

บทที่ 1

บทนำ

(INTRODUCTION)

การวิเคราะห์ข่ายงานเกิดขึ้นมานานและมีรูปแบบแตกต่างกันไปโดยอาศัยทฤษฎีกราฟ นับจาก Euler สร้างรูปแบบและหาคำตอบของปัญหาสะพาน Königsberg แล้ว อีกกว่าหนึ่งร้อยปี ต่อมา Maxwell และ Kirchhoff จึงค้นพบกฎพื้นฐานของการวิเคราะห์ข่ายงานกับวงจรไฟฟ้า ทำให้การวิเคราะห์ข่ายงานกลายเป็นเครื่องมือสำคัญในการตรวจสอบวงจรไฟฟ้า นอกจากนี้ในช่วง สงครามโลกครั้งที่สอง ซึ่งมีการศึกษาด้านการวิจัยดำเนินงานอย่างกว้างขวาง ทำให้มีการนำเอา การวิเคราะห์ข่ายงานมาใช้ในการวิจัยดำเนินงานเพื่อประยุกต์กับปัญหาต่างๆ เช่นการวิเคราะห์และ ออกแบบระบบชลประทานขนาดใหญ่ ข่ายงานคอมพิวเตอร์ ข่ายงานเคเบิลทีวี ข่ายงานการสื่อสารผ่านดาวเทียม ปัญหาการขนส่ง กำหนดตารางเวลาโครงการ การวิเคราะห์แถวคอย การควบคุมพัสดุคงคลัง เป็นต้น

1.1 นิยาม สัญกรณ์ และสัญลักษณ์

ข่ายงาน (network) ประกอบด้วยเซตของบัพ (node) และเซตของเส้นเชื่อม (arc) ซึ่งเชื่อมระหว่างบัพ

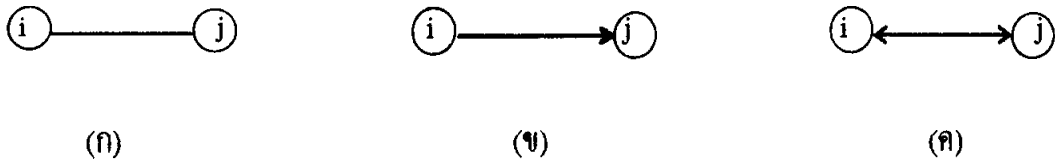
ถ้า N คือเซตของบัพในข่ายงาน

และถ้า A คือเซตของเส้นเชื่อม

แล้วจะใช้สัญกรณ์ $G = (N, A)$ แทนข่ายงาน

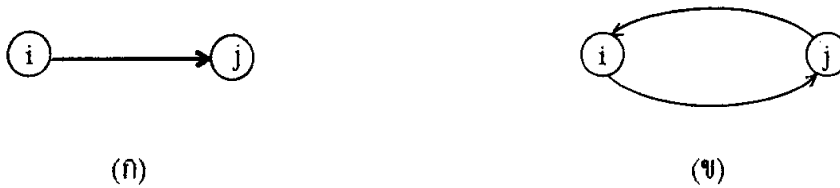
บัพของข่ายงานอาจแทน จุดตัดของถนน ชุมสายโทรศัพท์ จุดสับรางรถไฟ สนามบิน เขื่อนกั้นน้ำ คอมพิวเตอร์ เป็นต้น เส้นเชื่อมของข่ายงานอาจแทน ถนน สายโทรศัพท์ รางรถไฟ เส้นทางการบิน คลองส่งน้ำ เคเบิล ฯลฯ

การเขียนกราฟแทนข่ายงาน จะใช้วงกลมแทนบัพ เส้นตรงแทนเส้นเชื่อม และหัวลูกศร แสดงทิศทาง นอกจากนี้จะใช้สัญกรณ์ (i, j) แทนเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ i ไป บัพ j รูป 1.1 (ก) แสดงเส้นเชื่อมที่ไม่มีทิศทาง รูป 1.1 (ข) แสดงเส้นเชื่อมซึ่งมีทิศทางกำกับ และรูป 1.1 (ค) แสดงเส้นเชื่อมที่มีสองทิศทาง



รูป 1.1 แสดงการแทนบัพและเส้นเชื่อม

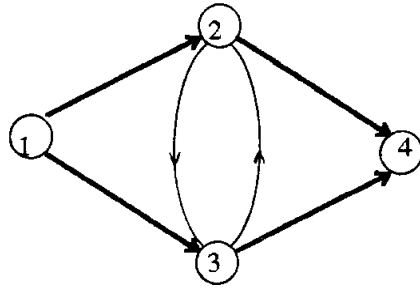
ในทางปฏิบัติถือว่าเส้นเชื่อมที่ไม่มีทิศทางกำกับ คือเส้นเชื่อมที่มีสองทิศทาง และใช้สัญกรณ์ (i,j) กับ (j,i) แทนเส้นเชื่อมที่มีสองทิศทางดังรูป 1.2 (ข)



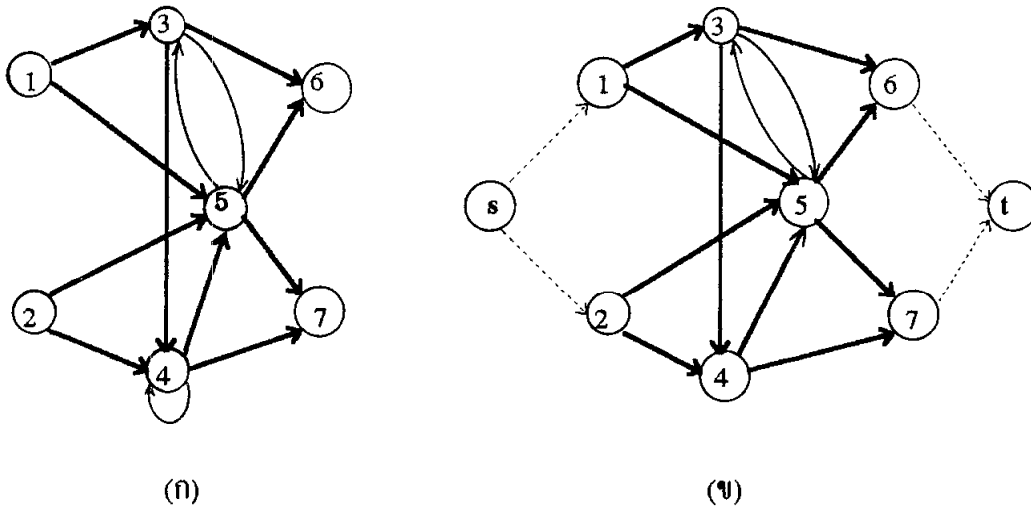
รูป 1.2 แสดงการแทนเส้นเชื่อมที่มีสองทิศทาง (ก) ด้วยเส้นเชื่อมที่มีทิศทางกำกับ ในทางตรงกันข้ามสองเส้นเชื่อม (ข)

