บทที่ 2
ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุดและต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด
(SHORTEST-ROUTE AND MINIMAL-SPANING-TREE PROBLEMS)

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะเกี่ยวข้องกับตัวแบบของสายงานข่ายงานเชิงกำหนด (deterministic network-flow models) ที่ใช้แทนปัญหาเส้นทางสั้นที่สุดของสายงานจากบัพเริ่มต้นไปยังบัพสุดท้าย โดยให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายมีค่าน้อยที่สุด และปัญหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด ซึ่งเลือกเส้นเชื่อมระหว่างบัพต่างๆ โดยมีผลรวมของระยะทางหรือค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เนื่องจากตัวแบบของปัญหาสายงานข่ายงาน มักจะแทนด้วยตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น จึงขอกล่าวถึงกำหนดการเชิงเส้นของสายงานข่ายงานเสียก่อน

2.1 กำหนดการเชิงเส้นของสายงานข่ายงาน

พิจารณาข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้น α บัพ บัพสุดท้าย β บัพ และบัพระหว่างกลางจำนวน ϕ บัพ โดยมีสายงานจำนวนหนึ่งที่จะส่งจากบัพเริ่มต้น ไปยังบัพสุดท้าย

กำหนดให้ f_{ij} คือสายงานของเส้นเชื่อม (i,j)

u_{ij} คือความจุของเส้นเชื่อม (i,j)

c_{ij} คือค่าใช้จ่าย/หน่วยของสายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i,j)

N_α แทนเซตของบัพเริ่มต้น

N_β แทนเซทของบัพสุดท้าย

และ N_ϕ แทนเซทของบัพระหว่างกลาง

เมื่อ $N = N_\alpha \cup N_\beta \cup N_\phi = \{1,2,3,\ldots,n\}$

และ $G = (N,A)$ แทนข่ายงานระบุทิศทาง

ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาสายงานที่มีผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดคือ

หาค่าต่ำสุด $Z = \sum_i \sum_j c_{ij} f_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} \leq a_i \quad ; \; i \in N_\alpha \tag{2.1}$$

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 0 \quad ; \; i \in N_\phi \tag{2.2}$$

$$\sum_j f_{ji} - \sum_j f_{ij} \geq b_i \quad ; \; i \in N_\beta \tag{2.3}$$

$$\text{และ } 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} \quad ; \; \forall (i,j) \in A \tag{2.4}$$

อสมการ (2.1) แทนปริมาณสายงานที่มีอยู่ไม่เกิน $\sum a_i$
อสมการ (2.3) แสดงว่าต้องส่งสายงานอย่างน้อย $\sum b_i$
สมการ (2.2) แสดงการอนุรักษ์สายงานที่แต่ละบัพระหว่างกลาง
อสมการ (2.4) แทนข้อจำกัดของความจุที่แต่ละเส้นเชื่อม

ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด สามารถแทนได้ด้วยรูปแบบพิเศษของกำหนดการเชิงเส้น โดยพิจารณาเป็นปัญหาการส่งสายงาน 1 หน่วยจากบัพเริ่มต้น (s) ไปยังบัพสุดท้าย (t) และให้มีผลรวมของค่าใช้จ่ายหรือเวลาน้อยที่สุด ถ้า c_{ij} คือค่าใช้จ่ายหรือเวลาในการส่งสายงาน 1 หน่วยจากบัพ i เป็นบัพ j ถ้าเป็นเส้นเชื่อมหุ่น (i,j) แล้ว $c_{ij} = 0$ และถ้าไม่มีเส้นเชื่อม (i,j) ที่เป็นไปได้แล้ว $c_{ij} = \infty$ กำหนดให้ $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $N_\alpha = \{1\}$, $N_\beta = \{n\}$, $a_1 = 1$ และ $b_n = 1$ ข้อจำกัด (2.4) กลายเป็น $0 \leq f_{ij} \leq 1$ หรือเขียนเป็น $f_{ij} \geq 0$ เพราะตั้งข้อสมมติไว้ข้างต้นว่าส่งสายงาน 1 หน่วย ถ้าข่ายงานที่พิจารณาเป็นข่ายงานซึ่งไม่มีวัฏจักรและทุกๆ เส้นเชื่อมเป็นเส้นเชื่อมระบุทิศทาง ปัญหาการหาเส้นทางสั้นที่สุดของการส่งสายงานจากบัพเริ่มต้นไปยังบัพสุดท้าย เขียนได้เป็น

หาค่าต่ำสุด $Z = \sum_i \sum_j c_{ij} f_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = 1 \tag{2.5}$$

$$\sum_{j} f_{ij} - \sum_{j} f_{ji} = 0 \quad ; \quad i \neq 8 \; ; i \neq t \tag{2.6}$$

$$\sum_{j} f_{tj} - \sum_{j} f_{jt} = -1 \tag{2.7}$$

และ $$f_{ij} \geq 0 \quad ; \quad \forall (i,j) \in A \tag{2.8}$$

ทั้งนี้อสมการจะเป็นสมการ เมื่อได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด (optimal solution) และเพื่อจะแสดงผลเฉลยพื้นฐาน ผลเฉลยที่เป็นไปได้ รวมทั้งผลเฉลยเหมาะที่สุดต้องเป็นจำนวนเต็ม จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบท (ดูการพิสูจน์จาก [2]) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่ง (unimodular matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีค่าสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม และตัวกำหนด (determinant) เป็น 0 หรือ 1 หรือ -1

บทนิยาม 2.2 ถ้าเมทริกซ์ M เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่ง ซึ่งทุกๆ เมทริกซ์ย่อยที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสต่างก็เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่ง แล้วจะเรียก M ว่าเป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน (totally unimodular matrix)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้าเมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน แล้วทุกผลเฉลยพื้นฐานของ DF = B และ $F \geq 0$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็ม

โดยที่ F เป็นเวคเตอร์ไม่เป็นลบ

D เป็นเมทริกซ์ซึ่งแต่ละสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม

B เป็นเวคเตอร์เชิงจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 2.2 พิจารณาเมทริกซ์เชิงจำนวนเต็ม D เงื่อนไข 2 ข้อต่อไปนี้ จะสมมูลกัน เมื่อเทียบกับเมทริกซ์ D คือ

1. D เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน
2. ผลเฉลยพื้นฐานของกำหนดการเชิงเส้นที่มีข้อจำกัด $DF \leq B$ และ $F \geq 0$ จะมีค่าเป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้าเมทริกซ์เชิงจำนวนเต็ม M เป็นเมทริก์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน แล้ว M จะสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. แต่ละสมาชิกของ M เป็น 0 หรือ 1 หรือ -1 เท่านั้น
2. แต่ละสดมภ์ของเมทริกซ์ จะมีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 ได้ไม่เกิน 2 สมาชิก
3. แถวของเมทริกซ์ M สามารถแบ่งได้เป็น 2 เซต คือ E_1 และ E_2 โดยที่

3.1 ถ้าสดมภ์ใดมี 2 สมาชิกที่ไม่เป็น 0 ที่มีเครื่องหมายเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหนึ่งจะอยู่ใน E_1 และอีกสมาชิกหนึ่งจะอยู่ใน E_2

3.2 ถ้าสดมภ์ใดมี 2 สมาชิกที่ไม่เป็น 0 ซึ่งมีเครื่องหมายตรงกันข้าม แล้วทั้ง 2 สมาชิกสามารถอยู่ในเซตเดียวกันได้

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า M เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน แล้ว $P = [M|I]$ ก็จะเป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วนด้วย เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

บทแทรก เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน จะมีคุณสมบัติเป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วนด้วย

ต่อไปจะแสดงว่าสายงานข่ายที่แทนข้อจำกัด (2.1)- (2.4) มีผลเฉลยเหมาะที่สุดเป็นจำนวนเต็มเมื่อ a_i, b_i และ u_{ij} เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณาข่ายงานใดๆ ที่แทนข้อจำกัด (2.1) - (2.4) ดังรูป 2.1

เมื่อบัพเริ่มต้น $\alpha = 1$ หรือ $N_\alpha = \{1\}$

บัพสุดท้าย $\beta = 1$ หรือ $N_\beta = \{8\}$

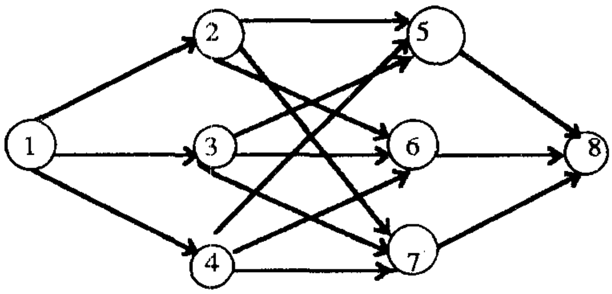
บัพระหว่างกลาง $\phi = 6$ หรือ $N_\phi = \{2,3,4,5,6,7\}$

เขียนแทนปัญหาเป็น

หาค่าต่ำสุด $$Z = \sum_i \sum_j c_{ij} f_{ij}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$f_{12} + f_{13} + f_{14} \leq a_1$$
$$f_{25} + f_{26} + f_{27} - f_{12} = 0$$
$$f_{35} + f_{36} + f_{37} - f_{13} = 0$$
$$f_{45} + f_{46} + f_{47} - f_{14} = 0$$
$$f_{58} - f_{25} - f_{35} - f_{45} = 0$$
$$f_{68} - f_{26} - f_{36} - f_{46} = 0$$
$$f_{78} - f_{27} - f_{37} - f_{47} = 0$$
$$f_{58} + f_{68} + f_{78} \geq b_8$$
และ $0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}$; $\forall (i,j) \in A$



