงานจากสับเซต N_c ไป \bar{N}_c ได้ จากรูป 3.2 ส่วนตัดทั้งหมดที่เป็นไปได้ของข่ายรูป 3.1 (ก) มีความจุ ดังนี้

ส่วนตัด 1 มีความจุ = $u_{12} + u_{13} = 10$

ส่วนตัด 2 มีความจุ = $u_{13} + u_{23} + u_{24} = 15$

ส่วนตัด 3 มีความจุ = $u_{12} + u_{34} = 3$ (ไม่รวม u_{23} เนื่องจากเส้นเชื่อม (2,3) ไม่สามารถส่งสายงานจาก $N_c = \{1, 3\}$ ไปยัง $\bar{N}_c = \{2, 4\}$ ได้)

ส่วนตัด 4 มีความจุ = $u_{24} + u_{34} = 7$



รูป 3.2 แสดงส่วนตัดทั้ง 4 รูปแบบของข่ายงานในรูป 3.1 (ก)

สำหรับข่ายงาน $G = (N,A)$ ซึ่ง u_{ij} คือความจุที่แต่ละเส้นเชื่อม โดย f_{ij} เป็นปริมาณสายงานที่มีอยู่จริงของแต่ละเส้นเชื่อม ทฤษฎีปริมาณสายงานสูงสุด-ส่วนตัดต่ำสุด กล่าวว่า ปริมาณสายงานสูงสุดจาก s ไป t ของข่ายงาน คือความจุของส่วนตัดที่น้อยที่สุด ซึ่งแยก s จาก t การพิสูจน์ทฤษฎีบทแสดงได้ดังนี้

ถ้า F คือปริมาณสายงานที่เป็นไปได้จาก s ไป t

สำหรับส่วนตัด (N_c, \bar{N}_c) ใดๆ เมื่อ $N = N_c \cup \bar{N}_c$ และบัพใดๆ ของข่ายงานไม่อาจอยู่ได้ทั้งใน N_c และ \bar{N}_c พร้อมๆ กัน ดังนั้น

$$F = \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} + \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ji} - \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ji} \quad (3.1)$$

$$\text{หรือ } F = \left[\sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ji} \right] + \left[\sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ji} \right] \quad (3.2)$$

แต่เทอมที่สองของ (3.2) เป็นศูนย์ ตามกฎการอนุรักษ์สายงาน

$$F = \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ji}$$

$$\text{นั่นคือ } F \leq \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} f_{ij} \quad (3.3)$$

เนื่องจาก $f_{ij} \geq 0$ ปริมาณสายงาน F จึงถูกจำกัดด้วยความจุของส่วนตัดใดๆ ระหว่าง N_c และ \bar{N}_c โดยค่าสูงสุดของ F จะถูกจำกัดด้วยความจุของส่วนตัดที่น้อยที่สุด และที่แต่ละเส้นเชื่อม (i,j) $f_{ij} \leq u_{ij}$ จาก (3.3)

$$F \leq \sum_{\substack{i \in N_c \\ j \in \bar{N}_c}} u_{ij} \quad (3.4)$$

ถ้าให้ V_{st} แทนความจุของส่วนตัดที่น้อยที่สุด ซึ่งแยก s จาก t ค่าทางขวามือของ (3.4) คือความจุของส่วนตัด (N_c, \bar{N}_c) ใดๆ แล้ว

$$F \leq V_{st} \quad (3.5)$$

ถ้าให้ (L, \bar{L}) เป็นส่วนตัดซึ่ง $s \in L$ และ $t \in \bar{L}$ โดยมีคุณสมบัติว่า ถ้ามี $j \in L$ ซึ่ง $f_{ij} \leq u_{ij}$ หรือ $f_{ji} > 0$ แล้ว $j \in L$

จาก (3.5)

$$F = \sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} f_{ij} - \sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} f_{ji} \quad (3.6)$$

แต่จากนิยามของ L ถ้า $(i,j) \in (L,\bar{L})$ แล้ว $f_{ij} = u_{ij}$ และถ้า $(j,i) \in (\bar{L},L)$ แล้ว

$f_{ji} = 0$ ดังนั้น

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} f_{ij} = \sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} u_{ij} \quad (3.7)$$

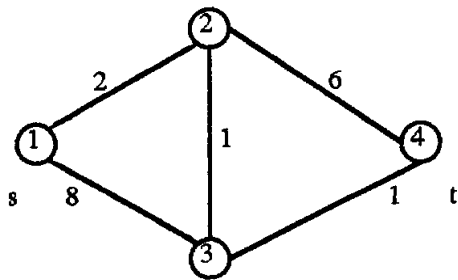
และ
$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} f_{ji} = 0 \quad (3.8)$$

นั่นคือ
$$F = \sum_{i \in L} \sum_{j \in \bar{L}} u_{ij} \geq V_{st} \quad (3.9)$$

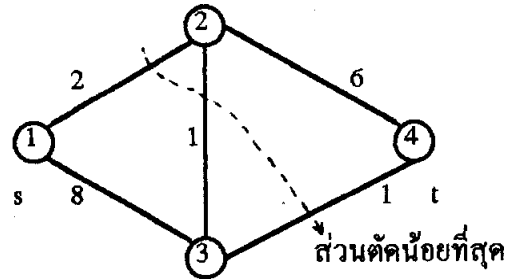
จาก (3.5) และ (3.9) สรุปได้ว่า $F = V_{st}$ หรือปริมาณสายงานสูงสุดมีค่าเท่ากับความจุของส่วนตัดที่น้อยที่สุด

ข่ายงานรูป 3.1 (ก) มีปริมาณสายงานสูงสุดเป็น 3 เท่ากับความจุของส่วนตัด 3 ซึ่งให้ค่าความจุน้อยที่สุด

ถ้าข่ายงานในรูป 3.1 เป็นข่ายงานซึ่งไม่ระบุทิศทาง ดังรูป 3.3 (ก) ส่วนตัดที่มีความจุน้อยที่สุด คือส่วนตัดที่ประกอบด้วยเส้นเชื่อม ดังรูป 3.3 (ข) ดังนั้นปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานจึงเท่ากับ 4



(ก)



(ข)

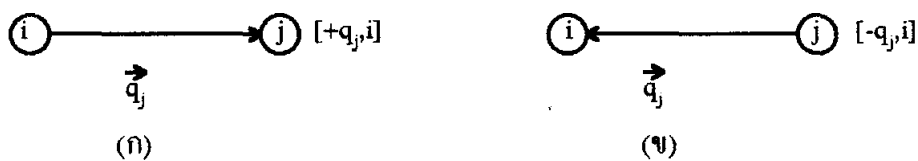
รูป 3.3 แสดงส่วนตัดของข่ายงานไม่ระบุทิศทาง

3.3 ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย (labeling algorithm)

ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย พัฒนาโดย Ford และ Fulkerson เพื่อหาสายงานสูงสุด เริ่มจากผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหา จากนั้นจึงหาผลเฉลยอื่นๆ ที่เป็นไปได้ และทำให้สายงานมีค่าเพิ่มขึ้น ในขั้นตอนวิธีจะถือว่า บัพเป็นเสมือนจุดส่งสายงาน และเส้นเชื่อม คือช่องทางสำหรับส่งสายงาน โดยมีแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญ 2 ประการคือ การกำหนดป้าย และบทนิยามของวิถีแต่งเติมสายงาน (flow augmenting path)

วัตถุประสงค์ของการกำหนดป้ายที่บัพใดๆ ก็เพื่อให้ทราบถึงค่าของสายงาน และจุดเริ่มต้นของการส่ง ซึ่งเป็นสาเหตุของการเปลี่ยนปริมาณสายงานบนเส้นเชื่อมระหว่างบัพที่เป็นจุดเริ่มต้นของการส่งกับบัพที่กำหนดป้าย ถ้าปริมาณสายงานจำนวน q_j หน่วย ถูกส่งจาก i ไป j และทำให้เพิ่มสายงานที่เส้นเชื่อม (i,j) โดยที่ $f_{ij} \leq u_{ij}$ แล้วที่บัพ j จะถูกกำหนดป้ายจากบัพ i ด้วยปริมาณสายงาน $+q_j$ หรือกำหนดป้ายให้บัพ j เป็น $[+q_j, i]$ เมื่อ $q_j =$ ค่าต่ำสุด $\{q_i, (u_{ij} - f_{ij})\}$ ในทำนองเดียวกันถ้าการส่ง ทำให้เกิดการลดสายงานที่เส้นเชื่อมแล้ว บัพ j จะถูกกำหนดป้ายจากบัพ i ด้วยปริมาณสายงาน $-q_j$ โดยที่ $f_{ji} > 0$ หรือกำหนดป้ายที่บัพ j เป็น $[-q_j, i]$ เมื่อ $q_j =$ ค่าต่ำสุด $\{q_i, f_{ji}\}$ โดยที่ q_i คือปริมาณสายงานที่บัพ i มีอยู่