สำหรับข่ายงานใดๆ บัพเริ่มต้น (source node) ของข่ายงานคือ บัพซึ่งสร้างสายงาน (flow) ผ่านข่ายงาน และบัพสุดท้าย (sink node) คือบัพซึ่งรับสายงานโดยไม่มีบัพอื่นมารับต่อ รูป 1.3 มีบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้น บัพ 4 เป็นบัพสุดท้าย ส่วนรูป 1.4 (ก) แสดงข่ายงานซึ่งมี บัพ 1 และ 2 เป็นบัพเริ่มต้น บัพ 6 และ 7 เป็นบัพสุดท้าย

เนื่องจากบางขั้นตอนวิธีของการวิเคราะห์ข่ายงาน มีข้อสมมติว่า ข่ายงานจะต้องมีบัพเริ่มต้น 1 บัพ และบัพสุดท้าย 1 บัพเท่านั้น จึงจำเป็นต้องสร้างบัพเริ่มต้นพิเศษ (super source node) เพื่อเชื่อมโยงกับบัพเริ่มต้นที่มีมากกว่า 1 บัพ และบัพสุดท้ายพิเศษ (super sink node) เพื่อเชื่อมโยงกับบัพสุดท้ายที่มีมากกว่า 1 บัพ การเชื่อมโยงจะใช้เส้นเชื่อมหุ่น (dummy arc) ซึ่งจะแทนด้วยเส้นประ ดังรูป 1.4 (ข) ทำให้กลายเป็นข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายอย่างละ 1 บัพ โดยมี $(s, 1)$ เป็นเส้นเชื่อมหุ่นจากบัพ s ซึ่งเป็นบัพเริ่มต้นพิเศษไปยังบัพ 1 และ $(s, 2)$ เป็นเส้นเชื่อมหุ่นจากบัพ s ซึ่งเป็นบัพเริ่มต้นพิเศษไปยังบัพ 2 ในทำนองเดียวกัน $(6, t)$ และ $(7, t)$ ต่างก็เป็นเส้นเชื่อมหุ่นจากบัพ 6 และ 7 ไปยังบัพ t ตามลำดับ โดยบัพ t เป็นบัพสุดท้ายพิเศษ



รูป 1.3 แสดงข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายอย่างละ 1 บัพ

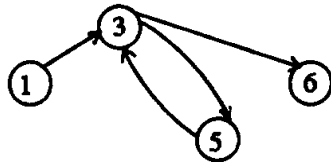


รูป 1.4 แสดงข่ายงานที่มีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายมากกว่า 1 บัพ (ก) และการเพิ่มบัพพิเศษคือ บัพ s ให้เป็นบัพเริ่มต้น และบัพ t คือบัพสุดท้าย (ข)

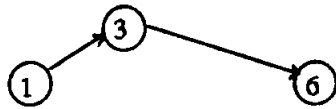
การประยุกต์ใช้การวิเคราะห์ข่ายงานกับปัญหาจริง จำเป็นต้องทราบความหมายของพจน์ต่างๆ ดังนี้

ลูกโซ่ (chain) จากบัพ i ไปบัพ j คือลำดับของเส้นเชื่อมและบัพ ซึ่งบัพสุดท้ายของแต่ละเส้นเชื่อมจะเป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อมที่ตามมา ยกเว้นบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายของข่ายงาน โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมต้องมีทิศทางไปในทางเดียวกัน คือ ไปสู่อบัพ j

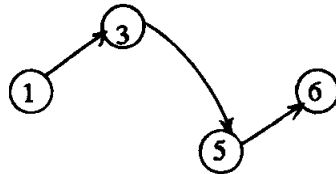
จากรูป 1.4 (ก) ลูกโซ่จากบัพ 1 ไปบัพ 6 คือลำดับของเส้นเชื่อม (1,3), (3,5), (5,3) และ (3,6)



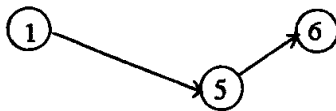
หรือ ลำดับของเส้นเชื่อม (1,3) และ (3,6)



หรือ ลำดับของเส้นเชื่อม (1,3), (3,5) และ (5,6)

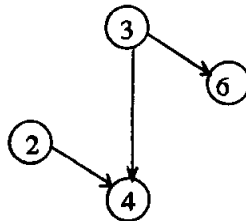


หรือ ลำดับของเส้นเชื่อม (1,5) และ (5,6)

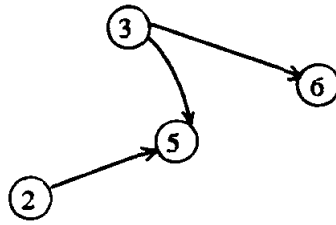


วิถี (path) จากบัพ i ไปบัพ j คล้ายกับลูกโซ่จากบัพ i ไปบัพ j นอกจากแต่ละเส้นเชื่อม
ไม่จำเป็นต้องมีทิศทางไปในทางเดียวกัน

จากรูป 1.4 (ก) วิถีจากบัพ 2 ไปบัพ 6 คือลำดับของเส้นเชื่อม (2,4), (3,4) และ (3,6)



หรือ ลำดับของเส้นเชื่อม (2,5), (3,5) และ (3,6) เป็นต้น



จะเห็นว่าลูกโซ่มีคุณสมบัติเป็นวิถี แต่บางวิถีอาจไม่เป็นลูกโซ่

สำหรับข่ายงานซึ่งแต่ละเส้นเชื่อมไม่มีทิศทางกำกับ ลูกโซ่และวิถีจากบัพ i ไปบัพ j ให้ความหมายเหมือนกัน

วัฏจักร (cycle) คือวิถีซึ่งบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายเป็นบัพเดียวกัน และจำนวนเส้นเชื่อมในวิถีเป็นจำนวนจำกัด จากรูป 1.4 (ก) ตัวอย่างของวัฏจักร เช่น ลำดับของเส้นเชื่อม (4,7), (4,5) และ (5,7) หรือ (2,5), (2,4) และ (4,5) เป็นต้น

วงจร (circuit) คือลูกโซ่ซึ่งบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายเป็นบัพเดียวกัน และจำนวนเส้นเชื่อมในลูกโซ่เป็นจำนวนจำกัด จากรูป 1.4 (ก) ตัวอย่างของวงจรคือ (3,4), (4,5) และ (5,3)

รูปบ่วงในตัว (self-loop) คือวัฏจักรหรือวงจรที่มีเพียง 1 บัพและ 1 เส้นเชื่อมเท่านั้น จากรูป 1.4 (ก) เส้นเชื่อม (4,4) คือตัวอย่างของรูปบ่วงในตัว

ข่ายงานเชื่อมโยง (connected network) คือข่ายงานซึ่งมีอย่างน้อย 1 วิถี หรือ 1 ลูกโซ่เชื่อมระหว่าง 2 บัพใดๆในข่ายงาน เช่นรูป 1.4 (ก) เป็นข่ายงานเชื่อมโยง