รูป 2.1 ข่ายงานสายงาน

เพื่อจะแสดงว่าผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหาเป็นจำนวนเต็ม จะแทนด้วยการแสดงว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน

กำหนดให้ Z คือเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์จากข้อจำกัดของการอนุรักษ์สายงาน (2.2) และข้อจำกัดของปริมาณสายงานที่มีอยู่ (2.1) กับข้อจำกัดของสายงานที่ต้องจัดส่ง (2.3) ส่วน I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ซึ่งสร้างจากสัมประสิทธิ์ของข้อจำกัดเกี่ยวกับความจุของเส้นเชื่อม (2.4) และ D คือเมทริกซ์แบ่งกั้นซึ่งประกอบด้วย Z และ I หรือ $D = [\frac{Z}{I}]$ จากข่ายงานในรูป 2.1 จะได้เมทริกซ์ย่อย Z และ I ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ D คือ

f_{12} f_{13} f_{14} f_{25} f_{26} f_{27} f_{35} f_{36} f_{37} f_{45} f_{46} f_{47} f_{58} f_{68} f_{78}

11110 0 0 0 0 0 0 0 0 0 00

2-10 0 1110 0 0 0 0 0 0 00

4 0 - l 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0

z = I 0 o-1 0 0 0 0 0 0 1110 00

3 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 1 0 0

5 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 1 0

70 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 0 1

60 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 O-1 -1 -1

10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0

I = 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10

0 0 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

แต่ละสดมภ์ของ Z มีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 เพียง 2 ค่าเท่านั้น คือ 1 หรือ -1 ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข 1 และ 2 ของทฤษฎีบท 2.3 จากเงื่อนไข 3 ถ้าให้ E_1 ประกอบด้วยทุกๆ แถวจาก Z และ E_2 เป็นเซตว่าง แล้ว Z เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน จากทฤษฎีบท 2.4 และบทแทรก เมทริกซ์ $\left[\frac{Z}{I}\right]$ เป็นเมทริกซ์ตัวกำหนดเป็นหนึ่งทุกส่วน จากทฤษฎีบท 2.1 และ 2.2 ผลเฉลย

เหมาะที่สุดเป็นจำนวนเต็ม

2.2 ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด

จากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด คือ

หาค่าต่ำสุด $$z = \sum_{i}\sum_{j} c_{ij} f_{ij}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j} f_{sj} - \sum_{j} f_{js} = 1$$

$$\sum_{j} f_{ij} - \sum_{j} f_{ji} = 0 \quad ; \quad i = s \; ; i \neq t$$

$$\sum_{j} f_{tj} - \sum_{j} f_{jt} = -1$$

และ $f_{ij} \geq 0 \quad ; \quad \forall (i,j) \in A$

ข้อจำกัดแรกเป็นการประกันว่า มีสายงาน 1 หน่วยออกจากบัพเริ่มต้น

ข้อจำกัดที่สองแสดงการอนุรักษ์สายงานที่ผ่านแต่ละบัพ

ข้อจำกัดที่สามทำให้ทราบว่ามีสายงาน 1 หน่วยที่บัพสุดท้าย

ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด กำหนดได้เป็นลำดับเชื่อมโยงของเส้นเชื่อม (i,j) ซึ่ง $f_{ij} = 1$ แทนที่จะแก้ปัญหาจากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมกว่า คือ ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra ที่ใช้กับข่ายงานที่มีค่าใช้จ่ายหรือระยะทางไม่เป็นลบ ซึ่งกำหนดสัญลักษณ์ คือ

c_{ij} แทนค่าใช้จ่ายหรือระยะทางระหว่าง 2 บัพใดๆ ในข่ายงาน และ $c_{ij} > 0$

δ_k คือ ป้าย (label) ของบัพ k หมายถึงค่าประมาณของระยะทางที่สั้นที่สุดจากบัพเริ่มต้น s มายังบัพ k ถ้าค่าประมาณนี้ ไม่สามารถปรับให้ดีขึ้นได้อีก จะเรียกค่านี้ว่า ป้ายถาวร (permanent label) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{\delta_k}$ แต่ถ้าค่าประมาณนี้ยังปรับปรุงได้อีก จะเรียกค่านี้ว่า ป้ายชั่วคราว (temporary label)

ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra เริ่มด้วยการกำหนดป้ายของบัพเริ่มต้น s เป็น $\boxed{0}$ คือระยะทางจากบัพเริ่มต้นมาบัพเริ่มต้นเองเป็น 0 และเป็นป้ายถาวร ให้ j = s สำหรับที่บัพอื่นๆ ป้ายชั่วคราวคือระยะทางที่สั้นที่สุดจาก s มายังบัพนั้นๆ ส่วนบัพที่ไม่มีเส้นเชื่อมกับ s ให้ป้ายชั่วคราวเป็น

∞ จากนั้นให้เลือกป้ายถาวรค่าใหม่จากป้ายชั่วคราวที่มีค่าน้อยที่สุด และ j คือบัพที่เลือก จะหยุดการคำนวณเมื่อ j เท่ากับบัพสุดท้าย หรือ j = t แล้วจึงแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาเส้นทางที่สั้นที่สุด โดยใช้คุณสมบัติ $\boxed{\delta_j} = \boxed{\delta_i} + c_{ij}$ เพื่อเลือกเส้นเชื่อม (i,j) นั้นไว้ในเส้นทาง หรือเขียนเป็นขั้นตอนวิธี ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดป้ายถาวรที่บัพ s เป็น 0 หรือ $\delta_s = \boxed{0}$ และป้ายชั่วคราวซึ่ง บัพที่มีเส้นเชื่อมกับ s มีป้ายชั่วคราวเป็นระยะทางจาก s มาที่บัพนั้นๆ ส่วนบัพที่ไม่มีเส้นเชื่อมกับ s ให้ป้ายชั่วคราวเป็น ∞ และกำหนดให้ j = s

ขั้นที่ 2 จากป้ายชั่วคราวทั้งหมด เลือกบัพที่ให้ป้ายชั่วคราวน้อยที่สุด สมมติเป็นบัพ k จากนั้นกำหนดให้ ป้ายชั่วคราวของบัพ k เป็นป้ายถาวร และให้ j = k

ขั้นที่ 3 จากป้ายถาวรล่าสุดคือ ป้ายของบัพ j คำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ i ใดๆ ซึ่งมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ j กับ i จาก

$$\delta_i = \min.[\delta_i , \delta_j + c_{ji}]$$

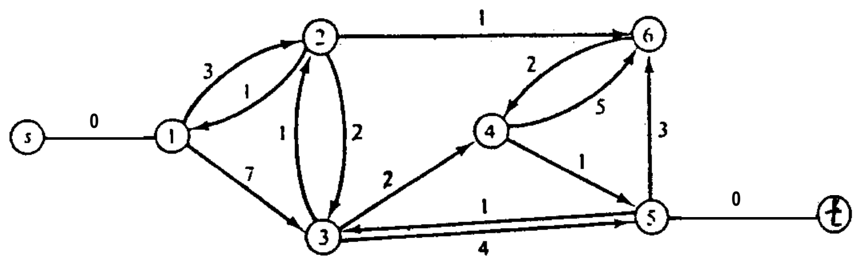
ถ้าบัพใดไม่มีเส้นเชื่อมกับ j ให้คงค่าป้ายชั่วคราวไว้เช่นเดิม

ขั้นที่ 4 ถ้า $j \neq t$ ให้กลับไปขั้นที่ 2

ขั้นที่ 5 ถ้า $\boxed{\delta_j} = \boxed{\delta_i} + c_{ij}$ แล้ว (i,j) เป็นเส้นเชื่อมหนึ่งในเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก s ไป t เมื่อ i เป็นบัพใดๆ ที่มีเส้นเชื่อมกับ j จากนั้น ให้ j = i

ขั้นที่ 6 ถ้า j = s ให้หยุดการคำนวณ แต่ถ้า $j \neq s$ ให้กลับไปขั้นที่ 5

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> หาเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก s ไป t ของข่ายงาน รูป 2.2 เมื่อตัวเลขที่กำกับไว้ที่แต่ละเส้นเชื่อม (c_{ij}) แทนระยะทางระหว่างบัพ



รูป 2.2 ข่ายงานตัวอย่างเมื่อใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra

ขั้นตอนวิธีเริ่มด้วยการกำหนดให้ s มีป้ายถาวรเป็น $\boxed{0}$ และ $\delta_1 = 0$, $\delta_i = \infty$; $i=2,3,\ldots,6, t$ และ $j = s$ จากนั้นเลือกบัพ 1 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{0}$ เพราะ δ_1 มีค่าน้อยที่สุด และให้ $j = 1$ เนื่องจากบัพ 2 และ 3 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 1 คำนวณป้ายชั่วคราวของบัพ 2 และ 3 ใหม่ เป็น

$$\delta_2 = \min.[\delta_2 , \delta_1 + c_{12}] = \min.[\infty, 3] = 3$$

$$\delta_3 = \min.[\delta_3 , \delta_1 + c_{13}] = \min.[\infty, 7] = 7$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 2 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{3}$ เพราะ δ_2 มีค่าน้อยที่สุด และให้ $j = 2$ บัพ 3 และ 6 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 2 จึงคำนวณป้ายชั่วคราวของบัพ 3 และ 6 ใหม่เป็น

$$\delta_3 = \min.[\delta_3 , \delta_2 + c_{23}] = \min.[7, 3+2] = 5$$

$$\delta_6 = \min.[\delta_6 , \delta_2 + c_{26}] = \min.[\infty, 3+1] = 4$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 6 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{4}$ เพราะ δ_6 มีค่าน้อยที่สุด และให้ $j = 6$ ขณะนี้เหลือบัพที่มีป้ายชั่วคราวคือบัพ 3 4 5 และ t เนื่องจากบัพ 4 มีเส้นเชื่อมกับ 6 จึงคำนวณป้ายชั่วคราวของบัพ 4 ใหม่เป็น

$$\delta_4 = \min.[\delta_4 , \delta_6 + c_{64}] = \min.[\infty, 4+2] = 6$$

ส่วนบัพ 3 และ 5 ยังคงมีค่าป้ายชั่วคราวเป็น 5 และ ∞ ตามลำดับ

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 3 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{5}$ เพราะ δ_3 มีค่าน้อยที่สุด และให้ $j = 3$ บัพ 4 และ 5 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 3 จึงคำนวณป้ายชั่วคราวใหม่ เป็น

$$\delta_4 = \min.[\delta_4 , \delta_3 + c_{34}] = \min.[6, 5+2] = 6$$

$$\delta_5 = \min.[\delta_5 , \delta_3 + c_{35}] = \min.[\infty, 5+4] = 9$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดของบัพ 4 5 และ t เลือกบัพ 4 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{6}$ และให้ $j = 4$ บัพ 5 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 4 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่ เป็น

$$\delta_5 = \min.[\delta_5 , \delta_4 + c_{45}] = \min.[9, 6+1] = 7$$

ขณะนี้บัพที่มีป้ายชั่วคราวคือบัพ 5 และ t เลือกบัพ 5 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{7}$ และ $j = 5$ บัพ t มีเส้นเชื่อมกับบัพ 5 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_t = \min.[\delta_t , \delta_5 + c_{51}] = \min.[\infty, 7+0] = 7$$

เลือกบัพ t ให้มีค่าป้ายถาวร และ $j = t$ หรือแสดงการคำนวณดังตาราง 2.1

เมื่อ $j = t$ แล้ว $\delta_t = 7$ คือระยะทางที่สั้นที่สุดจาก s ไป t จากนั้นจะแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาเส้นทางสั้นที่สุดจาก s ไป t ว่าประกอบด้วยเส้นเชื่อมระหว่างบัพใดบ้าง

เนื่องจาก $\boxed{\delta_t} = \boxed{\delta_5} + c_{5t}$

$$\boxed{\delta_5} = \boxed{\delta_4} + c_{45}$$

$$\boxed{\delta_4} = \boxed{\delta_6} + c_{64}$$

$$\boxed{\delta_6} = \boxed{\delta_2} + c_{26}$$

$$\boxed{\delta_2} = \boxed{\delta_1} + c_{12}$$

และ $$\boxed{\delta_1} = \boxed{\delta_s} + c_{s1}$$

ดังนั้นเส้นทางสั้นที่สุดจาก s ไป t จึงประกอบด้วยลำดับของบัพ s - 1 - 2 - 6 - 4 - 5 - t และให้ระยะทางเป็น 7

ตาราง 2.1 แสดงผลการคำนวณโดยใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra

ที่ \ บัพ	s	1	2	3	4	5	6	t
1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	3	7	∞	∞	∞	∞
4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	7	∞	∞	∞	∞
5	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	5	∞	∞	4	∞
6	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	5	∞	∞	$\boxed{4}$	∞
7	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	5	6	∞	$\boxed{4}$	∞
8	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	6	∞	$\boxed{4}$	∞
9	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	6	9	$\boxed{4}$	∞
10	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	9	$\boxed{4}$	∞
11	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	7	$\boxed{4}$	∞
12	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	∞
13	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	7
14	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$

จากตาราง 2.1 ในขั้นที่ 1ของตาราง กำหนดให้ s มีป้ายถาวรเป็น $\boxed{0}$ และให้ j = s โดยที่ $\delta_1 = 0$ เนื่องจากบัพ 1 เชื่อมกับบัพ s และให้ $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_t = \infty$ ในขั้นที่ 2 ของตารางขณะนี้บัพ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ t มีค่าป้ายเป็นป้ายชั่วคราว เนื่องจาก δ_1 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกบัพ 1 ให้เป็นป้ายถาวร $\boxed{0}$ และให้ j = 1

ขั้นที่ 3 ของตารางค่าป้ายของบัพ 2, 3, 4, 5, 6 และ t เป็นป้ายชั่วคราว และบัพ 2, 3 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 1 จึงคำนวณค่าป้ายของบัพ 2 และ 3 ใหม่

ขั้นที่ 4 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 2, 3, 4, 5, 6 และ t เลือกบัพ 2 ให้เป็นค่าป้ายถาวร $\boxed{3}$ เพราะ

δ_2 มีค่าน้อยที่สุด และให้ j = 2

ขั้นที่ 5 บัพ 3 และ 6 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 2 และมีค่าป้ายเป็นค่าชั่วคราว จึงคำนวณค่า δ_3 และ δ_6 ใหม่

ขั้นที่ 6 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 3, 4, 5, 6 และ t เลือกบัพ 6 ให้เป็นค่าป้ายถาวร $\boxed{4}$ เพราะ δ_6 มีค่าน้อยที่สุด และให้ j = 6

ขั้นที่ 7 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 3, 4, 5 และ t บัพ 4 มีเส้นเชื่อมจากบัพ 6 มายังบัพ 4 จึงคำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 4 ใหม่ ส่วนบัพ 3, 5 และ t คงค่าป้ายชั่วคราวเดิมไว้

ขั้นที่ 8 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 3, 4, 5, และ t เลือกบัพ 3 ให้เป็นค่าป้ายถาวร $\boxed{5}$ เพราะ δ_3 มีค่าน้อยที่สุด และให้ j = 3

ขั้นที่ 9 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 4, 5 และ t มีเส้นเชื่อมจากบัพ 3 ไปบัพ 4 และบัพ 3 ไปบัพ 5 จึงคำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 4 และ 5 ใหม่

ขั้นที่ 10 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 4, 5 และ t เลือกบัพ 4 ให้เป็นค่าป้ายถาวร $\boxed{6}$ เพราะ δ_4 มีค่าน้อยที่สุด และให้ j = 4

ขั้นที่ 11 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 5 และ t มีเส้นเชื่อมจากบัพ 4 ไปบัพ 5 จึงคำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 5 ใหม่

ขั้นที่ 12 จากป้ายชั่วคราวของบัพ 5 และ t เลือกบัพ 5 ให้เป็นค่าป้ายถาวร $\boxed{7}$ และให้ j = 5

ขั้นที่ 13 จากป้ายชั่วคราวของบัพ t มีเส้นเชื่อมจากบัพ 5 ไปบัพ t จึงคำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ t ใหม่

ขั้นที่ 14 มีเฉพาะบัพ t ที่มีค่าป้ายเป็นค่าชั่วคราว จึงให้บัพ t มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{7}$ และให้ j = t

จากนั้นจึงแทนค่าย้อนกลับดังวิธีการข้างต้น

เส้นทางที่สั้นที่สุดจาก s ไป t ประกอบด้วยบัพ s-1-2-6-4-5-t และระยะทางคือ 7

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาปัญหาการซื้อรถยนต์ใหม่ ค่าใช้จ่ายทั้งหมดคือราคารถยนต์รวมกับค่าซ่อมแซมที่เพิ่มขึ้น ในที่นี้จะใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra แก้ปัญหาว่าควรจะซื้อรถใหม่แทนคันเก่าเมื่อไร เพื่อให้ค่าใช้จ่ายรวมน้อยที่สุดภายในช่วงเวลา 8 ปี ข่ายงานในรูป 2.3 แทนปัญหา โดยที่บัพ คือเวลาที่ต้นปีแต่ละปี และเส้นเชื่อม (i,j) แทนการซื้อรถต้นปีที่ i และขายไปเพื่อซื้อใหม่แทนที่ต้นปีที่ j โดยมีค่าใช้จ่ายรวมทั้งหมดเป็น c_{ij}

c_{ij} แทนค่าใช้จ่าย เมื่อซื้อรถต้นปีที่ i และขายไปเพื่อซื้อใหม่แทนที่ต้นปีที่ j

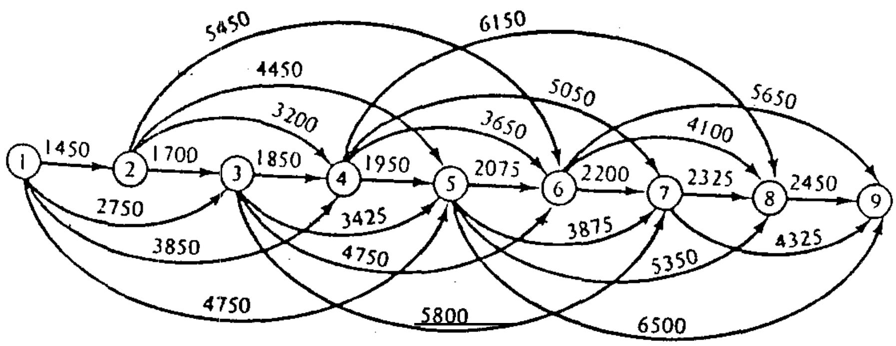
p_i แทนราคารถต้นปีที่ i

m_k แทนค่าซ่อมแซมระหว่างปีที่ k

s_j แทน มูลค่าซาก (salvage value) ที่ต้นปีที่ j

$$c_{ij} = p_i + \sum_{k=i}^{j-1} m_k - s_j$$

สมมติว่าเริ่มซื้อรถใหม่ต้นปีที่ 1 และต้องการจะซื้อมาใหม่อย่างน้อยทุกๆ 4 ปี



รูป 2.3 ข่ายงานแทนปัญหาการซื้อรถยนต์

ในตัวอย่างนี้บัพเริ่มต้นคือ 1 และบัพสุดท้ายคือ 9 ขั้นตอนวิธีเริ่มด้วยการกำหนดให้ 1 มีป้ายถาวรเป็น ☐ 66X $\delta_2 = 1450$, $\delta_3 = 2750$, $\delta_4 = 3850$ และ $\delta_5 = 4750$, $\delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = \delta_9$ = 00 และให้ j = 1 เนื่องจาก δ_2 เป็นป้ายชั่วคราวที่มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{1450}$ และให้ j = 2 บัพ 3, 4, 5 และ 6 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 2 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$\delta_3 = \min.[\delta_3 , \delta_2 + c_{23}] = \min.[2750, 1450+1700] = 2750$