ปริมาณสายงานจากบัพ i ไปบัพ j จะเพิ่มขึ้น q_j หน่วย ถ้าสายงานถูกส่งผ่านเส้นเชื่อมระบุทิศทาง (i,j) ตามทิศทางที่กำหนดไว้แล้วจะเรียกเส้นเชื่อม (i,j) ว่าเส้นเชื่อมจากหน้า (forward arc) ดังรูป 3.1 (ก) แต่ถ้าปริมาณสายงานจากบัพ j ไปบัพ i มีค่าลดลง q_j หน่วย โดยสายงานถูกส่งไปยังบัพ j ผ่านเส้นเชื่อมระบุทิศทาง (j,i) ในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางที่กำหนดไว้ จะเรียกเส้นเชื่อม (j,i) ว่าเส้นเชื่อมผ้นกลับ (reverse arc) ดังรูป 3.1 (ข)



รูป 3.1 (ก) กำหนดป้ายของบัพ j จากบัพ i ทำให้เพิ่มปริมาณสายงานบนเส้นเชื่อม (i,j) เพราะ (i,j) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า (ข) กำหนดป้ายของบัพ j จากบัพ i ทำให้ปริมาณสายงานบนเส้นเชื่อม (j,i) ลดลง เพราะ (j,i) เป็นเส้นเชื่อมผ้นกลับ

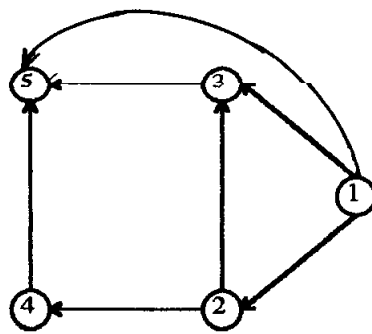
วิถีแต่งเติมสายงานจาก s ไป t คือลำดับเชื่อมโยงของเส้นเชื่อมจากหน้าและ/หรือเส้นเชื่อมผ้นกลับ ซึ่งมีปริมาณสายงานจำนวนหนึ่งที่จะถูกส่งจาก s ไป t ปริมาณสายงานของเส้น

เชื่อมจากหน้าจะเพิ่มได้ไม่เกินความจุของเส้นเชื่อมนั้น ปริมาณสายงานของเส้นเชื่อมผกกลับ จะลดได้โดยไม่ทำให้มีค่าน้อยกว่าศูนย์ จุดประสงค์ของวิธีแต่งเติมสายงาน คือกำหนดรูปแบบการเปลี่ยนแปลงสายงานเพื่อเพิ่มสายงานที่บัพ t และการอนุรักษ์สายงานที่แต่ละบัพระหว่างกลางต้องเป็นจริง

ขั้นตอนวิธีกำหนดค่าของข่ายงาน $G(N,A)$ ซึ่งสิ่งที่กำหนดที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น $[f_{ij}, u_{ij}]$ โดย f_{ij} คือปริมาณสายงานที่มีอยู่จริงของเส้นเชื่อม (i,j) u_{ij} คือความจุของเส้นเชื่อม (i,j) มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าของบัพ s ด้วย $[\infty, -]$ แสดงว่ามีปริมาณสายงานไม่จำกัดที่บัพเริ่มต้น ส่วนบัพอื่นยังไม่กำหนดค่า หรือ $q_s = \infty$
2. ใช้วิธีการกำหนดค่าของเส้นเชื่อมจากหน้า หรือเส้นเชื่อมผกกลับจากบัพ s ไปยังบัพระหว่างกลาง จนกว่าจะถึงบัพ t ถ้ากำหนดค่าของบัพ t ได้ ให้ไปขั้นตอน 3. ถ้ากำหนดไม่ได้ให้ไปขั้นตอน 4.
3. ถ้าบัพ t ถูกกำหนดค่าด้วย $[+q_t, k]$ เมื่อ k คือบัพระหว่างกลาง แสดงว่าได้วิธีแต่งเติมจาก s ไป t แล้ว ให้ปรับปริมาณสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งเติมด้วยค่า q_t โดยปริมาณสายงานของเส้นเชื่อมจากหน้า จะมีค่าเพิ่มขึ้น q_t ส่วนเส้นเชื่อมผกกลับจะมีค่าลดลง q_t จากนั้นให้กลับไปขั้นตอน 1.
4. ถ้าบัพ t ไม่สามารถกำหนดค่าได้ แสดงว่าไม่อาจกำหนดวิธีแต่งเติม จาก s ไป t ได้อีก นั่นคือปริมาณสายงานในขณะนั้น เป็นปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานแล้ว หรือเป็นค่าเฉลี่ยเหมาะสมที่สุด

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดข่ายงานดังรูป 3.4 เมื่อ บัพ 1 คือบัพเริ่มต้น บัพ 5 เป็นบัพสุดท้าย ปริมาณสายงาน (f_{ij}) เริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อม (i,j) เป็น 0 ความจุที่แต่ละเส้นเชื่อม คือ $u_{12} = 12, u_{13} = 1, u_{15} = 7, u_{23} = 3, u_{24} = 7, u_{35} = 1$ และ $u_{45} = 9$ จงหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน



รูป 3.4 ข่ายงานตัวอย่างเพื่อหาสายงานสูงสุด

หาผลเฉลยของปริมาณสายงานสูงสุด โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย ดังนี้

รอบที่ 1 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น คือบัพ 1 ด้วย $[\infty, -]$ หมายถึง บัพเริ่มต้นมีปริมาณสายงานไม่จำกัด หรือ $q_1 = \infty$ และ $-$ หมายถึงสายงานเกิดขึ้นที่บัพเริ่มต้น หรือไม่ได้รับสายงานมาจากบัพอื่น จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้า (1,2) (1,3) และ (1,5) ซึ่งเพิ่มสายงานได้ จึงเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 3 หรือบัพ 5 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 5 โดยกำหนดป้ายด้วย $[+q_5, 1]$

เมื่อ $q_5 =$ ค่าต่ำสุด $\{q_1, (u_{15} - f_{15})\}$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (7 - 0)\} = 7$$

นั่นคือป้ายที่บัพ 5 กำหนดเป็น $\{+7, 1\}$

เนื่องจากบัพ 5 ถูกกำหนดป้ายแล้ว ทำให้ได้วิถีแต่งเติมจากบัพ 1 ไปบัพ 5 คือ 1-5 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีแต่งเติม ด้วย $q_5 = 7$ หน่วย และเส้นเชื่อม (1,5) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าในวิถีแต่งเติมนี้ จึงเพิ่มสายงานให้เส้นเชื่อม (1,5) อีก 7 หน่วย หรือ $f_{15} = 7$ ในรอบที่ 1 บัพ 5 ถูกกำหนดป้าย จึงต้องคำนวณต่อในรอบต่อไปเพราะสายงานที่คำนวณได้ ยังไม่เป็นสายงานที่มีปริมาณสูงสุด

รอบที่ 2 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น (บัพ 1) ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้า (1,2) และ (1,3) ซึ่งเพิ่มสายงานได้ จึงเลือกกำหนดป้ายให้บัพ 2 หรือ 3 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 3 ด้วย $[+q_3, 1]$

เมื่อ $q_3 =$ ค่าต่ำสุด $\{q_1, (u_{13} - f_{13})\}$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (1 - 0)\} = 1$$

ดังนั้น ป้ายที่บัพ 3 คือ $\{+1, 1\}$

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อมซึ่งเพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อมจากหน้า (3,5) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 5 ด้วย $[+q_5, 3]$

เมื่อ $q_5 =$ ค่าต่ำสุด $\{q_3, (u_{35} - f_{35})\}$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (1 - 0)\} = 1$$

นั่นคือ กำหนดป้ายที่บัพ 5 เป็น $\{+1, 3\}$

เนื่องจากบัพ 5 ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิถีแต่งเติมจากบัพ 1 ไปบัพ 5 ขณะนี้คือ 1-3-5 ปรับสายงานให้แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีแต่งเติมนี้ ด้วย $q_5 = 1$ หน่วย และแต่ละเส้นเชื่อมต่างก็เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานให้แต่ละเส้นเชื่อมอีก 1 หน่วย หรือ $f_{13} = 1, f_{35} = 1$

ในรอบที่ 2 บัพ 5 ถูกกำหนดป้าย จึงต้องคำนวณต่อในรอบต่อไป เพราะปริมาณสายงานในรอบนี้ยังไม่มีค่าสูงสุด

รอบที่ 3 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น (บัพ 1) ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมซึ่งเพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อมจากหน้า (1,2) เพราะเส้นเชื่อม (1,3) มี $f_{13} = u_{13}$ และเส้นเชื่อม (1,5) มี $f_{15} = u_{15}$ จึงกำหนดป้ายให้บัพ 2 ด้วย $[+q_2, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{12} - f_{12})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (12 - 0)\} = 12 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายให้บัพ 2 เป็น $[+12, 1]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้อีก คือเส้นเชื่อมจากหน้า (2,3) และ (2,4) เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 2 หรือ 4 ก็ได้ ในที่นี้กำหนดป้ายให้บัพ 4 ด้วย $[+q_4, 2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_4 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{24} - f_{24})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{12, (7 - 0)\} = 7 \end{aligned}$$

หรือกำหนดป้าย $[+7, 2]$ ให้บัพ 4 จากบัพ 4 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้ คือเส้นเชื่อมจากหน้า (4,5) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 5 ด้วย $[+q_5, 4]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_5 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_4, (u_{45} - f_{45})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{7, (9 - 0)\} = 7 \end{aligned}$$