เพราะมีเส้นเชื่อม (1, 3) เป็นลูกโซ่จากบัพ 1 ไปบัพ 3

ลำดับของเส้นเชื่อม (1, 3) และ (3, 6) เป็นลูกโซ่จากบัพ 1 ไปบัพ 6

เส้นเชื่อม (1, 5) เป็น ลูกโซ่จากบัพ 1 ไปบัพ 5

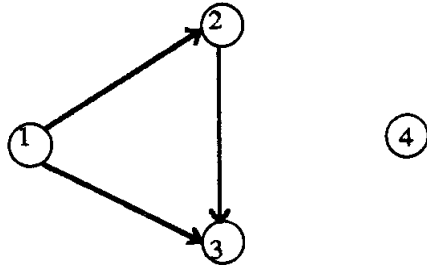
เส้นเชื่อม (2, 5) เป็น ลูกโซ่จากบัพ 2 ไปบัพ 5

ลำดับของเส้นเชื่อม (1, 5) และ (2, 5) เป็นวิถีจากบัพ 1 ไปบัพ 2

ลำดับของเส้นเชื่อม (2, 5) และ (5, 6) เป็นลูกโซ่จากบัพ 2 ไปบัพ 6 เป็นต้น

นั่นคือ ทุกๆ คู่ของบัพ มีอย่างน้อย 1 วิถี หรือ 1 ลูกโซ่ ที่เชื่อมระหว่างบัพ

แต่รูป 1.5 ไม่เป็นข่ายงานเชื่อมโยง เพราะไม่มีวิถีหรือลูกโซ่เชื่อมระหว่างบัพ 1 กับ บัพ 4 หรือบัพ 2 กับ บัพ 4 หรือบัพ 3 กับบัพ 4



รูป 1.5 แสดงข่ายงานที่ไม่เป็นข่ายงานเชื่อมโยง

ต้นไม้ (tree) คือข่ายงานย่อยเชื่อมโยง $\bar{G} = (\bar{N}, \bar{A})$ ซึ่งไม่มีวัฏจักรของข่ายงาน $G = (N, A)$ หรือ ต้นไม้จะมีเพียง 1 วิธีเท่านั้น ระหว่าง 2 บัพใด ๆ

โดยที่ \bar{G} คือข่ายงานย่อยของ G

\bar{N} คือสับเซตของ N

และ \bar{A} คือสับเซตของ A

ข่ายงาน G อาจเป็นข่ายงานระบุทิศทาง (ทุกๆ เส้นเชื่อมมีทิศทางกำกับ) หรือเป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทางก็ได้ (ทุกๆ เส้นเชื่อมไม่มีทิศทางกำกับ) จากรูป 1.6 รูป (ข) คือต้นไม้ของข่ายงาน (ก)

จากรูป 1.6 (ก)

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 7), (7, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (4, 8), (8, 4), (6, 8), (8, 6), (7, 8), (8, 7)\}$$

จากรูป 1.6 (ข)

$$\bar{N} = \{1, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\bar{A} = \{(1, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (4, 7), (7, 4)\}$$

ดังนั้น \bar{N} เป็นสับเซตของ N

\bar{A} เป็นสับเซตของ A

นั่นคือข่ายงานรูป 1.6 (ข) เป็นข่ายงานย่อยของรูป 1.6 (ก) ข่ายงานรูป 1.6 (ข) เป็นข่ายงานเชื่อมโยง เพราะทุกๆ คู่ของบัพมีอย่างน้อย 1 วิธี หรือ 1 ลูกโซ่เชื่อม และไม่มีวัฏจักรในข่ายงานนี้ ข่ายงานรูป 1.6 (ข) จึงเป็นต้นไม้ของข่ายงานรูป 1.6 (ก)

และรูป (จ) คือต้นไม้ของข่ายงาน (ง)

จากรูป 1.6 (9)

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 2), (5, 4), (6, 4), (8, 4)\}$$

จากรูป 1.6 (จ)

$$\bar{N} = (1, 2, 3, 4, 5, 8)$$

$$\bar{A} = \{(1, 2), (4, 3), (4, 8), (5, 2), (5, 4)\}$$

นั่นคือ \bar{N} เป็นสับเซตของ N

$$\bar{A} \text{ เป็นสับเซตของ } A$$

ข่ายงานรูป 1.6 (จ) เป็นข่ายงานย่อยของรูป 1.6 (ง)

นอกจากนั้นข่ายงานรูป 1.6 (จ) ยังเป็นข่ายงานเชื่อมโยงอีกด้วย เพราะมีอย่างน้อย 1 วิธี หรือ 1 ลูกโซ่ เชื่อมระหว่างบัพคู่ต่างๆ ในข่ายงาน และไม่มีวัฏจักรในข่ายงาน ดังนั้น ข่ายงานรูป 1.6 (จ) จึงเป็นต้นไม้ของข่ายงานรูป 1.6 (ง)

ต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree) คือต้นไม้ซึ่งมีบัพทุกบัพของข่ายงาน นั่นคือถ้าข่ายงานมีบัพ n บัพ แล้วต้นไม้ซึ่งมีบัพ n บัพและมีเส้นเชื่อมเป็นจำนวน $n-1$ เส้นเชื่อม (เพื่อไม่ให้เกิดวัฏจักร) จะเป็นต้นไม้แบบทอดข้าม จากรูป 1.6 รูป (ค) และ (ง) คือ ต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงาน (ก) และ (ง) ตามลำดับ เพราะข่ายงานรูป 1.6 (ก) มี $\bar{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ซึ่งเหมือนกับ N ในข่ายงานรูป 1.6 (ก) หรือจำนวนบัพของข่ายงาน คือ $n = 8$

$$\text{และ } \bar{A} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 7), (7, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)\}$$

หรือมีจำนวนเส้นเชื่อม = 7 เส้นเชื่อม

เนื่องจากข่ายงานรูป 1.6 (ค) เป็นข่ายงานเชื่อมโยงเพราะมีอย่างน้อย 1 วิธี หรือ 1 ลูกโซ่เชื่อมระหว่างบัพคู่ต่างๆ ในข่ายงาน และเป็นข่ายงานที่ไม่มีวัฏจักร จึงเป็นต้นไม้ของข่ายงานรูป 1.6 (ก) และจำนวนบัพของข่ายงานรูป 1.6 (ค) เท่ากับจำนวนบัพของข่ายงานรูป 1.6 (ก) คือ 8 จำนวนเส้นเชื่อมของข่ายงานคือ 7 ดังนั้นข่ายงานรูป 1.6 (ค) จึงเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงานรูป 1.6 (ก)