$\delta_4 = \min.[\delta_4 , \delta_2 + c_{24}] = \min.[3850, 1450+3200] = 3850$

$\delta_5 = \min.[\delta_5 , \delta_2 + c_{25}] = \min.[4750, 1450+4450] = 4750$

$\delta_6 = \min.[\delta_6 , \delta_2 + c_{26}] = \min.[\infty, 1450+5450] = 6900$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 3 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{2750}$ และให้ j = 3 บัพ 4, 5, 6 และ 7 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 3 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$\delta_4 = \min.[\delta_4 , 6, + c_{34}] = \min.[3850, 2750+1850] = 3850$

8, $= \min.[\delta_5 , \delta_3 + c_{35}] = \min.[4750, 2750+3425] = 4750$

$$\delta_6 = \min.[\delta_6 , \delta_3 + c_{36}] = \min.[6900, 2750+4750] = 6900$$

$$\delta_7 = \min.[\delta_7 , \delta_3 + c_{37}] = \min.[\infty, 2750+5800] = 8550$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 4 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{3850}$ และให้ j = 4 บัพ 5.6, 7 และ 8 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 4 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_5 = \min.[\delta_5 , \delta_4 + c_{45}] = \min.[4750, 3850+1950] = 4750$$

$$\delta_6 = \min.[\delta_6 , \delta_4 + c_{46}] = \min.[6900, 3850+3650] = 6900$$

$$\delta_7 = \min.[\delta_7 , \delta_4 + c_{47}] = \min.[8550, 3850+5050] = 8550$$

$$\delta_8 = \min.[\delta_8 , \delta_4 + c_{48}] = \min.[\infty, 3850+6150] = 10,000$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 5 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{4750}$ และให้ j = 5 บัพ 6, 7, 8 และ 9 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 4 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_6 = \min.[\delta_6 , \delta_5 + c_{56}] = \min.[6900, 4750+2075] = 6825$$

$$\delta_7 = \min.[\delta_7 , \delta_5 + c_{57}] = \min.[8550, 4750+3875] = 8550$$

$$\delta_8 = \min.[\delta_8 , \delta_5 + c_{58}] = \min.[10000, 4750+6500] = 10,000$$

$$\delta_9 = \min.[\delta_9 , \delta_5 + c_{59}] = \min.[\infty, 4750+6500] = 11,250$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 6 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร 6825 และให้ j = 6 บัพ 7, 8 และ 9 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 6 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_7 = \min.[\delta_7 , \delta_6 + c_{67}] = \min.[8550, 6825+2200] = 8550$$

$$\delta_8 = \min.[\delta_8 , \delta_6 + c_{68}] = \min.[10000, 6825+4100] = 10,000$$

$$\delta_9 = \min.[\delta_9 , \delta_6 + c_{69}] = \min.[11250, 6825+5650] = 11,250$$

จากป้ายชั่วคราวทั้งหมดเลือกบัพ 7 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{8550}$ และให้ j = 7 บัพ 8 และ 9 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 7 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_8 = \min.[\delta_8 , \delta_7 + c_{78}] = \min.[10000, 8550+2325] = 10,000$$

$$\delta_9 = \min.[\delta_9 , \delta_7 + c_{79}] = \min.[11250, 8550+4325] = 11,250$$

จากป้ายชั่วคราวของบัพ 8 และ 9 เลือกบัพ 8 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{10,000}$ และให้ j -8 บัพ 9 มีเส้นเชื่อมกับบัพ 8 คำนวณป้ายชั่วคราวใหม่เป็น

$$\delta_9 = \min.[\delta_9 , \delta_8 + c_{89}] = \min.[11250, [10000+2450] = 11,250$$

จากป้ายชั่วคราวของบัพ 9 เลือกบัพ 9 ให้มีค่าเป็นป้ายถาวร $\boxed{11,250}$ และ j = 9 หรือเท่ากับบัพสุดท้ายหรือแสดงการคำนวณดังตาราง 2.2

ในตาราง 2.2 ขั้นที่ 1 ของตาราง กำหนดให้บัพ 1 ซึ่งเป็นบัพเริ่มต้น มีป้ายถาวรเป็น $\boxed{0}$

และให้ j = 1 โดยที่ $\delta_2 = 1450$, $\delta_3 = 2750$, $\delta_4 = 3850$ และ $\delta_5 = 4750$ เพราะบัพ 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ มีเส้นเชื่อมกับบัพ 1 ส่วนค่า $\delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = \infty$ เพราะบัพ 6, 7, 8 และ 9 ไม่มีเส้นเชื่อมกับบัพ 1

ขั้นที่ 2 ขณะนี้บัพ 2, 3, ..., 9 มีค่าป้ายเป็นค่าชั่วคราว เนื่องจาก δ_2 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกบัพ 2 ให้มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{1450}$ และให้ j = 2

ขั้นที่ 3 ค่าป้ายของบัพ 3, 4, 5, ..., 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ 2 กับบัพ 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ จึงคำนวณค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 3, 4, 5 และ 6 ใหม่

ขั้นที่ 4 จากค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 3, 4, 5, ..., 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 3 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 3 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{2750}$ และให้ j = 3

ขั้นที่ 5 ค่าป้ายของบัพ 4, 5, 6, 7, 8, 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ 3 กับบัพ 4, 5, 6 และ 7 ตามลำดับ จึงคำนวณค่าป้ายของบัพ 4, 5, 6 และ 7 ใหม่

ขั้นที่ 6 จากค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 4, 5, 6, 7, 8, 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 4 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 4 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{3850}$ และให้ j = 4

ขั้นที่ 7 ค่าป้ายของบัพ 5, 6, 7, 8 และ 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ 4 กับบัพ 5, 6, 7 และ 8 ตามลำดับ จึงคำนวณค่าป้ายของบัพ 5, 6, 7 และ 8 ใหม่

ขั้นที่ 8 จากค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 5, 6, 7, 8 และ 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 5 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 5 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{4750}$ และให้ j = 5

ขั้นที่ 9 ค่าป้ายของบัพ 6, 7, 8 และ 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ 5 กับบัพ 6, 7, 8 และ 9 ตามลำดับ จึงคำนวณค่าป้ายของบัพ 6, 7, 8 และ 9 ใหม่

ขั้นที่ 10 จากค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 6, 7, 8 และ 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 6 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 6 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{6825}$ และให้ j = 6

ขั้นที่ 11 ค่าป้ายของบัพ 7, 8 และ 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมระหว่างบัพ 6 กับบัพ 7, 8 และ 9 ตามลำดับ จึงคำนวณค่าป้ายของบัพ 7, 8 และ 9 ใหม่

ขั้นที่ 12 จากค่ าป้ายชั่วคราวของบัพ 7, 8 และ 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 7 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 7 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{8550}$ และให้ j = 7

ขั้นที่ 13 จากค่าป้ายของบัพ 8 และ 9 เป็นป้ายชั่วครว และมีเส้นเชื่อมจากบัพ 7 ไปบัพ 8 และจากบัพ 7 ไปบัพ 9 จึงคำนวณ δ_8 และ δ_9 ใหม่

ขั้นที่ 14 จากค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 8 และ 9 ค่าป้ายชั่วคราวของบัพ 8 มีค่าน้อยที่สุด จึงเลือกให้บัพ 8 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{10,000}$ และให้ j = 8

ขั้นที่ 15 ค่าป้ายของบัพ 9 เป็นป้ายชั่วคราว และมีเส้นเชื่อมจากบัพ 8 ไปบัพ 9 จึงคำนวณ δ_9 ใหม่

ขั้นที่ 16 ค่าป้ายของบัพ 9 เป็นป้ายชั่วคราวเพียงค่าเดียว จึงเลือกบัพ 9 มีค่าป้ายเป็นป้ายถาวร $\boxed{11,250}$ และให้ $j = 9$

เมื่อ $j = 9$ และ $\delta_9 = 11,250$ คือระยะทางที่สั้นที่สุดจาก 1 ไป 9 จากนั้นจะแทนค่าย้อนกลับ เพื่อหาเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก 1 ไป 9 ว่าประกอบด้วยเส้นเชื่อมระหว่างบัพใดบ้าง