ป้ายของบัพ 5 คือ $[+7, 4]$ บัพ 5 ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิธีแต่งตั้งจากบัพ 1 ไปบัพ 5 ในรอบนี้คือ 1-2-4-5 ปรับสายงานให้แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งตั้งนี้ด้วย $q_5 = 7$ หน่วย และเนื่องจากแต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งตั้งเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานให้แต่ละเส้นเชื่อมอีก 7 หน่วย หรือ $f_{12} = 7, f_{24} = 7$ และ $f_{45} = 7$

บัพ 5 ถูกกำหนดป้าย ปริมาณสายงานที่ได้จึงไม่เป็นค่าสูงสุด ต้องคำนวณต่อในรอบต่อไป

รอบที่ 4 กำหนดป้ายเริ่มต้นให้บัพ 1 ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_1 = \infty$ เส้นเชื่อมที่ยังคงเพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (1,2) กำหนดป้ายให้บัพ 2 ด้วย $[+q_2, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{12} - f_{12})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (12 - 7)\} = 5 \end{aligned}$$

หรือป้ายที่บัพ 2 คือ $[+5, 1]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้ คือเส้นเชื่อม (2,3) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 3 ด้วย $[+q_3, 2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_3 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{23} - f_{23})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{5, (3 - 0)\} = 3 \end{aligned}$$

หรือป้ายที่บัพ 3 คือ $[+3, 2]$

จากบัพ 3 ไม่มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้อีก ทำให้ไม่สามารถกำหนดป้ายที่บัพ 5 ได้ ดังนั้น

ปริมาณสายงานสูงสุดคือสายงานที่คำนวณในรอบที่ 4 นั่นคือสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็นดังนี้

$$f_{12} = 7, f_{13} = 1, f_{15} = 7, f_{23} = 0, f_{24} = 7, f_{35} = 1 \text{ และ } f_{45} = 7$$

ปริมาณสายงานสูงสุด คือ $f_{15} + f_{35} + f_{45} = 15$ หน่วย หรือพิจารณาจากส่วนตัด (N_0, \bar{N}_0)

$$\text{เมื่อ } N_0 = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{N}_0 = \{4, 5\}$$

$$\text{ส่วนตัด} = \{(1,5), (2,4), (3,5)\}$$

ความจุ = 15 หน่วย ซึ่งเป็นส่วนตัดที่มีความจุน้อยที่สุด นั่นคือปริมาณสายงานสูงสุดของ
ข่ายงาน = 15 หน่วย

ตัวอย่าง 9.2 กำหนดข่ายงานซึ่งสิ่งที่กำกับที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ $[f_{ij}, u_{ij}]$ ดังรูป 3.5 (ก) จงหา
ปริมาณสายงานสูงสุด โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย

จากการใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย จะคำนวณทั้งหมด 6 รอบ จึงจะได้ปริมาณสายงานสูงสุด
โดยแต่ละรอบเป็นดังนี้

รอบที่ 1 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s มีเส้นเชื่อมจากหน้า
คือ $(s,1)$ $(s,2)$ และ $(s,3)$ ทำให้สามารถเลือกที่จะกำหนดป้ายที่บัพ 1, 2 หรือ 3 ก็ได้ ในที่นี้
เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 ด้วย $[+q_2, s]$

$$\text{เมื่อ } q_2 = \text{ค่าต่ำสุด } \{q_s, (u_{s2} - f_{s2})\}$$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (3 - 0)\} = 3$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 2 เป็น $[+3, s]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมจากหน้า คือ $(2,3)$ และ $(2,t)$ ซึ่งจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 3 หรือบัพ t ก็ได้
ควรจะต้องเลือกกำหนดป้ายให้บัพ t เพราะจุดมุ่งหมาย คือต้องการคำนวณวิถีแต่งตั้งเดิมจาก s ไป t ที่
บัพ t กำหนดป้ายเป็น $[+q_t, 2]$

$$\text{เมื่อ } q_t = \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{2t} - f_{2t})\}$$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{3, (2 - 0)\} = 2$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ t เป็น $[+2, 2]$

เมื่อบัพ t ถูกกำหนดป้ายแล้ว แสดงว่าได้วิถีแต่งตั้งเดิมจาก s ไป t แล้วคือ $s-2-t$ ปรับปริมาณสายงาน
ที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีแต่งตั้งเดิม ด้วย $q_t = 2$ เนื่องจากเส้นเชื่อม $(s,2)$ และ $(2,t)$ เป็นเส้นเชื่อมจาก
หน้า จึงเพิ่มสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 2 หน่วย หรือเขียนเป็นขั้นตอนย่อๆ คือ

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|----------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย s ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+3, s]$ |
| 3 | กำหนดป้าย t ด้วย $[+2, 2]$ |

วิธีแต่งตั้งคือ $s-2-t$ ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{22} = 2$ และ $f_{21} = 2$ ดังรูป 3.5 (ข)

รอบที่ 2 กลับไปขั้นตอนที่ 1 ของขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย คือกำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่ยังเพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อมจากหน้า $(s,1)$ $(s,2)$ หรือ $(s,3)$ ซึ่งจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 1, 2 หรือ 3 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 1 ด้วย $[+q_1, s]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_1 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_s, (u_{s1} - f_{s1})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (2 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 1 เป็น $[+2, s]$

จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่ยังเพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อมจากหน้า $(1,2)$ และ $(1,t)$ ซึ่งจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 หรือ t ก็ได้ ในที่นี้จะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 ก่อน เพื่อให้แตกต่างจากในรอบที่ 1 กำหนดป้ายที่บัพ 2 ด้วย $[+q_2, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{12} - f_{12})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (4 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 2 เป็น $[+2, 1]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่ยังเพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อม $(2,3)$ เส้นเชื่อมจากหน้า $(2,t)$ ไม่สามารถเพิ่มสายงานได้อีก เพราะ $f_{2t} = u_{2t} = 2$ แล้ว จึงกำหนดป้ายที่บัพ 3 เป็น $[+q_3, 2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_3 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{23} - f_{23})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (1 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 3 เป็น $[+1, 2]$

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อมจากหน้า $(3,t)$ จึงกำหนดป้ายที่บัพ t ด้วย $[+q_t, 3]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_t &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_3, (u_{3t} - f_{3t})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ t เป็น $[+1, 3]$

เนื่องจากสามารถกำหนดที่บัพ t ได้แล้ว ดังนั้นวิธีแต่งตั้งเดิมจาก s ไป t คือ $s-1-3-t$ ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งตั้งเดิม ด้วย $q_t = 1$ เส้นเชื่อม $(s,1)$ $(1,2)$ $(2,3)$ และ $(3,t)$ ต่างก็เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าในวิธีแต่งตั้งเดิมนี้ จึงเพิ่มสายงาน 1 หน่วยให้แต่ละเส้นเชื่อมดังกล่าว หรือเขียนเป็น

ขั้นตอนย่อยๆ คือ

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย s ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[+2, s]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+2, 1]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+1, 2]$ |
| 5 | กำหนดป้าย t ด้วย $[+1, 3]$ |

วิธีแต่งเติม คือ s-1-2-3-t ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{s1} = 1, f_{12} = 1, f_{23} = 1$ และ $f_{3t} = 1$

ผังรูป 3.5 (ค)

รอบที่ 3 กลับไปขั้นตอนที่ 1 ของขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย คือกำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่เพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อม (s,1) (s,2) หรือ (s,3) ซึ่งจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 1, 2 หรือ 3 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 1 ด้วย $[+q_1, s]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_1 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_s, (u_{s1} - f_{s1})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (2 - 1)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 1 เป็น $[+1, s]$

จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่เพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อม (1,2) และ (1,t) โดยจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 หรือ t ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ t ด้วย $[+q_t, t]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_t &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{1t} - f_{1t})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (3 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ t เป็น $[+1, t]$

เมื่อบัพ t ถูกกำหนดป้ายแล้ว แสดงว่าได้วิธีแต่งเติมจาก s ไป t แล้วคือ s-1-t ปรับปริมาณสายงานที่เส้นเชื่อมในวิธีแต่งเติม ด้วย $q_s = 1$ เนื่องจากเส้นเชื่อม (s,1) และ (1,t) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าในวิธีแต่งเติมนี้ จึงเพิ่มสายงานอีกเส้นเชื่อมละ 1 หน่วย หรือเขียนเป็นขั้นตอนย่อยๆ คือ

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย s ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[+1, s]$ |
| 3 | กำหนดป้าย t ด้วย $[+1, t]$ |

วิธีแต่งเติม คือ s-1-t ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{s1} = 1$ และ $f_{1t} = 1$ ผังรูป 3.5 (ง)

รอบที่ 4 กลับไปขั้นตอนที่ 1 ของขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย ก็กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่ยังเพิ่มสายงานได้อีกคือ เส้นเชื่อม $(s,2)$ และเส้นเชื่อม $(s,3)$ ซึ่งจะเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 หรือบัพ 3 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 ด้วย $[+q_2, s]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_s, (u_{s2} - f_{s2})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (3 - 2)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 2 เป็น $[+1, s]$