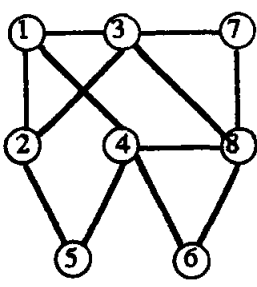
ข่ายงานรูป 1.6 (ง) มี $\bar{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ซึ่งเท่ากับ N ในข่ายงานรูป 1.6 (ง) หรือจำนวนบัพของข่ายงาน do $n = 8$

$$\bar{A} = \{(2, 1), (4, 3), (4, 6), (4, 8), (5, 2), (5, 4), (7, 4)\}$$

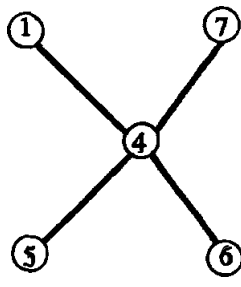
หรือจำนวนเส้นเชื่อม = 7 เส้นเชื่อม

ข่ายงานรูป 1.6 (ก) เป็นข่ายงานเชื่อมโยง เพราะมีอย่างน้อย 1 วิธี หรือ 1 ลูกโซ่เชื่อมระหว่างบัพทูล์ต่างๆ ในข่ายงาน และเป็นข่ายงานที่ไม่มีวัฏจักร จึงเป็นต้นไม้ของข่ายงานรูป 1.6 (ง) และจำนวนบัพทูล์ของข่ายงานรูป 1.6 (ก) เท่ากับจำนวนบัพทูล์ของข่ายงานรูป 1.6 (ง) คือ 8 จำนวนเส้นเชื่อมของข่ายงานคือ 7 ดังนั้นข่ายงานรูป 1.6 (ก) จึงเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงานรูป 1.6 (ง)

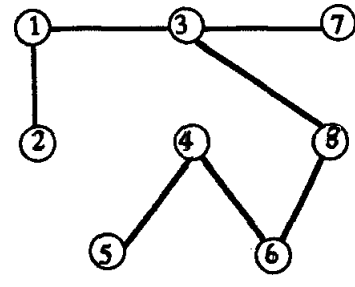
ในทางปฏิบัติถ้าแต่ละเส้นเชื่อมของข่ายงานมีตัวเลขที่แสดงระยะทาง ค่าใช้จ่าย หรือค่าอื่นๆ แล้วมักจะใช้ต้นไม้แทนทอดข้ามของข่ายงานที่มีค่าต่ำสุด ซึ่งจะกล่าวรายละเอียดในบทที่ 2



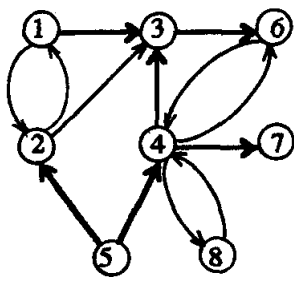
(ก)



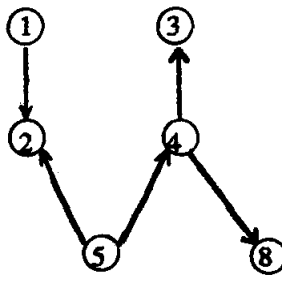
(ข)



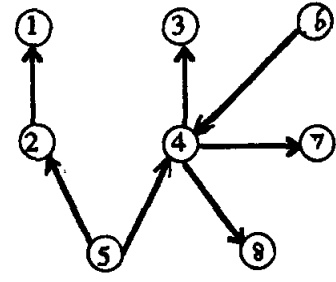
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

รูป 1.6 แสดงต้นไม้และต้นไม้แบบทอดข้าม (ก) ข่ายงานไม่ระบุทิศทาง

(ข) ต้นไม้ของข่ายงาน (ก) (ค) ต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงาน (ก)

(ง) ข่ายงานระบุทิศทาง (จ) ต้นไม้ของข่ายงาน (ง)

และ (ฉ) ต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงาน (ง)

1.2 การแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์

สำหรับข่ายงานที่มีบัพและเส้นเชื่อมเป็นจำนวนมาก นิยมแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์ มากกว่าที่จะแสดงด้วยกราฟซึ่งมีความยุ่งยากในการเขียน พิจารณาข่ายงาน $G = (N,A)$ เมื่อ $N = \{1,2,3, \dots, n\}$ เมทริกซ์ที่ใช้แทนข่ายงานมี 2 แบบคือ

1.2.1 เมทริกซ์ประชิด (adjacency matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งแถวและสดมภ์แทนบัพ แทนเมทริกซ์ด้วย $X = [x_{ij}]_{n \times n}$

ถ้าข่ายงาน G เป็นข่ายงานระบุทิศทาง แล้ว

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ ถ้าเส้นเชื่อม } (i,j) \in A \text{ เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ } i \text{ ไปบัพ } j \\ 0 & ; \text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

ถ้าข่ายงาน G เป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทาง แล้วให้แทนเส้นเชื่อมที่ไม่มีทิศทางกำกับด้วยเส้นเชื่อมซึ่งมีทิศทางกำกับในทางตรงกันข้าม 2 เส้นเชื่อม แล้วใช้หลักการแทนค่า x_{ij} ข้างต้น เมทริกซ์ที่แทนจะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

1.2.2 เมทริกซ์บังเกิด (incidence matrix) คือเมทริกซ์ซึ่งแต่ละแถวแทนบัพ และแต่ละสดมภ์แทนเส้นเชื่อม ถ้าข่ายงานประกอบด้วยบัพ n บัพและเส้นเชื่อม k เส้นเชื่อม แล้วจะแทนเมทริกซ์ด้วย $Z = [z_{ik}]_{n \times k}$

ถ้าข่ายงาน G เป็นข่ายงานระบุทิศทางแล้ว

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & ; \text{ ถ้าบัพ } i \text{ คือบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม } a_k \\ -1 & ; \text{ ถ้าบัพ } i \text{ คือบัพปลายของเส้นเชื่อม } a_k \\ 0 & ; \text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

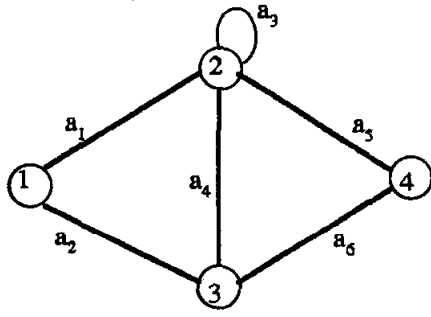
ถ้าข่ายงาน G เป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทาง แล้ว

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & ; \text{ ถ้าบัพ } i \text{ เชื่อมกับเส้นเชื่อม } a_k \\ 0 & ; \text{ อื่นๆ} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดข่ายงานดังรูป 1.7 เมื่อ $N = \{1,2,3,4\}$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

ให้เขียนแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์ทั้ง 2 แบบ



รูป 1.7 แสดงข่ายงานไม่ระบุทิศทาง

เมทริกซ์ประชิด (X) และเมทริกซ์บังเกิด (Z) ของข่ายงาน คือ

$$X = [x_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ข่ายงานรูป 1.7 เป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทาง มีจำนวนบัพเป็น 4 บัพ เมทริกซ์ประชิดจึงเป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยแถวและสดมภ์แทนบัพ การแทนค่า สมาชิกในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ของเมทริกซ์ X หรือ x_{ij} เป็นดังนี้