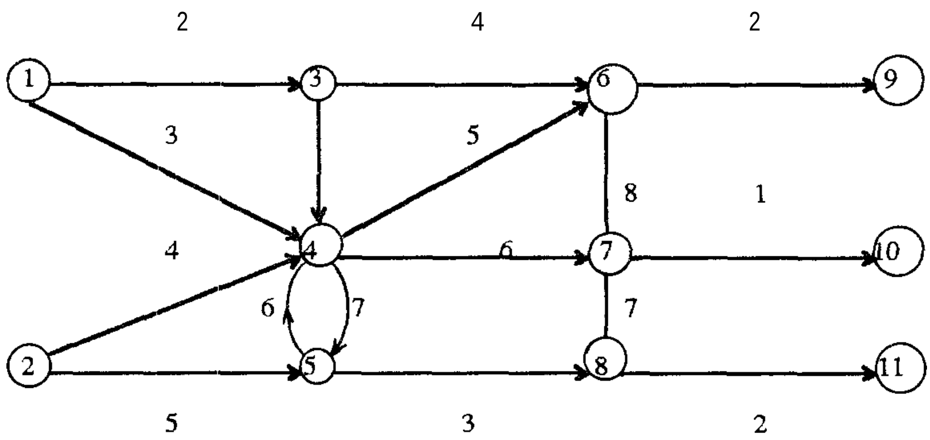
เนื่องจาก $\boxed{\delta_9} = \boxed{\delta_5} + c_{59}$

$$\boxed{\delta_5} = \boxed{\delta_1} + c_{15}$$

ดังนั้น เส้นทางสั้นที่สุดจากบัพเริ่มต้น $s = 1$ ไปยังบัพสุดท้าย $t = 9$ คือลำดับของเส้นเชื่อมซึ่งประกอบด้วยบัพ 1 - 5 - 9 แทนผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหา กล่าวคือควรจะซื้อรถต้นปีที่ 1 แล้วขายไปและซื้อรถใหม่แทนที่ ต้นปีที่ 5 จากนั้นก็ขายไปและซื้อใหม่แทนที่ ต้นปีที่ 9 ระยะทางสั้นที่สุดจาก 1 ไป 9 คือ ค่าป้ายถาวรของบัพ 9 หรือ $\boxed{11,250}$ แทนผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด คือ 11,250 บาท โดยใช้แผนการซื้อรถดังกล่าว

สำหรับข่ายงานไม่ระบุทิศทาง หรือข่ายงานที่มีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทาง ให้แทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทาง ด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง 2 เส้นเชื่อม ที่มีทิศทางตรงกันข้าม แล้วจึงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra

สำหรับข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นมากกว่า 1 บัพ หรือมีบัพสุดท้ายมากกว่า 1 บัพ เช่นข่ายงานรูป 2.4 เส้นทางสั้นที่สุดจากบัพเริ่มต้นไปยังบัพสุดท้าย จะเป็นเส้นทางสั้นที่สุดระหว่าง 2 บัพที่สนใจ เช่น เส้นทางสั้นที่สุด 1 ไป 9 จาก 1 ไป 10 หรือ 1 ไป 11 เส้นทางที่สั้นที่สุดจาก 2 ไป 9 จาก 2 ไป 10 หรือ 2 ไป 11 จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในที่นี้



รูป 2.4 ข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายมากกว่า 1 บัพ

ตาราง 2.2 แสดงผลการคำนวณปัญหาซื้อรถยนต์

ขั้นที่ \ บัพ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1450	2750	3850	4750	∞	∞	∞	∞
2		1450	2750	3850	4750	∞	∞	∞	∞
3	0	1450	2750	3850	4750	6900	∞	∞	00
4		1450	2750	3850	4750	6900	∞	∞	∞
5	0	1450	2750	3850	4750	6900	8550	∞	00
6		∞050	2750	3850	4750	6900	8550		∞
7		1450	2750	3850	4750	6900	8550	10,000	∞
8		1450	2750	3850	4750	6900	8550	10,000	∞
9	0	1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
10	0	1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
11	0	1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
12		1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
13		1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
14	0	1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
15	0	1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250
16		1450	2750	3850	4750	6825	8550	10,000	11,250

2.3 ปัญหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด

จากความหมายของต้นไม้และต้นไม้แบบทอดข้ามในบทที่ 1 ซึ่งต้นไม้คือลำดับเชื่อมโยงของเส้นเชื่อมที่ไม่มีวัฏจักร ของข่ายงานระบุทิศทางหรือข่ายงานไม่ระบุทิศทาง นั่นคือถ้าต้นไม้ของข่ายงาน ประกอบด้วย m บัพ แล้วจะมีจำนวนเส้นเชื่อมอยู่ m-1 เส้นเชื่อมเสมอ ส่วนต้นไม้แบบทอดข้าม คือต้นไม้ซึ่งประกอบด้วยบัพทุกๆ บัพของข่ายงาน กล่าวคือถ้าข่ายงานประกอบบัพ n บัพแล้ว ต้นไม้แบบทอดข้าม จะประกอบด้วย n-1 เส้นเชื่อมนั่นเอง

ถ้า c_{ij} คือค่าใช้จ่ายหรือระยะทางของเส้นเชื่อม (i,j) แล้วต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด (minimal spanning tree) คือต้นไม้แบบทอดข้ามซึ่งมีผลรวมของค่าใช้จ่าย หรือระยะทางน้อยที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับต้นไม้แบบทอดข้ามอื่นๆ ของข่ายงาน

ปัญหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด สามารถนำไปประยุกต์กับปัญหาต่างๆ ได้หลายประเภท เช่น การส่งน้ำมันจากแหล่งผลิตไปยังกลุ่มผู้ใช้ การสร้างถนนเชื่อมระหว่างแหล่งชุมชนต่างๆ เป็นต้น

ปัญหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด เป็นหนึ่งในส่วนน้อยของปัญหาในการวิจัยดำเนินการที่เข้าสู่การหาผลเฉลยโดยอาศัยการศึกษาจากตัวอย่าง โดยเริ่มจากเลือกบัพใดๆ ในข่ายงานมา 1 บัพ จากนั้นเลือกบัพ ซึ่งมีเส้นเชื่อมที่มีค่าน้อยที่สุดกับบัพแรก แล้วเลือกบัพอื่นๆ ในทำนองเดียวกัน จนกว่าจะมีบัพครบทุกๆ บัพของข่ายงาน หรือสรุปเป็นขั้นตอนวิธีดังนี้

ขั้นตอนวิธีในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด ของข่ายงานไม่ระบุทิศทาง $G = (N,A)$ เมื่อ $N = \{1,2,3,\ldots,n\}$

ขั้นที่ 1 แบ่งเซตของบัพของข่าย เป็น S และ $\bar{S}$

โดยที่ S คือเซตของบัพที่เชื่อมโยงแล้ว

$\bar{S}$ คือเซตของบัพที่ยังไม่ถูกเชื่อมโยง

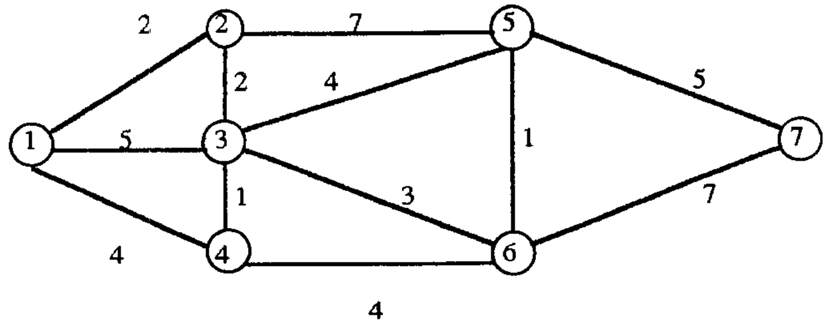
และเริ่มต้น จะกำหนดให้ $\bar{S} = \{1,2,3,\ldots,n\}$

ขั้นที่ 2 เลือกบัพใดๆ ใน $\bar{S}$ และเชื่อมโยงบัพนี้กับบัพที่มีค่าใช้จ่าย หรือระยะทางน้อยที่สุด เริ่มต้นให้ใส่ทั้งสองบัพนี้ไว้ใน S

ขั้นที่ 3 เลือกบัพใน $\bar{S}$ ซึ่งมีเส้นเชื่อมที่มีค่าใช้จ่าย หรือระยะทางน้อยที่สุด กับบัพใน S และไม่ทำให้เกิดวัฏจักรใน S สมมติว่าคือบัพ δ แล้วย้ายบัพ δ ไปใส่ไว้ใน S

ขั้นที่ 4 ทำซ้ำขั้นที่ 3 จนกว่าทุกๆ บัพจะอยู่ใน S หรือ $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$

<u>**ตัวอย่าง 2.3**</u> เป็นตัวอย่างเพื่อเป็นกรณีศึกษาของวิธีการหาผลเฉลยของข่ายงานรูป 2.5



รูป 2.5 ตัวอย่างข่ายงานเพื่อหาต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุด

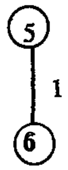
ขั้นที่ 1 ให้ $\bar{S} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$S = \phi$

ขั้นที่ 2 เลือกบัพ 5 จาก $\bar{S}$ และเชื่อมโยง 5 กับบัพ 6 เนื่องจากเส้นเชื่อม (5,6) มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