จากบัพ 2 ซึ่งกำหนดป้ายแล้ว ไม่อาจเพิ่มสายงานที่เส้นเชื่อมจากหน้า $(2,3)$ หรือ $(2,t)$ ได้อีก จึงพิจารณาเส้นเชื่อม $(1,2)$ ในลักษณะของเส้นเชื่อมผ่นกลับ โดยจะกำหนดป้ายที่บัพ 1 ด้วย $[-q_1, 2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_1 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, f_{12}\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, 1\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 1 เป็น $[-1, 2]$

จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้า $(1,t)$ ซึ่งเพิ่มสายงานได้อีก จึงกำหนดป้ายที่บัพ t ด้วย $[+q_t, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_t &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{1t} - f_{1t})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (3 - 1)\} = 1 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ t เป็น $[+1, 1]$

เนื่องจากบัพ t ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิธีแต่งตั้งที่คำนวณได้ในรอบนี้คือ $s-2-1-t$ และปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม $(s,2)$ และ $(1,t)$ เป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานอีก 1 หน่วย แต่เส้นเชื่อม $(1,2)$ ถูกพิจารณาเป็นเส้นเชื่อมผ่นกลับ จึงลดสายงานของเส้นเชื่อมนี้ลง 1 หน่วย หรือเขียนเป็นขั้นตอนย่อๆ คือ

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|----------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย s ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+1, s]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[-1, 2]$ |
| 4 | กำหนดป้าย t ด้วย $[+1, 1]$ |

วิธีแต่งตั้งคือ $s-2-1-t$ ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{s2} = 2, f_{12} = 0$ และ $f_{1t} = 2$ ดังรูป

3.5 (จ)

รอบที่ 5 กลับไปขั้นตอนที่ 1 ของขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย ก็กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่เพิ่มสายงานได้อีกคือ เส้นเชื่อม $(s,3)$ จึง

กำหนดป้ายที่บัพ 3 ด้วย $[+q_3, s]$

เมื่อ $q_3 =$ ค่าต่ำสุด $\{q_3, (u_{3s} - f_{3s})\}$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (1 - 0)\} = 1$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 3 เป็น $[+1, s]$

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (3,t) จึงกำหนดป้ายที่บัพ t ด้วย

$[+q_t, 3]$

เมื่อ $q_t =$ ค่าต่ำสุด $\{q_3, (u_{3t} - f_{3t})\}$

$$= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 1)\} = 1$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ t เป็น $[+1, 3]$

เมื่อบัพ t ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิธีแต่งเติมจาก s ไป t คือ s-3-t ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งเติมนี้ ด้วย $q_t = 1$ หน่วย เนื่องจากเส้นเชื่อม (s,3) และ (3,t) ต่างก็เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าในวิธีแต่งเติม จึงเพิ่มสายงานอีก 1 หน่วย หรือเขียนเป็นขั้นตอนย่อยๆ คือ

| <u>ขั้นที่</u> | <u>คำอธิบาย</u> |
|----------------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย s ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+1, s]$ |
| 3 | กำหนดป้าย t ด้วย $[+1, 3]$ |

วิธีแต่งเติมคือ s-3-t ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{s3} = 1$ และ $f_{3t} = 2$ ดังรูป 3.5 (ฉ)

รอบที่ 6 กลับไปขั้นตอนที่ 1 ของขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย คือกำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น s ด้วย $[\infty, -]$ หรือ $q_s = \infty$ จากบัพ s ไม่มีเส้นเชื่อมจากหน้าที่จะเพิ่มสายงานได้อีก เพราะ

$$f_{s1} = u_{s1}$$

$$f_{s2} = u_{s2}$$

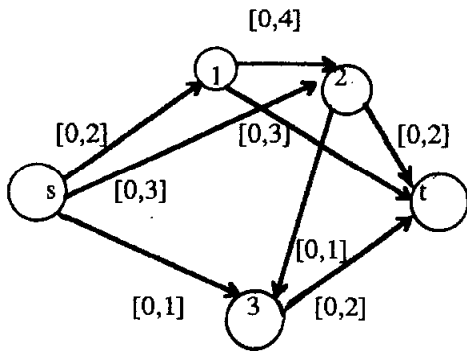
และ $f_{s3} = u_{s3}$

จึงไม่สามารถกำหนดป้ายให้บัพอื่นๆ ได้อีก หรือเขียนเป็นขั้นตอนคือ

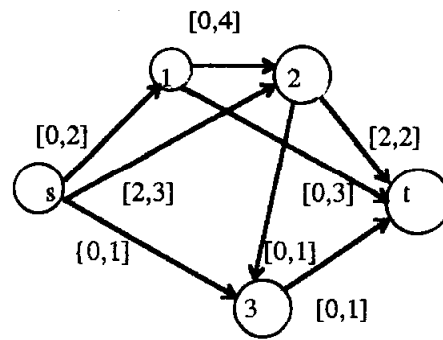
| <u>ขั้นที่</u> | <u>คำอธิบาย</u> |
|----------------|------------------------------------|
| 1 | ก $\infty, -]$ |
| 2 | ไม่สามารถกำหนดป้ายที่บัพใดๆ ได้อีก |

จากการที่ไม่สามารถกำหนดป้ายที่บัพ t ได้ จึงไม่มีวิธีแต่งเติมจาก s ไป t ปริมาณสายงานที่มีอยู่จึงเป็นปริมาณสายงานสูงสุด คือ 6 หน่วย จากรอบที่ 6 ของการคำนวณ ทำให้เกิดส่วน

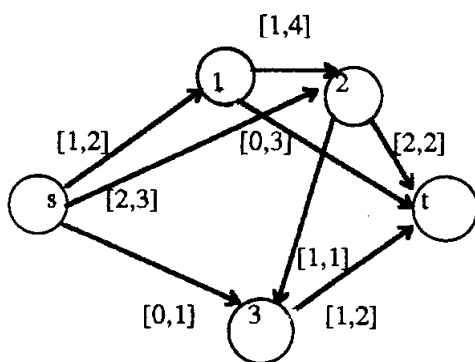
ตัด (N_c, N_c) โดยที่ $N_c = \{s\}$ และ $N_c = \{1, 2, 3, t\}$ มีความจุเป็น 6 ซึ่งเป็นความจุน้อยที่สุด หรือเป็นปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานนั่นเอง



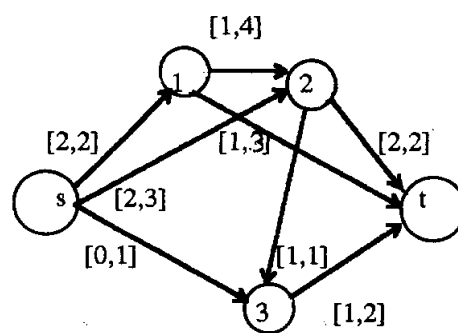
(ก)



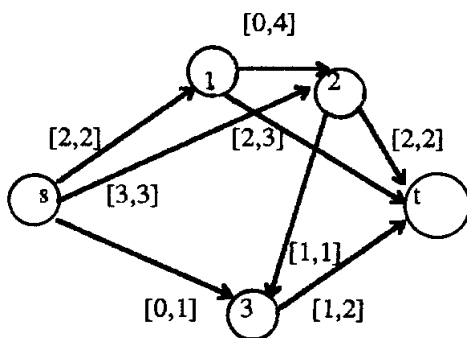
(ข) ปริมาณสายงาน = 2



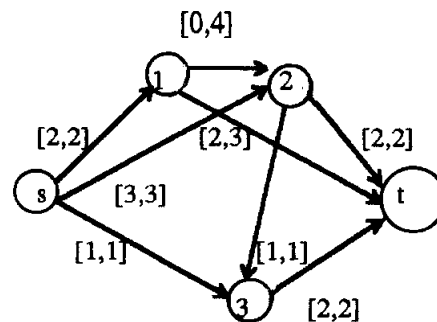
(ค) ปริมาณสายงาน = 3



(ง) ปริมาณสายงาน = 4



(จ) ปริมาณสายงาน = 5



(ฉ) ปริมาณสายงาน = 6

รูป 8.5 แสดงผลจากการใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า

ตัวอย่าง 3.3 ชุมชนแห่งหนึ่งกำลังวางแผนจัดทำระบบกำจัดน้ำเสียโครงการใหม่ โดยให้ 1 ถึง 9 เป็นสถานีย่อยเพื่อส่งน้ำเสียมายังจุดบำบัดน้ำเสียซึ่งอยู่ที่ 10 ดังรูป 3.6 (ก) ถ้าแทนปัญหาด้วยข่ายงานรูป 3.6 (ข) บัพ 1-9 แทนสถานีย่อย บัพ 10 แทนจุดบำบัดน้ำเสีย เส้นเชื่อมแทนท่อระหว่างจุดต่างๆ และสิ่งที่กำกับที่แต่ละเส้นเชื่อมคือ $[f_{ij}, u_{ij}]$ โดย f_{ij} คือปริมาณน้ำเสียที่ผ่านท่อ (i,j) และ u_{ij} แทนความจุสูงสุดที่ (i,j) รับได้ จงหาปริมาณน้ำเสียสูงสุดที่จุดบำบัดจะบำบัดได้