- $x_{11} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 1 ไปบัพ 1
- $x_{12} = 1$ เพราะถ้าแทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 1 กับบัพ 2 ด้วยเส้นเชื่อม (1, 2) แล้ว (1, 2) เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ 1 ไปบัพ 2 สมาชิกในแถวที่ 1 สดมภ์ที่ 2 จึงมีค่าเป็น 1
- $x_{13} = 1$ เพราะถ้าแทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 1 กับบัพ 3 ด้วยเส้นเชื่อม (1, 3) แล้ว (1, 3) เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ 1 ไปบัพ 3
- $x_{14} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 1 ไปบัพ 4
- $x_{21} = 1$ เพราะถ้าแทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 1 กับบัพ 2 ด้วยเส้นเชื่อม (2, 1) แล้ว (2, 1) เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ 2 ไปบัพ 1
- $x_{22} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางที่บัพ 2 มายังบัพ 2 เอง ซึ่งอาจแทนด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากบัพ 2 มาบัพ 2
- $x_{23} = 1$ เพราะถ้าแทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 2 กับบัพ 3 ด้วยเส้นเชื่อม (2, 3) แล้ว (2, 3) เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ 2 ไปบัพ 3

- $x_{24} = 1$ เพราะถ้าแทนเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 2 กับบัพ 4 ด้วยเส้นเชื่อม (2, 4) แล้ว (2, 4) เป็นเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจากบัพ 2 ไปบัพ 4
- $x_{31} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 1 กับบัพ 3 แล้วแทนด้วยเส้นเชื่อม (3, 1) ซึ่งระบุทิศทางจากบัพ 3 ไปบัพ 1
- $x_{32} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 2 กับบัพ 3 แล้วแทนเส้นเชื่อมนี้ด้วยเส้นเชื่อม (3, 2) ซึ่งระบุทิศทางจากบัพ 3 ไปบัพ 2
- $x_{33} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 3 ไปบัพ 3
- $x_{34} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 3 กับบัพ 4 ซึ่งอาจแทนด้วยเส้นเชื่อม (3, 4) ที่มีทิศทางจากบัพ 3 ไปบัพ 4
- $x_{41} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 4 ไปบัพ 1
- $x_{42} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 4 กับบัพ 2 ซึ่งอาจแทนด้วยเส้นเชื่อม (4, 2) ที่มีทิศทางจากบัพ 4 ไปบัพ 2
- $x_{43} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อมไม่ระบุทิศทางระหว่างบัพ 3 กับบัพ 4 ซึ่งอาจแทนด้วยเส้นเชื่อม (4, 3) ที่มีทิศทางจากบัพ 4 ไปบัพ 3
- $x_{44} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 4 ไปบัพ 4

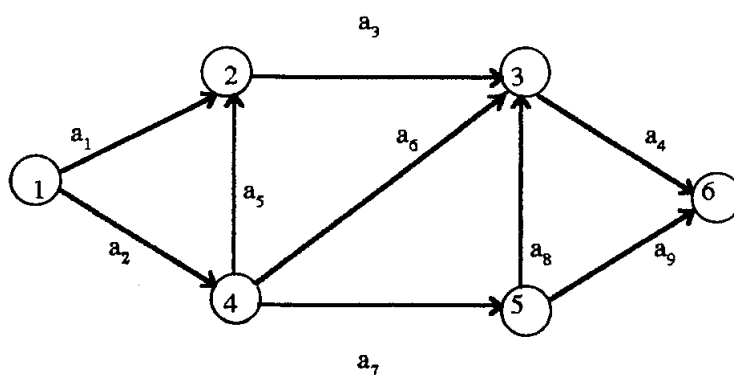
และ $Z = [z_{ij}]_{4 \times 6} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$

เนื่องจากข่ายงานรูป 1.7 เป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทาง มีจำนวนบัพ 4 บัพ และมีจำนวนเส้นเชื่อม 6 เส้นเชื่อม จึงแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์บังเกิด ขนาด 4×6 โดยแถวแทนบัพ และสดมภ์แทนเส้นเชื่อม การแทนค่าสมาชิกในแถวที่ i สดมภ์ที่ k หรือ z_{ik} ของเมทริกซ์ Z เป็นดังนี้

- $z_{11} = 1$ เพราะบัพ 1 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_1
- $z_{12} = 1$ เพราะบัพ 1 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_2
- $z_{13} = 0$ เพราะบัพ 1 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_3
- $z_{14} = 0$ เพราะบัพ 1 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_4

- $z_{15} = 0$ เพราะบัพ 1 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_5
- $z_{16} = 0$ เพราะบัพ 1 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_6
- $z_{21} = 1$ เพราะบัพ 2 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_1
- $z_{22} = 0$ เพราะบัพ 2 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_2
- $z_{23} = 1$ เพราะบัพ 2 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_3
- $z_{24} = 1$ เพราะบัพ 2 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_4
- $z_{25} = 1$ เพราะบัพ 2 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_5
- $z_{26} = 0$ เพราะบัพ 2 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_6
- $z_{31} = 0$ เพราะบัพ 3 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_1
- $z_{32} = 1$ เพราะบัพ 3 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_2
- $z_{33} = 0$ เพราะบัพ 3 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_3
- $z_{34} = 1$ เพราะบัพ 3 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_4
- $z_{35} = 0$ เพราะบัพ 3 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_5
- $z_{36} = 1$ เพราะบัพ 3 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_6
- $z_{41} = 0$ เพราะบัพ 4 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_1
- $z_{42} = 0$ เพราะบัพ 4 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_2
- $z_{43} = 0$ เพราะบัพ 4 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_3
- $z_{44} = 0$ เพราะบัพ 4 ไม่เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_4
- $z_{45} = 1$ เพราะบัพ 4 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_5
- $z_{46} = 1$ เพราะบัพ 4 เชื่อมกับเส้นเชื่อม a_6

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดข่ายงานดังรูป 1.8 เมื่อ $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$ ให้เขียนแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์ทั้ง 2 แบบ



รูป 1.8 แสดงข่ายงานระบุทิศทาง

เมทริกซ์ประชิด (X) และเมทริกซ์บังเกิด (Z) ของข่ายงาน คือ

$$X = [x_{ij}]_{6 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ข่ายงานรูป 1.8 เป็นข่ายงานระบุทิศทาง มีจำนวนบัพเป็น 6 บัพ เมทริกซ์ประชิด จึงเป็นเมทริกซ์ขนาด 6×6 โดยแถวและสดมภ์แทนบัพ ค่าของสมาชิกในแถวที่ i สดมภ์ที่ j หรือ x_{ij} ของเมทริกซ์ประชิด X อธิบายได้ดังนี้

$x_{11} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (1, 1)

$x_{12} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_1 หรือเส้นเชื่อม (1, 2) ที่มีทิศทางจากบัพ 1 ไปบัพ 2

$x_{13} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (1, 3)

$x_{14} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_2 หรือเส้นเชื่อม (1, 4) ที่มีทิศทางจากบัพ 1 ไปบัพ 4

$x_{15} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (1, 5)

$x_{16} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (1, 6)

$x_{21} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (2, 1)