$S = \{5,6\}$

$\bar{S} = \{1,2,3,4,7\}$

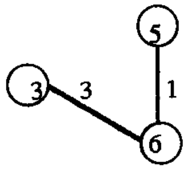


ค่าใช้จ่าย = 1

ขั้นที่ 3 ก. เลือก บัพ 3 เชื่อมโยง 3 กับ 6

$S = \{5, 6, 3\}$

$\bar{S} = \{1,2,4,7\}$

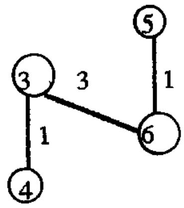


ค่าใช้จ่าย = 4

ข. เลือกบัพ 4 เชื่อมโยง 4 กับ 3

$S = \{5,6,3,4\}$

$\bar{S} = \{1,2,7\}$

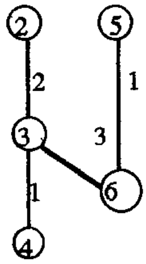


ค่าใช้จ่าย = 5

ค. เลือกบัพ 2 เชื่อมโยง 2 กับ 3

$S = \{5,6,3,4,2\}$

$\bar{S} = \{1,7\}$

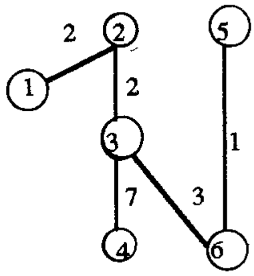


ค่าใช้จ่าย = 7

ง. เลือกบัพ 1 เชื่อมโยง 1 กับ 2

$S = \{5,6,3,4,2,1\}$

$\bar{S} = \{7\}$

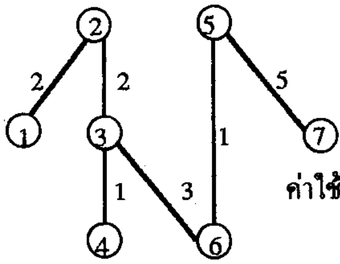


ค่าใช้จ่าย = 9

จ. เลือกบัพ 7 เชื่อมโยง 7 กับ 5

$S = \{5,6,3,4,2,1,7\}$,

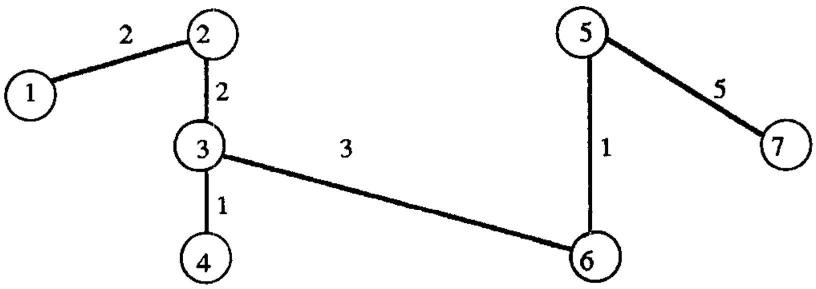
$\bar{S} = \phi$



ค่าใช้จ่าย = 14

หยุดการคำนวณ เมื่อ S มีบัพเท่ากับบัพของข่ายงาน และ $\bar{S}$ คือเซตว่าง

ต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของข่ายงาน เป็นดังรูป 2.6 ผลรวมของค่าใช้จ่าย คือ 14 (หรือผลรวมของระยะทางน้อยที่สุดที่เชื่อมโยงทุกบัพ คือ 14)



รูป 2.6 ต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของข่ายงานตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง 2.4</u> หน่วยซ่อมบำรุงของกรมทางหลวง มีงบประมาณจำกัดสำหรับซ่อมถนนในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ โดยถนนนี้ต้องเชื่อมโยงจังหวัด 10 จังหวัด ถ้าบัพของข่ายงานรูป 2.6 (ก) แทนจังหวัด และ c_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการซ่อมถนนซึ่งเชื่อมระหว่างจังหวัด i กับ j (หน่วยเป็นแสนบาท) จงหาเส้นทางที่ควรจะซ่อมบำรุง เพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ขั้นที่ 1 ให้ $\bar{S} = \{1,2,3,...,10\}$

$S = \phi$

ขั้นที่ 2 เลือกบัพ 3 จาก S และเชื่อมโยงบัพ 3 กับบัพ 7 เนื่องจากเส้นเชื่อม (3,7) มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

$S = \{3,7\}$

$\bar{S} = \{1,2,4,5,6,8,9,10\}$

ค่าใช้จ่าย = 200,000 บาท

ขั้นที่ 3 ก. เลือกบัพ 2 เชื่อมโยง 2 กับ 3

$S = \{3,7,2\}$

$\bar{S} = \{1,4,5,6,8,9,10\}$

ค่าใช้จ่าย = 600,000 บาท

ข. เลือกบัพ 6 เชื่อมโยง 6 กับ 7

$S = \{3,7,2,6\}$

$\overline{S}$ ={1,4,5,8,9,10}, ,

ค่าใช้จ่าย = 1,100,000 บาท

ค. เลือกบัพ 5 เชื่อมโยง 5 กับ 6

S = {3,7,2,6,5}

$\overline{S}$ = { 1,4,8,9,10}

ค่าใช้จ่าย = 1,500,000 บาท

ง. เลือกบัพ 10 เชื่อมโยง 10 กับ 6

S = {3,7,2,6,5,10}

$\overline{S}$ = { 1,4,8,9}

ค่าใช้จ่าย = 1,900,000 บาท

จ. เลือกบัพ 4 เชื่อมโยง 4 กับ 5

S = {3,7,2,6,5,10,4}

$\overline{S}$ = {1,8,9}

ค่าใช้จ่าย = 2,500,000 บาท

ฉ. เลือกบัพ 8 เชื่อมโยง 8 กับ 3

S = {3,7,2,6,5,10,4,8}

$\overline{S}$ = {1,9}

ค่าใช้จ่าย = 3,100,000 บาท

ช. เลือกบัพ 9 เชื่อมโยง 9 กับ 8

S = {3,7,2,6,5,10,4,8,9}

$\overline{S}$ = {1}

ค่าใช้จ่าย = 3,400,000 บาท

ซ. เลือกบัพ 1 เชื่อมโยง 1 กับ 2

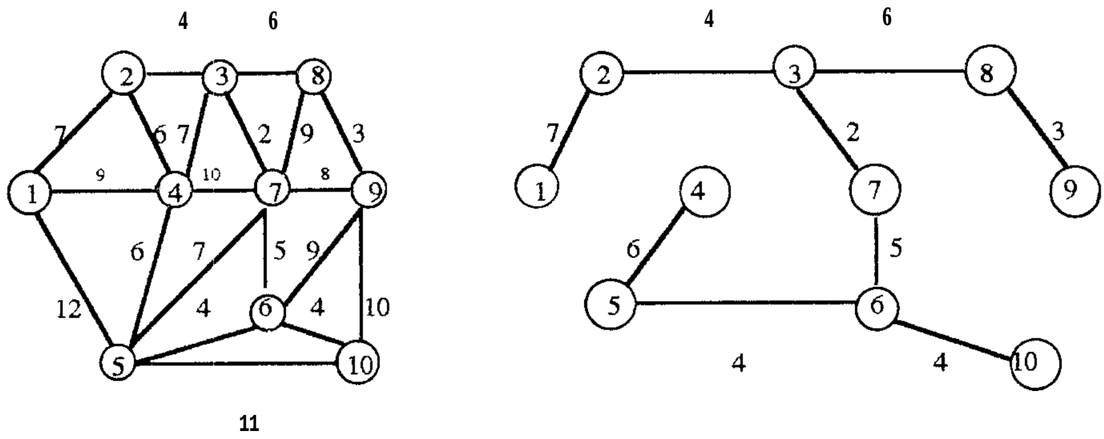
S = {3,7,2,6,5,10,4,,9,1}

$\overline{S} = \phi$

ค่าใช้จ่าย =4,100,000 บาท

หยุดการคำนวณเมื่อ s มีบัพเท่ากับบัพของข่ายงาน และ $\overline{S}$ คือเซตว่าง

ต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของข่ายงานเป็นดังรูป 2.6 (ข) ผลรวมของค่าใช้จ่ายคือ 4,100,000 บาท

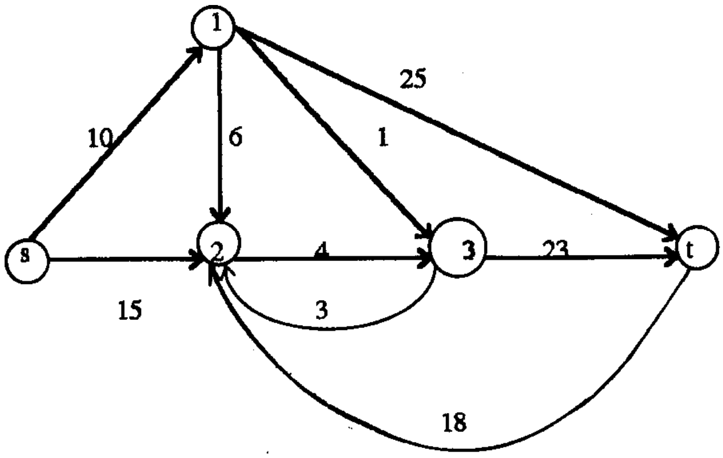


(ก) (ข)

รูป 2.6 ข่ายงานของปัญหาซ่อมบำรุงถนน (ก) และต้นไม้แบบทอดข้ามค่าต่ำสุดของปัญหา (ข)

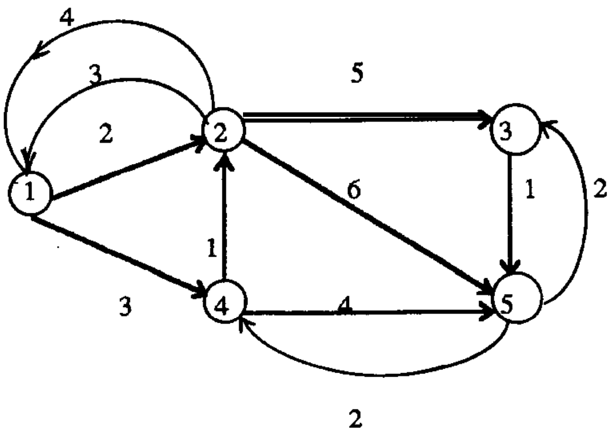
แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จากข่ายงานที่กำหนด จงหาเส้นทางสั้นที่สุดจาก s ไป t โดยใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra เมื่อ c_{ij} คือระยะทางระหว่างบัพ i กับ j