หาผลเฉลยของปริมาณน้ำเสียสูงสุด โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย ดังนี้

รอบที่ 1 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้นคือบัพ 1 ด้วย $[00,-]$ หมายถึง บัพเริ่มต้นมีปริมาณสายงานไม่จำกัด คือ $q_1 = \infty$ และ $-$ หมายถึง สายงานเกิดขึ้นที่บัพเริ่มต้น หรือไม่ได้รับสายงานมาจากบัพอื่น จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้า $(1,2)$, $(1,3)$ และ $(1,4)$ ซึ่งเพิ่มสายงานได้ จึงเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 หรือ 3 หรือ 4 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 โดยกำหนดป้ายด้วย $[+q_2,1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{12} - f_{12})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (4 - 0)\} = 4 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 2 เป็น $[+4,1]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อมจากหน้า $(2,5)$ และ $(2,7)$ ซึ่งเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 5 หรือบัพ 7 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 5 เป็น $[+q_5,2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_5 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{25} - f_{25})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (2 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 5 เป็น $[+2,2]$

จากบัพ 5 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือ เส้นเชื่อมจากหน้า $(5,8)$ และ $(5,10)$ ซึ่งเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 8 หรือบัพ 10 ก็ได้ ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 10 เป็น $[+q_{10},5]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_{10} &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_5, (u_{5,10} - f_{5,10})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (3 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

นั่นคือกำหนดป้ายที่บัพ 10 เป็น $[+2,5]$

เนื่องจากบัพ 10 ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิถีแต่งเติมจากบัพ 1 ไปยังบัพ 10 คือ 1-2-5-10 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีแต่งเติมด้วย $q_{10} = 2$ โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิถีแต่งเติมเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 2 หน่วย

หรือเขียนขั้นตอนกำหนดป้าย โดยย่อเป็น

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+4, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 5 ด้วย $[+2, 2]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 10 ด้วย $[+2, 5]$ |

วิธีแต่งตั้งคือ 1-2-5-10 ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{1,2} = 2, f_{2,5} = 2, f_{5,10} = 2$

รอบที่ 2 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้น คือบัพ 1 ด้วย $[\infty, -]$ โดยที่ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้า (1,2), (1,3) และ (1,4) ซึ่งเพิ่มสายงานได้ จึงเลือกกำหนดป้ายที่บัพ 2 หรือบัพ 3 หรือบัพ 4 ในที่นี้เลือกกำหนดป้ายที่บัพ 3 โดยกำหนดป้ายด้วย $[+q_3, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_3 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{1,3} - f_{1,3})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (1 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นป้ายที่บัพ 3 คือ $[+1, 1]$

จากบัพ 3 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อมจากหน้า (3,6) จึงกำหนดป้ายที่บัพ 6 ด้วย $[+q_6, 3]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_6 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_3, (u_{3,6} - f_{3,6})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 6 คือ $[+1, 3]$

จากบัพ 6 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อมจากหน้า (6,7) และ (6,9) เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 9 ด้วย $[+q_9, 6]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_9 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_6, (u_{6,9} - f_{6,9})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 9 คือ $[+1, 6]$

จากบัพ 9 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อมจากหน้า (9,10) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 10 ด้วย $[+q_{10}, 9]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_{10} &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_9, (u_{9,10} - f_{9,10})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 0)\} = 1 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 10 คือ $[+1, 9]$

เมื่อบัพ 10 ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิธีแต่งตั้งจาก 1 ไป 10 คือ 1-3-6-9-10 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม ในวิธีแต่งตั้งด้วย $q_{10} = 1$ โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งตั้งเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย หรือเขียนขั้นตอนกำหนดป้ายโดยย่อเป็น

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+1, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+1, 3]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 9 ด้วย $[+1, 6]$ |
| 5 | กำหนดป้าย 10 ด้วย $[+1, 9]$ |

วิธีแต่งเดิมคือ 1-3-6-9-10 ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{1,3} = 1, f_{3,6} = 1, f_{6,9} = 1, f_{9,10} = 1$
รอบที่ 3 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้นคือบัพ 1 ด้วย $[\infty, -]$ โดยที่ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้าซึ่งเพิ่มสายงานได้คือ (1,2), (1,3) และ (1,4) เลือกกำหนดที่บัพ 2 เป็น $[+q_2, 1]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_2 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{1,2} - f_{1,2})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (4 - 2)\} = 2 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 2 คือ $[+2, 2]$

จากบัพ 2 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (2,7) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 7 เป็น $[+q_7, 2]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_7 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_2, (u_{2,7} - f_{2,7})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (2 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 7 คือ $[+2, 2]$

จากบัพ 7 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (7,10) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 10 เป็น $[+q_{10}, 7]$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_{10} &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_7, (u_{7,10} - f_{7,10})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{2, (4 - 0)\} = 2 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 10 คือ $[+2, 7]$

เมื่อบัพ 10 ถูกกำหนดป้ายแล้ว วิธีแต่งเดิมจาก 1 ไป 10 คือ 1-2-7-10 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งเดิมด้วย $q_{10} = 2$ โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแต่งเดิมเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 2 หน่วย

หรือเขียนขั้นตอนกำหนดป้ายโดยย่อเป็น

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+2, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 7 ด้วย $[+2, 2]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 10 ด้วย $[+2, 7]$ |

วิธีแต่งตั้งคือ 1-2-7-10 ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{12} = 4$, $f_{27} = 2$ และ $f_{7,10} = 2$

รอบที่ 4 กำหนดป้ายให้บัพเริ่มต้นคือบัพ 1 ด้วย $[\infty, -]$ โดยที่ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมจากหน้าซึ่งเพิ่มสายงานได้คือ (1,4) กำหนดป้ายให้บัพ 4 เป็น $+[q_4, 1]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_4 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{14} - f_{14})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (3 - 0)\} = 3\end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 4 คือ $+[3, 3]$

จากบัพ 4 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (4,6) และ (4,7) กำหนดป้ายให้บัพ 7 เป็น $+[q_7, 4]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_7 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_4, (u_{47} - f_{47})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{3, (3 - 0)\} = 3\end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 7 คือ $+[3, 4]$

จากบัพ 7 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (7,10) กำหนดป้ายให้บัพ 10 เป็น $+[q_{10}, 7]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_{10} &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_7, (u_{7,10} - f_{7,10})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{3, (4 - 2)\} = 2\end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 10 คือ $+[2, 7]$

เมื่อบัพ 10 ถูกกำหนดป้ายแล้ววิธีแต่งตั้งคือ 1-4-7-10 ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{14} = 2$, $f_{47} = 2$ และ $f_{7,10} = 4$

รอบที่ 5 กำหนดป้ายให้บัพ 1 เป็น $[\infty, -]$ โดยที่ $q_1 = \infty$ จากบัพ 1 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (1,4) กำหนดป้ายให้บัพ 4 เป็น $+[q_4, 1]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_4 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_1, (u_{14} - f_{14})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{\infty, (3 - 2)\} = 1\end{aligned}$$

บัพ 4 มีป้ายเป็น $+[1, 1]$

จากบัพ 4 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (4,7) และ (4,6) กำหนดป้ายให้บัพ 6 เป็น $+[q_6, 4]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_6 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_4, (u_{46} - f_{46})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (3 - 0)\} = 1\end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 6 คือ $+[1, 4]$

จากบัพ 6 มีเส้นเชื่อม (6,7) และ (6,9) ที่เพิ่มสายงานได้ เลือกกำหนดป้ายให้บัพ 9 เป็น $+[q_9, 6]$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ } q_9 &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_6, (u_{69} - f_{69})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 1)\} = 1\end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 9 คือ [+1,6]

จากบัพ 9 มีเส้นเชื่อมที่เพิ่มสายงานได้คือเส้นเชื่อม (9,10) จึงกำหนดป้ายให้บัพ 10 เป็น [+q₁₀,9]

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } q_{10} &= \text{ค่าต่ำสุด } \{q_9, (u_{9,10} - f_{9,10})\} \\ &= \text{ค่าต่ำสุด } \{1, (2 - 1)\} = 1 \end{aligned}$$

ป้ายที่บัพ 10 คือ [+1,9]

วิธีแตงเดิมคือ 1-4-6-9-10 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแตงเดิมด้วย $q_{10} = 1$ โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมในวิธีแตงเดิมเป็นเส้นเชื่อมจากหน้า จึงเพิ่มสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย

หรือเขียนขั้นตอนโดยย่อเป็น

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย [∞,-] |
| 2 | กำหนดป้าย 4 ด้วย [+1,1] |
| 3 | กำหนดป้าย 6 ด้วย [+1,4] |
| 4 | กำหนดป้าย 9 ด้วย [+1,6] |
| 5 | กำหนดป้าย 10 ด้วย [+1,9] |

วิธีแตงเดิมคือ 1-4-6-9-10 ปรับปริมาณสายงานเป็น $f_{14} = 3, f_{46} = 1, f_{69} = 2$ และ

$$f_{9,10} = 2$$

รอบที่ 6 กำหนดป้ายให้บัพ 1 เป็น [∞,-] เส้นเชื่อม (1,2), (1,3) และ (1,4) ไม่สามารถเพิ่มสายงานได้อีก จึงไม่สามารถกำหนดป้ายให้บัพ 2, 3 หรือ 4 หรือบัพอื่นๆ ได้ ปริมาณสายงานสูงสุดโดยที่ $N_c = \{1\}$