$x_{22} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (2, 2)

$x_{23} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_3 หรือเส้นเชื่อม (2, 3) ที่มีทิศทางจากบัพ 2 ไปบัพ 3

$x_{24} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (2, 4)

$x_{25} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (2, 5)

$x_{26} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (2, 6)

$x_{31} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (3, 1)

$x_{32} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (3, 2)

$x_{33} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (3, 3)

$x_{34} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (3, 4)

$x_{35} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (3, 5)

OR 414 $x_{36} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_4 หรือเส้นเชื่อม (3, 6) ที่มีทิศทางจากบัพ 3 ไปบัพ 6

- $x_{41} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (4, 1)
 $x_{42} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_5 หรือเส้นเชื่อม (4, 2) ที่มีทิศทางจากบัพ 4 ไปบัพ 2
 $x_{43} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_6 หรือเส้นเชื่อม (4, 3) ที่มีทิศทางจากบัพ 4 ไปบัพ 3
 $x_{44} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (4, 4)
 $x_{45} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_7 หรือเส้นเชื่อม (4, 5) ที่มีทิศทางจากบัพ 4 ไปบัพ 5
 $x_{46} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (4, 6)
 $x_{51} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (5, 1)
 $x_{52} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (5, 2)
 $x_{53} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_8 หรือเส้นเชื่อม (5, 3) ที่มีทิศทางจากบัพ 5 ไปบัพ 3
 $x_{54} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (5, 4)
 $x_{55} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อม (5, 5)
 $x_{56} = 1$ เพราะมีเส้นเชื่อม a_9 หรือเส้นเชื่อม (5, 6) ที่มีทิศทางจากบัพ 5 ไปบัพ 6
 $x_{61} = x_{62} = x_{63} = x_{64} = x_{65} = x_{66} = 0$ เพราะไม่มีเส้นเชื่อมจากบัพ 6 ไปที่บัพ 1 บัพ 2 บัพ 3 บัพ 4 บัพ 5 และบัพ 6 เลย

$$\text{และ } Z = [z_{ij}]_{6 \times 9} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

จากข่ายงานรูป 1.8 ซึ่งเป็นข่ายงานระบุทิศทาง มีจำนวนบัพ 6 บัพ และจำนวนเส้นเชื่อม 9 เส้นเชื่อม จึงแทนข่ายงานด้วยเมทริกซ์บังเกิด ขนาด 6×9 โดยแถวแทนบัพ และสดมภ์แทนเส้นเชื่อม การแทนค่าสมาชิกในแถวที่ i สดมภ์ที่ k หรือ z_{ik} ของเมทริกซ์ Z อธิบายได้ดังนี้

$z_{11} = 1$ เพราะบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_1

$z_{12} = 1$ เพราะบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_2

$z_{13} = z_{14} = z_{15} = \dots = z_{19} = 0$ เพราะบัพ 1 ไม่เป็นบัพเริ่มต้นหรือบัพปลายของเส้นเชื่อม $a_3, a_4, a_5, \dots = a_9$ ตามลำดับ

$z_{21} = -1$ เพราะบัพ 2 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_1
 $z_{22} = 0$ เพราะบัพ 2 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_2
 $z_{23} = 1$ เพราะบัพ 2 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_3
 $z_{24} = 0$ เพราะบัพ 2 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_4
 $z_{25} = -1$ เพราะบัพ 2 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_5
 $z_{26} = z_{27} = z_{28} = z_{29} = 0$ เพราะบัพ 2 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_6, a_7, a_8, a_9 ตามลำดับ
 $z_{31} = z_{32} = z_{35} = z_{37} = z_{39} = 0$ เพราะบัพ 3 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_1, a_2, a_3, a_7, a_9 ตามลำดับ
 $z_{33} = z_{36} = z_{38} = -1$ เพราะบัพ 3 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_3, a_6 และ a_8 ตามลำดับ
 $z_{34} = 1$ เพราะบัพ 3 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_4
 $z_{41} = z_{43} = z_{44} = z_{48} = z_{49} = 0$ เพราะบัพ 4 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_1, a_3, a_4, a_8, a_9 ตามลำดับ
 $z_{42} = -1$ เพราะบัพ 4 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_2
 $z_{45} = z_{46} = z_{47} = 1$ เพราะบัพ 4 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_5, a_6 และ a_7 ตามลำดับ
 $z_{51} = z_{52} = z_{53} = z_{54} = z_{55} = z_{56} = 0$ เพราะบัพ 5 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ a_6 ตามลำดับ
 $z_{57} = -1$ เพราะบัพ 5 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_7
 $z_{58} = z_{59} = 1$ เพราะบัพ 5 เป็นบัพเริ่มต้นของเส้นเชื่อม a_8 และ a_9 ตามลำดับ
 $z_{61} = z_{62} = z_{63} = z_{65} = z_{66} = z_{67} = z_{68} = 0$ เพราะบัพ 6 ไม่เป็นบัพเริ่มต้น หรือบัพปลายของเส้นเชื่อม $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7$ และ a_8 ตามลำดับ
 $z_{64} = z_{69} = -1$ เพราะบัพ 6 เป็นบัพปลายของเส้นเชื่อม a_4 และ a_9 ตามลำดับ

สำหรับเมทริกซ์ประชิดของข่ายงาน ไม่ระบุทิศทาง สามารถสรุปได้ว่า

1. ถ้าเพิ่มบัพที่ไม่เชื่อมโยงในข่ายงาน แล้วเมทริกซ์สามารถแสดงได้จากเมทริกซ์ประชิดเดิมที่มีเพิ่มแถวและสทมภ์ของ 0

จากตัวอย่าง 1.1 ถ้าเพิ่มบัพ 5 ในข่ายงานรูป 1.7 โดยบัพ 5 ไม่มีเส้นเชื่อมกับบัพอื่นๆ ของข่ายงาน แล้วเมทริกซ์ประชิดแทนข่ายงาน คือ

$$X = [x_{ij}]_{5 \times 5} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

โดยเพิ่มแถวที่ 5 และสทมภ์ที่ 5 และสมาชิกในแถวที่ 5 และสทมภ์ที่ 5 มีค่าเป็น 0

2. เมทริกซ์ประชิดของข่ายงานไม่ระบุทิศทางเป็นเมทริกซ์สมมาตร

3. สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักที่มีค่าไม่เป็น 0 แสดงว่ามีรูปบ่วงในตัวที่บัพนั้น เช่น

จากตัวอย่าง 1.1 $x_{22} = 1$ แสดงว่ามีรูปบ่วงในตัวที่บัพ 2

สำหรับเมทริกซ์บังเกิดของข่ายงานไม่ระบุทิศทาง สามารถสรุปได้ว่า

1. ถ้าเพิ่มบัพที่ไม่เชื่อมโยงในข่ายงานแล้ว เมทริกซ์บังเกิดสามารถแสดงได้โดยอาศัยเมทริกซ์บังเกิดเดิม ที่เพิ่มแถวของบัพที่เพิ่มมา และให้สมาชิกทุกค่าในแถวที่เพิ่มเป็น 0