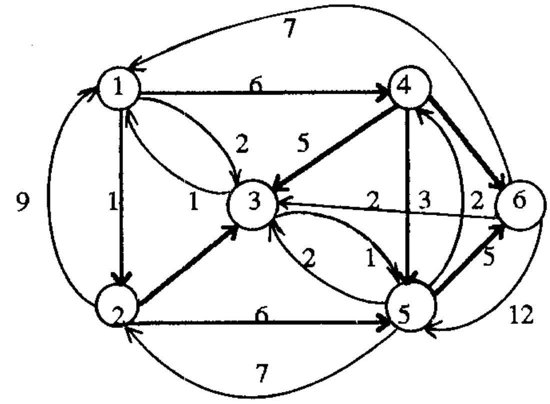
(เส้นทางคือ s - 1 - 3 - 2 - t ระยะทาง = 32)

2. จากข่ายงานที่กำหนด เมื่อ c_{ij} คือระยะทางระหว่างบัพ i กับ j จงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra เพื่อหาเส้นทางที่สั้นที่สุด จาก 1 ไป 5



(เส้นทางคือ 1 - 4 - 5 ระยะทาง = 7)

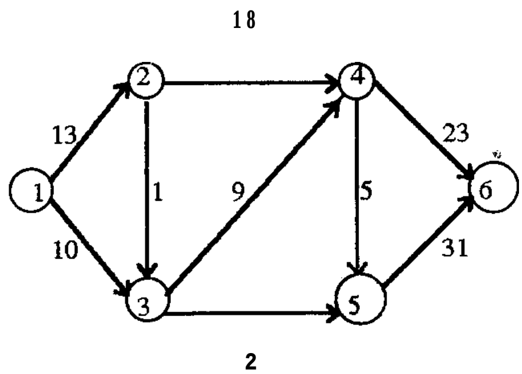
3. จากข่ายงานที่กำหนดให้ เมื่อ c_{ij} คือระยะทางระหว่าบัพ i กับ j จงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra หาเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก 1 ไป 6



(เส้นทางคือ **1 - 3 - 5 - 6 ระยะทาง = 8)**

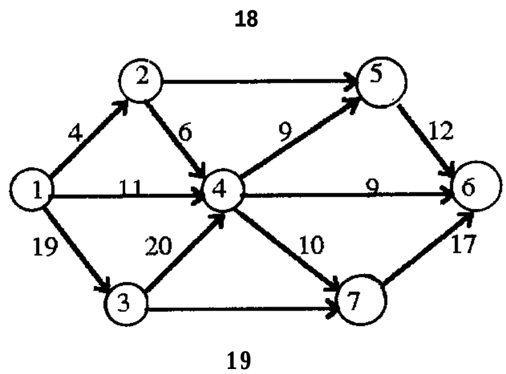
4. ถ้า c_{ij} คือค่าใช้จ่ายระหว่าง i กับ j จงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra เพื่อหาเส้นทางที่มีผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด จาก 1 ไป 6 ของข่ายงาน

(ก)



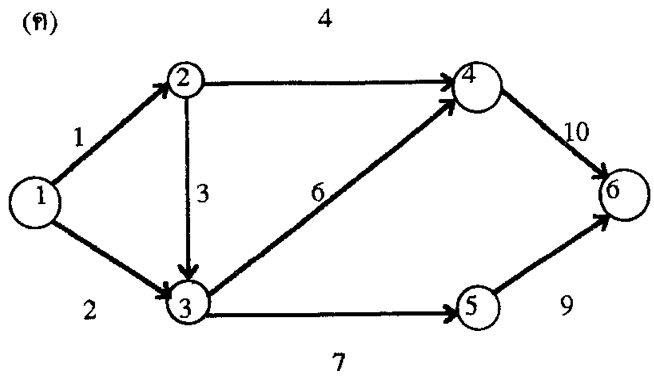
(เส้นทางคือ 1 - 3 - 4 -6 ค่าใช้จ่าย = 42)

(ข)



(เส้นทางคือ 1 - 2 - 4 - 6 ค่าใช้จ่าย = 19)

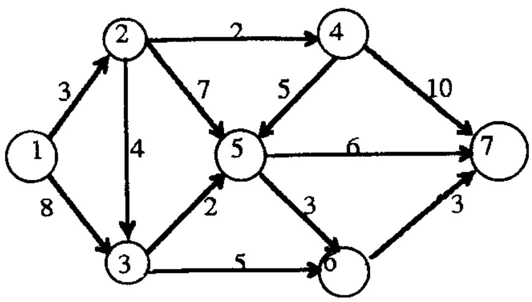
(ค)



(เส้นทางคือ 1 - 2 - 4 - 6 ค่าใช้จ่าย = 15)

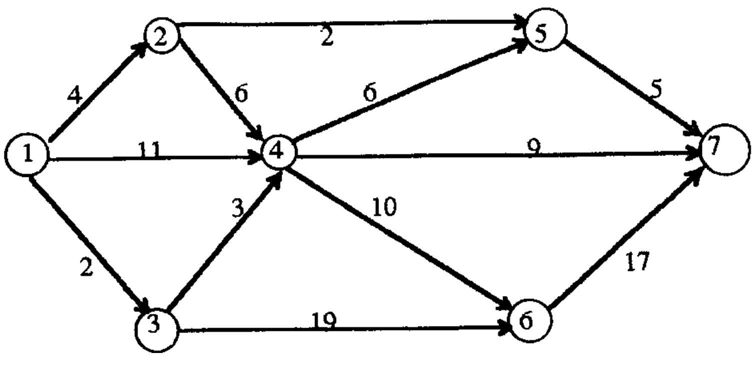
5. จากข่ายงานที่กำหนดให้ เมื่อ c_{ij} คือระยะทางระหว่างบัพ i กับ j จงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra หาเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก 1 ไป 7 ของ

(ก)



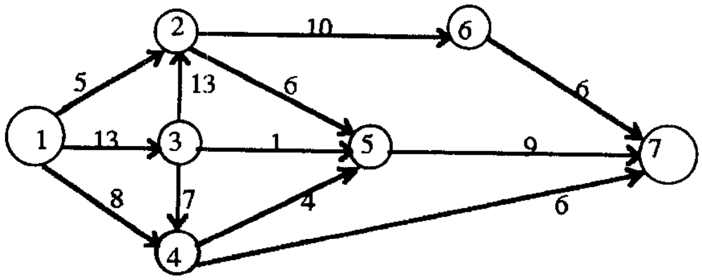
(เส้นทางคือ 1-2-4-7 ระยะทาง = 15)

(ข)



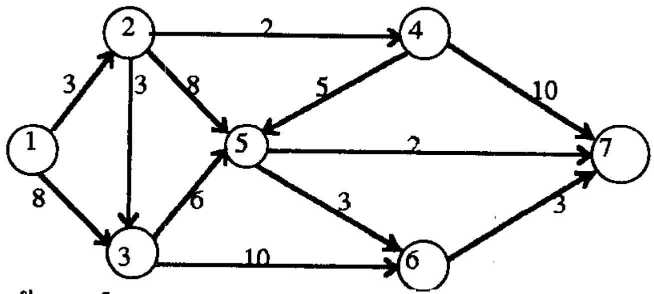
(เส้นทางคือ 1-3-4-7 ระยะทาง = 14)

(ค)



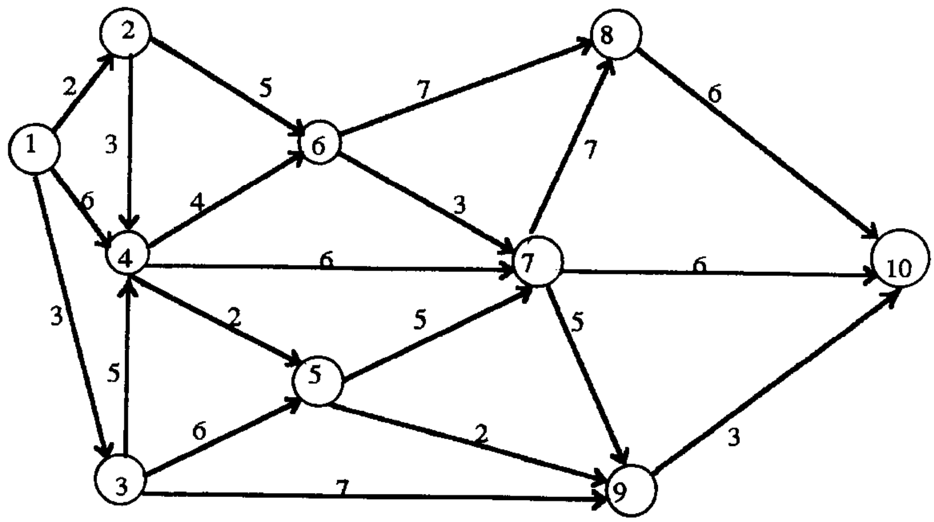
(เส้นทางคือ 1-4-7 ระยะทาง = 14)

(ง)



(เส้นทางคือ 1-2-4-5-7 ระยะทาง = 12)

6. ถ้า c_{ij} ของข่ายงานคือระยะทางระหว่างบัพ i กับ j จงใช้ขั้นตอนวิธีของ Dijkstra หาเส้นทางที่สั้นที่สุด จาก 1 ไป 10