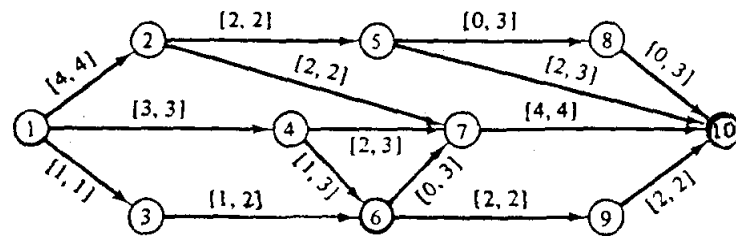
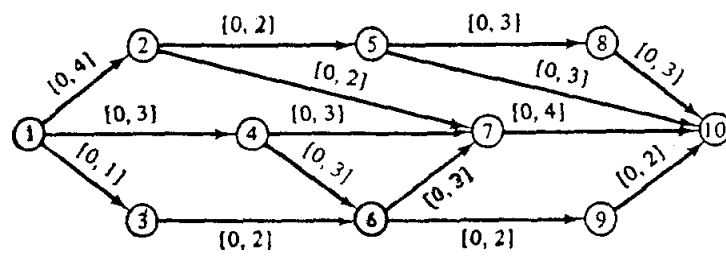
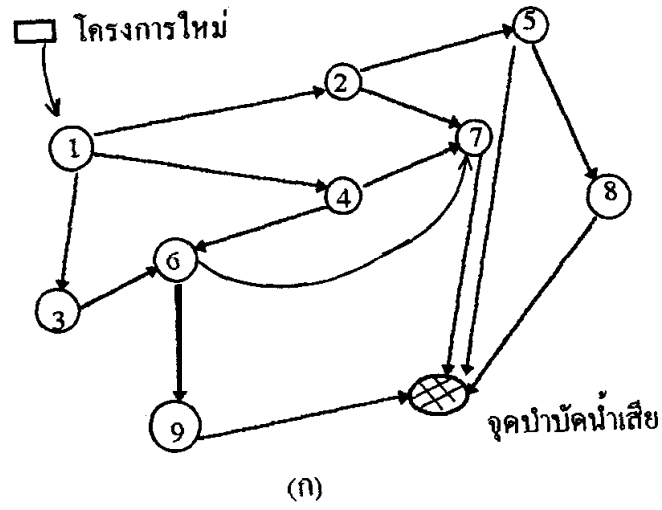
$$\overline{N_c} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$\begin{aligned} \text{ส่วนตัด } (N_c, \overline{N_c}) &= u_{12} + u_{13} + u_{14} \\ &= 4 + 1 + 3 = 8 \end{aligned}$$

เนื่องจากมีส่วนตัดเพียง 1 ส่วนตัด ดังนั้นความจุที่คำนวณได้จึงเป็นความจุน้อยที่สุด

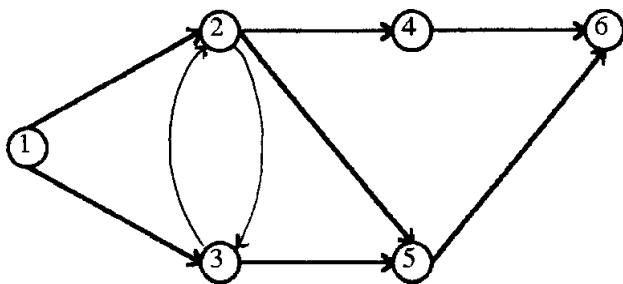
นั่นคือปริมาณสายงานสูงสุด = 8 หน่วย ดังรูป 3.6 ค

ปัญหาาระบบบำบัดน้ำเสีย รับปริมาณน้ำเสียเพื่อบำบัดได้สูงสุด 8 หน่วย ท่อส่วนที่เชื่อมระหว่าง (5,8) และ (8,10) ไม่มีปริมาณสายงาน นั่นคือ ไม่จำเป็นต้องมีสถานีย่อย 8 สำหรับ (6,7) ไม่มีปริมาณสายงานจึงอาจไม่จำเป็นต้องมีท่อเชื่อมระหว่าง 6 กับ 7 ถ้าต้องการเพิ่มปริมาณน้ำเสียที่บำบัดให้มากขึ้น สามารถทำได้โดยใช้ท่อใหญ่กว่าเดิมที่ (1,2) และ (2,5) ส่วนที่ (1,3) และ (1,4) แม้จะใช้ท่อใหญ่กว่า ก็จะไม่เพิ่มปริมาณน้ำเสียให้ระบบ นอกจากจะปรับปรุงส่วนอื่นของระบบเพิ่มเติม



รูป 3.6 (ก) ปัญหาระบบบำบัดน้ำเสีย (ข) ข่ายงานแทนปัญหาระบบบำบัดน้ำเสีย
(ค) ผลเฉลยของปัญหา

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดข่ายงานดังรูป 3.7 และเริ่มต้น $f_{12} = f_{13} = f_{24} = f_{25} = f_{35} = f_{45} = f_{56} = 0$,
 $f_{23} = f_{32} = 2$, $u_{12} = 5, u_{13} = 6, u_{23} = u_{32} = 2, u_{24} = 3, u_{25} = 1, u_{35} = 5, u_{46} = 5$ และ $u_{56} = 8$
 จงหาปริมาณสายงานสูงสุดจาก 1 ไป 6 ของข่ายงาน โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า



รูป 3.7 ข่ายงานของตัวอย่าง 3.4

ในตัวอย่างนี้ จะแสดงการคำนวณวิถีแต่งเติม จากขั้นตอนวิธีกำหนดค่าโดยย่อ

รอบที่ 1

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|-------------------------------|
| 1 | กำหนดค่า 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดค่า 2 ด้วย $[+5, 1]$ |
| 3 | กำหนดค่า 4 ด้วย $[+3, 2]$ |
| 4 | กำหนดค่า 6 ด้วย $[+3, 4]$ |

วิถีแต่งเติม คือ 1-2-4-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 3 หน่วย เป็น $f_{12} = 3, f_{24} = 3$

และ $f_{46} = 3$

รอบที่ 2

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|-------------------------------|
| 1 | กำหนดค่า 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดค่า 2 ด้วย $[+2, 1]$ |
| 3 | กำหนดค่า 5 ด้วย $[+1, 2]$ |
| 4 | กำหนดค่า 6 ด้วย $[+1, 5]$ |

วิถีแต่งเติม คือ 1-2-5-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย เป็น $f_{12} = 4, f_{25} = 1$

และ $f_{56} = 1$

รอบที่ 3

| <u>ขั้นที่</u> | <u>คำอธิบาย</u> |
|----------------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+1, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[-1, 2]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 5 ด้วย $[+1, 3]$ |
| 5 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+1, 5]$ |

วิธีแต่งเติม คือ 1-2-3-5-6 ประกอบด้วยเส้นเชื่อม(1,2), (3,2), (3,5) และ (5,6) ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย เป็น $f_{12} = 5$, $f_{32} = 1$ (ลดสายงานของเส้นเชื่อม (3,2) เพราะกำหนดป้ายในลักษณะของเส้นเชื่อมผกผัน), $f_{35} = 1$ และ $f_{56} = 2$

รอบที่ 4

| <u>ขั้นที่</u> | <u>คำอธิบาย</u> |
|----------------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+6, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 5 ด้วย $[+4, 3]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+4, 5]$ |

วิธีแต่งเติม คือ 1-3-5-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 4 หน่วย เป็น $f_{13} = 4$, $f_{35} = 5$ และ $f_{56} = 6$

รอบที่ 5

| <u>ขั้นที่</u> | <u>คำอธิบาย</u> |
|----------------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+2, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+1, 3]$ |
| 4 | กำหนดป้ายให้บัพ 4 และ 5 ไม่ได้ |

พิจารณาส่วนตัด $(N_c, \overline{N_c})$ เมื่อ $N_c = \{1, 2, 3\}$

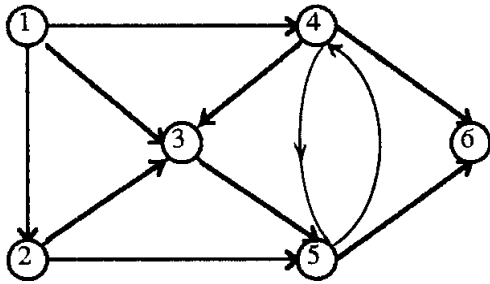
$$\overline{N_c} = \{4, 5\}$$

$$\text{ส่วนตัด}(N_c, \overline{N_c}) = \{(2, 4), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$= 3 + 1 + 5 = 9 \text{ หน่วย}$$

เนื่องจากมีส่วนตัดเพียง 1 รูปแบบ จึงเป็นส่วนตัดที่มีความจุน้อยที่สุด
 ปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน = 9 หน่วย