จากตัวอย่าง 1.1 ถ้าเพิ่มบัพ 5 ในข่ายงานรูป 1.7 โดยบัพ 5 ไม่มีเส้นเชื่อมกับบัพอื่นของข่ายงาน เมทริกซ์บังเกิดของข่ายงานคือ

$$Z = [z_{ij}]_{5 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. เมทริกซ์บังเกิดไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร

3. สทมภ์ใดที่มีสมาชิกเป็น 1 ตรงกับแถวของบัพใด แสดงว่ามีเส้นเชื่อมของสทมภ์นั้นที่เป็นรูปบ่วงในตัวของบัพในแถวดังกล่าว เช่น สทมภ์ของ a_3 มีค่า $z_{23} = 1$ แสดงว่าเส้นเชื่อม a_3 เป็นรูปบ่วงในตัวที่บัพ 2

สำหรับเมทริกซ์ประชิดของข่ายงานระบุทิศทาง สรุปได้ว่า

1. ถ้าศกมภ์ใดที่มีค่าสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด แล้วบัพที่สอดคล้องกับศกมภ์ดังกล่าวเป็นบัพเริ่มต้นของข่ายงาน จากตัวอย่าง 1.2 ศกมภ์ 1 มีค่าสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด บัพ 1 จึงเป็นบัพเริ่มต้นของข่ายงาน
2. ถ้าแถวใดมีค่าสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด แล้วบัพที่สอดคล้องกับแถวดังกล่าว เป็นบัพสุดท้ายของข่ายงาน
จากตัวอย่างที่ 1.2 แถวที่ 6 มีค่าสมาชิกทั้งหมดเป็น 0 บัพ 6 จึงเป็นบัพสุดท้ายของข่ายงาน
3. ถ้าสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของข่ายงานเป็น 0 ทั้งหมด แล้วข่ายงานนั้น ไม่มีรูปบ่วงในตัว แต่ถ้ามีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 ที่แถวหรือศกมภ์ใด แสดงว่ามีรูปบ่วงในตัวที่บัพที่สอดคล้องกับแถวหรือศกมภ์นั้น
จากตัวอย่าง 1.2 ข่ายงานไม่มีรูปบ่วงในตัว
4. เมทริกซ์ประชิดของข่ายงานระบุทิศทาง ไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร

สำหรับเมทริกซ์บังเกิดของข่ายงาน ระบุทิศทาง

1. ถ้าแถวใดมีสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 เป็น +1 ทั้งหมด แล้วบัพที่สอดคล้องกับแถวนั้น เป็นบัพเริ่มต้นของข่ายงาน
จากตัวอย่าง 1.2 แถวที่ 1 มีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 คือ $z_{11} = z_{12} = 1$ แล้วบัพ 1 เป็นบัพเริ่มต้นของข่ายงาน
2. ถ้าแถวใดมีสมาชิกที่ไม่ใช่ 0 เป็น -1 ทั้งหมด แล้วบัพที่สอดคล้องกับแถวนั้น เป็นบัพสุดท้ายของข่ายงาน
จากตัวอย่าง 1.2 แถวที่ 6 มีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 คือ $z_{64} = z_{69} = -1$ แล้วบัพ 6 เป็นบัพสุดท้ายของข่ายงาน
3. ค่าสมาชิกในศกมภ์ใดเป็นทั้ง +1 และ -1 ตรงกับแถวใด จะแสดงถึงรูปบ่วงในตัวที่บัพในแถวดังกล่าว
จากตัวอย่าง 1.2 ไม่มีรูปบ่วงในตัวที่บัพใด
4. เมทริกซ์บังเกิดของข่ายงานระบุทิศทาง ไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร

1.3 การอนุรักษ์สหายงาน (conservation of flow)

บ่อยครั้งที่การคำนวณของข่ายงาน จะเกี่ยวข้องกับการหาค่าที่เหมาะสมของฟังก์ชันของสหายงาน ระหว่างบัพเริ่มต้น s และบัพสุดท้าย t เช่น ปัญหาสหายงานการส่งน้ำให้มากที่สุดของข่าย

งาน ปัญหาสายงานการบินโดยให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เป็นต้น

ถ้า β_i คือเซตของบัพซึ่งเชื่อมโยงกับบัพ i โดยแต่ละเส้นเชื่อมมีทิศทางมาที่บัพ i

และ α_i คือเซตของบัพซึ่งเชื่อมโยงกับบัพ i โดยแต่ละเส้นเชื่อมมีทิศทางออกจากบัพ i

กำหนดฟังก์ชันค่าเต็ม f_{ij} บน A ของข่ายงานมีทิศทาง $G = (N, A)$ แล้วจะเรียก f_{ij} ว่า สายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i, j) ของข่ายงาน ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$f_{ij} \geq 0 ; \forall (i, j) \in A \quad (1.1)$$

$$\sum_{j \in \alpha_i} f_{ij} - \sum_{j \in \beta_i} f_{ji} = 0 ; \text{ สำหรับ } i \in N \text{ และ } i \neq s, i \neq t \quad (1.2)$$

$$j \in \alpha_i, j \in \beta_i$$

$$f_{ij} \leq c_{ij} ; \forall (i, j) \in A \quad (1.3)$$

เมื่อ c_{ij} คือความจุของเส้นเชื่อม (i, j)

เงื่อนไข (1.1) คือค่าของสายงานต้องไม่เป็นลบ

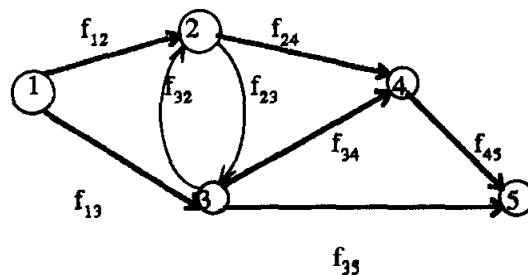
เงื่อนไข (1.3) หมายถึงค่าของสายงานที่จะส่งผ่านแต่ละเส้นเชื่อม ต้องมีค่าไม่เกินความจุของเส้นเชื่อมนั้นๆ

ความหมายของเงื่อนไข (1.2) คือถ้าบัพ j เป็นบัพใดๆ ซึ่งไม่ใช่บัพเริ่มต้นหรือบัพสุดท้าย แล้วผลรวมของสายงานซึ่งเข้ามาที่บัพ j ต้องเท่ากับผลรวมของสายงานที่ออกจากบัพ j ซึ่งเป็นเงื่อนไขของการอนุรักษ์สายงานนั่นเอง สำหรับข่ายงานซึ่งมีบัพเริ่มต้นและบัพสุดท้ายอย่างละ 1 บัพ เงื่อนไขของการอนุรักษ์สายงานจะเป็นจริงเสมอ

พิจารณาข่ายงานรูป 1.9 ซึ่ง 1 เป็นบัพเริ่มต้น และ 2 เป็นบัพสุดท้าย

f_{ij} คือ สายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i, j)

c_{ij} คือ ความจุของเส้นเชื่อม (i, j)