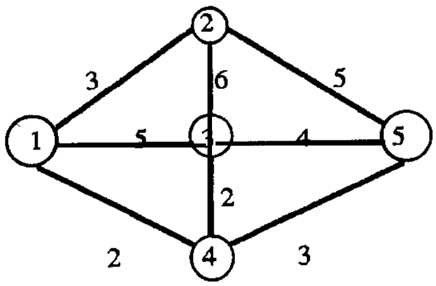


(เส้นทางคือ 1-24-5-9-10 ระยะทาง= 12)

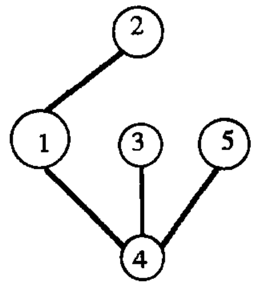
7. บริษัทดวงดีแท็กซี่จำกัด ต้องการวางแผนเกี่ยวกับการซื้อรถใน 4 ปีข้างหน้า ปัจจุบัน ราคารถยนต์คันละ 400,000 บาท และจะเพิ่มขึ้น 10% ทุกปี ในสองปีแรกค่าเสื่อมราคาของรถยนต์คือ 25% และค่าเสื่อมราคาคือ 15% ในสองปีถัดไป ค่าซ่อมแซมรถยนต์ใน 4 ปีข้างหน้า คือ 20,000 บาท 30,000 บาท 50,000 บาท และ 80,000 บาท ตามลำดับ รถยนต์ใหม่สามารถกำหนดนโยบายซื้อขายเพื่อแทนที่ได้ทุกๆ 1 ปี 2 ปี 3 ปี หรือ 4 ปี บริษัทควรจะกำหนดนโยบายอย่างไร จึงจะทำให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายใน 4 ปีข้างหน้าน้อยที่สุด
(ซื้อต้นปีที่ 1 ขายไปต้นปีที่ 5 ค่าใช้จ่ายคือ 500,000 บาท)

8. หาต้นไม้แบบทอดข้ามต่ำสุดของข่ายงาน เมื่อ c_{ij} คือระยะทางระหว่าง i กับ j

(ก)

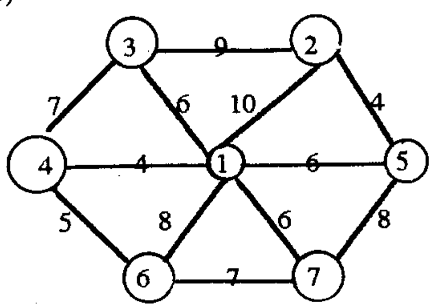


ตอบ

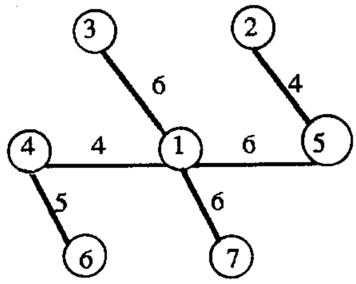


ระยะทาง = 10

(ข)

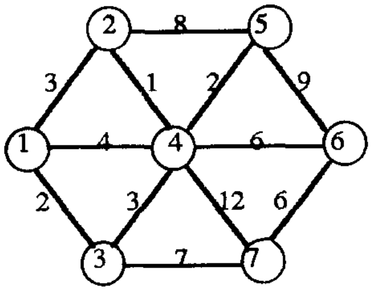


ตอบ

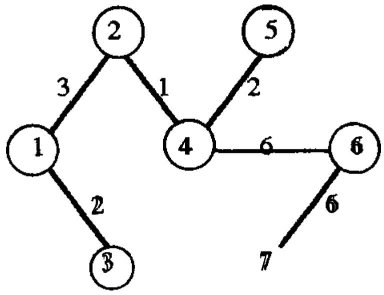


ระยะทาง = 31

(ค)

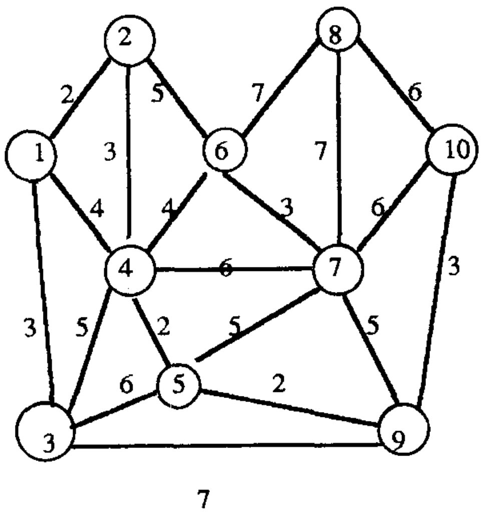


ตอบ

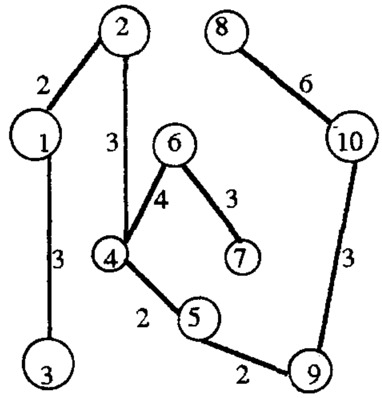


ระยะทาง = 20

(ง)

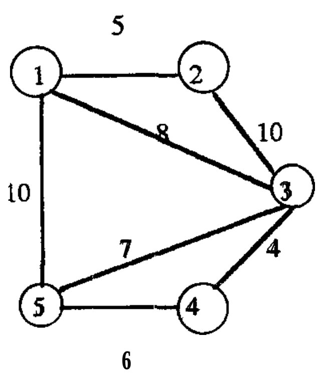


ตอบ

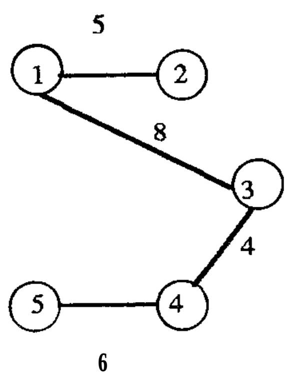


ระยะทาง = 28

9. ถ้าบัพแทนบ้านของสมาชิกนิตยสารฉบับหนึ่ง c_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการส่งนิตยสารระหว่างบัพ i กับ j จงเลือกเส้นทางที่พนักงานส่งนิตยสารควรใช้ เพื่อส่งนิตยสารให้กับสมาชิกแต่ละบ้าน โดยมีผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

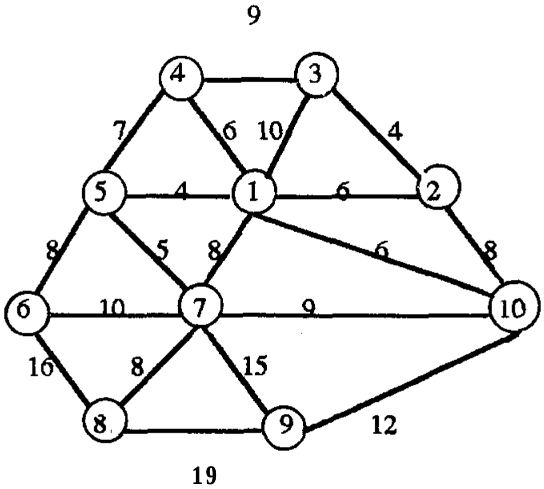


ตอบ

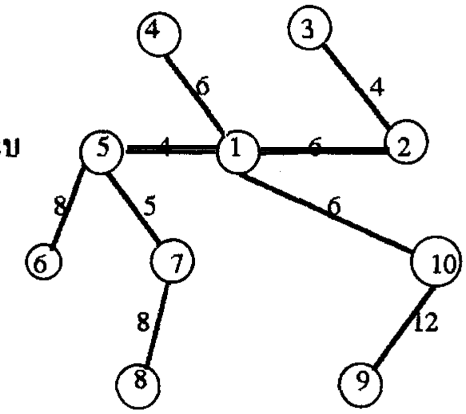


ค่าใช้จ่าย = 23

10. ถ้าบัพ 1 คือที่ตั้งของบริษัทท่องเที่ยว บัพ 2-10 คือสถานที่ท่องเที่ยว c_{ij} คือระยะทางระหว่าง i กับ j จงหาเส้นทางซึ่งเชื่อมโยงจากบริษัทท่องเที่ยว ไปยังสถานที่ท่องเที่ยวทั้งหมด โดยให้ผลรวมของระยะทางน้อยที่สุด

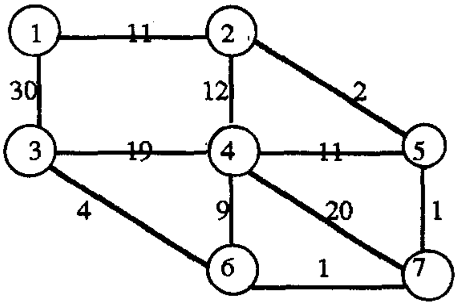


ตอบ

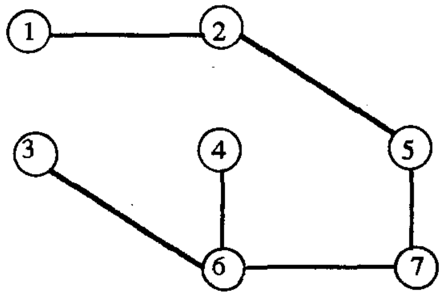


ค่าใช้จ่าย = 59

11. ถ้าบัพ 7 คือสถานีแม่ข่ายในการจัดตั้งเครือข่ายผ่านดาวเทียม และ c_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการเชื่อมสถานีย่อย i กับ j (หน่วยเป็นล้านบาท) จงหาเส้นทางที่ควรเลือกเครือข่าย เพื่อให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด



ตอบ



ค่าใช้จ่าย = 28 ล้านบาท