ตัวอย่าง 3.5 กำหนดข่ายงานดังรูป 3.8 เมื่อ $f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{23} = f_{25} = f_{35} = f_{43} = f_{45} = f_{46} = f_{54} = f_{56} = 0$ และ $u_{12} = u_{35} = u_{54} = 1, u_{25} = u_{43} = 5, u_{13} = u_{46} = 6, u_{23} = 4, u_{14} = 5, u_{45} = 7$ และ $u_{56} = 8$ จงหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย



รูป 3.8 ข่ายงานของตัวอย่าง 3.5

ในตัวอย่างนี้ จะแสดงการคำนวณโดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้ายแบบย่อ
รอบที่ 1

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 4 ด้วย $[+5, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+5, 4]$ |

วิธีแต่เดิม คือ 1-4-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 5 หน่วย คือ $f_{14} = 5$ และ $f_{56} = 5$

รอบที่ 2

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+6, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 5 ด้วย $[+1, 3]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 4 ด้วย $[+1, 5]$ |
| 5 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+1, 4]$ |

วิธีแต่งเดิมคือ 1-3-5-4-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย คือ $f_{13} = f_{35} = f_{54} = f_{46}$

= 1

รอบที่ 3

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--------------------------------|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 2 ด้วย $[+1, 1]$ |
| 3 | กำหนดป้าย 5 ด้วย $[+1, 2]$ |
| 4 | กำหนดป้าย 6 ด้วย $[+1, 5]$ |

วิธีแต่งเดิมคือ 1-2-5-6 ปรับสายงานที่แต่ละเส้นเชื่อม 1 หน่วย คือ $f_{12} = f_{25} = f_{56} = 1$

รอบที่ 4

| ขั้นที่ | คำอธิบาย |
|---------|--|
| 1 | กำหนดป้าย 1 ด้วย $[\infty, -]$ |
| 2 | กำหนดป้าย 3 ด้วย $[+5, 1]$ |
| 3 | ไม่สามารถกำหนดป้ายให้บัพ 2, 4 และ 5 ได้ เพราะ (2,3) และ (4,3) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าซึ่ง $f_{23} = 0$ และ $f_{43} = 0$ จึงกำหนดป้ายแบบเส้นเชื่อมผ่นกลับไม่ได้ เส้นเชื่อม (3,5) เป็นเส้นเชื่อมจากหน้าซึ่ง $f_{35} = u_{45}$ จึงเพิ่มสายงานไม่ได้ |

พิจารณาส่วนตัด $(N_c, \overline{N_c})$ เมื่อ $\overline{N_c} = \{1, 3\}$

$$N_c = \{2, 4, 5, 6\}$$

ส่วนตัด $(N_c, \overline{N_c}) = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 3)\}$

$$\begin{aligned} \text{ความจุของส่วนตัด } (N_c, \overline{N_c}) &= u_{12} + u_{14} + u_{35} \\ &= 5 + 1 + 1 \\ &= 7 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

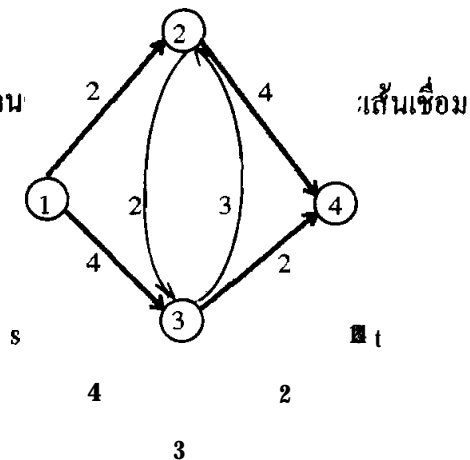
เนื่องจากมีส่วนตัด $(N_c, \overline{N_c})$ เพียง 1 รูปแบบ ความจุของส่วนตัดที่คำนวณได้จึงเป็นส่วนตัดที่มีความจุน้อยที่สุด

ปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน = 7 หน่วย

การคำนวณหาปริมาณสายงานสูงสุด โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย ในแต่ละรอบของการคำนวณ อาจจะไม่เลือกกำหนดป้ายที่แต่ละบัพต่างกัน ซึ่งข้อแตกต่างก็คือ ทำให้จำนวนรอบในการคำนวณต่างกัน แต่ทั้งนี้ยังคงได้ปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานเหมือนกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 3

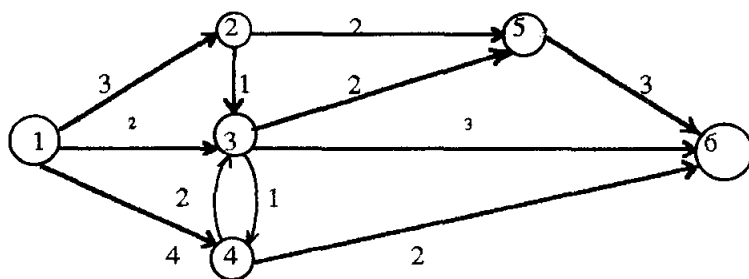
1. จากข่ายงาน



1.1 จงเขียนกำหนดการเชิงเส้นแทนปัญหา

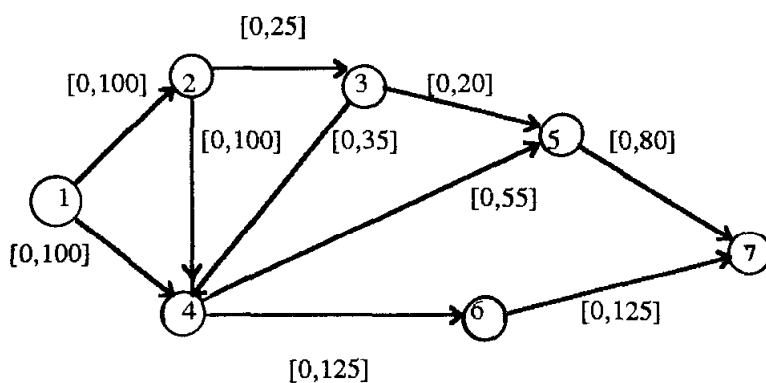
1.2 ใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย หาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน โดยใช้สายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0 (6 หน่วย)

2. กำหนดข่ายงานซึ่งตัวเลขที่กำกับแต่ละเส้นเชื่อมคือความจุ จงใช้ทฤษฎีสายงานสูงสุด-ส่วนตัดต่ำสุด หาสายงานสูงสุดจาก 1 ไป 6



ตอบ สายงานสูงสุด = 8 หน่วย ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(3,6), (4,6), (5,6)\}$

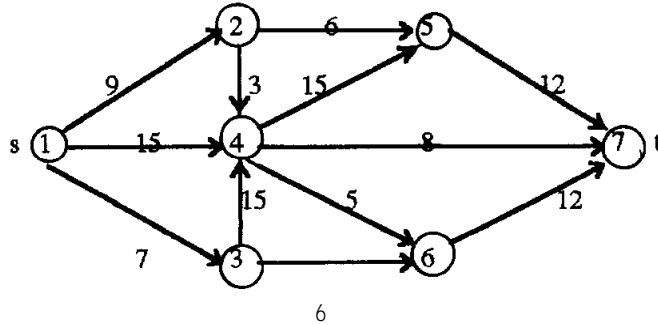
3. หาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานจาก 1 ไป 7 เมื่อกำหนดป้ายที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น $[f_{ij}, u_{ij}]$ และบอกส่วนตัดต่ำสุด



ตอบ สายงานสูงสุด = 200 หน่วย ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(1,2), (1,4)\}$

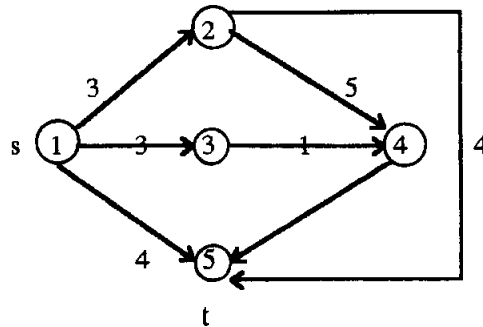
4. จงหาสายงานสูงสุดของข่ายงานจาก s ไป t พร้อมทั้งบอกส่วนตัดต่ำสุด โดยใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดป้าย เมื่อตัวเลขที่กำหนดแต่ละเส้นเชื่อมคือความจุ (c_{ij}) และ f_{ij} เริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0

4.1



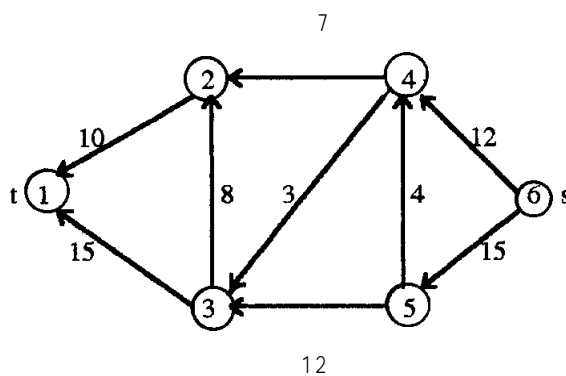
ตอบ สายงานสูงสุด = 31 หน่วย ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$