รูป 1.9 แสดงสายงานที่ผ่าน (i, j)

18. เงื่อนไข (1.2) เมื่อบัพ $i = 2, 3$ และ 4 เป็นดังนี้

ที่บัพ $i = 2$ $\beta_2 = \{1,3\}$ และ $\alpha_2 = \{3,4\}$ จะได้ว่า $(f_{23} + f_{24}) - (f_{12} + f_{32}) = 0$

ที่บัพ $i = 3$ $\beta_3 = \{1,2\}$ และ $\alpha_3 = \{2,4,5\}$ จะได้ว่า $(f_{32} + f_{34} + f_{35}) - (f_{13} + f_{23}) = 0$

ที่บัพ $i = 4$ $\beta_4 = \{2,3\}$ และ $\alpha_4 = \{5\}$ จะได้ว่า $f_{45} - (f_{24} - f_{34}) = 0$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ให้ความหมายของพจน์ต่อไปนี้

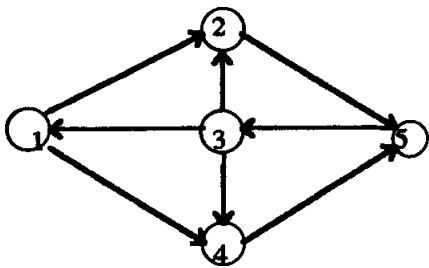
- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| (ก) เส้นเชื่อม | (ฉ) ข่ายงาน |
| (ข) บัพ | (ช) บัพเริ่มต้น |
| (ค) เส้นเชื่อมที่มีทิศทางกำกับ | (ซ) บัพสุดท้าย |
| (ง) เส้นเชื่อมที่มีสองทิศทาง | (ฅ) บัพเริ่มต้นพิเศษ |
| (จ) เส้นเชื่อมที่ไม่มีทิศทางกำกับ | (ฉ) บัพสุดท้ายพิเศษ |

2. ให้ความหมายและบอกข้อแตกต่างของ

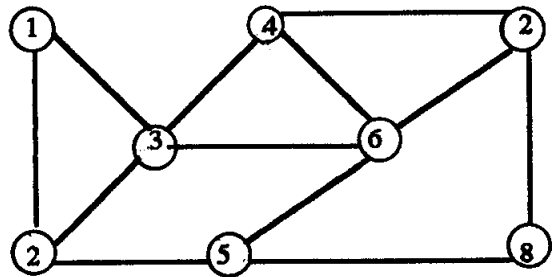
- (ก) ลูกโซ่และวิถี
(ข) วัฏจักรและวงจร

3. ให้ความหมายของต้นไม้และต้นไม้แบบทอดข้าม

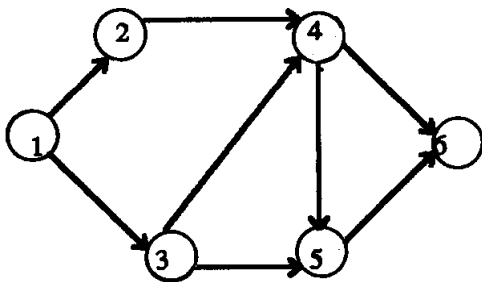
4. จงหาต้นไม้และต้นไม้แบบทอดข้ามของข่ายงาน



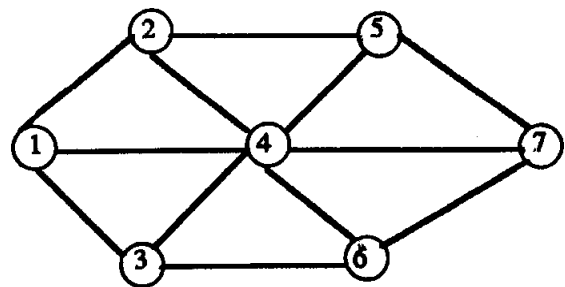
(ก)



(ข)

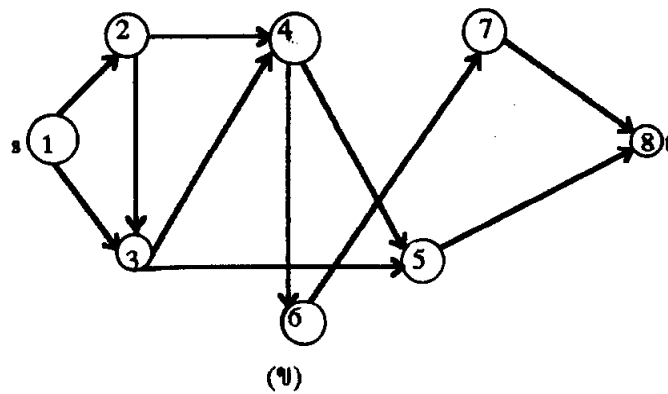
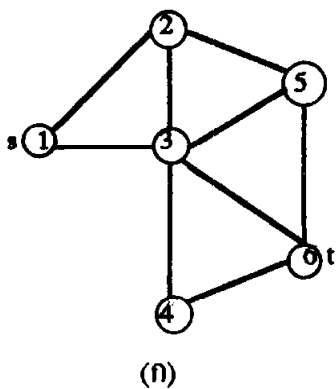


(ค)



(ง)

5. ให้หาเมทริกซ์ประชิดและเมทริกซ์บังเกิด แทนข่ายงาน



6. จากข่ายงานในข้อ 5. จงหาวิถีจากร วจร วิถีจาก s ไป t และลูกโซ่จาก s ไป t

7. กำหนดข่ายงาน $G = (N,A)$ เป็นข่ายงานระบุทิศทาง $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ

$$A = \{(1,2), (1,3), (3,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

(ก) เขียนกราฟของข่ายงาน

(ข) หาเมทริกซ์ประชิด

(ค) หาเมทริกซ์บังเกิด

8. กำหนด $G = (N,A)$ เป็นข่ายงานไม่ระบุทิศทาง

$$N = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}\}$$

และเมทริกซ์ประชิด คือ

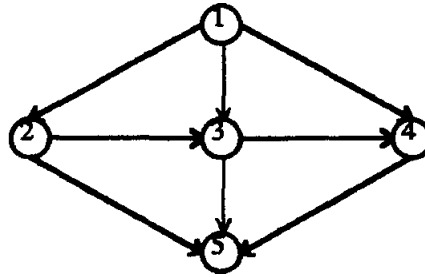
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

(ก) เขียนกราฟของข่ายงาน

(ข) หาเมทริกซ์ประชิด

9. ให้ความหมายของการอนุรักษ์สายงาน

10. จงแสดงสมการอนุรักษ์สายงาน (หรือเงื่อนไข 1.2) ที่บัพ 2, 3 และ 4 ของข่ายงาน เมื่อ f_{ij} แทนสายงานที่ผ่านเส้นเชื่อม (i,j)



11. จากข่ายงานในข้อ 10. จงแสดงเมทริกซ์ประชิดของข่ายงาน