4.2



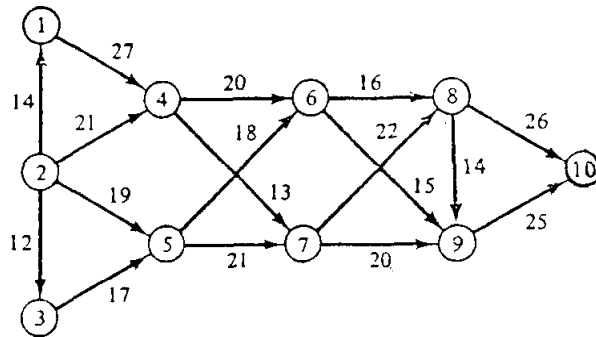
ตอบ สายงานสูงสุด = 8 หน่วย ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(1,2), (1,5), (3,4)\}$

4.3

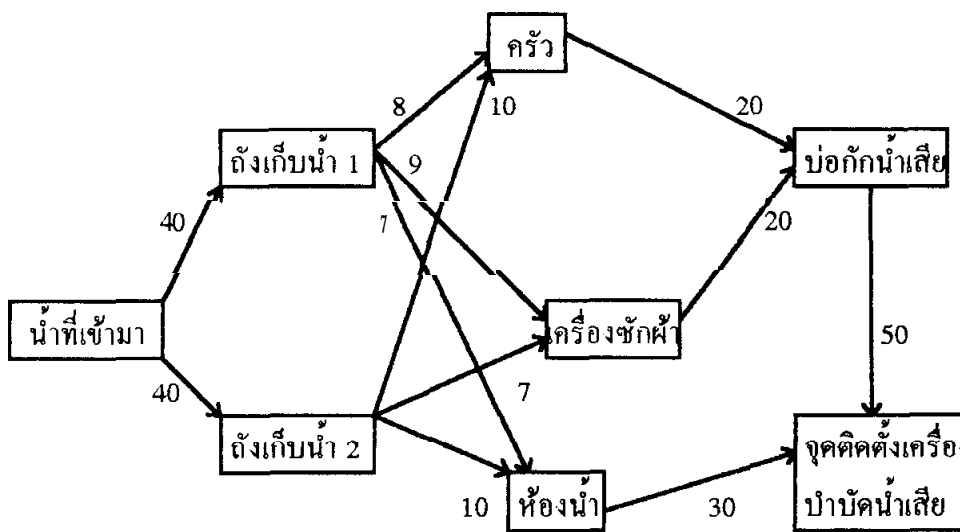


ตอบ สายงานสูงสุด = 22 หน่วย ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(4,2), (4,3), (5,3)\}$

5. จากข่ายงานซึ่งตัวเลขที่กำกับแต่ละเส้นเชื่อมคือความจุ ถ้าเริ่มต้นสายงานของแต่ละเส้นเชื่อมคือ 0 จงใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า หาสายงานสูงสุดจาก 2 ไป 10 (ตอบ 51 หน่วย)

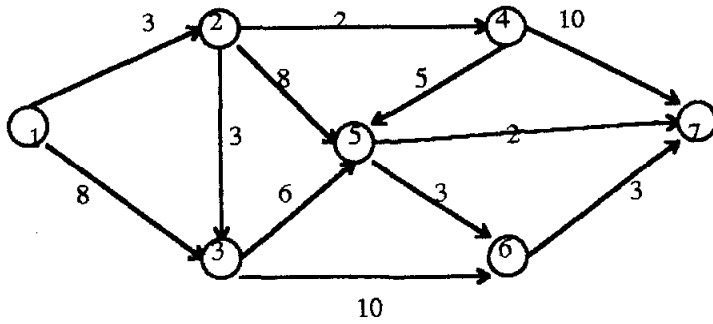


6. ผู้รับเหมาติดตั้งระบบบำบัดน้ำเสียของบ้านหลังหนึ่ง ซึ่งมีความจุสูงสุดของท่อแต่ละช่วงดังรูป เขาต้องการทราบปริมาณน้ำสูงสุดที่จะไหลมายังจุดที่ตั้งเครื่องบำบัดน้ำเสีย เพื่อเลือกขนาดของเครื่องบำบัดน้ำเสีย และท่อที่เหมาะสม



(ตอบ 51 หน่วย)

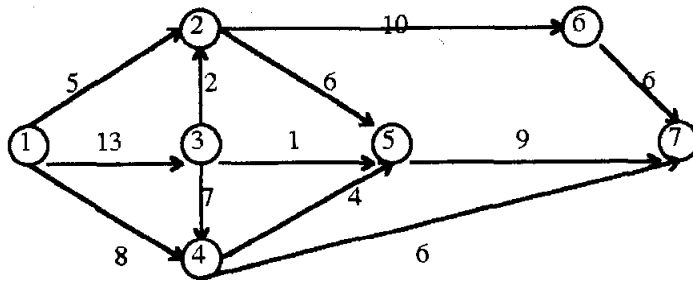
7. จากข่ายงานซึ่งกำหนดค่าความจุไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม ถ้าปริมาณสายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0



- 7.1 จงเขียนกำหนดการเชิงเส้นแทนปัญหา เพื่อหาปริมาณสายงานสูงสุด จาก 1 ไป 7
- 7.2 ใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า หหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน จาก 1 ไป 7 (7 หน่วย)
- 7.3 จงหาส่วนตัดต่ำสุด

ตอบ ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(2,4), (4,5), (5,7), (6,7)\}$
 ความจุ = 7 หน่วย

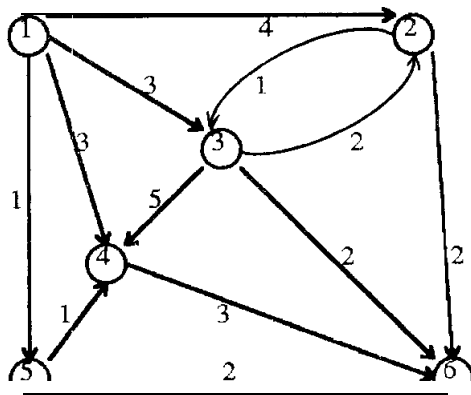
8. จากข่ายงาน ซึ่ง 1 เป็นบัพเริ่มต้น 7 เป็นบัพสุดท้าย ค่าความจุกำหนดไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม



- 8.1 จงเขียนกำหนดการเชิงเส้นแทนปัญหา เพื่อหาปริมาณสายงานสูงสุดจาก 1 ไป 7
- 8.2 ใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า หหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน เมื่อสายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0 (18 หน่วย)
- 8.3 จงหาส่วนตัดต่ำสุด

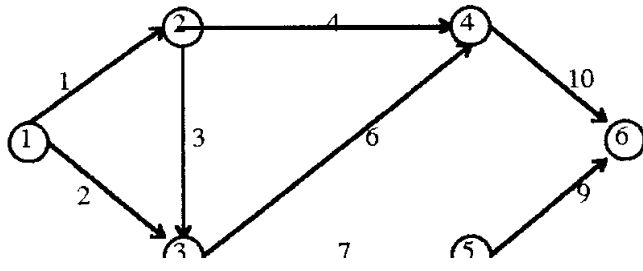
ตอบ ส่วนตัดต่ำสุด = $\{(1,2), (3,2), (3,5), (4,5), (4,7)\}$

9. กำหนดข่ายงานซึ่งค่าความจุแสดงไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม



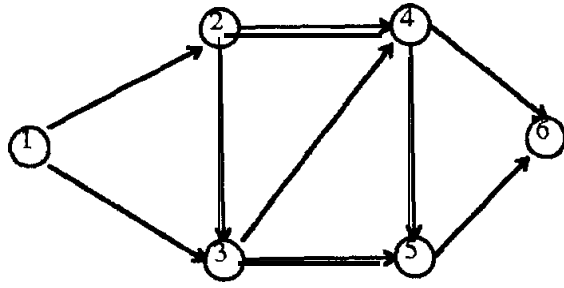
- 9.1 จงเขียนกำหนดการเชิงเส้น เพื่อหาปริมาณสายงานสูงสุดจาก 1 ไป 6
 9.2 ถ้าสายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0 จงใช้ขั้นตอนวิธีกำหนดค่า หาค่าปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน (8 หน่วย)
 9.3 จงหาส่วนตัดต่ำสุดของข่ายงาน
 ตอบ $\{(2,6), (3,6), (1,5), (5,4), (4,6)\}$

10. ข่ายงานซึ่งกำหนดความจุไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม



ถ้าสายงานเริ่มต้นที่แต่ละเส้นเชื่อมเป็น 0 จงหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงาน (3 หน่วย)

11. ถ้า $f_{12} = f_{23} = f_{34} = f_{45} = f_{56} = 4$
 $u_{12} = 19, u_{14} = 14, u_{13} = u_{35} = 10, u_{24} = 17, u_{34} = 4, u_{45} = 8, u_{46} = 15$ และ $u_{56} = 17$
 จงหาปริมาณสายงานสูงสุดของข่ายงานจาก 1 ไป 6 พร้อมทั้งบอกส่วนตัดต่ำสุด



ตอบ ปริมาณสายงานสูงสุด = 31 หน่วย
ส่วนตัดต่ำสุดคือ $\{(2,4), (3,4), (3,5)\}$
